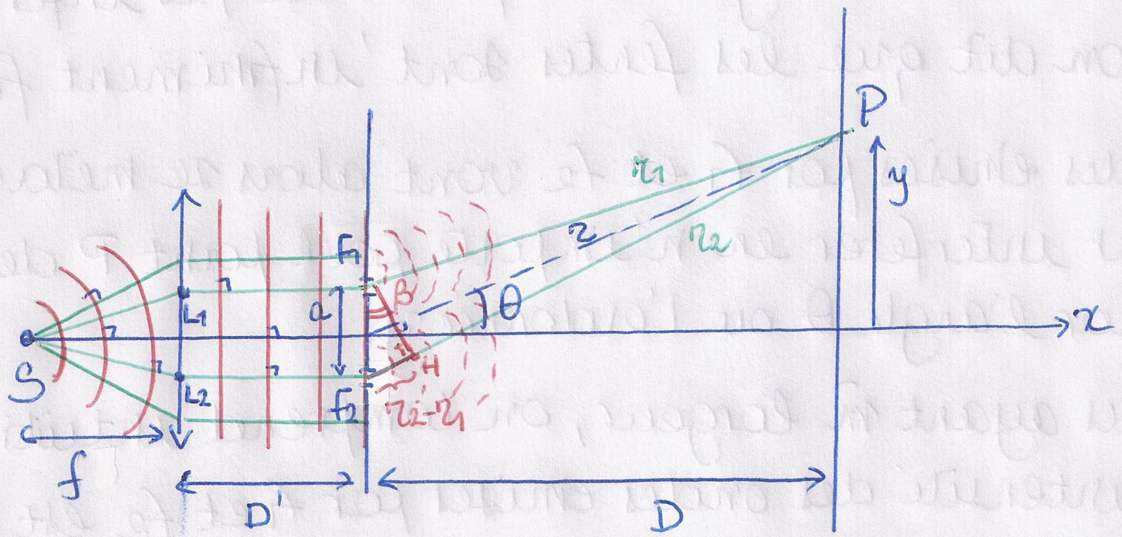
Chapitre 3 - Interférences

Exo I-23



1°) Il s'agit dans cette 1° question de redémontrer le cours :

* la source S, supposée ponctuelle, émet une onde de type sphérique. On peut alors tracer les rayons (en vert) ou les fronts d'onde (en rouge) émis par S. Se souvenant de l'optique géométrique, on sait que si S est confondu avec le foyer objet de la lentille L, les rayons émis par S sortiront de la lentille parallèles à l'axe optique (Sx). Cela est représenté sur le schéma ci-dessus.

Traçant les fronts d'onde perpendiculaires aux rayons sortants, il apparait alors que ces fronts d'onde sont des plans (voir schéma) : en d'autres termes, la traversée de la lentille a transformé l'onde sphérique en onde plane.

Mais alors, F_1 et F_2 font partie, au même instant t, du même front d'onde plan. Et le principe d'

Huyghens indique que f_1 et f_2 sont sources d'ondelettes sphériques. Il n'y a pas de phénomène de diffraction car la largeur des fentes est très inférieure à λ (on dit que les fentes sont 'infiniment fines').

Les ondes émises par f_1 et f_2 vont alors se mélanger et venir interférer en n'importe quel point P de l'écran repéré par l'angle θ ou l'ordonnée y.

Les fentes ayant m̃ largeur, on comprend intuitivement que l'intensité des ondes émises par f_1 et f_2 est la m̃. Comme l'intensité d'une onde est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique, cela indique que les amplitudes des ondes émises par f_1 et f_2 sont les mêmes.

De plus, l'écran est situé à très gde distance des sources. Or on sait qu'une onde sphérique est localement assimilable à une onde plane très loin de la source. Les ondelettes émises par f_1 et f_2 sont alors assimilables à des ondes planes au point P, très éloigné de f_1 et f_2.

Finalement, la polarisation des ondes émises par f_1 et f_2 est la même puisque ces ondes proviennent de la même source S (donc 1 seule onde à l'origine). Soit $\vec{u}$ la direction de polarisation.

$\longrightarrow$ On peut donc écrire les champs $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ relatifs aux ondes émises par f_1 et f_2 arrivant au point P.

$$\begin{cases} \vec{E_1} = E_0 \cos(kL_{(O_1)} - \omega t)\hat{u} \\ \vec{E_2} = E_0 \cos(kL_{(O_2)} - \omega t)\hat{u} \end{cases}$$

m̂ amplitude car m̂ largeur de fentes

m̂ k et m̂ ω car 1 seule source S

m̂ polarisation car 1 seule source à l'origine.

$L_{(O_1)}$ et $L_{(O_2)}$ sont les longueurs de chemin optique des ondes 1 et 2 depuis S jusqu'à P. Nous les expliciterons plus après.

(*) Au point P, le champ total est :

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

et est associé à l'intensité :

$$I = \frac{1}{\mu v}\langle \vec{E}^2 \rangle_t$$

$\mu \to \mu_0$, $v \to c$ car dans le vide

$$I = \frac{1}{\mu_0 c}\langle (\vec{E_1} + \vec{E_2})^2 \rangle_t$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}\langle \vec{E_1}^2 + \vec{E_2}^2 + 2\vec{E_1}\cdot\vec{E_2} \rangle_t$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}\langle E_1\hat{u}\cdot E_1\hat{u} + E_2\hat{u}\cdot E_2\hat{u} + 2 . E_1\hat{u}\cdot E_2\hat{u} \rangle_t$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}\langle E_1^2\,\hat{u}\cdot\hat{u} + E_2^2\,\hat{u}\cdot\hat{u} + 2E_1E_2\,\hat{u}\cdot\hat{u} \rangle_t$$

or $\hat{u}\cdot\hat{u} = \overbrace{\underbrace{\|\hat{u}\|\|\hat{u}\|}_{1 \text{ car vecteur unitaire}} \cos(\underbrace{\hat{u},\hat{u}}_{0})}^{1} = 1$

↳ $I = \frac{1}{\mu_0 c} \langle E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \rangle_t$

or $\langle a \pm b \rangle = \langle a \rangle \pm \langle b \rangle$ mais $\langle ab \rangle \neq \langle a \rangle \langle b \rangle$

↳ $I = \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \langle E_1^2 \rangle_t + \langle E_2^2 \rangle_t + 2 \langle E_1 E_2 \rangle_t \right\}$ (*)

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ E_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(kLO_1 - \omega t) \rangle_t}_{1/2} + E_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(kLO_2 - \omega t) \rangle_t}_{1/2} + 2E_0^2 \langle \underbrace{\cos(kLO_1 - \omega t)}_{b} . \underbrace{\cos(kLO_2 - \omega t)}_{a} \rangle_t \right\}$$

On utilise pour le dernier terme :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left\{ \cos(a+b) + \cos(a-b) \right\}$.

↳ $I = \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ E_0^2 + E_0^2 \langle \cos[k(LO_1 + LO_2) - 2\omega t] + \cos k(LO_2 - LO_1) \rangle_t \right\}$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left\{ 1 + \underbrace{\langle \cos[k(LO_1 + LO_2) - 2\omega t] \rangle_t}_{0} + \underbrace{\langle \cos k(LO_2 - LO_1) \rangle_t} \right\}$$

le terme ~~est~~ est cst vis-à-vis du temps : sa valeur moyenne dans le temps est donc lui-m̂

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left\{ 1 + \cos k(LO_2 - LO_1) \right\}.$$

Si on calcule l'intensité des ondes émises par F_1

et f2, qui est la m̃ puisque les fentes ont m̃ longeur, on trouve :

$$I_0 = \frac{1}{\mu_0 c}\langle \vec{E_1}^2 \rangle_t = \frac{1}{\mu_0 c}\langle E_1^2 \underbrace{\hat{u}\cdot\hat{u}}_{1} \rangle_t = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}\langle \vec{E_2}^2 \rangle_t = \text{-----------}$$

D'où :

$$\boxed{I = 2I_0\left(1+\cos k(LCO_2 - LCO_1)\right)}$$

On appelle $\delta = LCO_2 - LCO_1$ la différence de marche et $\Delta\varphi = k\delta$ est le déphasage $(\varphi_2 - \varphi_1)$ des ondes en P (voir définitions de $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$).

Alors :

$$\boxed{I = 2I_0(1+\cos \underbrace{\Delta\varphi}_{k\delta})}$$

⊛ Explicitons LCO_1 et LCO_2. Sachant que LCO = indice × longueur géométrique, on a :

$$LCO_1 = n\,(SL_1 + L_1f_1 + f_1P)$$

$$LCO_2 = \underset{1}{n}\,(SL_2 + L_2f_2 + f_2P).$$

$SL_1 = SL_2$ et $L_1f_1 = L_2f_2$ par symétrie. Notant $r_1 = f_1P$ et $r_2 = f_2P$, on a alors :

$$\delta = LCO_2 - LCO_1 = r_2 - r_1$$

$$\hookrightarrow \Delta\varphi = k(r_2 - r_1)$$

Alors : $I = 2I_0(1+\cos k(r_2-r_1))$.

Suivant la position du point P sur l'écran, r_2-r_1 varie ainsi que $\cos\Delta\varphi = \cos k(r_2-r_1)$. $\cos\Delta\varphi$ varie entre +1 et -1.

Aussi, lorsque $\Delta\varphi = 2m\pi$, avec $m \in \mathbb{Z}$, les ondes 1 et 2 arrivent en phase en P et $\cos\Delta\varphi = +1$. Alors $I = I_{MAX} = 4I_0$ on parle d'interférences constructives (car $I >$ somme des intensités des ondes 1 et 2). On a alors un point très brillant.

De façon opposée, lorsque $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, les ondes 1 et 2 arrivent en opposition de phase en P et $\cos\Delta\varphi = -1$. Alors $I = I_{MIN} = 0$; on parle d'interférences destructives. On a alors un point sombre.

On a alors une alternance de points sombres et brillants selon l'axe Oy. Mais les fentes étant symétriques (perpendiculaires) au plan du schéma, cette alternance se reproduit de façon identique par rapport à ce plan. Aussi, on observe sur l'écran (E) une alternance de franges sombres et brillantes // aux fentes.

⊛ On va maintenant chercher à exprimer I en fonction de θ, puis de y.

→ Il faut donc trouver l'expression de r_2-r_1 en fonction de θ, puis de y.

$r_2 - r_1$ s'obtient en projetant r_1 sur r_2. Dans le triangle $F_1 H F_2$ rectangle ainsi formé (voir schéma), on a :

$$r_2 - r_1 = a \sin\beta.$$

Mais comme $D \gg y, a$, les rayons r_1, r et r_2 sont quasi-confondus, si bien que

$$F_1 H \underset{\sim}{\perp} r.$$

Si $F_1 H \underset{\sim}{\perp} r$, alors $\beta \sim \theta$ et on obtient $\underbrace{r_2 - r_1}_{\delta} = a \sin\theta$.

$$\hookrightarrow \boxed{\begin{aligned} I &= 2 I_0 (1 + \cos\Delta\varphi) \\ &= 2 I_0 (1 + \cos k\delta) \\ &= 2 I_0 (1 + \cos k a \sin\theta) \end{aligned}}$$

Pour obtenir I en fonction de y, il suffit de remarquer que : $\sin\theta = \frac{y}{r}$ dans le triangle rectangle FOP.

Encore, comme $D \gg y$, r_1, r et r_2 sont quasi-confondus et très proche de l'axe x, si bien que,

$$r \sim D.$$

Alors : $\sin\theta \sim \frac{y}{D}$, si bien que : $\boxed{\delta = a\frac{y}{D}}$ et

$$\hookrightarrow \boxed{I = 2 I_0 \left(1 + \cos ka\frac{y}{D}\right)}$$

⊛ Recherche des positions des maxima :

On a déjà mentionné que $I = I_{MAX} = 4I_0$ si :

$$\boxed{\Delta\varphi = 2m\pi}$$

Or $\Delta\varphi = k\delta$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

↳ $\frac{2\pi}{\lambda}\delta = 2m\pi$, soit $\boxed{\delta = m\lambda}$

Or $\delta = r_2 - r_1 = a\sin\theta$

↳ $a\sin\theta = m\lambda$, soit $\boxed{\sin\theta = m\frac{\lambda}{a}}$

Or $\sin\theta = \frac{y}{D}$

↳ $\frac{y}{D} = m\frac{\lambda}{a}$, soit $\boxed{y = m\frac{\lambda D}{a}}$

⊛ Recherche des positions des minima :

On a déjà mentionné que $I = I_{MIN} = 0$ si :

$$\boxed{\Delta\varphi = (2m+1)\pi}$$

Or $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$

↳ $\frac{2\pi}{\lambda}\delta = (2m+1)\pi$, soit $\boxed{\delta = (m+\frac{1}{2})\lambda}$

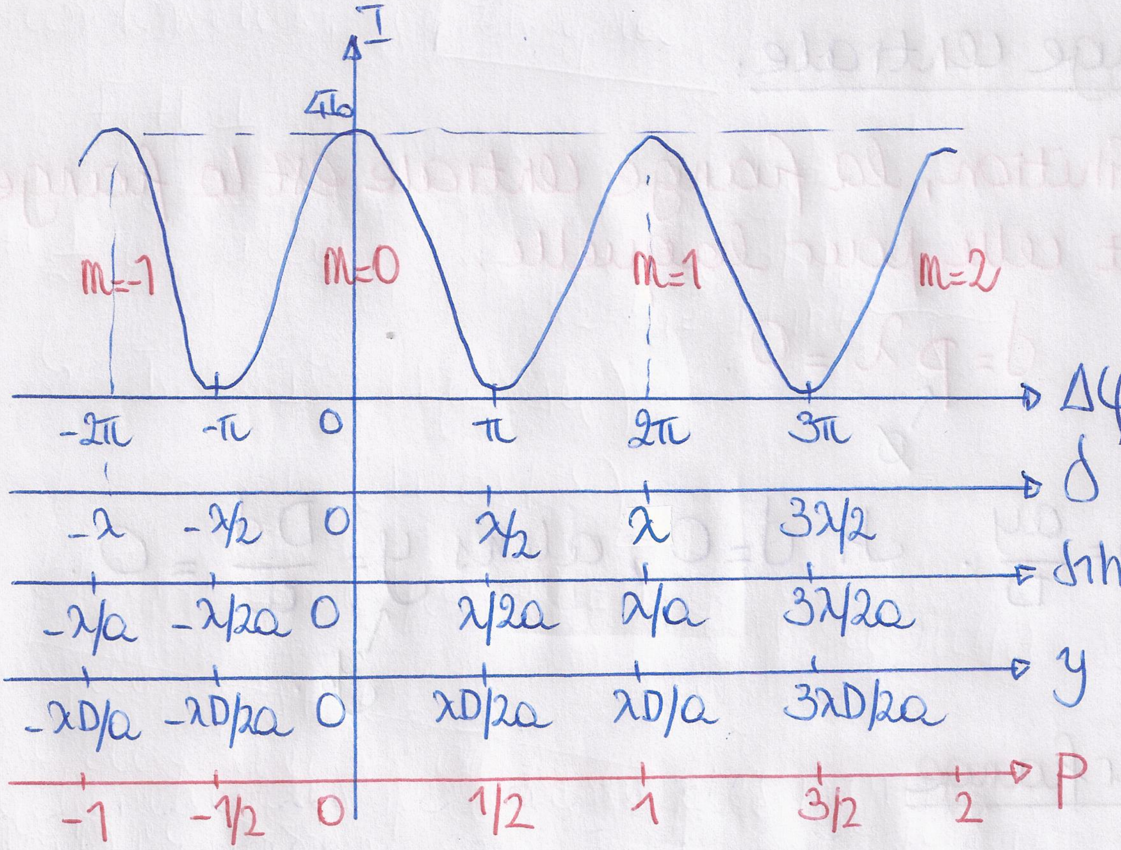
Or $\delta = a\sin\theta$

↳ $a\sin\theta = (m+\frac{1}{2})\lambda$, soit $\boxed{\sin\theta = (m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{a}}$

Or $\sin\theta = \frac{y}{D}$

$\hookrightarrow \frac{y}{D} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a}$, soit $\boxed{y = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a}}$

④ Représentation graphique de I :



On a construit le graphique en faisant varier m (de 0 à $+\infty$, et de façon symétrique de 0 à $-\infty$ puisque $m \in \mathbb{Z}$). Pour les max et $y>0$, on a $m=0$, $m=1$, $m=2$, etc...

$\hookrightarrow$ On introduit alors l'ordre d'interférence

$$p = \delta/\lambda \in \mathbb{R}$$

et on remarque que pour 1 max où $\delta = m\lambda$, on

a : $p = m \in \mathbb{Z}$

alors que pour un min, $p = m + 1/2$.

En fait, l'ordre d'interférence sert basiquement à 'numéroter' les maxima. On parlera du maximum d'ordre m.

⊛ Frange centrale :

Par définition, la frange centrale est la frange d'ordre 0, soit celle pour laquelle :

$$\delta = \underbrace{p}_{\emptyset} \lambda = 0.$$

Ici, $\delta = \frac{ay}{D}$. Si $\delta = 0$, alors $\underbrace{y}_{y_0} = \frac{D\delta}{a} = 0$.

⊛ Interfrange

On remarque sur le graphe de I que la distance séparant 2 max ou 2 min consécutifs est tjs la m̄. On l'appelle interfrange i.

Donc :
$$i = (y_{max})_{m+1} - (y_{max})_m$$
$$= (m+1)\frac{\lambda D}{a} - m\frac{\lambda D}{a}$$
$$= \frac{\lambda D}{a}.$$

On vérifie que l'on trouve bien la m̄ distance avec

Les minima :

$$i = (y_{min})_{m+1} - (y_{min})_m$$
$$= \left(m+1+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a} - \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a}$$
$$= \frac{\lambda D}{a}.$$

* Contraste :

Par définition $C = \dfrac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}}$

Ici, $I_{MAX} = 4I_0$ et $I_{MIN} = 0$, si bien que $C = 1$ (c'est le contraste maximal de 100%).

* Application numérique :

On donne $i = 2mm$. Or $i = \dfrac{\lambda D}{a} \leftrightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{ia}{D}}$ 0,5 µm

2°) Si la largeur de la fente f_2 est le double de celle de la fente f_1, l'intensité de l'onde passant par cette dernière étant I_0, on comprend que :

$$I_2 = 2\underbrace{I_1}_{I_0}$$

L'intensité étant proportionnelle au carré de l'amplitude du champ, l'amplitude de l'onde 2 devient alors $\sqrt{2}\,E_0$.

Alors, on a maintenant :

$$\begin{cases} \vec{E_1} = E_0 \cos(kLLO_1 - \omega t)\,\hat{u} \\ \vec{E_2} = \sqrt{2}\,E_0 \cos(kLLO_2 - \omega t)\,\hat{u} \end{cases}$$

On reprend alors le calcul au niveau de l'éq (*) de la page 4 :

$$I = \frac{1}{\mu_0 c}\left\{ \langle E_1^2 \rangle_t + \langle E_2^2 \rangle_t + 2 \langle E_1 E_2 \rangle_t \right\}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}\left\{ E_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(kLLO_1 - \omega t)\rangle_t}_{1/2} + 2E_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(kLLO_2 - \omega t)\rangle_t}_{1/2} + 2\sqrt{2}\,E_0^2 \underbrace{\langle \cos(kLLO_1 - \omega t)\cos(kLLO_2 - \omega t)\rangle_t}_{\frac{1}{2}\cos k(LLO_2 - LLO_1)} \right\}$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\left\{ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\,}\cos k(LLO_2 - LLO_1) \right\}$$

$$\boxed{= I_0 \left\{ 3 + 2\sqrt{2}\cos \underbrace{k(LLO_2 - LLO_1)}_{\Delta\varphi} \right\}}$$

$LLO_2 - LLO_1 = \delta$ reste toujours égal à

$$\delta = r_2 - r_1 = a \sin\theta = a\frac{y}{D}$$

car la fente f_2 est toujours infiniment fine si bien que le rayon r_2 est toujours le même.

La position des max et min, déterminée par $\Delta\varphi = 2m\pi$ et $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, ou de façon équivalente par $\delta = m\lambda$

et $\delta = (m+\frac{1}{2})\lambda$, ne change donc pas.

↳ L'interfrange i est donc toujours le même :

$$i' = i = \frac{\lambda D}{a}$$

↳ La position de la frange centrale, déterminée par $\delta = 0$, reste aussi inchangée :

$$y'_0 = y_0 = 0.$$

↳ Par contre, on a maintenant I_{MAX} pour $\Delta\varphi = 2m\pi$ pour lesquels $\cos\Delta\varphi = +1$:

$$I_{MAX} = (3+2\sqrt{2})\, I_0$$

De façon similaire pour I_{MIN} où $\cos\Delta\varphi = -1$:

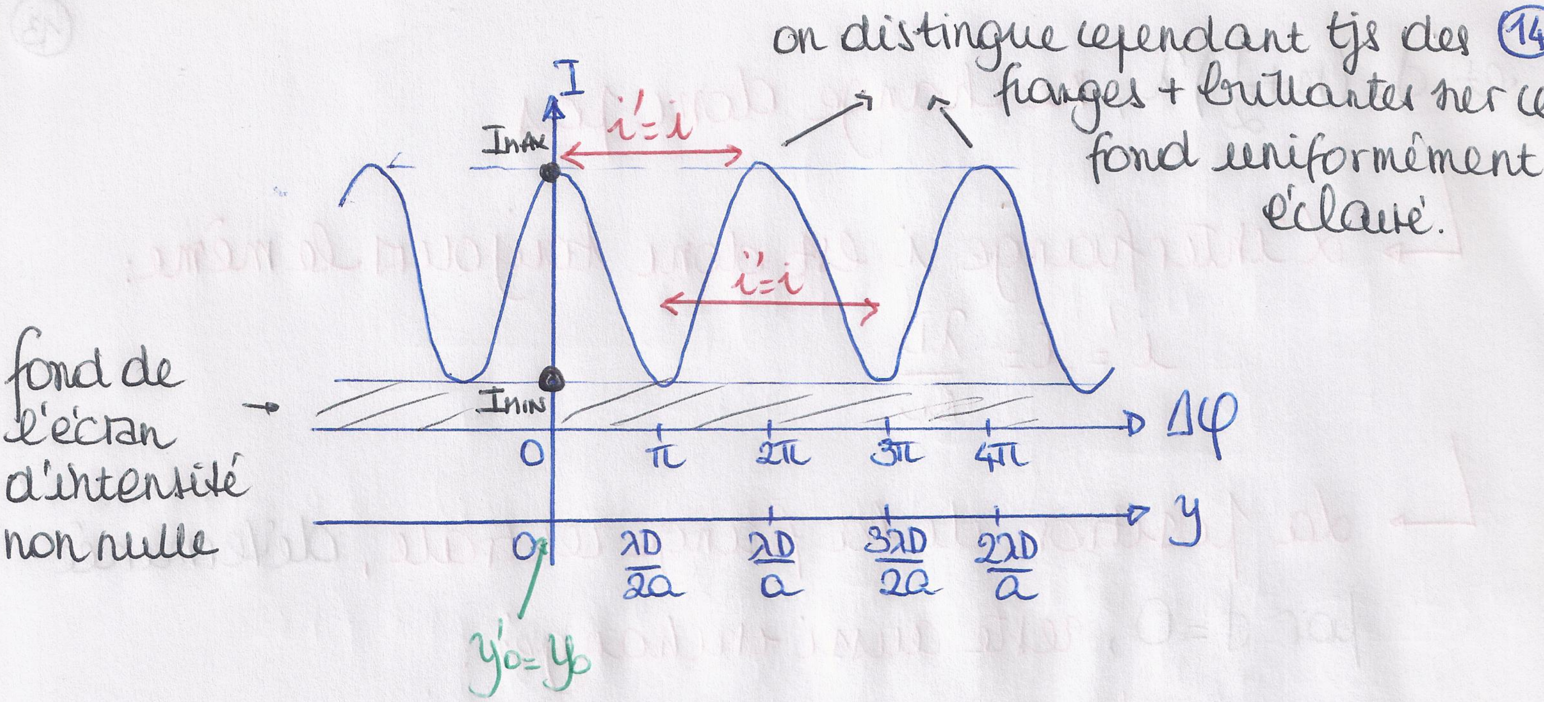
$$I_{MIN} = (3-2\sqrt{2})\, I_0$$

Si bien que :

$$C' = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}} = \frac{4\sqrt{2}\, I_0}{6\, I_0} = \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1.$$

L'élargissement d'une fente n'a donc pour effet que de diminuer le contraste. En fait I_{MIN} n'est plus nul. Donc le fond de l'écran n'est pas entièrement sombre comme dans le cas de fentes de m̄ largeur.

Graphiquement pour I, on a :



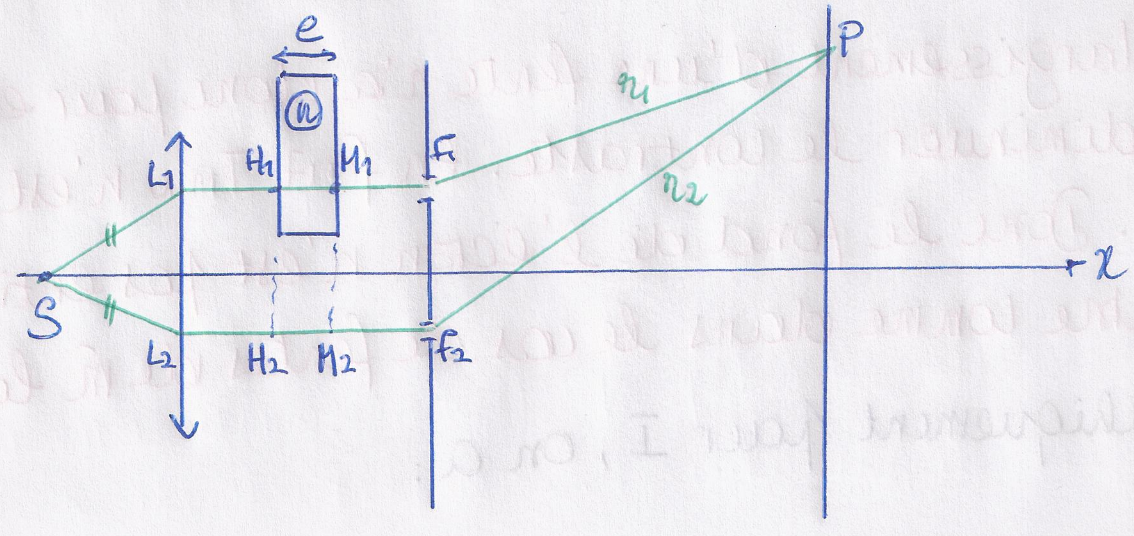
3°) On revient dans le cas de fentes de ∞ largeur. L'intensité I est alors :

$$I = 2I_0(1+\cos\Delta\varphi)$$
$$\hookrightarrow kd = k(LCO_2 - LCO_1)$$

On a, comme dans la 1° question, $I_{MAX} = 4I_0$ (lorsque $\cos\Delta\varphi = +1$) et $I_{MIN} = 0$ (lorsque $\cos\Delta\varphi = -1$). Aussi le contraste C'' reste inchangé par rapport à celui du cas sans lame :

$$\boxed{C'' = C = 1}.$$

Par contre, l'ajout de la lame modifie LCO_1 et donc d :



On a : $\begin{cases} LCO_1 = SL_1 + L_1H_1 + \underbrace{n H_1M_1}_{e} + M_1F_1 + r_1 \\ LCO_2 = SL_2 + L_2H_2 + \underbrace{H_2M_2}_{e} + M_2F_2 + r_2 \end{cases}$

Par symétrie par rapport à l'axe x, on a : $SL_1 = SL_2$, $L_1H_1 = L_2H_2$, $M_1F_1 = M_2F_2$, si bien que :

$$\delta = LCO_2 - LCO_1 = e(1-n) + \underbrace{(r_2 - r_1)}$$

la diff de LCO après les fentes est toujours la m. :

$$r_2 - r_1 = a\sin\theta = a\frac{y}{D}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\delta = e(1-n) + a\frac{y}{D}}$$

La diff. de LCO est modifiée d'une cte $e(1-n) < 0$. En fait, l'ajout de la lame fait que $LCO_1 \nearrow$ si bien que $\delta = LCO_2 - LCO_1 \searrow$.

Cette modification fait que les positions des max et min vont changer.

En fait, $I = I_{MAX}$ si $\Delta\varphi = 2m\pi$

$$\hookrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ 2\pi/\lambda}}{k}\delta = 2m\pi \longleftrightarrow \delta = m\lambda$$

soit $e(1-n) + a\frac{y}{D} = m\lambda$

$$\hookrightarrow \boxed{y = \frac{D}{a}\left[m\lambda + e(n-1)\right]}$$

et $I = I_{MIN}$ si $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$

$$\hookrightarrow \delta = (m + 1/2)\lambda$$

Soit $e(1-n)+a\frac{y}{D}=(m+\frac{1}{2})\lambda$

$$\hookrightarrow \boxed{y=\frac{D}{a}\left[(m+\frac{1}{2})\lambda+e(n-1)\right]}$$

Alors l'interfrange est :

$$i''=(y_{max})_{m+1}-(y_{max})_m$$

$$=\frac{D}{a}\left[(\cancel{m}+1)\lambda+\cancel{e(n-1)}\right]-\frac{D}{a}\left[\cancel{m\lambda}+\cancel{e(n-1)}\right]$$

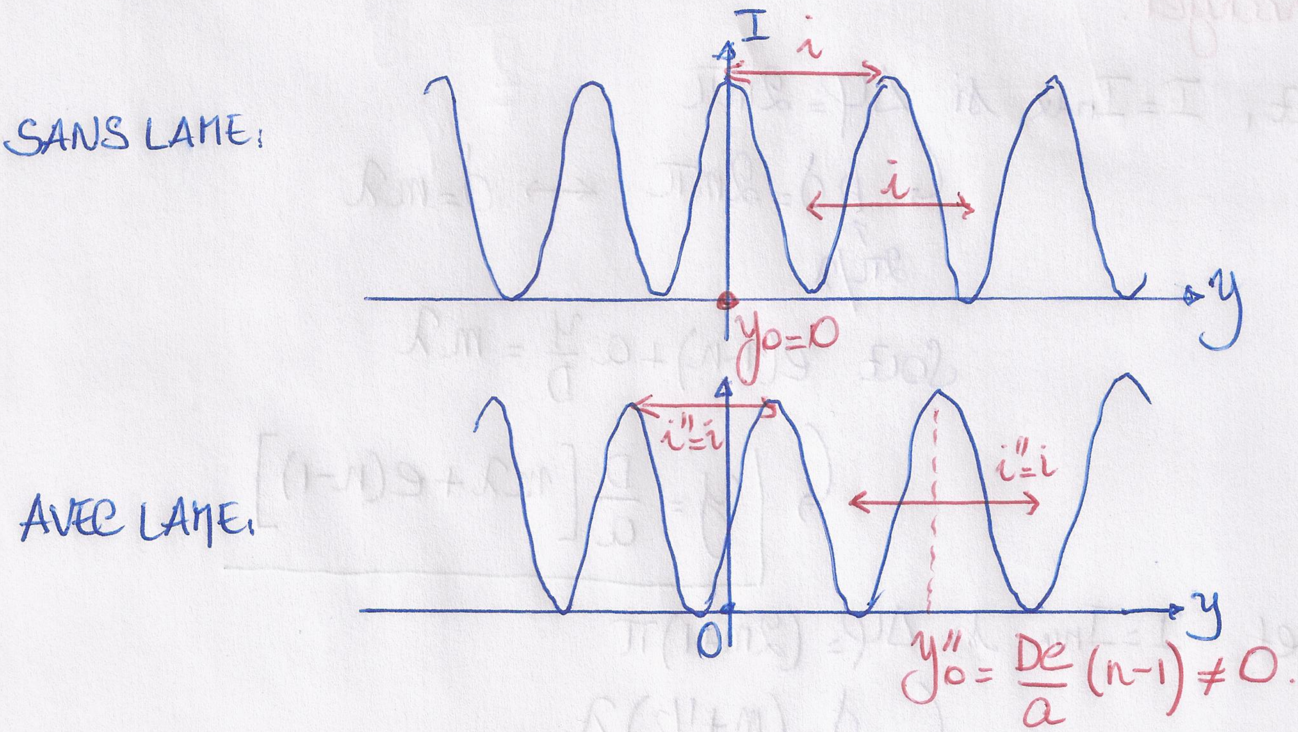
$$=\frac{\lambda D}{a}=i$$: il n'est pas modifié !

Par contre, la position de la frange centrale est :

$$\delta=0 \leftrightarrow e(1-n)+\frac{ay}{D}=0$$

$$\hookrightarrow \boxed{y''_0 = y=\frac{De}{a}(n-1)} \neq y_0.$$

Soit donc schématiquement :



⇒ L'ajout de la lame a donc provoqué un déplacement global de la figure d'interférence. Le déplacement est $\Delta y_0 = y_0' - y_0$.

Cela sera toujours le cas lorsqu'on modifiera une des LCO par une cte (indépendante de y).

Le déplacement se fera dans le sens où la LCO ↗.
Ici, on a augmenté LCO_1 (la traversée de la lame induit une LCO ne alors que sans lame, la LCO est e). Le déplacement se fait alors vers LCO_2, soit les $y>0$.
Si on avait augmenté LCO_2, le déplacement se ferait vers les $y<0$.
On notera d'ailleurs que ↘ une des LCO revient à ↗ l'autre : si on avait laissé LCO_1 intacte et ↘ LCO_2, le déplacement se ferait aussi vers les $y>0$.

<u>Application numérique</u> : 2 franges sombres ont défilé en O.
Cela revient à dire que :

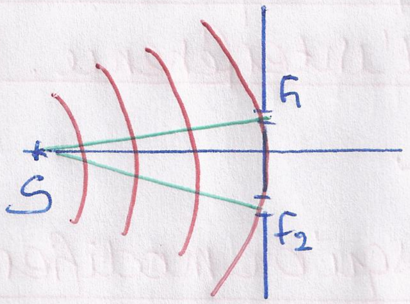
$$\Delta y_0 = 2i$$

$$\hookrightarrow \underbrace{y_0'}_{\frac{De}{a}(n-1)} - \underbrace{y_0}_{\emptyset} = \underbrace{2i}_{\frac{\lambda D}{a}}$$

$$\hookrightarrow e(n-1) = \lambda$$

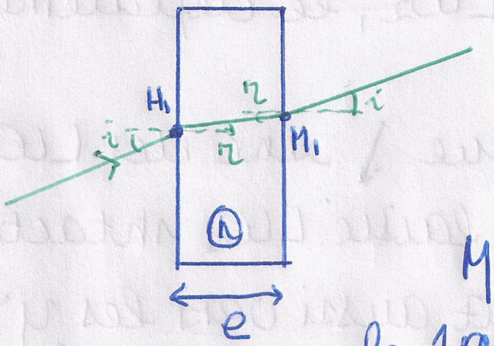
$$\hookrightarrow \boxed{e = \frac{\lambda}{n-1}} \quad 1\,\mu m.$$

4°) Dans le cas où la lame n'est pas introduite, la lentille n'est pas nécessaire. En effet :



F_1 et F_2 font partie du m̃ front d'onde sphérique et sont donc sources d'ondelettes sphériques, assimilables à des ondes planes en P sur l'écran. Cela ne change donc rien.

Dans le cas où la lame est introduite, il faudrait sans lame tenir compte de la réfraction dans la lame ; en zoomant sur cette dernière :



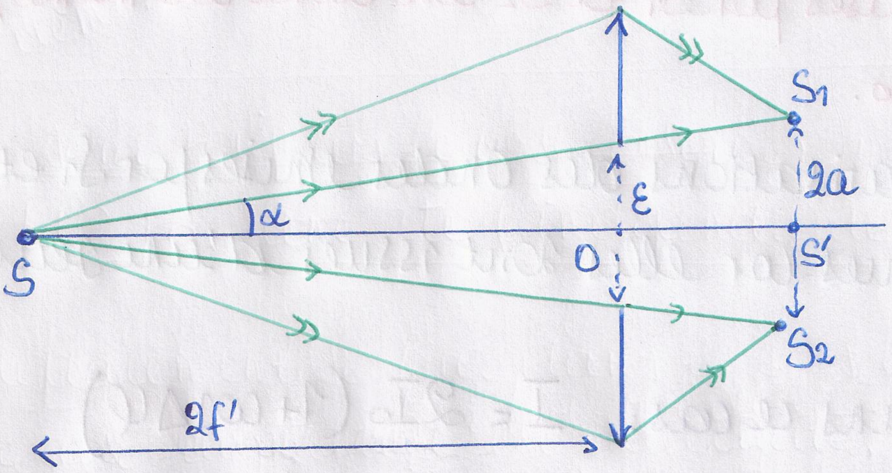
La LCO_1 est donc modifiée de $nH_1M_1 \neq ne$.

MAIS comme $D' = 1m \gg a = 0{,}5\,mm$ le rayon est quasiment confondu avec l'axe x. Si bien que l'on a :

$H_1M_1 \sim e$.

Et la lentille n'est encore une fois pas vraiment nécessaire....

exo I-24



1°) a) On applique simplement la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OS'}} - \frac{1}{\overline{OS}} = \frac{1}{f'}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\overline{OS'}} = \frac{1}{\overline{OS}} + \frac{1}{f'} = \frac{f' + \overline{OS}}{f' \cdot \overline{OS}}$$

$$\hookrightarrow \overline{OS'} = \frac{f' \cdot \overline{OS}}{f' + \overline{OS}}$$

Avec $\overline{OS} = -2f'$: $\boxed{\overline{OS'} = \frac{-2f'^2}{-f'} = 2f'}$ ——— 0,5 m..

b) Selon Thales, $\underbrace{\tan\alpha = \frac{\varepsilon/2}{OS} = \frac{a}{SS'}}$

Avec $OS = 2f'$ et $SS' = SO + OS' = 4f'$:

$$\hookrightarrow \frac{\varepsilon}{4f'} = \frac{a}{4f'}$$

$$\hookrightarrow \boxed{a = \varepsilon} \text{ 0,001m. soit } \boxed{2a = 0{,}002\,m}$$

2°) a) Même si on demande l'expression de I sans démonstration, il faut bien la justifier :

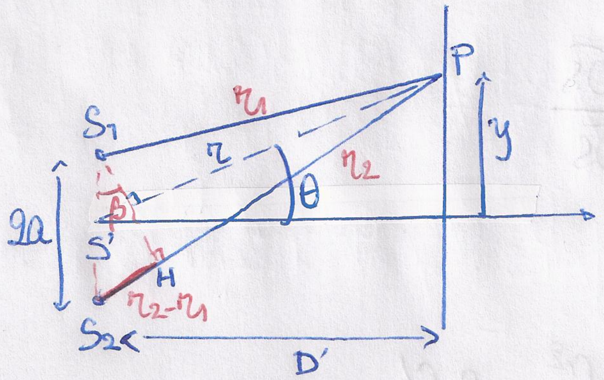
→ S_1 et S_2 sont formés par des pinceaux lumineux identiques (par symétrie) : l'intensité des ondes 1 et 2 émises par S_1 et S_2 est donc la même ; on l'appelle I_0.

→ les polarisations des ondes émises par S_1 et S_2 sont identiques car elles sont issues d'une seule source S.

On a alors dans ce cas : $I = 2I_0(1+\cos\Delta\varphi)$

où $\Delta\varphi = k\delta = k(L_{O_2} - L_{O_1})$

Etant dans un milieu d'indice 1,



$\begin{cases} L_{O_2} = S_2P = r_2 \\ L_{O_1} = S_1P = r_1 \end{cases}$, soit $\delta = r_2 - r_1$

Cherchons δ en fonction de θ puis de y :

Dans le triangle rectangle S_1HS_2, $r_2 - r_1 = 2a\sin\beta$.

Comme $D' \gg a, y$, r_1, r et r_2 sont quasi confondus si bien que $S_1H \underset{\sim}{\perp} r \longleftrightarrow \beta \sim \theta$. Alors :

$$\delta = r_2 - r_1 = 2a\sin\theta.$$

De plus, $\sin\theta = \frac{y}{r}$. Pour les m raisons qu'auparavant, r_1, r et r_2 quasi-confondus et assimilés à D' : $r \sim D'$.

Alors : $\sin\theta \sim \frac{y}{D'}$.

Finalement, $I = \begin{cases} 2I_0(1+\cos\Delta\varphi) \\ 2I_0(1+\cos k\delta) \\ 2I_0(1+\cos k2a\sin\theta) \\ 2I_0(1+\cos k2a\frac{y}{D'}) \end{cases}$

b) Pour connaître l'interfrange i, il faut la position des max d'intensité.

Or $I = I_{MAX}$ si $\cos\Delta\varphi = +1 \leftrightarrow \Delta\varphi = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$.

$$\hookrightarrow \underbrace{k}_{\frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}} 2a\frac{y}{D'} = \cancel{2}m\cancel{\pi}$$

$$\hookrightarrow y = m\frac{\lambda D'}{2a}.$$

L'interfrange est alors :

$$i = (y_{max})_{m+1} - (y_{max})_m$$

$$= \frac{\lambda D'}{2a}$$

(il est inutile de calculer les positions des min puisque $i = (y_{min})_{m+1} - (y_{min})_m = (y_{max})_{m+1} - (y_{max})_m$)

Application numérique :

On donne $i = 1mm$. Or $i = \frac{\lambda D'}{2a} \leftrightarrow \boxed{D' = \frac{2ai}{\lambda}}$

On ne connaît pas λ. Mais $\nu = 6.10^{14}$ Hz et :

$$v = \nu\lambda \leftrightarrow \lambda = \frac{\underset{3.10^8 m.s^{-1}}{c}}{\nu} = 0{,}5\ \mu m.$$

c car dans le vide

D'où $D' = 4m$ et $\boxed{D = D' + 4f'} = 5m$.

3°) Si la source S est polychromatique, les sources S_1 et S_2 le sont aussi. Mais on sait que des ondes de λ différentes sont incohérentes et n'interfèrent pas. Aussi, on observe sur l'écran la superposition des profils d'interférences relatifs à chaque λ :

$\Delta\varphi$ dépendant de λ via k.

$$I_{tot} = \sum_{\lambda} I_\lambda = \sum_{\lambda} 2I_0\left(1+\cos \overbrace{\underbrace{k}_{\frac{2\pi}{\lambda}}\underbrace{\delta}_{\frac{2ay}{D'}}}^{\Delta\varphi}\right).$$

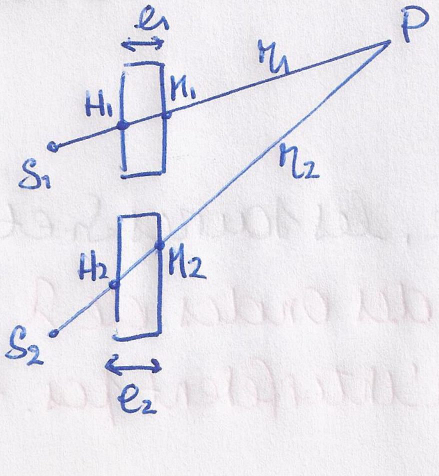
La frange centrale est celle pour laquelle $\delta = 0$. Or, si $\delta = 0$, alors $\Delta\varphi = k\delta = 0$ quelle que soit λ ; $I_\lambda = I_{MAX} = 4I_0$ pour tout λ. La frange centrale, située en $y=0$ (puisque $\delta = 0 \leftrightarrow y = 0$) est alors blanche (superposition de toutes les λ).

4°) On sait que l'introduction de lames sur le trajet des ondes va conduire à un déplacement global de la figure d'interférences dans le sens où la LCO a augmenté. Pour caractériser ce déplacement, on se concentre alors sur la position de la frange centrale.

* Sans lames, on a : $\delta = \frac{2ay}{D'}$. Si $\delta = 0$, $y = 0$

y_0

* Cas 1 :



Il faut recalculer les LCO et δ, en considérant, comme indiqué dans l'énoncé, que les lames sont traversées sous incidence normale, soit $H_1M_1 \sim e_1$ et $H_2M_2 \sim e_2$.

On peut simplement écrire :

$$LCO_1 = \underbrace{(r_1 - H_1M_1)}_{\text{trajet dans } n=1} + \underbrace{nH_1M_1}_{\text{traversée de la lame}}$$

$$= r_1 - e_1 + ne_1 = r_1 + (n-1)e_1$$

$$LCO_2 = (r_2 - H_2M_2) + nH_2M_2$$

$$= r_2 - e_2 + ne_2 = r_2 + (n-1)e_2$$

Alors $\delta = LCO_2 - LCO_1 = \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\frac{2ay}{D'}} + (n-1)(e_2 - e_1)$

Position de la frange centrale : $\delta = 0$

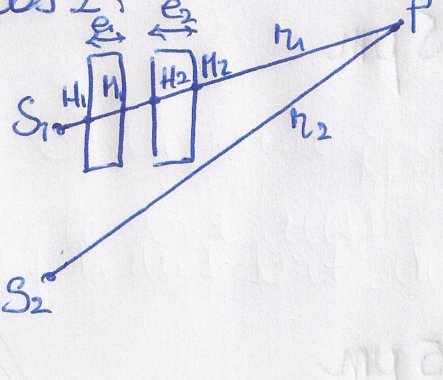
$$\Leftrightarrow \frac{2ay}{D'} + (n-1)(e_2 - e_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{y}_{y'_0} = \frac{D'}{2a}(n-1)(e_1 - e_2)}$$

On connait le déplacement $\Delta y'_0 = y'_0 - \underbrace{y_0}_{\emptyset} = y'_0 = -2,5$ cm.

Mais on ne peut déterminer encore e_1 et e_2 ; il faut une autre équation.

⊛ Cas 2 :



On procède de la m̂ façon :

$$LCO_1 = (r_1 - H_1M_1 - H_2M_2) + n(H_1M_1 + H_2M_2)$$

$$= r_1 - (e_1 + e_2) + n(e_1 + e_2)$$

$$= r_1 + (e_1 + e_2)(n-1)$$

$$LCO_2 = r_2$$

si bien que $\delta = LCO_2 - LCO_1$

$$= \underbrace{r_2 - r_1}_{\frac{2ay}{D'}} - (n-1)(e_1+e_2)$$

La frange centrale, définie par $\delta = 0$, est située en :

$$\frac{2ay}{D'} - (n-1)(e_1+e_2) = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\underset{y_0''}{y} = \frac{D'}{2a}(n-1)(e_1+e_2)}$$

On connait le déplacement $\Delta y_0'' = y_0'' - \underset{\emptyset}{y_0} = y_0'' = +10\text{ cm}$.

On a donc bien 2 éqs :

$$\begin{cases} \Delta y_0' = \dfrac{D'}{2a}(n-1)(e_1 - e_2) & (1) \\ \Delta y_0'' = \dfrac{D'}{2a}(n-1)(e_1+e_2) & (2) \end{cases}$$

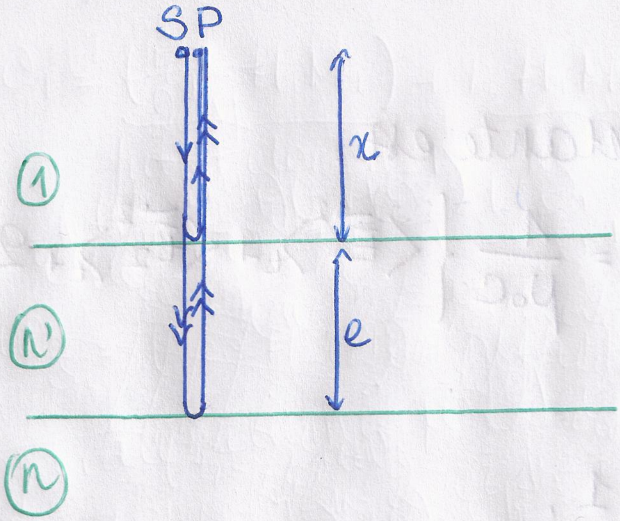
(1)+(2) : $\Delta y_0' + \Delta y_0'' = \dfrac{D'}{\cancel{2}a}(n-1)\cancel{2}e_1$

$$\hookrightarrow \boxed{e_1 = \frac{a}{D'(n-1)}(\Delta y_0' + \Delta y_0'')} \; 37{,}5\ \mu m$$

(2)-(1) : $\Delta y_0'' - \Delta y_0' = \dfrac{D'}{2a}(n-1)2e_2$

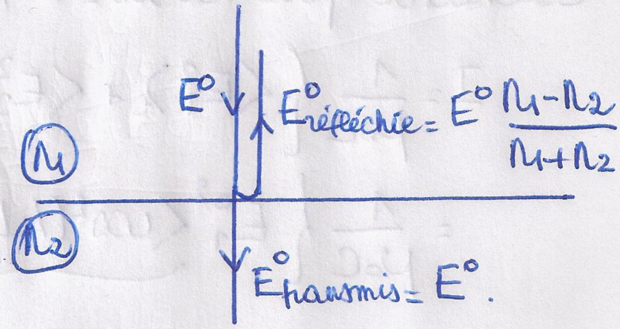
$$\hookrightarrow \boxed{e_2 = \frac{a}{D'(n-1)}(\Delta y_0'' - \Delta y_0')} \; 62{,}5\ \mu m$$

exo I-25

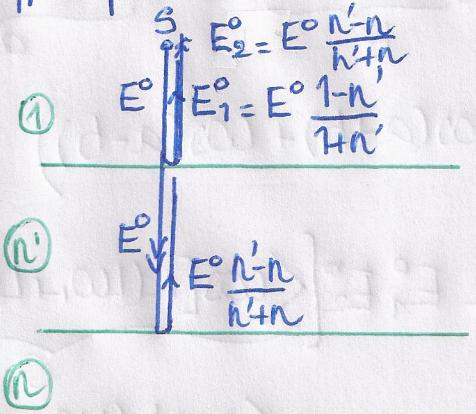


Les ondes sont décalées lors des réflexions pour bien les identifier. Dans la réalité, elles sont superposées.

1°) a) L'énoncé indique que:



On applique à notre cas:



Alors: $\begin{cases} E^\circ_1 = E^\circ \dfrac{1-n'}{1+n'} \\ E^\circ_2 = E^\circ \dfrac{n'-n}{n'+n}. \end{cases}$

b) Depuis S jusqu'à P:

$$\begin{cases} L(O_1) = 2x \\ L(O_2) = 2x + 2n'e \end{cases} \longleftrightarrow \delta = L(O_2) - L(O_1) = 2n'e.$$

c) Les ondes ont m̃ polarisation de direction $\hat{u}$:

$$\begin{cases} \vec{E_1} = E^\circ_1 \cos(k L(O_1) - \omega t)\,\hat{u} \\ \vec{E_2} = E^\circ_2 \cos(k L(O_2) - \omega t)\,\hat{u} \end{cases}$$

En P, le champ total est alors :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

et l'intensité résultante est :

$$I = \underbrace{\frac{1}{\mu_0 c}}_{\substack{\text{dans le vide} \\ \text{en P}}} \langle \vec{E}^2 \rangle_t = \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \langle \vec{E}_1^2 \rangle_t + \langle \vec{E}_2^2 \rangle_t + 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_t \right\}$$

Sachant que $\hat{u} \cdot \hat{u} = 1$,

$$I = \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \langle E_1^2 \rangle_t + \langle E_2^2 \rangle_t + 2 \langle E_1 E_2 \rangle_t \right\}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ E_1^{o\,2} \underbrace{\langle \cos^2(kLLO_1 - \omega t) \rangle_t}_{1/2} + E_2^{o\,2} \underbrace{\langle \cos^2(kLLO_2 - \omega t) \rangle_t}_{1/2} \right.$$

$$\left. + 2 E_1^o E_2^o \langle \cos(\underbrace{kLLO_1 - \omega t}_{b}) \cos(\underbrace{kLLO_2 - \omega t}_{a}) \rangle_t \right\}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left(\cos(a+b) + \cos(a-b) \right)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \frac{(E_1^o)^2}{2} + \frac{(E_2^o)^2}{2} + E_1^o E_2^o \left[\underbrace{\langle \cos[k(LLO_1 + LLO_2) - 2\omega t] \rangle_t}_{0} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \underbrace{\langle \cos k(LLO_2 - LLO_1) \rangle_t}_{\cos k(LLO_2 - LLO_1)} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \frac{(E_1^o)^2}{2} + \frac{(E_2^o)^2}{2} + E_1^o E_2^o \cos \underbrace{k(LLO_2 - LLO_1)}_{\Delta\varphi} \right\}$$

d) On aura $I = I_{MIN}$ lorsque $\cos \Delta\varphi = -1$, soit

$$\Delta\varphi = (2m+1)\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\hookrightarrow \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda_0} \cdot 2n'e = \underbrace{(\cancel{2}m+1)\cancel{\pi}}_{m+1/2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{e = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0}{2n'}}$$

On a alors $I_{MIN} = \dfrac{1}{\mu_0 c}\left\{\dfrac{(E_1^\circ)^2}{2} + \dfrac{(E_2^\circ)^2}{2} - E_1^\circ E_2^\circ\right\}$

$$= \frac{1}{2\mu_0 c}\left\{(E_1^\circ)^2 + (E_2^\circ)^2 - 2E_1^\circ E_2^\circ\right\}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0 c}\left(E_1^\circ - E_2^\circ\right)^2.$$

e) On aura $I_{MIN} = 0$ si $E_1^\circ = E_2^\circ$.

$$\hookrightarrow \cancel{E^\circ}\,\frac{1-n'}{1+n'} = \cancel{E^\circ}\,\frac{n'-n}{n'+n}$$

$$\hookrightarrow (1-n')(n'+n) = (n'-n)(1+n')$$

$$\hookrightarrow \cancel{n'} + n - n'^2 - \cancel{nn'} = \cancel{n'} - n + n'^2 - \cancel{nn'}$$

$$\hookrightarrow 2n'^2 = 2n$$

$$\hookrightarrow \boxed{n' = \sqrt{n}}.$$

Alors $\boxed{e = \left(m+\frac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda_0}{2\sqrt{n}}}$

f) $e_0 = 0{,}112\,\mu m$; $e_1 = 0{,}337\,\mu m$; $e_2 = 0{,}561\,\mu m$

$n' = 1{,}2247$.

2°) Si $n' = \sqrt{n}$, alors $E_1^\circ = E_2^\circ$.

Alors $I = \dfrac{1}{\mu_0 c}\left\{\dfrac{(E_1^\circ)^2}{2} + \dfrac{(E_1^\circ)^2}{2} + (E_1^\circ)^2\cos\Delta\varphi\right\}$

$$= \frac{(E_i^\circ)^2}{\mu_0 c}\left\{1+\cos\Delta\varphi\right\}$$

$$= 2I_0\left(1+\cos\Delta\varphi\right)$$

$\hookrightarrow k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ ← $2n'e_0 = 2\sqrt{n}\,e_0$ → $\frac{\lambda_0}{4\sqrt{n}}$

$$= 2I_0\left(1+\cos\pi\frac{\lambda_0}{\lambda}\right).$$

I_0 est l'intensité des ondes réfléchies 1 et 2.

b) • Radiations non réfléchies :

$I = I_{min}$, soit $\cos\frac{\pi\lambda_0}{\lambda} = -1 \leftrightarrow \cancel{\pi}\frac{\lambda_0}{\lambda} = (2m+1)\cancel{\pi}$

$\hookrightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{2m+1}$.

m	λ (µm)
0	0,55 $\in$ visible
1	0,183 $\notin$ visible : on s'arrête alors là, car si $m\uparrow$, $\lambda\downarrow$ et $\lambda \notin$ visible.

• Radiations les + réfléchies :

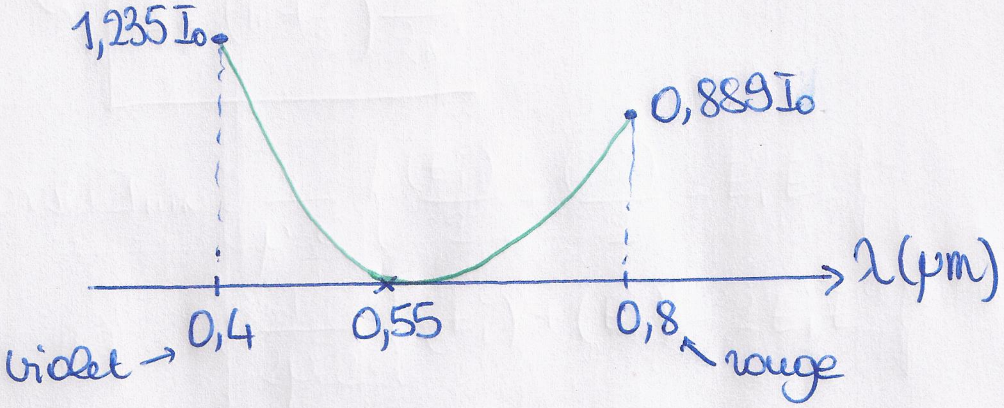
$I = I_{max}$, soit $\cos\pi\frac{\lambda_0}{\lambda} = +1 \leftrightarrow \cancel{\pi}\frac{\lambda_0}{\lambda} = 2m\cancel{\pi}$

$\hookrightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{2m}$

m	λ (µm)
0	∞
1	0,275 $\notin$ visible : on s'arrête là pour la m raison

c) $I(\lambda = 0{,}4\,\mu m) = 1{,}235\, I_0$ (attention : $\pi\frac{\lambda_0}{\lambda}$ est en radians)

$I(\lambda = 0{,}8\,\mu m) = 0{,}889\, I_0$



d) Les teintes les + réfléchies dans le visible sont le violet et le rouge : la teinte observée est violacée.