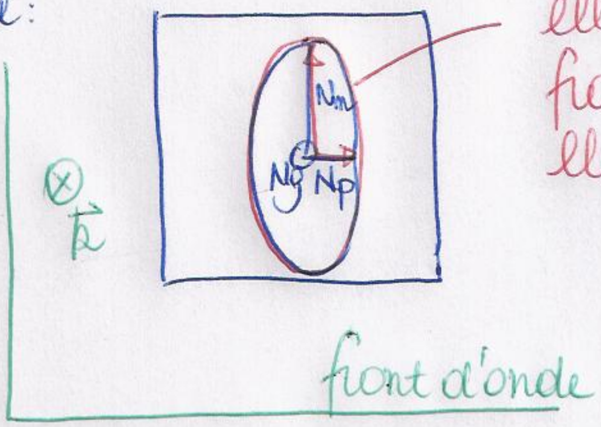
exercice 5

1°) La lame est taillée ⊥ment à N_g:

vue de face:



ellipse d'intersection du front d'onde et de l'ellipsoïde: ellipse (N_p, N_m)

↓

les états-P ⊥ issus de la biréfringence sont associés aux indices N_p et N_m.

↳ on a alors: $\delta = (N_m - N_p)e$

auquel on associe le déphasage $\Delta\varphi = k.\delta$

↳ $2\pi/\lambda$

⇒ teinte rouge-violacé 2° ordre; échelle des teintes:

$\delta = 1101$ nm.

Alors $\boxed{e = \dfrac{\delta}{N_m - N_p}}$ 0,1 mm.

2°) On a montré (à savoir faire) que:

$$\tan V = \frac{N_g}{N_p}\sqrt{\frac{N_m^2 - N_p^2}{N_g^2 - N_m^2}}$$

↳ $V = 46{,}6°$ ⇒ $2V = 92{,}2°$.

3°) On refait le schéma de la lame vue de face.

→ Si la lame est taillée ⊥ment à (N_m), les états-φ sont associés aux indices N_p et N_g.

Alors $\delta = (N_g - N_p)e$, auquel on associe le déphasage $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$.

⇒ Pour $\Delta\varphi$ quelconque, les états-φ recomposent à la sortie de la lame une polarisation elliptique.

Mais, lorsque $\Delta\varphi = 2m\pi$, on est dans un cas de lame-onde où les états-φ sortent en phase de la lame et recomposent une pol. linéaire avec :

$$\underbrace{\vec{E}_{sortant} \parallel \vec{E}_{entrant} \parallel P \perp A}_{\vec{E}_{sortant} \perp A}$$

$\vec{E}_{sortant} \perp A$: cannelures noires.

Les λ / on a une cannelure noire sont :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}(N_g - N_p)e = 2m\pi}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{(N_g - N_p)e}{m}}$$

On remarque que lorsque $m \nearrow$, $\lambda \searrow$.

On calcule alors le m_{max} associé au λ_{min} :

$$m_{max} = \frac{(N_g - N_p)e}{\lambda_{min}} = 10{,}5 \text{ soit } 10.$$

On calcule alors le m_{min} associé au λ_{max} :

$$m_{min} = \frac{(N_g - N_p)e}{\lambda_{max}} = 5{,}6 \text{ soit } 6.$$

On a alors les λ des cannelures noires :

avec $\lambda = \frac{(N_g - N_p)e}{m}$

m	λ (µm)
6	0,7
7	0,6
8	0,525
9	0,4666
10	0,42.

Exercice 6

1°) Lame taillée ⊥ment à (N_p)

schéma de la lame vue de face

---→ les états-P sont associés à N_m et N_g.

On a alors la différence de marche :

$$\delta = (N_g - N_m)e$$

associée au déphasage $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$.

⇒ teinte sensible (TS) du 1° ordre :

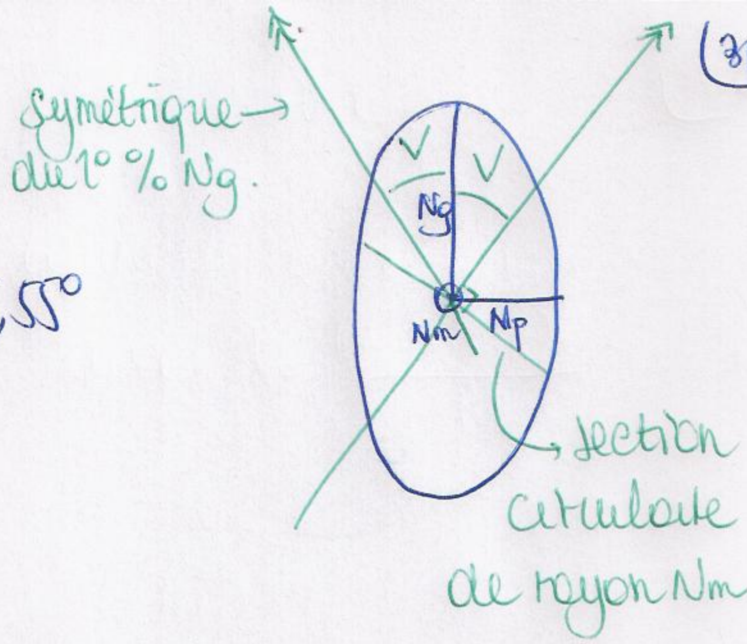
échelle des teintes : $\delta = 560\,nm$

D'où : $\boxed{e = \frac{\delta}{N_g - N_m}}$ 37,3 µm.

2°) On a montré que :

$$\tan V = \frac{N_g}{N_p}\sqrt{\frac{N_m^2 - N_p^2}{N_g^2 - N_m^2}}$$

$\hookrightarrow V = 52{,}77° \rightarrow 2V = 105{,}55°$



exercice 7

On veut : $\delta = 2 \times 560 = 1120$ nm

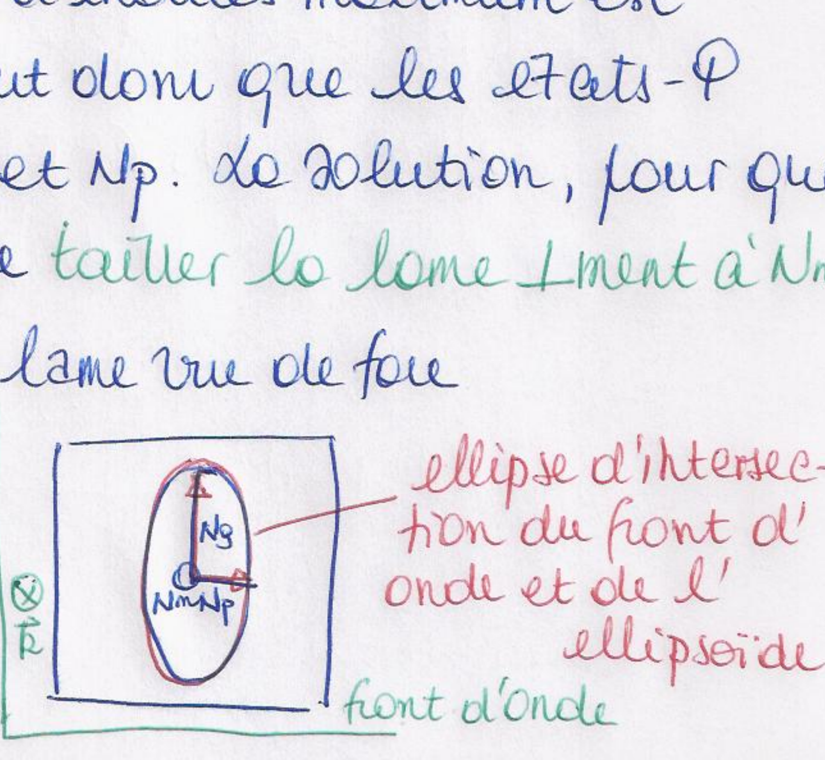
ordre 2 (pour le 2) ; teinte sensible (pour le 560)

1°) Quelle que soit la lame, on a toujours :

$\delta = \Delta n . e$ où $\Delta n = n_2 - n_1$ est la diff. d'indices associés aux états-P

Comme δ est ici fixé, si e est minimum, alors c'est que Δn est maximum. Or, dans un milieu biaxe, la différence d'indices maximum est $\Delta n_{max} = N_g - N_p$. Il faut donc que les états-P soient associés à N_g et N_p. La solution, pour que ce soit le cas, est de tailler la lame $\perp$ment à N_m

On a bien alors : lame vue de face



2°) On a alors : $d = (N_g - N_p)e$

$$\hookrightarrow \boxed{e = \frac{d}{N_g - N_p}} \; 86{,}15\ \mu m.$$

3°) Une lame est quart d'onde si le déphasage $\Delta\varphi = kd$ des états-P à la sortie de la lame est $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + m\pi$.

Soit : $\underbrace{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(N_g - N_p)e = (m + 1/2)\pi}$

$$\boxed{\lambda = \frac{2(N_g - N_p)e}{m + 1/2}}$$

On remarque que lorsque $\lambda \uparrow$, $m \downarrow$.

On calcule alors m_{max} associé à λ_{min} :

$$m_{max} = \frac{2(N_g - N_p)e}{\lambda_{min}} - \frac{1}{2} = 5{,}1 \text{ soit } 5.$$

On calcule alors m_{min} associé à λ_{max} :

$$m_{min} = \frac{2(N_g - N_p)e}{\lambda_{max}} - \frac{1}{2} = 2{,}7 \text{ soit } 3.$$

On a alors les $\lambda = \frac{2(N_g - N_p)e}{m + 1/2}$ pour lesquelles la lame est 1/4 d'onde :

m	λ(nm)
3	640
4	497,8
5	407,3.

4°) En fait, lorsque α (angle entre P et A et les lignes neutres) $= \frac{\pi}{4}$, on sait qu'une lame $\frac{1}{4}$ onde transforme une polarisation linéaire incidente en polarisation circulaire.

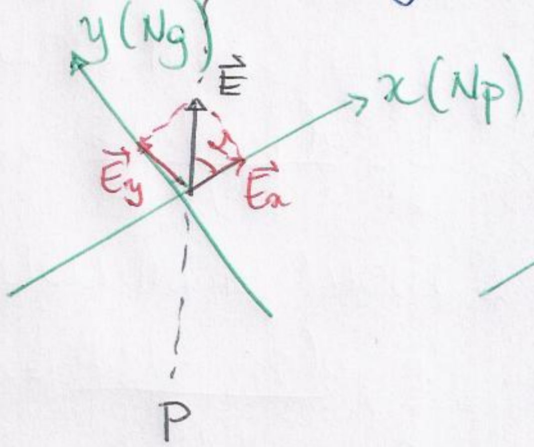
Mais profitons de cette question pour redémontrer qu'en général, la polarisation sortante est elliptique.

* Après P, la polarisation est linéaire :

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\, \hat{p}$$

↳ dir. de trans. de P

* Dans la lame, biréfringence :



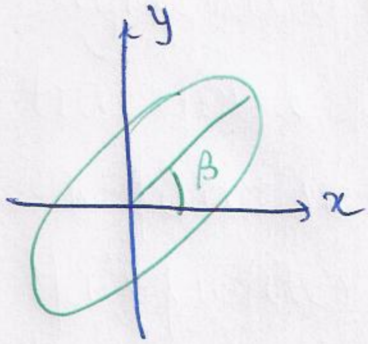
lignes neutres

A la sortie de la lame :

$$\begin{cases} \vec{E}_x = \underbrace{E_0 \cos\alpha}_{E_{0x}} \cos(k\overbrace{N_p e}^{LCO} - \omega t)\,\hat{x} & (1) \\ \vec{E}_y = \underbrace{E_0 \sin\alpha}_{E_{0y}} \cos(k N_g e - \omega t)\,\hat{y} & (2) \end{cases}$$

Après la lame, ces états-P voyagent à la même vitesse et recomposent une polarisation elliptique si :

E_x et E_y vérifient une éq. du type:



$$\overset{E_x^2}{\frac{x^2}{a^2}}+\overset{E_y^2}{\frac{y^2}{b^2}}+\overset{E_xE_y}{xy}\tan(2\beta)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=1$$

De (1) : $\dfrac{E_x}{E_{0x}}=\cos(\underbrace{kN_p e-\omega t}_{\varphi_1})$ $(*)$

De (2) : $\dfrac{E_y}{E_{0y}}=\cos(kN_g e-\omega t)$

$$=\cos(\underbrace{kN_p e-\omega t}_{\varphi_1}+\overbrace{\underbrace{k(N_g-N_p)e}_{\Delta\varphi}}^{\delta})$$

On utilise $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$$=\underbrace{\cos\varphi_1}_{(*):\ \frac{E_x}{E_{0x}}}\cos\Delta\varphi-\underbrace{\sin\varphi_1}_{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1}\overset{(*)}{=}\sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2}}\sin\Delta\varphi$$

$$\hookrightarrow\left(\frac{E_y}{E_{0y}}-\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\Delta\varphi\right)=-\sqrt{1-\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}}\sin\Delta\varphi$$

au carré $\hookrightarrow$ $$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2}+\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}\cos^2\Delta\varphi-2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi-\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}\sin^2\Delta\varphi$$

$$\hookrightarrow\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}+\frac{E_y^2}{E_{0y}^2}-2\frac{E_xE_y}{E_{0y}E_{0x}}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi$$

$$\hookrightarrow\frac{E_x^2}{(E_{0x}\sin\Delta\varphi)^2}+\frac{(E_y)^2}{(E_{0y}\sin\Delta\varphi)^2}-2\frac{E_xE_y}{E_{0x}E_{0y}\sin^2\Delta\varphi}\cos\Delta\varphi=1$$

$\Rightarrow$ E_x et E_y vérifient bien l'éq. d'une ellipse

avec : $\begin{cases} a = E_{0x} \sin \Delta\varphi \\ b = E_{0y} \sin \Delta\varphi \\ \tan(2\beta)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{-2\cos\Delta\varphi}{E_{0x}E_{0y}\sin^2\Delta\varphi} \end{cases}$ (**)

Donc $\vec{E}$ est bien polarisé elliptiquement à la sortie de la lame.

On trouve l'orientation β de la polarisation elliptique par rapport aux lignes neutres avec (**), en remplaçant a et b par leurs expressions :

$$\tan(2\beta)\left(\frac{1}{E_{0x}^2 \cancel{\sin^2\Delta\varphi}} - \frac{1}{E_{0y}^2 \cancel{\sin^2\Delta\varphi}}\right) = \frac{-2\cos\Delta\varphi}{E_{0x}E_{0y}\cancel{\sin^2\Delta\varphi}}$$

$$\hookrightarrow \tan(2\beta)\left(\frac{E_{0y}^2 - E_{0x}^2}{E_{0x}^{\cancel{2}} E_{0y}^{\cancel{2}}}\right) = \frac{-2\cos\Delta\varphi}{\cancel{E_{0x}E_{0y}}}$$

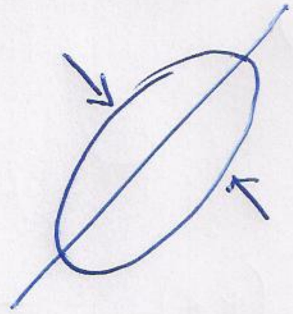
$$\hookrightarrow \tan(2\beta) = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}\cos\Delta\varphi$$

or $\begin{cases} E_{0x} = E_0 \cos\alpha \\ E_{0y} = E_0 \sin\alpha \end{cases}$

$$\hookrightarrow \tan(2\beta) = \frac{\overbrace{2\cancel{E_0^2}\sin\alpha\cos\alpha}^{\sin 2\alpha}}{\cancel{E_0^2}\underbrace{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}_{\cos 2\alpha}}\cos\Delta\varphi$$

$$\hookrightarrow \boxed{\tan(2\beta) = \tan(2\alpha)\cdot\cos\Delta\varphi}$$

Les cas de pol linéaire et circulaire sont des cas particuliers de pol elliptique :



* si $\Delta\varphi = 2m\pi$, cas de lame-onde

$$\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos\varphi_1 \\ E_y = E_{0y}\cos(\varphi_1 + \underbrace{\Delta\varphi}_{2m\pi}) \end{cases}$$

(cas part de $\varepsilon = m\pi$ du chap. 2)

↳ pol. linéaire

et $\tan 2\beta = \tan 2\alpha . \underbrace{\cos 2m\pi}_{1} \longleftrightarrow \underbrace{\beta = \alpha}_{\vec{E}_{sortant} \,//\, \vec{E}_{entrant}}$

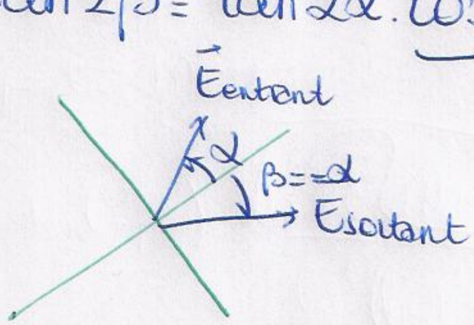
* si $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, cas de lame 1/2 onde

$$\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos\varphi_1 \\ E_y = E_{0y}\cos(\varphi_1 + \underbrace{\Delta\varphi}_{(2m+1)\pi}) \end{cases}$$

(cas impair de $\varepsilon = m\pi$)

↳ pol. linéaire

et $\tan 2\beta = \tan 2\alpha . \underbrace{\cos(2m+1)\pi}_{-1} \longleftrightarrow \underbrace{\beta = -\alpha}$



$\vec{E}_{sortant}$ symétrique de $\vec{E}_{entrant}$ % aux lignes neutres

Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\vec{E}_{sortant} \perp \vec{E}_{entrant}$.

* si $\Delta\varphi = \left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right)$, cas de lame $\frac{1}{4}$-onde

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos\varphi_1 \\ E_y = E_{0y} \cos(\varphi_1 + \underbrace{\Delta\varphi}_{\frac{\pi}{2}+m\pi}) = \pm E_{0y} \sin\varphi_1 \end{cases}$$

↳ pol. elliptique (si $E_{0x} \neq E_{0y}$) avec :

$$\tan(2\beta) = \tan(2\alpha) \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right)}_{0} \leftrightarrow \underbrace{\beta = 0}$$

pol. elliptique alignée sur les lignes neutres

si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $E_{0x} = E_{0y}$

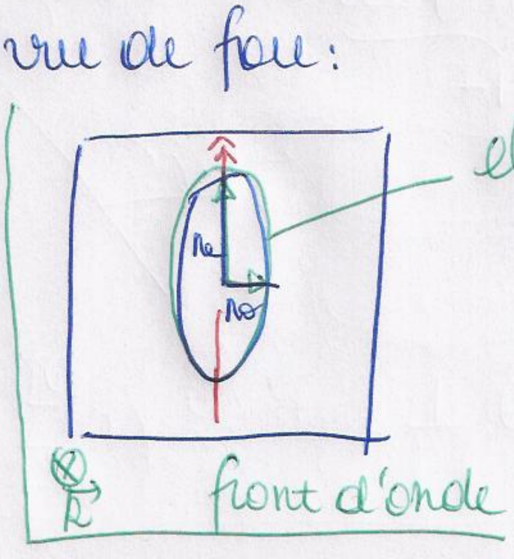
puisque $E_{0x} = E_0 \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\sqrt{2}/2}$, $E_{0y} = E_0 \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\sqrt{2}/2}$

↳ pol. circulaire.

<u>exercice 8</u>

La lame est taillée //ment à l'axe optique. Or dans un milieu uniaxe, l'axe optique est // à n_e :

lame vue de face :



ellipse d'intersection : ellipse (n_o, n_e)

↳ les états-P sont associés à n_o et n_e, et

$$\delta = (n_o - n_e)e$$ (écrit de façon à ce que $\delta > 0$).

La teinte est jaune-verdâtre en $P \perp A$; échelle des teintes : $\delta = 866\,nm$ (2° ordre)

ou

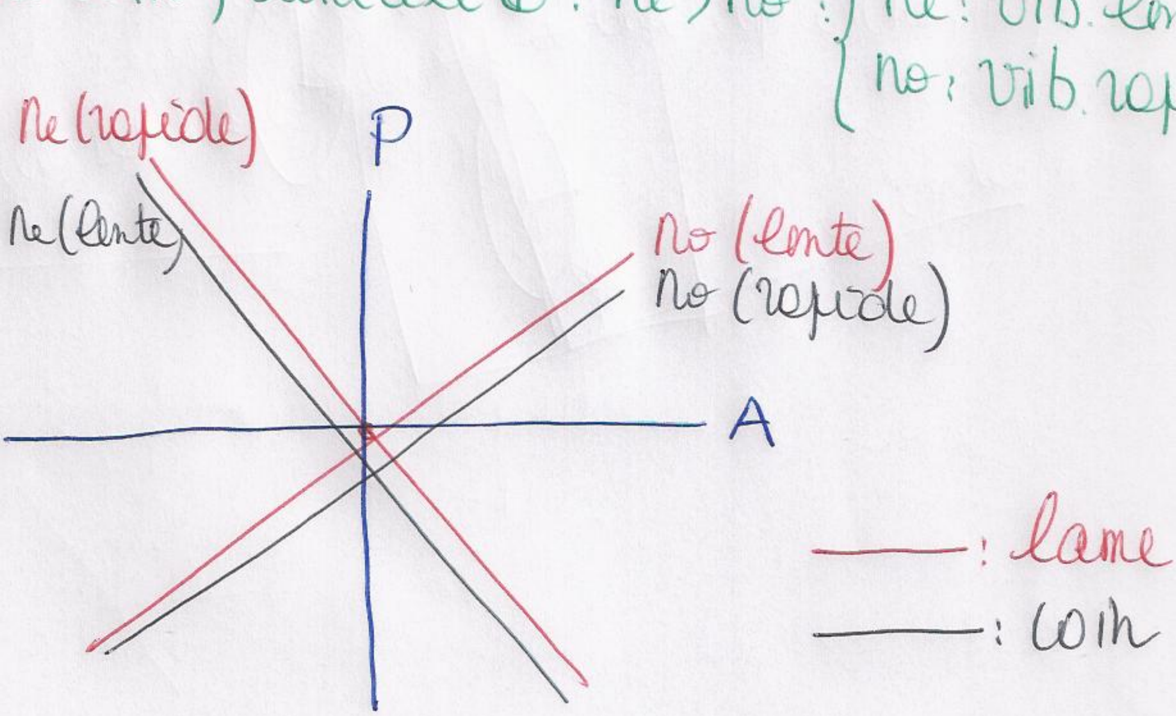
$\delta = 1426\,nm$ (3° ordre)

1°) Pour qu'il y ait compensation, il faut opposer vibrations lentes et rapides entre lame et coin.

Dans la lame : $\begin{cases} n_o : \text{vibration lente} \\ n_e : \text{vibration rapide} \end{cases}$

Dans le coin, uniaxe ⊕ : $n_e > n_o$: $\begin{cases} n_e : \text{vib. lente} \\ n_o : \text{vib. rapide} \end{cases}$

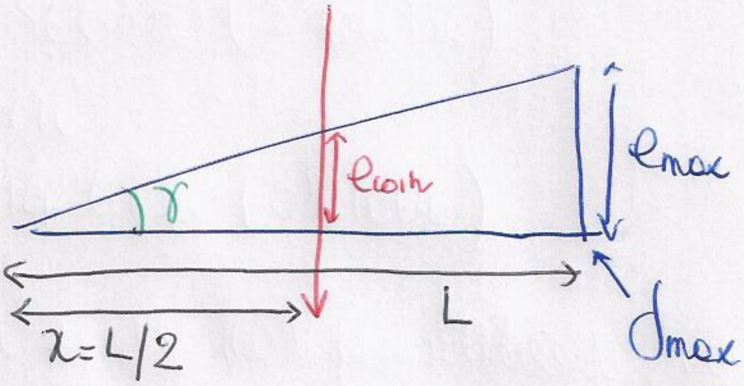
Donc :



On a alors : $\delta_{total} = \delta_{lame} - \delta_{coin}$, et comme $\delta_{coin} = \Delta n_{coin}\, e_{coin}$ avec e_{coin} variable, on peut avoir $\delta_{coin} = \delta_{lame}$, soit $\delta_{total} = 0$: teinte noire en P⊥A (qui ne se répète jamais).

2°) On a compensation lorsque :

vue de côté :



On sait que $\delta_{max} = \Delta n_{coin} . e_{max} = 5 \times 560$ nm

Or $\tan\gamma = \frac{e_{max}}{L} \leftrightarrow e_{max} = L \tan\gamma$.

$\delta_{max} = \Delta n_{coin} L \tan\gamma$. (1)

On a compensation lorsque $\delta_{coin} = \delta_{lame}$ lors de l'enfoncement de x du coin :

$\delta_{coin} = \Delta n_{coin} \underbrace{e_{coin}}$

$\tan\gamma = \frac{e_{coin}}{x} \leftrightarrow e_{coin} = x \tan\gamma$

$\delta_{lame} = \Delta n_{coin} x \tan\gamma$. (2)

Alors $\frac{(2)}{(1)}$: $\boxed{\frac{\delta_{lame}}{\delta_{max}} = \frac{x}{L}}$

Ici, $x = \frac{L}{2}$; d'où : $\frac{\delta_{lame}}{\delta_{max}} = \frac{1}{2}$

$$d_{lame} = \frac{d_{max}}{2} \leftarrow 5 \times 560\,nm = 2800\,nm$$

$$= 1400\,nm$$: 3° ordre car

$2 \times 560 < d \leq 3 \times 560\,nm$

On obtient l'épaisseur par :

$$d_{lame} = (n_o - n_e)e$$

$$\hookrightarrow \boxed{e = \frac{d_{lame}}{n_o - n_e}}\ 8{,}14\ \mu m.$$