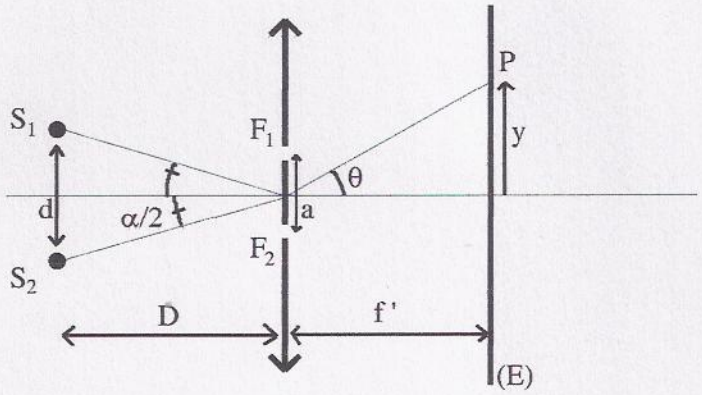
Interférences : Détermination de la distance angulaire entre les deux composantes d'une étoile double par le dispositif d'Young

Une étoile double est observée à l'aide d'une lunette astronomique assimilée à une lentille convergente de distance focale image f'. Les deux composantes de l'étoile double sont assimilées à deux sources ponctuelles S_1 et S_2 émettant des ondes monochromatiques <u>*incohérentes*</u> et de longueur d'onde λ=0.56µm. La distance angulaire α séparant les deux composantes est repérée par rapport au centre de la lentille. Pour déterminer α, on accole à cette lentille un écran opaque comportant deux fentes parallèles infiniment fines, *de même largeur*, et séparées d'une distance variable $a \gg \lambda$:

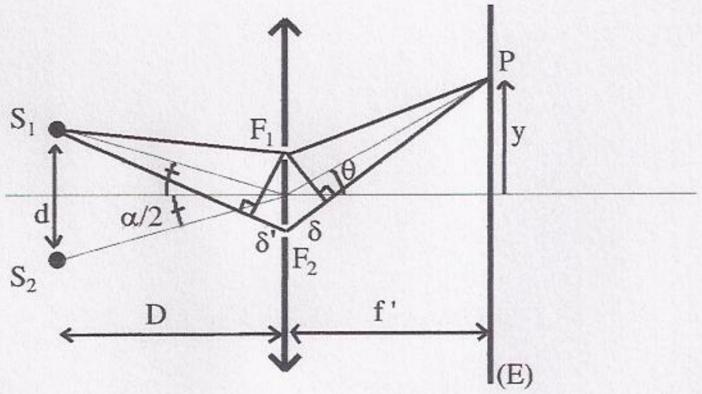


La distribution d'intensité est observée dans le plan focal de la lentille autour de l'axe de symétrie du système. Le point P d'observation est repéré sur l'écran (E) par la coordonnée y ou l'angle θ (voir schéma) avec $y \ll f'$. La distance a séparant les deux fentes est aussi très inférieure à f': $a \ll f'$.

On a bien entendu pour l'étoile double: $d \ll D$ et $a \ll D$ sachant que D est la distance étoile-Terre et d la distance séparant les deux composantes de l'étoile.

1) a) Est ce que les ondes émises par S_1 et S_2 interfèrent? Pourquoi?
   b) Décrire alors l'origine physique et la distribution d'intensité sur l'écran (E).

2) On veut déterminer la distribution d'intensité sur l'écran (E) due à la seule source S_1.



L'indice de réfraction est n=1 tant dans le milieu interstellaire que dans l'atmosphère.

a) Exprimer la différence de LCO δ acquise par les ondes issues de S_1 et passant par les fentes F_1 et F_2 aprés traversée des fentes, en fonction de a et θ.

b) Suivant la même procédure, exprimer la différence de LCO δ' acquise par ces mêmes ondes avant la traversée des fentes, en fonction de a et α. Comme α est très petit, on assimilera $\sin(\alpha/2)$ à $(\alpha/2)$.

c) Donner alors sans la démontrer la forme mathématique de l'intensité I_1 sur l'écran (E) due à la seule source S_1.

3) En suivant le même cheminement qu'au 2°) et en s'aidant d'un schéma, donner la forme mathématique de l'intensité I_2 sur l'écran (E) due à la seule source S_2.

4) On considère maintenant les deux sources S_1 et S_2 simultanément. Pour déterminer la distance angulaire α entre les deux composantes de l'étoile double, on fait varier la distance a séparant les deux fentes F_1 et F_2. Pour une certaine distance a, on obtient un brouillage complet de la figure d'interférences: les minima de I_1 correspondent alors aux maxima de I_2.

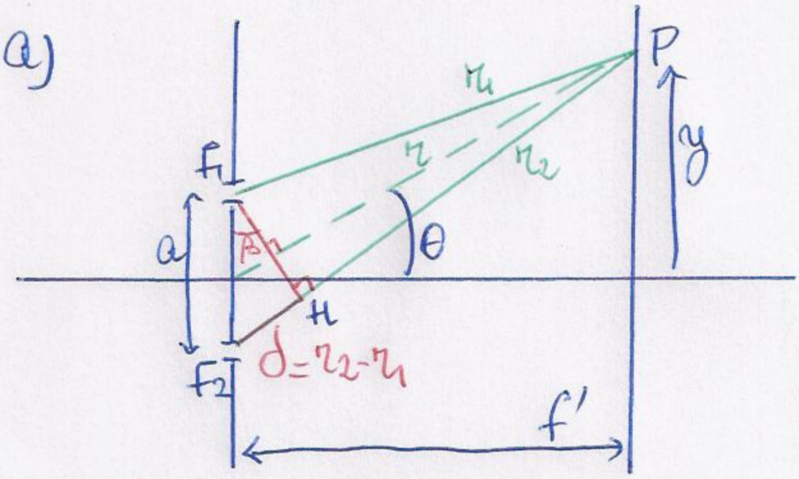
a) Donner en fonction de λ, a, f' et α les coordonnées des minima de I_1 et des maxima de I_2 sur l'écran (E).

b) Calculer la distance minimum a entraînant le brouillage en fonction de λ et de α. Donner la valeur numérique de α sachant que a=40cm.

5) L'étoile observée est l'étoile α du Centaure. Sachant que la distance la séparant de la Terre est D=4,3 années-lumière, calculer la distance linéaire d en kilomètres entre les deux composantes de l'étoile. *Une année-lumière correspond à la distance parcourue par une onde électromagnétique dans le vide pendant une année.*

Annale supplémentaire : Détermination de la distance angulaire entre les 2 composantes d'une étoile double par le dispositif d'Young

1°) a)



Comme on est dans le vide,

$\delta = LCO_2 - LCO_1 = r_2 - r_1$.

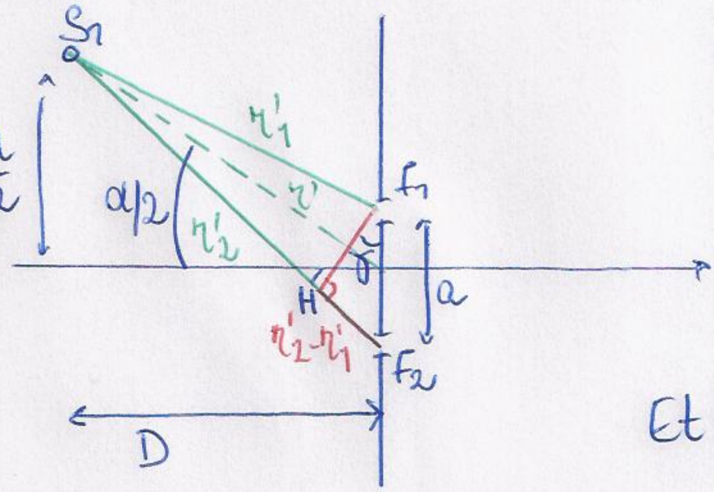
$r_2 - r_1$ est obtenu en projetant r_1 sur r_2. On a alors : $r_2 - r_1 = a \sin\beta$.

Mais comme $f' \gg a, y$, les rayons r_1, r et r_2 semblent quasi-confondus si bien que comme $F_1H \perp r_2$, alors $F_1H \underset{\sim}{\perp} r$.

Cela implique $\beta \sim \theta$, si bien que :

$$\delta = a \sin\theta$$

b) Avant les fentes :



De la même façon, on a :

$\delta_{avant} = LCO_2 - LCO_1$

$= r'_2 - r'_1$

$= a \sin\gamma$

Et comme $D \gg \frac{d}{2}, \frac{a}{2}$, les rayons r'_1, r et r'_2 semblent confondus. Alors, comme $F_1H' \perp r'_2$, on a $F_1H' \underset{\sim}{\perp} r'$ si bien que $\gamma \sim \frac{\alpha}{2}$.

Alors $\quad \delta_{avant} = a \sin \alpha/2$.

Comme α est petit, $\sin\alpha/2 \sim \alpha/2$ et $\delta_{avant} = a\,\alpha/2$.

c) $d_1 = d_{avant} + d_{après} = a\left(\frac{\alpha}{2} + \sin\theta\right)$.

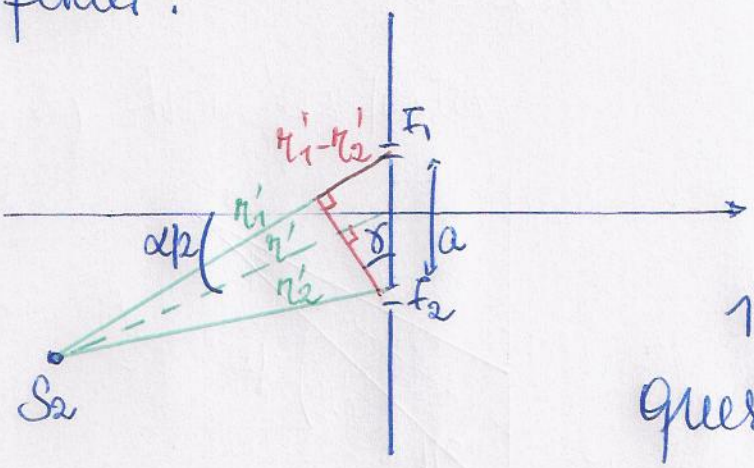
La largeur des fentes étant la même, et la polarisation des ondes issues de F_1 et F_2 étant aussi la même puisque les 2 ondes sont issues de la même source S_1, on a le profil typique d'intensité :

$$I_1 = 2I_0(1+\cos\Delta\varphi_1)$$

où I_0 est l'intensité des ondes issues de F_1 et F_2, et $\Delta\varphi_1 = kd_1$. d'où :

$$I = 2I_0(1+\cos kd_1).$$

2°) La différence de marche $d_{après}$ après les fentes ne change pas : $d_{après} = a\sin\theta$. Par contre, avant les fentes :



on a maintenant :

$$r'_1 > r'_2$$

le calcul de $r'_1 - r'_2$ est identique à celui de la question précédente et donne :

$$r'_1 - r'_2 = a\alpha/2.$$

MAIS on considère $d_{après} = L(O_2) - L(O_1)$

$$= r'_2 - r'_1$$

$$= -a\alpha/2.$$

Alors la différence de marche totale est :

$$d_2 = a\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\theta\right)$$

et $I_2 = 2I_0(1+\cos k\delta_2)$.

3°) a) • Pour calculer la position des minima de I_1 en fonction de y, il faut l'expression de I_1 en fonction de y. Soit δ_1 en fonction de y.
Or $\delta_1 = a\left(\frac{\alpha}{2} + \sin\theta\right)$.
Sur le 1° schéma, on voit que $\sin\theta = \frac{y}{r}$. Mais comme $f' \gg a, y$, les rayons r_1, r et r_2 sont quasi confondus avec l'axe horizontal, soit $r \sim f'$. Alors : $\sin\theta \sim \frac{y}{f'}$ si bien que :

$$\delta_1 = a\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{y}{f'}\right).$$

$I_1 = I_{1min}$ lorsque $\cos\Delta\varphi_1 = -1$, soit $\Delta\varphi_1 = (2m+1)\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$.
Comme $\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\delta_1$, $\frac{2\pi}{\lambda}\delta_1 = (2m+1)\pi$

$$\hookrightarrow \delta_1 = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

Comme $\delta_1 = a\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{y}{f'}\right)$: $a\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{y}{f'}\right) = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$

$$\hookrightarrow y = f'\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a} - \frac{\alpha}{2}\right].$$

• $I_2 = I_{2max}$ lorsque $\cos k\delta_2 = +1$, soit $k\delta_2 = 2m\pi$.
soit $\frac{2\pi}{\lambda}\delta_2 = m\pi \longleftrightarrow \delta_2 = m\lambda$

$$\hookrightarrow a\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{y}{f'}\right) = m\lambda$$

$\hookrightarrow y = f'\left[m\frac{\lambda}{a} + \frac{\alpha}{2}\right].$

b) On nous indique que le brouillage correspond à :

$$\left(y_{min}^{(I_1)}\right)_m = \left(y_{max}^{(I_2)}\right)_m$$

$$\hookrightarrow \cancel{f'}\left[\left(\cancel{m}+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a} - \frac{\alpha}{2}\right] = \cancel{f'}\left[\cancel{m\frac{\lambda}{a}} + \frac{\alpha}{2}\right]$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2}\frac{\lambda}{a} = \alpha$$

$$\hookrightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\alpha}}$$

A.N. $a = \dfrac{\lambda}{2\alpha} \leftrightarrow \alpha = \dfrac{\lambda}{2a} = 7.10^{-7}\,\text{rad}.$

4°) Sur le 2° schema, on voit que :

$$\underbrace{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{d/2}{D}$$

α petit : $\dfrac{\alpha}{2}$

$$\hookrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2D}$$

$$\hookrightarrow \boxed{d = \alpha D}$$

A.N. : $D = c \times t = 3.10^8 \times (4{,}3 \times \underbrace{365}_{\text{jours}} \times \underbrace{24}_{h} \times \underbrace{3600}_{\text{secondes}}) = 9{,}461.10^{15}\,m.$

$\hookrightarrow d = 6622700\ km.$