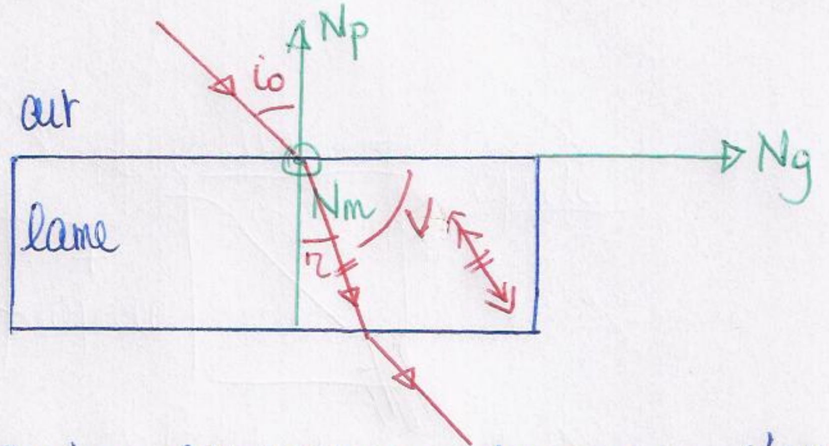
exercice 1

Le plan (001) est le plan (N_m, N_g). La lame est // à ce plan, elle est donc taillée ⊥ment à N_p.

1°) Le plan d'incidence est (100), soit le plan (N_p, N_g).

Donc :



S'il n'y a qu'un seul rayon émergent, c'est que le cristal n'est plus biréfringent. Cela indique que dans la lame, la direction de propagation $\vec{k}$ de l'onde coïncide avec un des axes optiques du cristal biaxe. En effet, autour d'un axe optique, l'indice est cst et vaut N_m (les 2 états-P sont alors associés au m̄ indice N_m, voyagent à la m̄ vitesse, et recomposent à tt instant le champ $\vec{E}$ initial). Tout se passe donc comme si le cristal était un milieu isotrope d'indice N_m.

On peut donc appliquer Snell-Descartes au rayon :

$$\sin i_0 = N_m . \sin r$$

↳ $r = 37,18°$.

Mais r est l'angle entre l'axe optique (le rayon) et N_p.

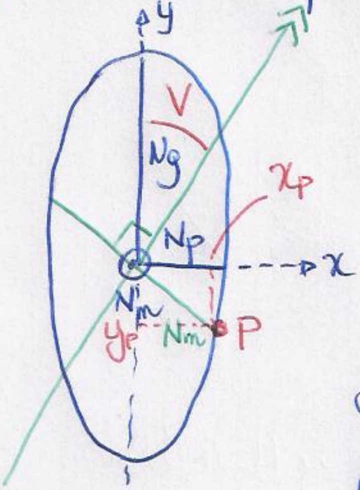
Or V est l'angle entre l'axe optique et N_g. Ici,

$$V = \frac{\pi}{2} - r$$

Soit en degrés, $V = 52,82°$.

! Il y a une erreur dans l'énoncé : la normale à la lame est N_p, V n'est donc pas l'angle entre la normale et l'axe optique !

2°) Soit l'ellipsoïde :



Pour une certaine inclinaison, j'obtiens une section circulaire de rayon N_m. L'axe ⊥ à cette section est alors un axe optique.

Soit P intersection de la section circulaire de rayon N_m et de l'ellipse (N_g, N_g).

$$\tan V = \frac{y_P}{x_P}.$$

Il faut trouver x_P et y_P en fonction des indices principaux

- $P \in$ section circulaire de rayon N_m :

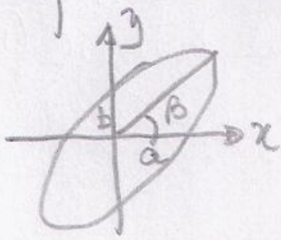
$$x_P^2 + y_P^2 = N_m^2 \quad (1)$$

(éq. d'un cercle de rayon R : $x^2+y^2=R^2$

- $P \in$ ellipse (N_p, N_g) :

$$\frac{x_P^2}{N_p^2} + \frac{y_P^2}{N_g^2} = 1 \quad (2)$$

éq. d'un ellipse :



ici $\beta = 0$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \cancel{xy\tan 2\beta\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)} = 1.$$

$$(1) \rightarrow \quad x_P^2 = N_m^2 - y_P^2 \quad (3)$$

$$(2) \quad \frac{N_m^2 - y_P^2}{N_p^2} + \frac{y_P^2}{N_g^2} = 1$$

$$y_P^2\left(-\frac{1}{N_p^2} + \frac{1}{N_g^2}\right) = 1 - \frac{N_m^2}{N_p^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_P^2\left(\frac{-N_g^2+N_p^2}{\cancel{N_p^2}N_g^2}\right)=\frac{N_p^2-N_m^2}{\cancel{N_p^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_P = N_g\sqrt{\frac{N_m^2-N_p^2}{N_g^2-N_p^2}}.$$

On reporte dans (3),

$$x_P^2 = N_m^2 - N_g^2\,\frac{N_m^2-N_p^2}{N_g^2-N_p^2}$$

$$= \frac{\cancel{N_m^2N_g^2} - N_m^2N_p^2 - \cancel{N_g^2N_m^2} + N_g^2N_p^2}{N_g^2-N_p^2}$$

$$= N_p^2\,\frac{N_g^2-N_m^2}{N_g^2-N_p^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_P = N_p\sqrt{\frac{N_g^2-N_m^2}{N_g^2-N_p^2}}$$

Et donc $\tan V = \dfrac{N_g}{N_p}\sqrt{\dfrac{N_m^2-N_p^2}{N_g^2-N_m^2}}.$

Nous ne redémontrerons plus cette formule (cours+TD) : à savoir faire !

On cherche N_g :

$$\tan^2 V = \frac{N_g^2}{N_p^2}\left(\frac{N_m^2-N_p^2}{N_g^2-N_m^2}\right)$$

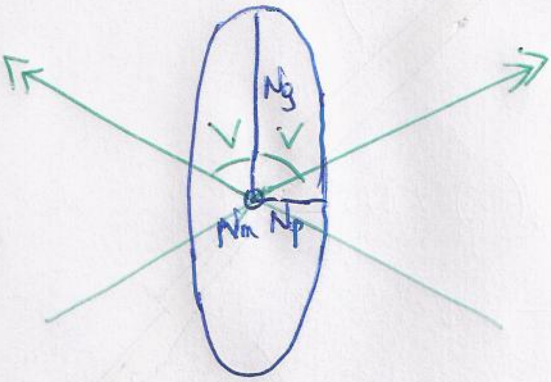
$$\Leftrightarrow \quad N_p^2(N_g^2-N_m^2)\tan^2 V = N_g^2(N_m^2-N_p^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad -N_p^2N_m^2\tan^2 V = N_g^2\left[N_m^2-N_p^2(1+\tan^2 V)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad N_g = \frac{N_pN_m\tan V}{\sqrt{N_p^2(1+\tan^2 V)-N_m^2}}$$

A.N. : $N_g = 1{,}570$ (on vérifie que $N_g > N_m$).

Note : On a $V = 52{,}82° > 45°$:



Np est alors la bissectrice de l'angle aigu formé par les axes optiques ⇒ biaxe ⊖

(à rédiger aussi)

Exercice 2

1°) On vient de montrer que $\tan V = \frac{N_g}{N_p}\frac{\sqrt{N_m^2 - N_p^2}}{\sqrt{N_g^2 - N_m^2}}$

↳ $V = 85{,}9°$

Angle entre les axes optiques : $2V = 171{,}9°$.

2°) $V > 45°$: l'axe (N_p) est alors la bissectrice de l'angle aigu formé par les axes optiques ⇒ biaxe ⊖.

3°) Il est énoncé que l'axe $(N_m) \perp (010)$ et que la face d'entrée de la lame est // (010) : la lame est donc taillée ⊥ment à (N_m).

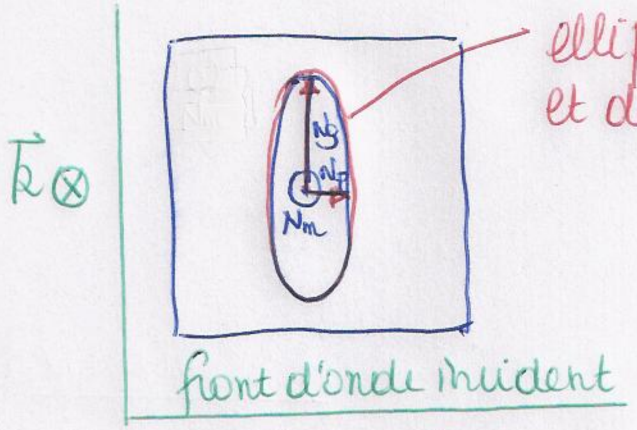
La lame est placée entre $P \perp A$ et l'angle α entre P et les lignes neutres est $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad.

La lame est éclairée sous incidence normale par une radiation monochromatique avec $\lambda = 0{,}5$ µm.

On demande I sortant du montage : démonstration de I du microscope.

Avant toute chose, il faut trouver les indices associés aux 2 états-Φ issus de la biréfringence dans la lame.

lame vue de face :



Les états-Φ sont les 1/2 gd-axes de l'ellipse d'intersection. Les indices qui leur sont associés sont les longueurs des 1/2 gd axes. Alors, on a ici $n_1 = N_p$ et $n_2 = N_g$.

(il faudra tjs justifier ainsi les indices associés aux états-Φ)

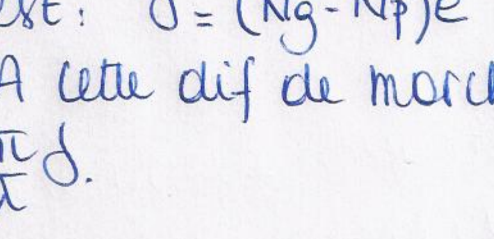
La différence de marche associée à la traversée de la lame d'épaisseur e est : $\delta = (N_g - N_p)e$ (on écrit δ de façon à ce que $\delta > 0$). A cette dif de marche, on associe le déphasage $\Delta\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$.

début standard des exercices

Démo de I :

* Après P : $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{p}$ où $\hat{p}$ est la dir. de trans. de P.

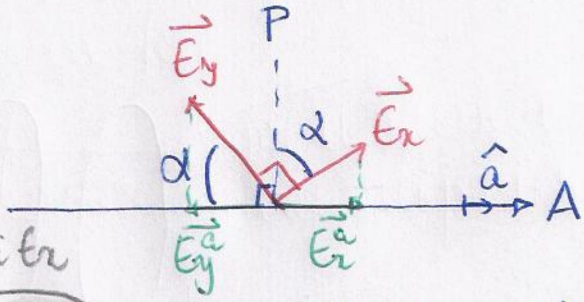
* Biréfringence dans la lame :



A la sortie de la lame : $\begin{cases} \vec{E_x} = \underbrace{E_0 \cos\alpha}_{\text{proj de E sur x}} \cos(\overbrace{kN_p e}^{LCO_1} - \omega t)\hat{x} \\ \vec{E_y} = \underbrace{E_0 \sin\alpha}_{\text{sur y}} \cos(\underbrace{kN_g e}_{LCO_2} - \omega t)\hat{y} \end{cases}$

$\vec{E_x}$ et $\vec{E_y}$ n'interfèrent pas car ils sont $\perp$.

* Passage à $A \perp P$.



$$\begin{cases} \vec{E_x^a} = \overbrace{\underbrace{E_0 \cos\alpha . \sin\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha \text{ car } \sin 2x = 2\sin x \cos x}}^{\text{ampli } Ex} . \cos(kN_p e - \omega t)\hat{a} \\ \vec{E_y^a} = - \underbrace{E_0 \sin\alpha}_{\text{ampli } Ey} \cos\alpha \cos(kN_g e - \omega t)\hat{a} = -\frac{E_0}{2}\sin 2\alpha \cos(kN_g e - \omega t)\hat{a} \end{cases}$$

Les champs interfèrent.

On a le champ total: $(\vec{E}) = (\vec{E_x^a} + \vec{E_y^a})$

associé à l'intensité : $I = \frac{1}{\mu_0 c}\langle \vec{E}^2 \rangle_t$

$\hookrightarrow I = \frac{1}{\mu_0 c}\left\{ \langle \vec{E_x^a}^2 \rangle_t + \langle \vec{E_y^a}^2 \rangle_t + 2\langle \vec{E_x^a} . \vec{E_y^a} \rangle_t \right\}$

Dans les 3 termes, on a $\hat{a}.\hat{a} = 1$

$\hookrightarrow I = \frac{1}{\mu_0 c}\left\{ \langle E_x^{a2} \rangle_t + \langle E_y^{a2} \rangle_t + 2\langle E_1^a . E_2^a \rangle_t \right\}$

$$= \frac{E_0^2}{4\mu_0 c}\left\{ \underbrace{\langle \cos^2(kN_p e - \omega t) \rangle_t}_{1/2} + \underbrace{\langle \cos^2(kN_g e - \omega t) \rangle_t}_{1/2} - 2\langle \cos(\underbrace{kN_p e - \omega t}_{b}) . \cos(\underbrace{kN_g e - \omega t}_{a}) \rangle_t \right\} \sin^2 2\alpha$$

on utilise $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

$$= \frac{E_0^2 \sin^2 2\alpha}{4\mu_0 c}\left\{ 1 - \underbrace{\langle \cos[k(N_p + N_g)e - 2\omega t] \rangle_t}_{0} - \underbrace{\langle \cos k(N_g - N_p)e \rangle}_{\cos k(N_g - N_p)e}\right.$$

$$= \frac{E_0^2}{4\mu_0 c}\left(1-\cos \underbrace{\underbrace{k(N_g-N_p)e}_{\delta}}_{\Delta\varphi}\right)\sin^2 2\alpha .$$

Après P, l'intensité I_0 de l'onde est :

$$I = \frac{1}{\mu_0 c}\left\langle E_0^2\cos^2(kz-\omega t)\right\rangle_t = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}.$$

D'où :

$$\boxed{I = \frac{I_0}{2}\sin^2 2\alpha\left[1-\cos k(N_g-N_p)e\right]}$$

Ici $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad si bien que $\sin^2 2\alpha = 1$ (on maximise aussi globalement I) :

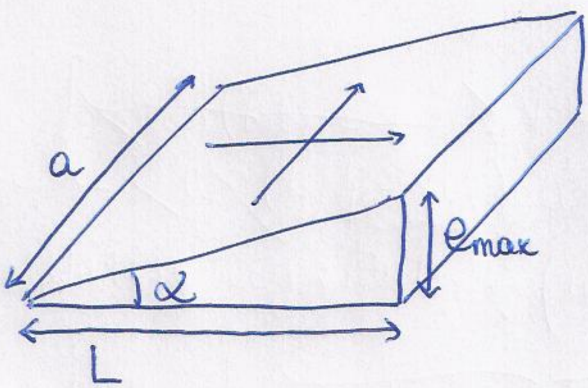
$$I = \frac{I_0}{2}\left(1-\cos k(N_g-N_p)e\right).$$

A.N. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

! attention $k(N_g-N_p)e$ en radians !

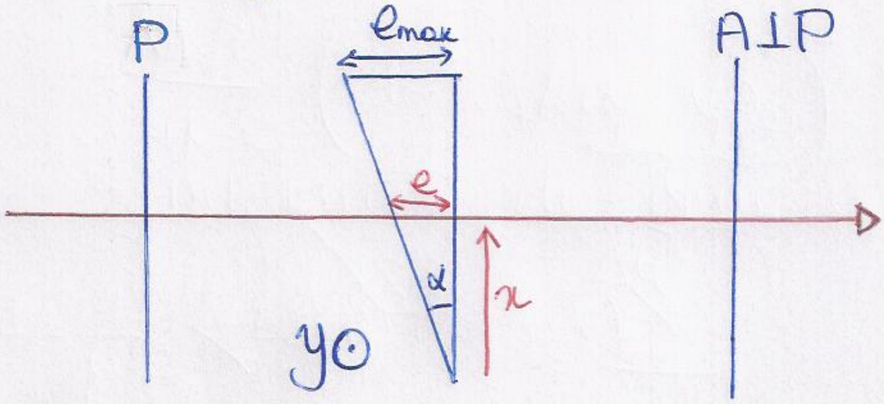
↳ $I = 0{,}345\, I_0$ soit 34,5% de l'intensité transmise.

<u>exercice 3</u>

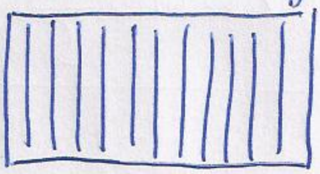


a) On a : $\tan\alpha = \frac{e_{max}}{L}$, soit $\alpha = 6{,}9.10^{-3}$ rad.

2°) On a le montage :



Il apparaît après A un système de franges sombres et brillantes :



mais ≠ d'un spectre cannelé puisque λ fixe.

Comment comprendre cela ?

La lumière traverse le montage à x variable (entre 0 et L), ce qui correspondant à une épaisseur e de coin traversée variable, entre 0 et e_{max}.

A une épaisseur e donnée, les 2 états-P issus de la biréfringence dans le coin donnent une dif. de marche :

$$\delta = \Delta n . e$$

que l'on associe au déphasage $\Delta\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n \underset{\text{e varie}}{e}$.

A la sortie de la lame (coin avec e donnée), les états-P recomposent généralement une pol. elliptique.

Mais, si e est tel que $\Delta\varphi = 2m\pi$, les états-P sortent en phase de la lame et recomposent une pol. linéaire.

On est dans un cas de lame-onde avec :

$$\underbrace{\vec{E}_{sortant} \,//\, \vec{E}_{entrant} \,//\, P \perp A}_{\vec{E}_{sortant} \perp A} $$

$\vec{E}_{sortant} \perp A$: extinction, frange sombre

De plus, si e est tel que $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, comme $\alpha = \frac{\pi}{4}$, les états-φ sortent en opposition de phase de la lame et recomposent une pol. linéaire avec :

$$\underbrace{\underbrace{\vec{E}_{sortant} \perp \vec{E}_{entrant}}_{\text{car } \alpha = \pi/4} \ /\!/ P \perp A}$$

$\vec{E}_{sortant} \ /\!/ A$: transmission maximale, frange brillante.

On est alors dans un cas de lame 1/2-onde.

<u>Orientation des franges</u>: δ, et donc $\Delta\varphi$, ne dépendent que de e, qui à son tour ne dépend que de x. La coordonnée transverse y, // à l'arête du coin, n'apparaît jamais. On a alors tjs la m̂ chose $\forall y$: les franges sont donc // à l'arête a du coin.

3°) On a déjà établi :

→ qu'une frange noire (sombre) correspond à :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \underbrace{\Delta n e}_{\delta} = 2m\pi$$

$$\hookrightarrow \quad e = m\frac{\lambda}{\Delta n}$$

→ qu'une frange brillante est associée à :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n e = (2m+1)\pi$$

$$\hookrightarrow \quad e = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\Delta n}.$$

4°) Pour la frange brillante d'ordre p :

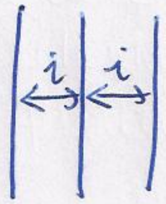
$$e = \left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\Delta n}$$

Or (voir schéma) : $\tan\alpha = \dfrac{e}{x} \leftrightarrow e = x\tan\alpha$

$$\hookrightarrow x = \left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\Delta n . \tan\alpha}$$

5°) L'interfrange i est défini comme :

$$i = (x_{max})_{p+1} - (x_{max})_p = \frac{\lambda}{\Delta n \tan\alpha}$$



Nombre de franges / $\overbrace{\text{unité de longueur}}^{\text{le mètre}}$:

$$N = \underbrace{\frac{1}{i}}_{\text{nbre d'interfranges}} + 1 = \frac{\Delta n . \tan\alpha}{\lambda} + 1 .$$

6°) De la dernière relation, on déduit :

$$N = \frac{\Delta n \tan\alpha}{\lambda} + 1$$

$$\hookrightarrow \Delta n = (N-1)\frac{\lambda}{\tan\alpha} .$$

7°) Attention : N est le nbre de franges / mètre.

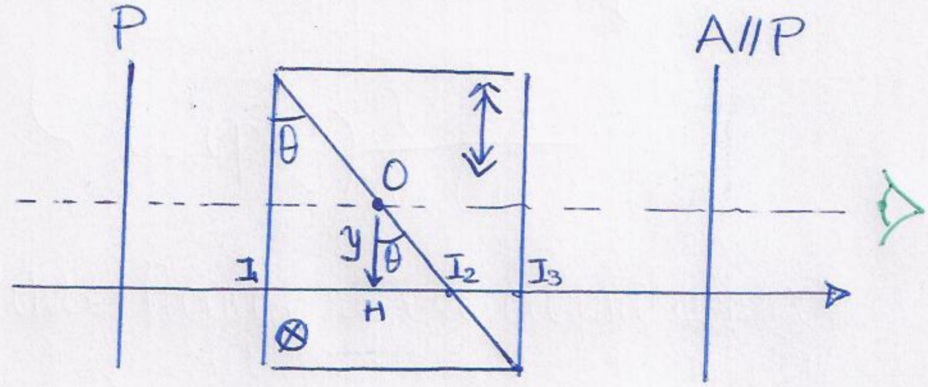
$\hookrightarrow N = 2500$ franges / m.

A.N. : $\Delta n = 0{,}213$.

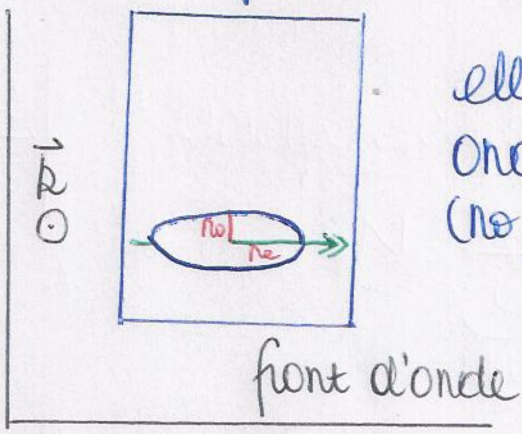
<u>exercice 4</u>

On a 2 prismes accolés placés entre P // A.

1°) a) Il faut trouver les indices associés aux états-φ issus de la biréfringence dans chaque prisme.



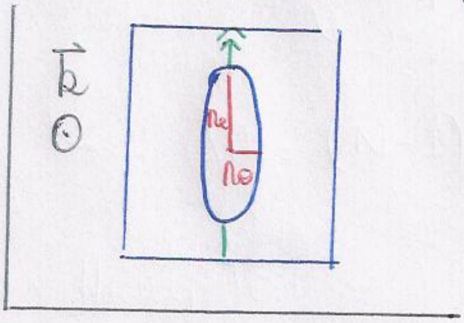
Premier prisme vu de face



ellipse d'intersection du front d'onde et de l'ellipsoïde : ellipse (n_o, n_e). On a donc :

- un état $\varphi \rightarrow$ associé à n_e
- un état $\varphi \uparrow$ —— n_o.

Dans le second prisme :



l'ellipse d'intersection est encore l'ellipse (n_o, n_e) mais

- état-$\varphi \longrightarrow$ associé à n_o.
- état-$\varphi \uparrow$ associé à n_e.

Calculons alors : $\delta = LCO_{\rightarrow} - LCO_{\uparrow}$ avec :

$$LCO_{\rightarrow} = n_e I_1 I_2 + n_o I_2 I_3$$

$$LCO_{\uparrow} = n_o I_1 I_2 + n_e I_2 I_3$$

$$\delta = (n_e - n_o)(I_1 I_2 - I_2 I_3)$$

et $I_1I_2 = I_1H + HI_2$
$I_2I_3 = HI_3 - HI_2$. De plus, $I_1H = HI_3$, si

bien que $I_1I_2 - I_2I_3 = 2HI_2$.

$\hookrightarrow \quad \delta = 2(n_e - n_o) HI_2$.

De plus, dans le triangle rectangle OHI_2 : $\tan\theta = \frac{HI_2}{y}$

$\hookrightarrow HI_2 = y\tan\theta$

D'où : $\boxed{\delta = 2(n_e - n_o)\, y \tan\theta}$

b) Comme dans l'exo précédent, λ est fixée mais δ, et donc $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$, dépendent de l'ordonnée y où la radiation traverse le système. A la sortie du biprisme, les états-φ voyagent à la m̃ vitesse et recomposent généralement une polarisation elliptique.

Mais si $\Delta\varphi = 2m\pi$, on est dans un cas de lame-onde où les états-φ sortent en phase de la lame et recomposent une polarisation linéaire avec :

$$\underbrace{\vec{E}_{entrant} \,//\, \vec{E}_{sortant} \,//\, P \,//\, A}_{\vec{E}_{sortant} \,//\, A}$$

$\vec{E}_{sortant} \,//\, A$: transmission maximale, soit frange brillante.

Si y est tel que $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, on est dans un cas de lame $1/2$-onde où les états-φ recomposent encore une polarisation linéaire. De plus, comme $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on a :

$\vec{E}_{sortant} \perp \vec{E}_{entrant} // P // A$

$\vec{E}_{sortant} \perp A$: extinction, soit frange sombre.

Ici encore, rien ne dépend de la coordonnée // à l'arête des prismes. On a donc des franges // à l'arête des coins

Au centre du champ, $y=0$

$\hookrightarrow \delta = 2(n_e - n_o)\, y \tan\theta = 0.$

$\hookrightarrow \Delta\varphi = k\delta = 0$: on est donc dans le cas de lame-onde avec $m=0$; la frange y est donc brillante.

c) Pour trouver l'interfrange i, il faut les positions y des franges brillantes.

Or on a la frange brillante d'ordre m si :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2(n_e - n_o)\, y \tan\theta = 2m\pi$$

$$\hookrightarrow \quad y = m \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)\tan\theta}$$

Alors $i = (y_{max})_{m+1} - (y_{max})_m$

$$= \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)\tan\theta}.$$

On aurait pu faire avec les franges sombres sachant que pour la frange sombre d'ordre m :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2(n_e - n_o) y \tan\theta = (2m+1)\pi$$

$$\hookrightarrow \quad y = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)\tan\theta}$$

Alors $i = (y_{min})_{m+1} - (y_{min})_m$

$$= \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)\tan\theta}$$ (identique au précédent comme attendu).

A.N: $i = 0{,}39$ mm.

2°) La lumière est maintenant blanche. Donc les variables dans $\Delta\varphi$ sont y et λ.

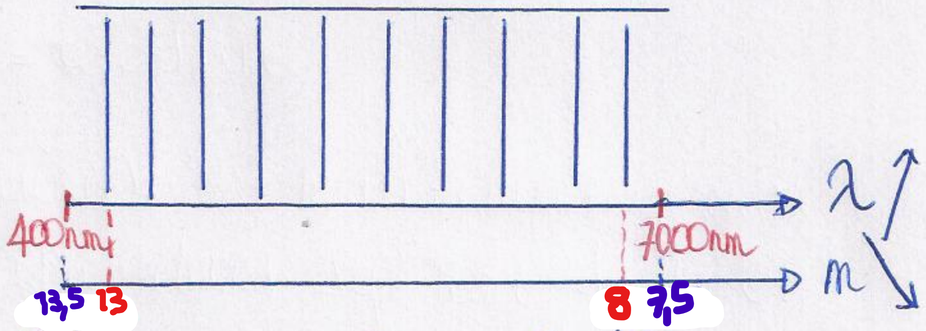
a) La frange centrale est celle définie par $\delta = 0$. On a alors $\Delta\varphi = 0$ $\forall \lambda$. Donc la lame est onde, avec $m = 0$, $\forall\lambda$. Or comme P//A, le cas de lame-onde correspond à une frange brillante. Donc la frange centrale est brillante $\forall \lambda$: elle apparaît blanche. Si on avait $P \perp A$, le cas de lame-onde serait associé à une frange sombre ; la frange centrale serait alors noire, comme au microscope avec $P \perp A$.

b) On fixe y à y_0. La seule variable dans $\Delta\varphi$ est alors λ. On se retrouve alors dans la situation du spectre cannelé où $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ avec δ fixe. $\delta = 2(n_e - n_o) y_0 \tan\theta$. Les radiations éteintes, non transmises, correspondent aux cas de lame 1/2-onde, puisque A//P. Soit :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2(n_e - n_o) y_o \tan\alpha = (2m+1)\pi$$

$$\lambda = \frac{2(n_e - n_o) y_o \tan\theta}{m + 1/2}.$$

On remarque que lorsque $m \searrow$, $\lambda \nearrow$.



On calcule alors m_{min} associé à λ_{max} :

inversion formule précédente : $m_{min} = \frac{2(n_e - n_o) y_o \tan\theta}{\lambda_{max}} - \frac{1}{2}$

$= 7{,}5$ soit 8

On calcule alors m_{max} associé à λ_{min} :

$$m_{max} = \frac{2(n_e - n_o) y_o \tan\theta}{\lambda_{min}} - \frac{1}{2}$$

$= 13{,}5$ soit 13.

Il y a donc $(m_{max} - m_{min}) + 1 = 6$ radiations éteintes.