**LICENCE SCIENCES ET TECHNOLOGIES**

**Mention Sciences de la Terre**

**Exercices**

# Outils physiques pour la géologie

**(4TTR 302U)**

**Bertrand Dauphole – Bernard Pons**
**Université de Bordeaux**

# Partie I

# OPTIQUE ONDULATOIRE

# Partie I – Chapitre 1
# Ondes et propagation des ondes

### Exercice I-1

1) Montrer que l'expression :

$$\Psi(z,t) = e^{-(2z+3t)^2}$$

est celle d'une onde ; quel est son sens de propagation et sa vitesse de propagation ?

2) Vérifier qu'elle est une solution de l'équation d'onde.

### Exercice I-2

Vérifier que la fonction d'onde harmonique :

$$\Psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

est solution de l'équation de propagation d'une onde à une dimension.

### Exercice I-3

Soit la fonction d'onde lumineuse (exprimée en unités S.I.) :

$$\Psi(x,t) = 10^3 \sin\left[\pi\left(3\times 10^6 x - 9\times 10^{14} t\right)\right]$$

Déterminer sa vitesse, sa longueur d'onde, sa période, sa fréquence et son amplitude.

### Exercice I-4

Soit une onde électromagnétique plane dans le vide dont le champ $\vec{E}$ (en unités S.I.) est donné par :

$$E_x = 10^2 \sin\left[\pi\left(10^6 z - 3\times 10^{14} t\right)\right] \qquad E_y = 0 \qquad E_z = 0$$

1) Déterminer la vitesse, la longueur d'onde, la fréquence, la période, l'amplitude, la phase initiale de $\vec{E}$ et l'état de polarisation.
2) Écrire une expression pour le champ magnétique associé à l'onde.
3) Représenter schématiquement sur un même dessin la variation spatiale des deux champs.
4) Quelle est la densité de flux (intensité) de l'onde ?

### Exercice I-5

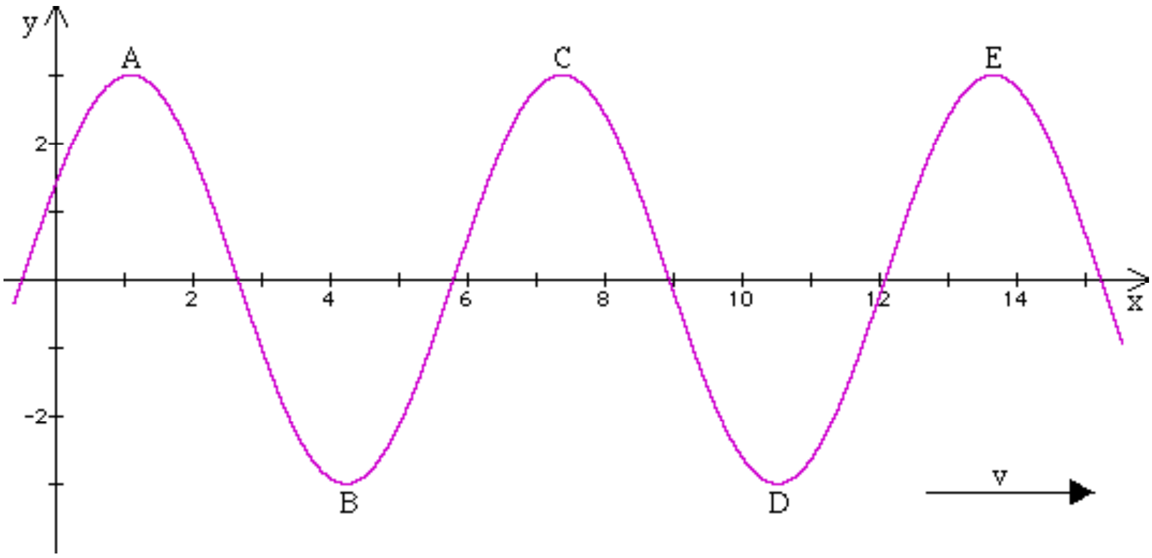
Une onde électromagnétique dans un milieu d'indice $n$ est décrite par :

$$E = E_0 \cos\left(kx - \omega t\right)$$

Montrer que l'intensité de l'onde est $I = nE_0^2 / 2\mu c$ où $c$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

### Exercice I-6

La figure suivante représente une onde de fréquence $\nu = 50\ \text{Hz}$ à l'instant $t = 0$. Les axes sont gradués en millimètres. Trouver l'amplitude maximale, la longueur d'onde, la vitesse de l'onde et la phase initiale. Indiquez les unités. Écrire la fonction d'onde.




**Exercice I-7**

**1) Onde plane**

Une onde sinusoïdale de fréquence $\nu = 5$ Hz est représentée au point $M(x,y,z)$ par :

$$\Psi(\vec{r},t) = A\sin\left(\varphi(\vec{r}) - \omega t\right)$$

où $\vec{r}$ est le vecteur position de $M$ dans le repère $\left(O,x,y,z\right)$.

a) On a : $\varphi(\vec{r}) = 3x + 4y + 5z$. Quels sont les fronts d'onde ?

b) Vérifier que $\Psi(\vec{r},t)$ satisfait à l'équation de propagation des ondes dans l'espace.

c) Montrer que $\Psi(\vec{r},t)$ se met sous la forme :

$$\Psi(\vec{r},t) = A\sin\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)$$

où $\vec{k} = k\hat{u}$ avec $u = 1$.

Que représente $\hat{u}$ ? Quelles sont ses composantes dans $\left(O,x,y,z\right)$ ? Quelles sont la longueur d'onde et la vitesse de propagation ?

d) Une onde de même fréquence que la précédente se propage dans le même milieu, mais dans une direction située dans le plan $xOz$ et faisant un angle de 30° avec $Oz$. Donner l'expression de la fonction d'onde correspondante.

**2) Onde sphérique**

Une source, assimilable à une petite sphère de centre $O$ et de rayon $a$, produit dans le milieu homogène et isotrope qui l'entoure une perturbation dont la forme au point $M$ est à l'instant $t$ :

$$\Psi(M,t) = \frac{A'}{r}\sin\left(kr - \omega t\right)$$

où $r = |OM|$.

a) En considérant les fronts d'onde, montrer que $\Psi(M,t)$ représente une onde sphérique ; préciser son sens de propagation et sa vitesse en fonction de $k$ et $\omega$.

b) Justifier par des considérations énergétiques la forme donnée à l'amplitude ($A'/r$).

**3) Comparaison des ondes planes et sphériques**

Dresser un tableau comparatif des principales caractéristiques (forme mathématique, amplitude, vecteur d'onde, densité de flux, énergie totale propagée) d'une onde plane uniforme et harmonique et d'une onde sphérique harmonique. Dans quelles conditions peut-on assimiler la deuxième à la première ?

**Exercice I-8**

Une onde électromagnétique plane et harmonique se propage dans le vide selon la direction des $x$ positifs. Sa fréquence est de $6\times10^{14}$ Hz et l'amplitude du champ électrique qui lui est associé est $42{,}42$ V/m.

1) Sachant que cette onde est polarisée linéairement de façon à ce que le plan de vibration du champ électrique fasse un angle de 45° avec le plan $(y,z)$, écrire les expressions de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$.
2) Quelle est la densité de flux (intensité) de l'onde ?

**Exercice I-9**

On désire comparer le temps de vol de deux rayons lumineux : l'un traversant un récipient rempli de tétrachlorure de carbone, l'autre se déplaçant dans l'air, d'indices respectifs 1,46 et 1. Si les deux trajets sont de même longueur, quelle doit être la longueur du récipient pour que les temps de transit diffèrent de $10^{-6}$ s ?

**Exercice I-10**

Le son $la_3$ du diapason a une fréquence de 440 Hz. Émis dans l'air la longueur d'onde de ce son est de 78,2 cm. Quelle est la vitesse de propagation du son dans l'air ? Un son de même fréquence qui se propagerait dans du béton aurait une longueur d'onde de 7,045 m. Quelle est la vitesse du son dans le béton ?

**Exercice I-11**

Un son se propage dans un cylindre homogène d'un matériau donné. La longueur d'onde mesurée est de 18 cm, et sa fréquence est de 1900 Hz. Quelle est la vitesse du son dans ce matériau ?

**Exercice I-12**

Déterminer la longueur d'onde dans le vide d'un rayon $\gamma$ de $10^{19}$ eV, sachant que $1\text{ eV}=1{,}6\times10^{-19}$ J et que $h=6{,}62\times10^{-34}$ S.I.

# Partie I – Chapitre 2
# Polarisation des ondes E.M. dans les milieux isotropes

**Exercice I-13**

Étudier l'onde $\vec{E}(y,t)$ superposition des ébranlements :

$$\vec{E}_x(y,t) = \hat{e}_x \; E_0 \cos\left[k\left(y - vt\right)\right]$$
$$\vec{E}_z(y,t) = -\hat{e}_z \; E_0 \cos\left[k\left(y - vt\right)\right]$$

Tracer $E(0,t)$ à $t=0$, $t=T/4$, $t=T/2$, $t=3T/4$ et $t=T$ où $T$ est la période.

**Exercice I-14**

Déterminer l'état de polarisation de l'onde :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \left[\hat{e}_x \sin\left(kz - \omega t\right) - \hat{e}_y \cos\left(kz - \omega t\right)\right]$$

**Exercice I-15**

Étudier l'état de polarisation de l'onde :

$$\vec{E} = \hat{e}_x \; E_0 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{e}_y \; E_0 \cos\left(\omega t - kz\right)$$

**Exercice I-16**

Étudier l'état de polarisation et donner l'orientation de l'onde :

$$\vec{E}(z,\,t) = \hat{e}_x \; E_0 \cos\left(kz - \omega t\right) + \hat{e}_y \; E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

**Exercice I-17**

Un rayon non polarisé de flux $I_i$ passe à travers une suite de deux polariseurs linéaires parfaits. Quelle doit être leur orientation relative pour que l'intensité $I_t$ du rayon transmis soit :

1) $I_i/2$ ?
2) $I_i/4$ ?

**Exercice I-18**

1) Représenter graphiquement l'intensité de l'onde émergeant d'un polariseur en fonction de l'angle $\theta$ que fait la direction du polariseur avec celle de l'onde incidente polarisée rectilignement.
2) Initialement l'angle $\theta$ vaut 15°. On tourne le polariseur de 10°. Calculer la variation relative d'intensité. Même question lorsque initialement l'angle vaut 75°. Conclure.

**Exercice I-19**

Écrire l'expression d'une onde plane polarisée linéairement, d'amplitude scalaire $E_0$, se propageant dans le plan $(x, y)$ dans une direction à 45° avec l'axe des $x$.

**Exercice I-20**

Déterminer l'état d'une onde dont les états P composants orthogonaux sont :

$$\vec{E}_x(z,t) = \hat{e}_x\ E_{0x} \cos(kz - \omega t)$$
$$\vec{E}_y(z,t) = -\hat{e}_y\ E_{0y} \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

1) pour $E_{0x} = E_{0y}$

2) pour $E_{0x} \neq E_{0y}$

**Exercice I-21**

1) Montrer qu'une onde transversale se propageant le long de l'axe $Ox$ et correspondant à un déplacement $\Psi$ de composantes :

$$\Psi_y = \Psi_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$\Psi_z = \Psi_0 \cos(kx - \omega t)$$

est circulairement polarisée.

2) Déterminer le sens de rotation de $\Psi$ tel que le voit un observateur placé sur l'axe $Ox$.

3) Écrire les expressions de $\Psi_y$ et $\Psi_z$ pour une onde de polarisation opposée.

**Exercice I-22**

Donner les expressions des champs électriques associés aux ondes polarisées suivantes :

1) Onde polarisée rectilignement se propageant suivant l'axe $Ox$, le champ électrique faisant un angle de 60° avec l'axe $Oy$.

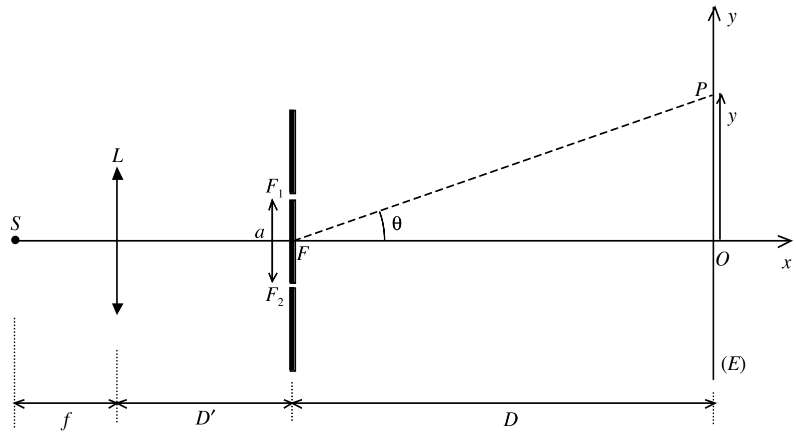
2) Onde polarisée elliptiquement à droite se propageant suivant l'axe $Oy$, le grand axe de l'ellipse étant suivant $Oz$, trois fois plus grand que le petit axe et le déphasage étant $\pi/2$.

3) Onde polarisée rectilignement suivant l'axe $Oy$ se propageant suivant une direction faisant, dans le plan $(z, x)$ un angle de 45° avec l'axe $Oz$.

# Partie I – Chapitre 3
# Interférences et diffraction

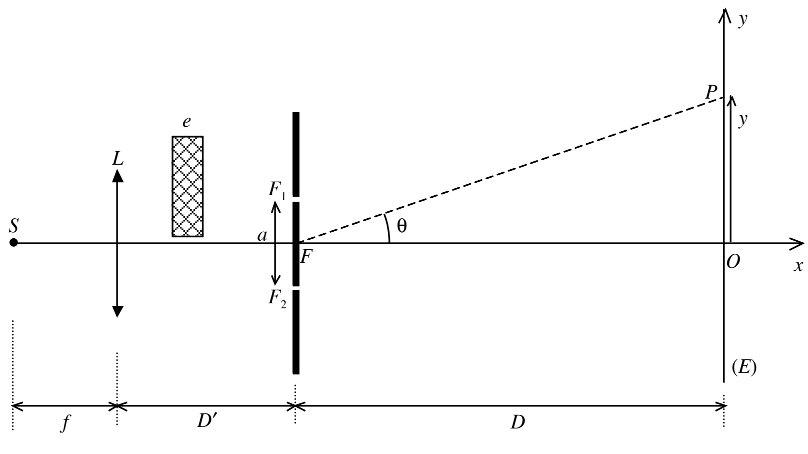
**Exercice I-23**

Une source monochromatique $S$ de longueur d'onde inconnue $\lambda$ est placée au foyer objet d'une lentille convergente $L$. A la distance $D'$ de la lentille, on place un système de fentes d'Young $F_1$ et $F_2$ distantes de $a$. Les fentes ont même largeur et cette largeur est très inférieure à $\lambda$. On étudie les phénomènes d'interférences en un point $P$ sur un écran $(E)$ situé à la distance $D$ du plan des fentes :




On donne : $D = 2$ m , $D' = 1$ m , $a = 0{,}5$ mm . La position du point $P$ sur l'écran $(E)$ peut être repéré par la coordonnée $y$, ou par l'angle $\theta$ entre l'axe $Ox$ (axe de symétrie du système et la direction $FP$, $F$ étant le milieu du segment $F_1F_2$ (voir figure ci-dessus). On restreint l'observation aux points $P$ tels que $y \ll D$. Tout le système est supposé dans le vide ($n = 1$).

1) Calculer et représenter graphiquement l'intensité lumineuse $I$ au point $P$. Décrire la figure d'interférence observée sur l'écran $(E)$. Déterminer la position $y_0$ de la frange centrale (frange d'ordre 0), l'interfrange $i$ et le contraste $C = \left(I^{\max} - I^{\min}\right)/\left(I^{\max} + I^{\min}\right)$.
   Afin de déterminer $\lambda$, on mesure $i = 2$ mm . Calculer la valeur numérique de $\lambda$.
2) La largeur de la fente $F_2$ est réglable et on double cette largeur (qui reste toujours très inférieure à $\lambda$). Déterminer la nouvelle position $y'_0$ de la frange centrale, le nouvel interfrange $i'$ et le nouveau contraste $C'$. Quel est donc l'effet de l'élargissement de $F_2$ ?
3) La largeur de la fente $F_2$ est ramenée à sa valeur initiale et on place maintenant entre la lentille et la fente $F_1$ une lame de verre d'indice $n = 1{,}5$ dont on veut déterminer l'épaisseur inconnue $e$.

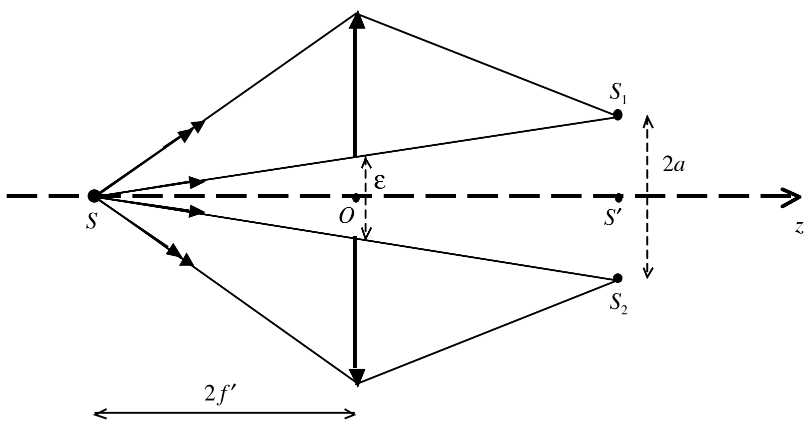


Déterminer en fonction de $n$, $e$, $D$, $a$ et $y$ la différence de chemin optique des ondes issues de $S$, passant par $F_1$ et $F_2$ et arrivant en $P$. En déduire l'intensité lumineuse $I''$ au point $P$, la position $y_0''$ de la frange centrale, l'interfrange $i''$ et le contraste $C''$. Quel est donc l'effet de l'introduction de la lame de verre ?
Afin de déterminer $e$, on a compté que 2 franges sombres ont défilé au point $O$ lors de l'introduction de la lame (pour finalement obtenir un maximum d'intensité en ce point). Calculer l'épaisseur $e$.

4) Dans toutes les expériences qui viennent d'être menées, la lentille est-elle vraiment nécessaire ? Justifier votre réponse.

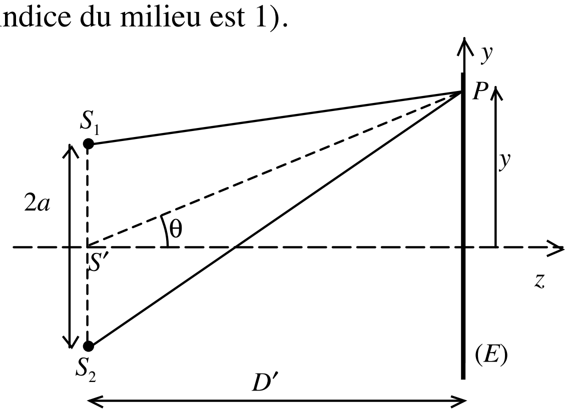
**Exercice I-24 – La lentille de Billet (sujet extrait d'annale)**

Un dispositif interférentiel centré sur un axe $Oz$ comporte une lentille de Billet obtenue en découpant suivant l'un de ses diamètres une lentille mince convergente $L$ parfaitement stigmatique. On désigne par $f'$ sa distance focale image, par $O$ son centre optique et on note $\varepsilon$ l'écart supposé petit (perpendiculaire à l'axe $Oz$) entre les deux parties de la lentille. Une source ponctuelle $S$ est disposée sur l'axe $Oz$ avec $\overline{OS} = -2f'$. Le dispositif permet alors d'obtenir 2 sources cohérentes réelles $S_1$ et $S_2$, images respectives de $S$ par chaque demi-lentille :




Pour les applications numériques, on prendra $f' = 25$ cm et $\varepsilon = 1$ mm.

1) On veut caractériser la position des deux images $S_1$ et $S_2$ de $S$ :
   a) Calculer la distance algébrique $\overline{OS'}$. (Rappel. Formule de conjugaison d'une lentille mince : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$ où $A$ et $A'$ désignent respectivement l'objet et l'image.)
   b) Calculer l'écartement $2a$ des sources.
2) La source $S$ émet un rayonnement monochromatique de fréquence $\nu = 6 \times 10^{14}$ Hz.
   a) Donner sans la démontrer l'expression mathématique de la distribution d'intensité sur l'écran $E$ (on supposera que l'indice du milieu est 1).

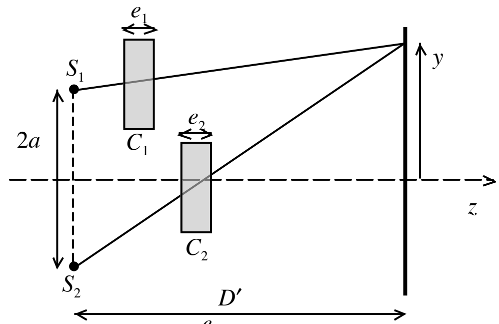


b) À quelles distances $D'$ des sources et $D$ de la lentille doit-on placer l'écran pour que l'interfrange soit de 1 mm ?

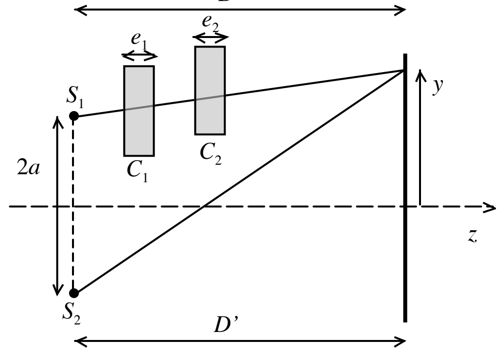
3) La source $S$ est maintenant une source de lumière blanche. Quel est l'aspect de la frange centrale située en $y = 0$ ?

4) On dispose de deux lames à faces parallèles d'un matériau transparent supposé non dispersif d'indice $n = 1{,}50$. Ces deux lames $C_1$ et $C_2$ ont pour épaisseur $e_1$ et $e_2$. L'écran reste à la même distance $D$.

Lorsqu'on place $C_1$ et $C_2$ respectivement devant $S_1$ et $S_2$, la frange centrale est déplacée de $-2{,}5$ cm :




Lorsqu'on place $C_1$ et $C_2$ devant $S_1$, la frange centrale est déplacée de $+10$ cm :

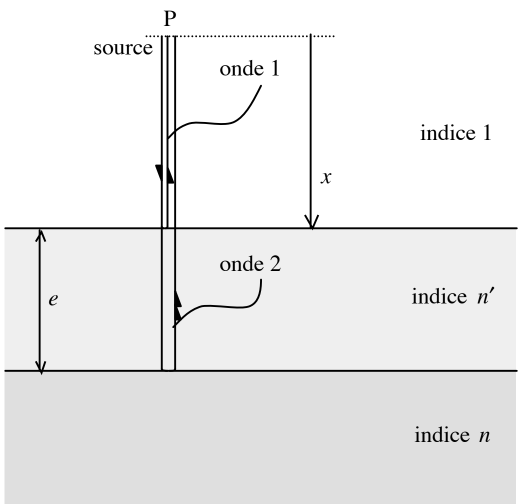



En supposant que les rayons arrivent sur $C_1$ et $C_2$ en incidence normale (ce qui est justifié si $D' \gg 2a$ et $y$), calculer les épaisseurs $e_1$ et $e_2$.

**Exercice I-25 – Approche simplifiée d'une couche anti-reflet (sujet extrait d'annale)**

Sur le verre d'une lentille (verre correcteur de lunettes) d'indice $n = 1{,}5$, on dépose une couche mince uniforme d'épaisseur $e$ et d'indice $n'$. On se propose d'étudier le phénomène de réflexion lorsque ce système est éclairé sous incidence normale.

1) Dans un premier temps, le système est éclairé en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 0{,}55\ \mu\text{m}$ dans le vide. Par souci de simplification, on considère uniquement les rayons réfléchis (1) et (2) aux interfaces ($1 \rightarrow n'$) et ($n' \rightarrow n$) comme indiqué sur la figure ci-après :



L'intensité réfléchie, que l'on suppose mesurable en P, dépend du phénomène d'interférence des ondes (1) et (2) que l'on assimilera à des ondes planes.

a) Au passage d'un milieu d'indice $n_1$ à un milieu d'indice $n_2$, l'amplitude de l'onde réfléchie en incidence normale s'écrit : $E^0_{\text{réfléchie}} = E^0_{\text{incidente}} r_{12}$ où $r_{12} = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ est le coefficient de réflexion d'amplitude et $E^0_{\text{incidente}}$ l'amplitude de l'onde incidente. Donner alors les amplitudes $E_1^0$ et $E_2^0$ des ondes (1) et (2) en P considérant que les facteurs de transmission d'amplitude aux diverses interfaces sont égaux à 1.
b) Calculer les *LCO* parcourues par les ondes (1) et (2) depuis la source jusqu'au point P et en déduire la différence $\delta$ de *LCO*.
c) Sachant que les ondes (1) et (2) ont même polarisation, donner l'expression des champs $E_1$ et $E_2$ associées aux ondes (1) et (2) en P. En déduire l'intensité réfléchie en P.
d) Écrire la condition pour laquelle l'intensité réfléchie est minimale. En déduire les épaisseurs $e$ correspondantes ($e_0$, $e_1$, $e_2$ ...) en fonction de $\lambda_0$ et de $n'$. Quelle est alors la valeur $I^{\min}$ de l'intensité ?
e) Quelle condition doivent vérifier $E_1^0$ et $E_2^0$ pour que $I^{\min} = 0$ ? En déduire $n'$ en fonction de $n$ ainsi que les épaisseurs $e_0$, $e_1$, $e_2$ ... en fonction de $\lambda_0$ et de $n$.
f) Donner les valeurs numériques de $n'$ et de $e_0$, $e_1$, $e_2$.

2) On éclaire maintenant en lumière blanche ($0{,}4 \leq \lambda \leq 0{,}8\ \mu\text{m}$). De plus, on suppose que la couche mince est d'indice $n' = \sqrt{n}$ et a pour épaisseur $e_0$ précédemment déterminée. On considère finalement que le milieu est non dispersif et $n$ ne dépend pas de $\lambda$.
a) Donner l'expression de l'intensité réfléchie pour une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda$ en fonction de $I_0 = \left(E_1^0\right)^2/2$, $\lambda$ et $\lambda_0$. On précisera la signification de $I_0$.
b) Calculer les longueurs d'onde des radiations non réfléchies et de celles qui le sont le plus.
c) Calculer les intensités réfléchies pour $\lambda = 0{,}4\ \mu\text{m}$ et $\lambda = 0{,}8\ \mu\text{m}$ en fonction de $I_0$ et tracer l'intensité réfléchie en fonction de $\lambda$, $I(\lambda)$.
d) Quelle teinte résultante du phénomène de réflexion de la lumière polychromatique observe-t-on en P ?

# Partie II

## OPTIQUE CRISTALLINE

# Partie II
# Milieux anisotropes – biréfringence

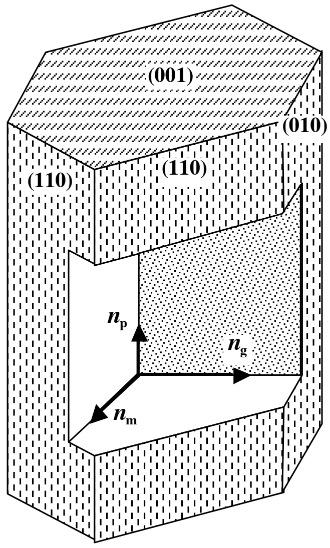
### Exercice II-1 – La cordiérite

La cordiérite cristallise dans le système orthorhombique. C'est un biaxe d'indices optiques principaux :

$n_{\mathrm{m}} = 1{,}555$

$n_{\mathrm{p}} = 1{,}530$

l'indice $n_{\mathrm{g}}$ est inconnu.

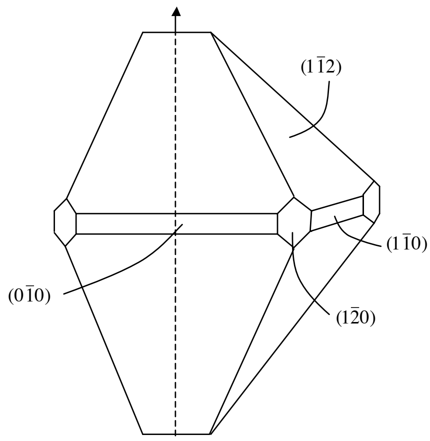



On taille dans ce cristal une lame L parallèlement à la face (001).

1) On dirige sur cette lame un rayon lumineux monochromatique contenu dans un plan (plan d'incidence) parallèle au plan (100). Pour la valeur $i_0 = 70°$ de l'angle d'incidence on n'observe plus qu'un seul rayon émergent : calculer l'angle $V$ de l'un des axes optiques avec la normale à la lame L.
2) Démontrer la formule liant $V$ et les indices principaux. À partir du résultat précédent, calculer l'indice principal $n_{\mathrm{g}}$.

### Exercice II-2 – La cérusite

La cérusite (carbonate de plomb) se présente en cristaux : stalactites à la partie supérieure des filons plombifères. Ces cristaux sont orthorhombiques avec pour faces (010) (110) (120) (112) (021) et leurs homologues.




Le cristal de cérusite présente trois indices principaux :

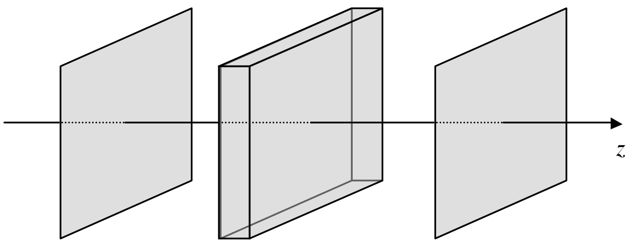
$n_{\mathrm{g}} = 2{,}0780$

$n_{\mathrm{m}} = 2{,}0763$

$n_{\mathrm{p}} = 1{,}8037$

L'axe principal de l'ellipsoïde portant $n_{\mathrm{m}}$ est perpendiculaire à (010).

1) Calculer l'angle entre les axes optiques du cristal.
2) Le cristal est-il un biaxe positif ou négatif ?
3) Dans ce cristal, on a taillé une lame L dont la face d'entrée est parallèle à (010). On l'observe en orthoscopie et en lumière monochromatique $\lambda = 0{,}5\ \mu\mathrm{m}$ entre un polariseur P et un analyseur A croisés. On oriente L dans son plan de sorte que ses lignes neutres soient à $\pi/4$ de la vibration sortant du polariseur.
   Elle est disposée suivant le montage ci-après.

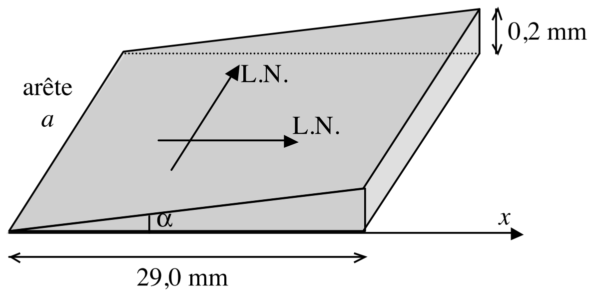


Quelle sera l'intensité $I$ sortant du montage en fonction de l'intensité incidente $I_0$, sachant que l'épaisseur de la lame étudiée est $e = 2$ mm ? On rappelle que l'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration.

**Exercice II-3**

On s'intéresse à l'évolution de la biréfringence d'un milieu nématique (cristal liquide) en fonction de la température. Afin d'étudier ses variations, on oriente les molécules du cristal liquide parallèlement à l'arête $a$ d'un prisme creux d'angle au sommet $\alpha$ très petit. (l'orientation des molécules est obtenue par un traitement chimique et mécanique des faces internes du prisme creux). Le comportement optique du cristal liquide est, dans ces conditions, celui d'un "coin" monocristallin (type coin de quartz) dont les lignes neutres (L.N.) sont respectivement parallèle et perpendiculaire à l'arête $a$. Les dimensions du prisme creux sont données sur le schéma ci-dessous, à savoir :

| | |
|---|---|
| côtés du prisme : | 29,0 mm |
| base du prisme : | 0,2 mm |




1) Calculer l'angle $\alpha$ en radians.

On observe ce coin en orthoscopie et en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0$, entre polariseur P et analyseur A croisés. Il apparaît un système de franges alternativement brillantes et noires, les lignes neutres du coin étant à $\pi/4$ de P et de A.

2) Précisez l'orientation de ces franges par rapport à l'arête $a$.
3) Écrire les conditions respectives pour lesquelles il y a :
   - une frange noire
   - une frange brillante
4) Établir la relation donnant l'abscisse $x$ (comptée à partir de l'arête du coin) de la frange brillante d'ordre $p$.
5) En déduire les relations donnant l'interfrange $i$ et le nombre $N$ de franges par unité de longueur.
6) Établir la relation donnant la biréfringence $\Delta n$ du milieu cristallin en fonction de $N$, de $\lambda_0$ et de l'angle $\alpha$.
7) À la température ambiante de 20° C, pour la radiation $\lambda_0 = 5890$ Å, on observe 2,5 franges/mm. Calculer $\Delta n$.

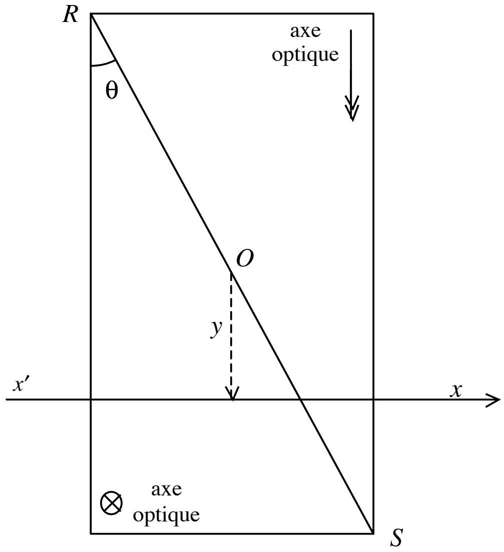
### Exercice II-4 – Le biprisme de quartz

Le quartz est uniaxe positif d'indices principaux :

$n_e = 1{,}553$

$n_o = 1{,}545$

Dans un cristal de quartz on a taillé deux prismes rectangles d'angle de coupe $\theta = 5°$. Ils sont accolés par la face hypoténuse $RS$ suivant la figure ci-contre. Les axes optiques sont croisés. L'ensemble constitue une lame à faces parallèles que l'on observe entre polariseur P et analyseur A parallèles. Les axes optiques sont à $\pi/4$ de P.




1) On éclaire cette lame en orthoscopie avec une lumière monochromatique $\lambda = 5461$ Å.
   a) Calculer la différence de marche pour un rayon incident $x'x$ à la cote $OH = y$ du point $O$ centre géométrique de la lame.
   b) Montrer que l'on observe des franges alternativement brillantes et noires. Qu'observe-t-on au centre du champ ?
   c) Calculer l'interfrange $i$, c'est-à-dire la distance linéaire entre deux franges brillantes successives. Faire l'application numérique.

2) On éclaire maintenant le même montage en lumière blanche. Les longueurs d'onde sont comprises entre $4000$ et $7000$ Å.
   a) Quel est l'aspect de la frange centrale ?
   b) On considère la frange qui apparaît à la cote $y_0 = 0{,}4$ cm du centre $O$. Combien, dans cette frange, y a-t-il de radiations éteintes ?

### Exercice II-5 – La sillimanite

La sillimanite $Al_2SiO_5$ est un silicate d'alumine anhydre qui cristallise dans le système orthorhombique. C'est un cristal biaxe d'indices principaux :

$n_g = 1{,}680$

$n_m = 1{,}670$

$n_p = 1{,}659$

1) Dans ce cristal, on taille une lame perpendiculairement à l'axe principal de grand indice. Cette lame est observée entre polariseur P et analyseur A croisés et orientés à $45°$ par rapport à ses lignes neutres. En lumière blanche parallèle, la teinte qui apparaît est rouge violacé du $2^{\text{ème}}$ ordre. Quelle est l'épaisseur de la lame ?
2) Calculer l'angle $2V$ que font entre eux les axes optiques.
3) Dans le cristal de sillimanite, on taille maintenant une lame perpendiculairement à l'axe principal d'indice moyen $n_m$. Son épaisseur est $e = 200$ µm. Cette lame est placée entre polariseur et analyseur croisés, à $45°$ de ses lignes neutres et éclairée en lumière blanche parallèle ( $0{,}4\ \mu\text{m} \le \lambda < 0{,}75\ \mu\text{m}$ ). La lumière sortant du montage éclaire la fente d'un spectroscope à prisme.
   Expliquer pourquoi on observe des cannelures noires à travers la lunette du spectroscope. Donner les longueurs d'onde de ces cannelures noires.

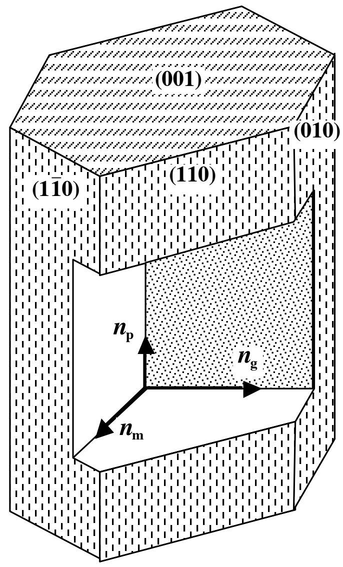
### Exercice II-6 – La cordiérite

La cordiérite $Mg_3(Al_2Fe_2)_3Si_8O_{28}$ cristallise dans le système orthorhombique. C'est un cristal biaxe négatif d'indices principaux :

$$n_g = 1{,}570$$

$$n_m = 1{,}555$$

$$n_p = 1{,}530$$




1) Une lame mince est taillée dans ce cristal perpendiculairement à l'axe principal de petit indice. On l'observe au microscope polarisant en lumière blanche entre polariseur et analyseur croisés. On obtient la teinte sensible de premier ordre. Calculer l'épaisseur $e$ de la lame cristalline étudiée.
2) Établir la formule permettant de calculer l'angle $2V$ des axes optiques. Calculer cet angle après l'avoir défini sur un schéma.

### Exercice II-7 – La staurotide

On considère un cristal de staurotide que l'on se propose d'observer en lumière parallèle. C'est un biaxe positif dont les indices principaux sont :

$$n_g = 1{,}755$$

$$n_m = 1{,}748$$

$$n_p = 1{,}742$$

On désire tailler dans ce cristal une lame cristalline L qui, éclairée en lumière blanche, apparaisse teinte sensible d'ordre 2 entre polariseur et analyseur croisés.

1) Comment doit-on orienter le plan de coupe (faces de la lame) par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde des indices pour que l'épaisseur à donner à cette lame soit la plus petite possible ?
2) Sachant que la teinte sensible apparaît entre polariseur et analyseur croisés si la lame est onde pour la longueur d'onde $\lambda = 560$ nm , calculer l'épaisseur que devra avoir cette lame.
3) Le spectre de longueurs d'onde de la lumière blanche s'étendant de $400$ à $700$ nm , pour quelles radiations cette lame peut-elle être utilisée comme lame quart d'onde ?
4) Pour l'une des radiations déterminées en question 3, on envoie sur cette lame un faisceau de rayons de lumière polarisée rectilignement. La vibration rectiligne P fait un angle $\alpha$ avec l'une des lignes neutres de la lame L. Montrer analytiquement quelle est la forme de la vibration sortant de la lame.

### Exercice II-8 – La calcite

La calcite ou spath appartient au système rhomboédrique. C'est un uniaxe négatif. Les indices principaux sont :

$$n_o = 1{,}658$$

$$n_e = 1{,}486$$

À partir d'un cristal de calcite, on a obtenu une lame mince L taillée parallèlement à l'axe optique. Cette lame observée en lumière parallèle entre polariseur P et analyseur A croisés, l'axe optique étant à 45° de P et A, apparaît jaune verdâtre. Afin de déterminer l'ordre du spectre auquel appartient cette teinte, on utilise un coin de quartz compensateur. On rappelle que le quartz est un uniaxe positif.

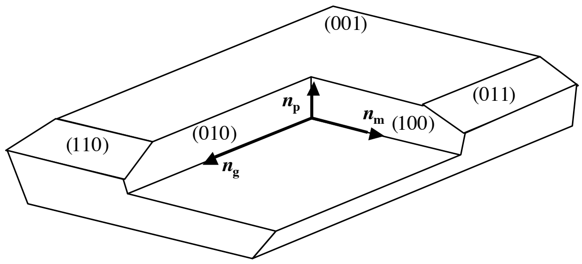
1) Préciser sur un schéma les orientations de P et de A ainsi que celles des axes optiques de la lame L et du coin de quartz lorsqu'il y a compensation.

2) Sachant qu'il y a compensation lorsque le milieu du coin est dans le champ d'observation et qu'à l'aide de ce coin on peut compenser jusqu'à la fin du 5[ème] ordre, préciser à quel ordre appartient la teinte ci-dessus. Calculer l'épaisseur de la lame L.

## Exercice II-9 – La barytine

La barytine $BaSO_4$ cristallise dans le système orthorhombique.
Elle se présentent généralement sous la forme de cristaux laissant subsister les faces $(001)$ et faisant apparaître des troncatures du type $(011)$ et $(101)$. L'axe principal de petit indice est perpendiculaire à $(001)$. D'autre part :

$$n_g = 1{,}648$$
$$n_m = 1{,}637$$
$$n_p = 1{,}636$$



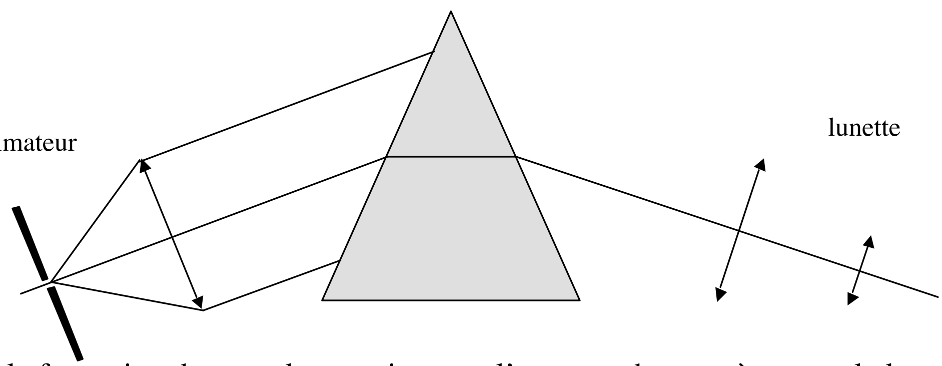

### 1) Étude du cristal en lumière parallèle

Une lame mince $L_1$ a été taillée dans le cristal de barytine perpendiculairement à l'axe principal de petit indice. Elle est éclairée orthogonalement en lumière blanche parallèle et observée entre polariseur P et analyseur A croisés. Les lignes neutres sont orientées à $\pi/4$ de P et A.
On observe une teinte indigo. Afin de lever l'indétermination quant à l'ordre du spectre auquel cette teinte appartient, on utilise un coin de quartz de longueur totale $h$ et qui permet de compenser au maximum jusqu'au début du 4[ème] ordre. Ce coin, convenablement orienté par rapport aux lignes neutres de $L_1$, permet d'obtenir la compensation de la différence de marche introduite par $L_1$. La longueur $x$ de coin nécessaire est telle que $x$ est un peu supérieur à $2h/3$.

a) Pour qu'il y ait compensation, préciser sur un schéma l'orientation de P et A, les lignes neutres de $L_1$ et du coin de quartz ainsi que les axes rapides (axes correspondant à la direction de la vibration rapide) de $L_1$ et du coin.
b) Calculer l'épaisseur $e$ de la lame.

### 2) Étude d'un spectre cannelé

On considère maintenant une lame $L_2$ taillée perpendiculairement à l'axe principal de petit indice dans le cristal de barytine. Son épaisseur $e = 420\ \mu m$. On l'observe comme en A entre P et A croisés en lumière blanche parallèle ($0{,}4\ \mu m < \lambda < 0{,}75\ \mu m$). Le lignes neutres de $L_2$ sont à $\pi/4$ de P et A.
La lumière sortant du montage sert à éclairer la fente d'un spectroscope à prisme dont la lunette a un objectif de distance focale $f = 15$ cm.




a) Expliquer la formation de cannelures noires que l'on peut observer à travers la lunette.
b) Calculer les longueurs d'onde de ces cannelures.

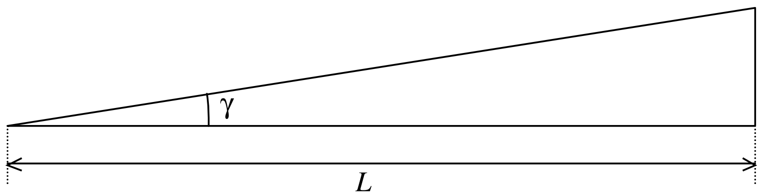
## Exercice II-10 – Le zircon

Le Zircon $ZrSiO_4$ cristallise dans le système quadratique. Optiquement, il est uniaxe positif, les indices principaux étant :

$$n_e = 1{,}9802$$

$$n_o = 1{,}9282$$

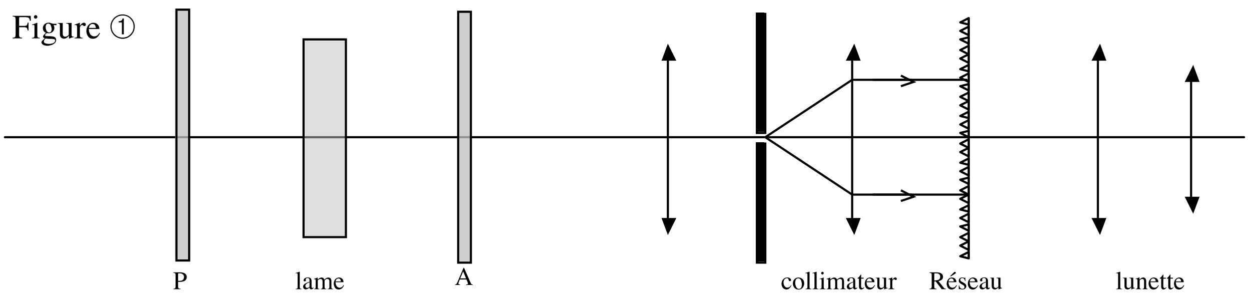
1) Dans ce cristal de zircon, on a taillé une lame mince parallèlement à l'axe optique. On l'observe au microscope polarisant en lumière parallèle (orthoscopie) entre polariseur P et analyseur A croisés.
   a) La teinte observée étant indigo de 2ème ordre, quelle est l'épaisseur $e$ de cette lame ?
   b) On dispose d'un coin de quartz compensateur de longueur totale utile $L = 3\,\text{cm}$ et dont la biréfringence $\Delta n = 0{,}01$.




   Si l'on veut que la compensation ait lieu au milieu du coin, calculer l'angle $\gamma$.
   c) Avec ce coin ainsi taillé, combien de fois observerait-on une teinte sensible si l'on place ce coin entre polariseur et analyseur croisés, l'axe optique étant à $\pi/4$ de P et A.

2) On utilise maintenant une lame de zircon toujours taillée parallèlement à l'axe optique, mais dont l'épaisseur est de $e' = 100\ \mu\text{m}$.
   On l'éclaire en lumière blanche parallèle ($0{,}4\ \mu\text{m} < \lambda < 0{,}75\ \mu\text{m}$). Elle est placée entre polariseur P et analyseur A parallèles, l'axe optique étant à $\pi/4$ de P et A.
   La lumière qui émerge de ce montage est reçue sur la fente d'un spectroscope à réseau, le faisceau tombant sur le réseau est perpendiculaire à ce dernier (fig. ①).

Figure ①




   Donner les longueurs d'onde des radiations manquant dans le spectre obtenu.

3) On a pu tailler à partir de cristaux de zircon deux prismes dont la section par un plan perpendiculaire à l'arête est un triangle rectangle d'angle $\varepsilon = 2°$ (fig. ②). Ils sont collés par la face opposée à l'angle droit. L'axe optique d'un des prismes est perpendiculaire à celui du second prisme (fig. ③ et fig. ④). Ce dispositif est placé entre P et A croisés, les axes optiques étant à $\pi/4$ de P et A (fig. ⑤). Il est traversé par un faisceau de rayons parallèles entre eux et parallèles à la direction $AA'$ et de longueur d'onde $\lambda = 5360\ \text{Å}$.

Figure ②

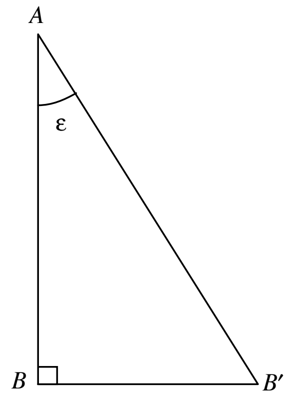



Figure ③

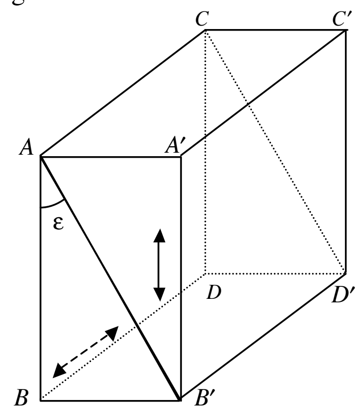



Figure ④

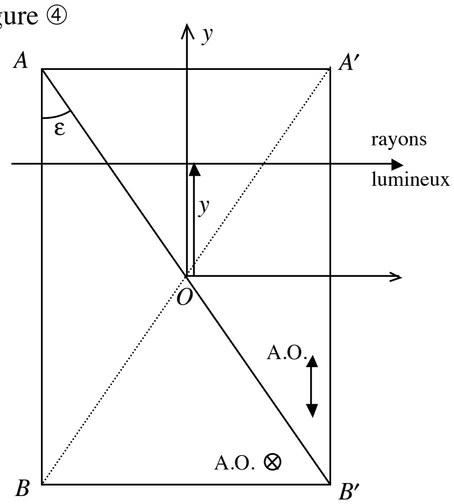
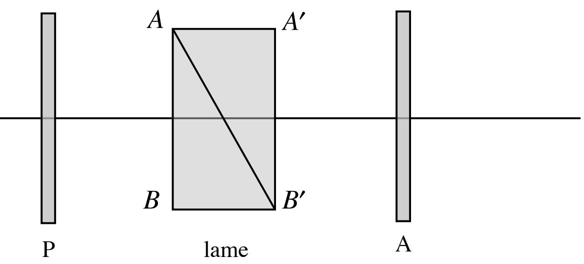



Figure ⑤




a) Pour un rayon lumineux traversant l'ensemble $AA'BB'$ à la côte $y$ du point $O$, calculer la différence de marche $\delta$.
b) Montrer que l'on observe des cannelures noires dont on donnera la côte $y$ comptée à partir du point $O$.
c) Si $AB = 2H = 17$ mm, combien observe-t-on de franges noires dans tout le champ ?

## Exercice II-11

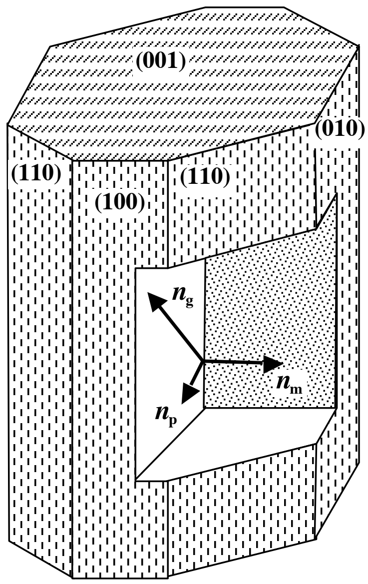
Le béryl $Be_3Al_2Si_6O_{18}$ cristallise dans le système hexagonal. C'est un uniaxe négatif. On dispose d'un cristal de béryl dont la biréfringence est $\Delta n = 0{,}007$. Dans cet échantillon, on a taillé une lame mince parallèlement à l'axe optique dont l'épaisseur est $e = 80\ \mu\text{m}$ .

1) On l'observe en lumière blanche parallèle, entre polariseur et analyseur croisés et orientés à 45° des lignes neutres de la lame de béryl. Quelle est la teinte qui apparaît ? Préciser l'ordre du spectre auquel elle appartient.
2) On dispose d'une lame de quartz uniaxe positif de biréfringence $\Delta n' = 0{,}0091$. Comment peut-on compenser, à l'aide de cette lame, le déphasage introduit entre les composantes de la vibration lumineuse qui traverse la lame de béryl parallèlement à ses lignes neutres ? Préciser à l'aide d'un schéma l'orientation de la lame de quartz par rapport à la lame de béryl en donnant en particulier l'orientation relative des axes optiques. On indiquera également sur ce schéma les axes lents et rapides de ces lames.

**Exercice II-12**

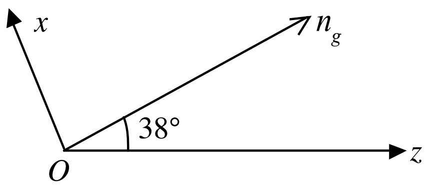
Le cristal de diopside CaMg(SiO3)2 appartient au système monoclinique. Les faces observées sont $(100)$ $(010)$ $(001)$ et $(110)$. Les indices optiques principaux sont :

$$n_g = 1{,}730$$
$$n_m = 1{,}708$$
$$n_p = 1{,}702$$




L'orientation des axes principaux de l'ellipsoïde des indices par rapport aux axes $a$, $b$, $c$ (ou axes cristallographiques $x$, $y$, $z$) est telle que l'axe portant $n_m$ est perpendiculaire à $(010)$.

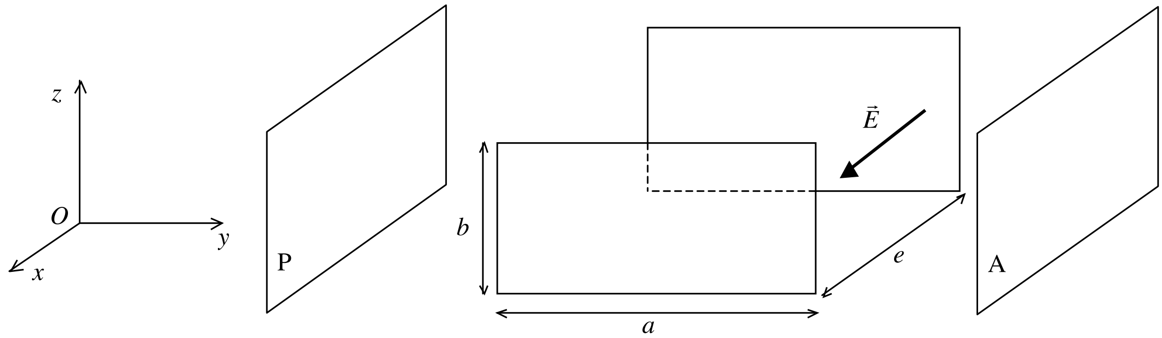
Dans le plan $(010)$ l'axe portant $n_g$ est à 38° de $Oz$.




1) Une lame mince $L_1$ taillée dans un tel cristal a sa face d'entrée parallèle à $(010)$. On l'observe en lumière parallèle entre polariseur P et analyseur A croisés. Les lignes neutres sont à $\pi/4$ de P et A. La teinte qui apparaît est teinte sensible. Pour connaître l'ordre de la teinte, on utilise une lame auxiliaire $L_2$ teinte sensible $\delta_0 = 560$ nm. Pour l'une des orientations de $L_2$ par rapport à $L_1$, les lignes neutres étant deux à deux parallèles, on obtient encore une teinte sensible. Mais si l'on tourne $L_2$ de $\pi/2$ à partir de la première orientation, on obtient un champ d'observation noir.
   a) Préciser dans chacun des deux cas les orientations des axes rapides et lent de $L_1$ par rapport à ceux de $L_2$.
   b) À partir de ces données, calculer l'épaisseur de la lame $L_1$.
2) Le biaxe considéré est positif.
   a) Calculer l'angle $2V$ des axes optiques.
   b) Sachant que le cristal est taillé perpendiculairement à $n_g$, quel est l'angle d'émergence d'un rayon cheminant dans le cristal parallèlement à l'un des axes optiques.

**Exercice II-13 – Cellule de Kerr (sujet extrait d'annale)**

Dans une cuve contenant du chlorobenzène, on a plongé deux électrodes rectangulaires de côté $a = 20$ cm et $b = 10$ cm. Leur distance est $e = 5$ mm. Elles sont orientées comme l'indique la figure par rapport au trièdre $(x,y,z)$. On observe cette cuve entre polariseur P et analyseur A de directions de polarisation *parallèles* en lumière blanche. Le faisceau incident est formé de rayons parallèles et traverse la cuve parallèlement à l'axe $(Oy)$.



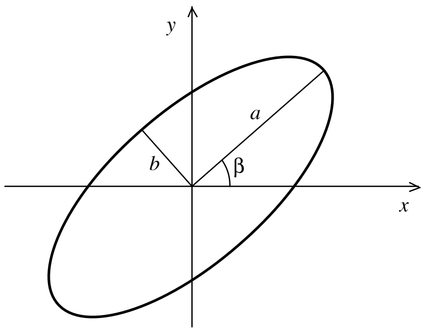
Si on applique entre les armatures une différence de potentiel $V_0$, le champ électrique $\vec{E}$ horizontal ainsi créé rend le liquide biréfringent. *Ce dernier devient équivalent à un uniaxe positif dont l'axe optique a la direction du champ électrique* $\vec{E}$. La différence entre les indices extraordinaire et ordinaire est $\Delta n = B\lambda E^2$ pour la longueur d'onde $\lambda$, $B$ étant une constante caractéristique du milieu placé entre les armatures. Pour le chlorobenzène, $B = 2{,}8\times10^{-13}$ S.I.

**A –** Dans un premier temps, on admettra que le champ électrique $E$ est uniforme entre les armatures et vaut $E = V_0/e$. De plus, polariseur et analyseur sont orientés à $\pi/4$ de $\vec{E}$.

1) Donner l'orientation des lignes neutres de la cuve appelée cellule de Kerr, et préciser les indices correspondant à chacune de ces lignes.
2) Exprimer la différence de longueur de chemin optique $\delta$ entre les deux états-P introduite par la traversée de la cuve en fonction de $B$, $\lambda$, $V_0$, $a$ et $e$. En déduire le déphasage correspondant $\varphi$.
3) On fait varier $V_0$ de 25 000 à 50 000 Volts.
   a) Pour certaines valeurs $V_1$ de $V_0$, le champ d'observation est noir. Expliquer le phénomène et calculer les valeurs numériques de $V_1$ (*on calculera d'abord l'ordre d'interférence maximum correspondant à* $(V_0)_{\max} = 50\,000$ Volts*, l'ordre d'interférence minimum correspondant à* $(V_0)_{\min} = 25\,000$ Volts*, pour ensuite en déduire les valeurs* $V_1$ *intermédiaires*).
   b) Pour quelles valeurs $V_2$ de $V_0$, le champ d'observation a une intensité maximale. Expliquer le phénomène et calculer les valeurs numériques de $V_2$.
   c) Pour des valeurs quelconques de $V_0$ et de l'angle $\alpha$ entre la direction de transmission du polariseur et l'axe $(Ox)$, montrer que la vibration émergente de la cuve est polarisée elliptiquement et déterminer l'orientation de cette polarisation par rapport aux lignes neutres de la cellule de Kerr (*voir rappel page suivante*).

*On rappelle l'équation d'une ellipse inclinée d'un angle* $\beta$ *par rapport à l'axe* $x$ *:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\tan(2\beta)=1$$




**B –** Dans un second temps, on considère une variation plus réaliste du potentiel entre les armatures. L'armature en $x = 0$ est portée au potentiel $V_0$ tandis que celle en $x = e$ est reliée à la terre ; on a alors entre les armatures $V(x) = V_0\left(1 - x^2/e^2\right)$. De plus, la solution de chlorobenzène est remplacée par une solution de constante $B'$ inconnue.

1) Sachant que $E(x) = -\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x$, calculer la différence de longueur de chemin optique $\delta$ entre les deux états-P introduite par la traversée de la cuve en fonction $B'$, $\lambda$, $V_0$, $e$, $a$ et $x$.

2) Expliquer la formation d'un système de franges alternativement sombres et brillantes parallèles à l'axe $(Oz)$.

3) Calculer les positions $x_{\max}$ des franges brillantes. La distance séparant deux franges brillantes consécutives est-elle constante ?

4) On mesure la distance séparant la première frange (d'ordre 0) et la seconde (d'ordre 1) pour $V_0 = 40\,000$ Volts et trouvons $d = 2{,}2$ mm. En déduire la valeur numérique de $B'$.

# Échelle des teintes de Newton

| Différence de marche $\delta = e(n_2 - n_1)$ en nm (1 nanomètre = $10^{-9}$ m) | Échelle I<br>Polariseur ⊥ Analyseur | Échelle II<br>Polariseur // Analyseur |
|---|---|---|
| **Premier ordre** | | |
| 0 | noir | blanc |
| 40 | gris de fer | blanc jaunâtre |
| 97 | gris lavande | blanc jaunâtre |
| 158 | bleu gris | blanc brunâtre |
| 218 | gris plus clair | brun jaune |
| 234 | blanc verdâtre | brun |
| 259 | blanc | rouge clair |
| 267 | blanc jaunâtre | rouge carmin |
| 275 | jaune paille pâle | brun rouge sombre |
| | | *teinte sensible* |
| 281 | jaune paille | violet sombre |
| 306 | jaune clair | indigo |
| 332 | jaune vif | bleu |
| 430 | jaune brun | bleu gris |
| 505 | orangé rougeâtre | vert bleuâtre |
| 536 | rouge chaud | vert pâle |
| 551 | rouge plus foncé | vert jaunâtre |
| 560 | *teinte sensible* : lie de vin | |
| **Deuxième ordre** | | |
| 565 | pourpre | vert plus clair |
| 575 | violet | jaune verdâtre |
| 589 | indigo | jaune d'or |
| 664 | bleu de ciel | orangé |
| 728 | bleu verdâtre | orangé brunâtre |
| 747 | vert | rouge carmin clair |
| 826 | vert plus clair | pourpre |
| | | *teinte sensible* |
| 843 | vert jaunâtre | pourpre violacé |
| 866 | jaune verdâtre | violet |
| 910 | jaune pur | indigo |
| 948 | orangé | bleu sombre |
| 998 | orangé rougeâtre vif | bleu verdâtre |
| 1101 | rouge violacé foncé | vert |
| 1120 | *teinte sensible* : pourpre violacé | |
| **Troisième ordre** | | |
| 1128 | violet bleuâtre clair | vert jaunâtre |
| 1151 | indigo | jaune sale |
| 1258 | bleu (teinte verdâtre) | couleur chair |
| 1334 | vert de mer | rouge brun |
| 1376 | vert brillant | violet |
| 1426 | jaune verdâtre | bleu violacé grisâtre |
| … | … | … |

# Partie III

## ÉLASTICITÉ, CONTRAINTE ET DÉFORMATION DES ROCHES

# Partie III – Chapitre 1
# Introduction à l'élasticité

### Exercice III-1

Le module de Young $E$ est parfois appelé module d'élasticité. Il est généralement exprimé en gigapascal (GPa), mais parfois aussi dans d'autres unités. Convertissez les modules de Young suivants, exprimés en unité que l'on peut trouver dans les livres de physique, en GPa :

a) Aluminium $E_{\text{Al}} = 7 \times 10^{10}\ \text{N.m}^{-2}$

b) Cuivre $E_{\text{Cu}} = 124\ \text{kN.mm}^{-2}$

c) Acier $E_{\text{acier}} = 2{,}1 \times 10^{6}\ \text{kg.cm}^{-2}$

### Exercice III-2

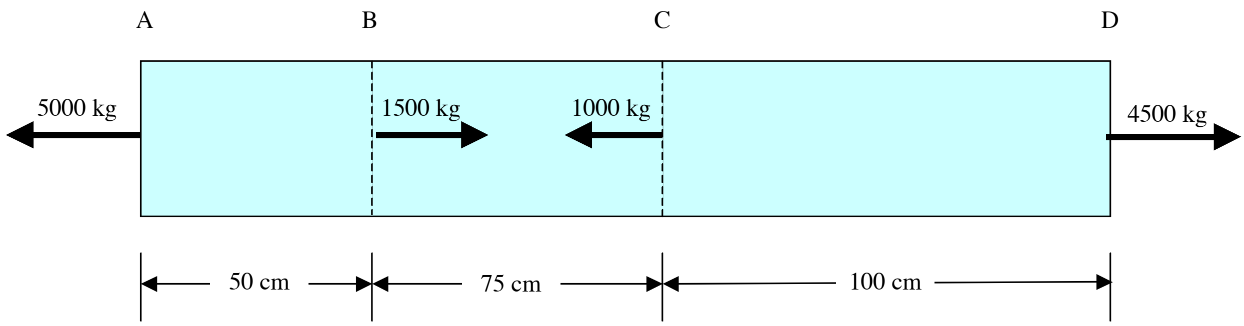
Calculer l'allongement total d'un barreau initialement rectiligne de longueur $L$, de section $S$ et de module d'élasticité $E$, sous l'effet d'une charge de tension $F$ appliquée à ses extrémités.

### Exercice III-3

Un ruban de chaîne d'arpenteur de $L = 25\ \text{m}$ de long a une section de $a = 6\ \text{mm}$ sur $b = 0{,}8\ \text{mm}$. Calculez l'allongement du ruban développé et maintenu raide par une force créée par une masse $m = 6\ \text{kg}$. Le module d'élasticité est de $E = 2{,}1 \times 10^{6}\ \text{kg.cm}^{-2}$.

### Exercice III-4

Un barreau d'acier de section $s = 5\ \text{cm}^2$ est sollicité par les forces représentées sur la figure :




Calculez l'allongement total du barreau. Pour l'acier $E = 210\ \text{GPa}$.

## Exercice III-5

Déterminer l'allongement d'un barreau de longueur $L$ de section constante $S$, de masse volumique $\rho$, suspendu verticalement et soumis seulement à son propre poids (le barreau est droit au départ).

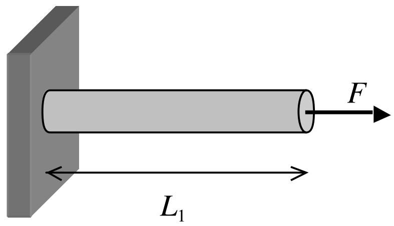
Appliquez ce résultat pour un barreau de marbre ($E = 26\,\text{GPa}$) de section carrée $S$ de $10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}$ et de longueur $L = 1\,\text{m}$. Masse volumique du marbre : $\rho = 2700\,\text{kg.m}^{-3}$.

## Exercice III-6

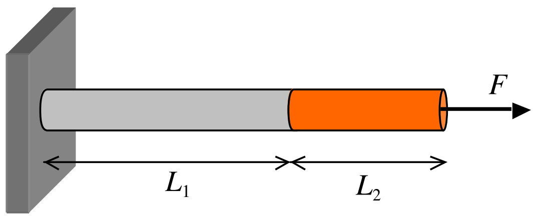
Une part de gâteau en gelée de forme parallélépipédique a une surface supérieure $S = 15\,\text{cm}^2$ et une hauteur $h = 3\,\text{cm}$. Lorsqu'on applique une force de cisaillement $F = 0{,}5\,\text{N}$ sur la surface supérieure, elle de déplace de 4 mm par rapport à la surface inférieure. Quels sont la contrainte $\tau$, la déformation $\gamma$ et le module de cisaillement de la gélatine $G$ ?

## Exercice III-7 – Barreaux en étirement (sujet extrait d'annale)

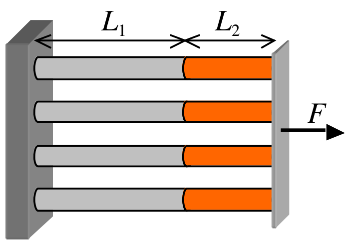
1) On considère un barreau cylindrique en acier de longueur $L_1 = 50$ cm et de section $S = 10\,\text{cm}^2$. Il est fixé à une de ses extrémités à un mur, et on exerce à l'autre extrémité une force de traction $F = 120\,\text{N}$.
   On donne pour l'acier :
   module de Young : $E_a = 200$ GPa
   module de Poisson : $\nu_a = 0{,}3$
   a) Quelle est l'allongement $\Delta L_1$ du barreau ?
   b) Quelle est sa variation de volume $\Delta V_1$ ?




2) On fabrique un barreau cylindrique, de section $S = 10\,\text{cm}^2$, constitué d'une longueur $L_1 = 50$ cm d'acier et d'une longueur $L_2 = 30$ cm de cuivre. Il est fixé à une de ses extrémités à un mur, et on exerce à l'autre extrémité une force de traction $F = 120\,\text{N}$.
   On donne pour le cuivre :
   module de Young : $E_c = 124$ GPa
   a) Quelle est l'allongement $\Delta L_2$ du barreau de cuivre ?
   b) Quelle est l'allongement total $\Delta L_{tot}$ du barreau ?




3) On dispose 4 des barreaux de la question 2 en parallèle et fixés à une de leurs extrémités à un mur. À l'autre extrémité, on les relie par une plaque considérée sans épaisseur. On applique une force de traction $F = 120\,\text{N}$. Quel est l'allongement $\Delta L$ des barreaux?



**Exercice III-8**

Une éprouvette cylindrique, de longueur $l = 10\ \text{cm}$, de diamètre $\phi = 8\ \text{mm}$, est soumise à une charge $M = 30\ \text{kg}$. Son allongement est de $10\ \mu\text{m}$ et son augmentation de volume est de $0,25\ \text{mm}^3$. Calculer son module de Young $E$ et le module de Poisson $\nu$.

**Exercice III-9**

Un câble d'acier de diamètre $\phi = 6\ \text{mm}$ est utilisé pour le levage dans la construction immobilière. On suspend à l'extrémité inférieure une charge de $m = 200\ \text{kg}$ au câble de longueur $L = 150\ \text{m}$. Calculer l'allongement total du câble.

Acier : - masse volumique $\rho = 0,0078\ \text{kg.cm}^{-3}$

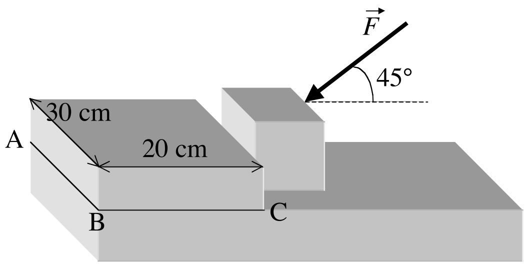
- module de Young $E = 2,1 \times 10^6\ \text{kg.cm}^{-2}$.

**Exercice III-10**

Un barreau carré de cuivre de côté $a = 5\ \text{cm}$ et de longueur $L = 8\ \text{m}$ est soumis à une force de traction axiale créée par une charge $M = 32\,000\ \text{kg}$. Calculer la diminution de dimension latérale due à cette charge. Pour le cuivre $E = 12,4 \times 10^{10}\ \text{Pa}$, $\nu = 0,36$.

**Exercice III-11**

On considère une planche sur laquelle on crée une butée. La force, inclinée de 45° par rapport à l'horizontale, tend à cisailler la butée le long du plan A-B-C. Si la force est $F = 40\,000\ \text{N}$, calculer la contrainte moyenne de cisaillement sur le plan.




**Exercice III-12 – Fracture osseuse (sujet extrait d'annale)**

Le fémur est le grand os de la cuisse d'une longueur voisine de 40 cm (on prendra $l = 40\ \text{cm}$). Sa section transversale a une aire $S = 3\ \text{cm}^2$. Il possède un module de Young $E = 17,2\ \text{GPa}$. Il se fracture lorsque la déformation de compression est supérieure à 1%. On prendra : $g = 9,81\ \text{m.s}^{-2}$.

1) Quelle est la déformation par compression du fémur pour une charge correspondant à la moitié du poids d'un homme de masse $m = 70\ \text{kg}$ ?
2) Quelle est la charge maximale, en kilogrammes, que peut supporter le fémur ?

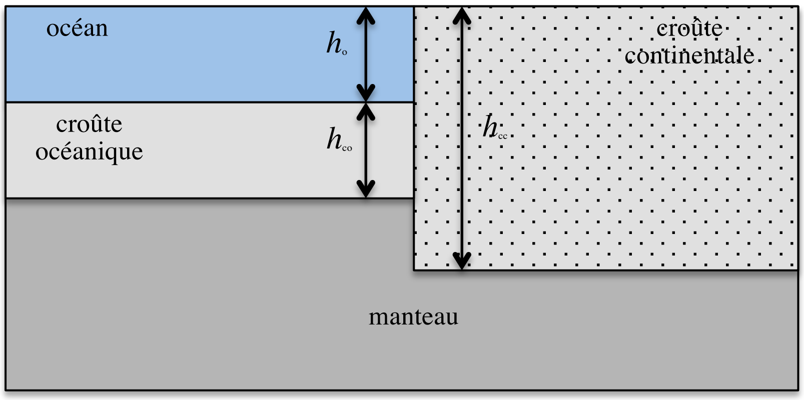
# Partie III – Chapitre 2
# Contrainte et déformation dans les solides terrestres

### Exercice III-13

L'épaisseur moyenne de la croûte océanique est de $h_{co} = 6\ \text{km}$, sa densité est de $\rho_{co} = 2\,900\ \text{kg/m}^3$. Elle est recouverte par une épaisseur de $h_e = 5\ \text{km}$ d'eau, de masse volumique $\rho_e = 1000\ \text{kg/m}^3$, dans un bassin océanique. Déterminer la contrainte normale par unité de surface sur un plan horizontal à la base de la croûte océanique due au poids de la croûte et de l'eau du dessus.

### Exercice III-14

Soit le modèle ci-dessous tenant compte de la croûte continentale (épaisseur $h_{cc} = 35\ \text{km}$, densité $d_{cc} = 2{,}7$), du manteau (densité $d_m = 3{,}3$), de la croûte océanique (densité $d_{co} = 2{,}9$) et d'un océan (densité $d_o = 1{,}03$) en équilibre isostatique.




Quelle est l'épaisseur de la croûte océanique sous un bassin océanique de profondeur 7000 m ?

### Exercice III-15

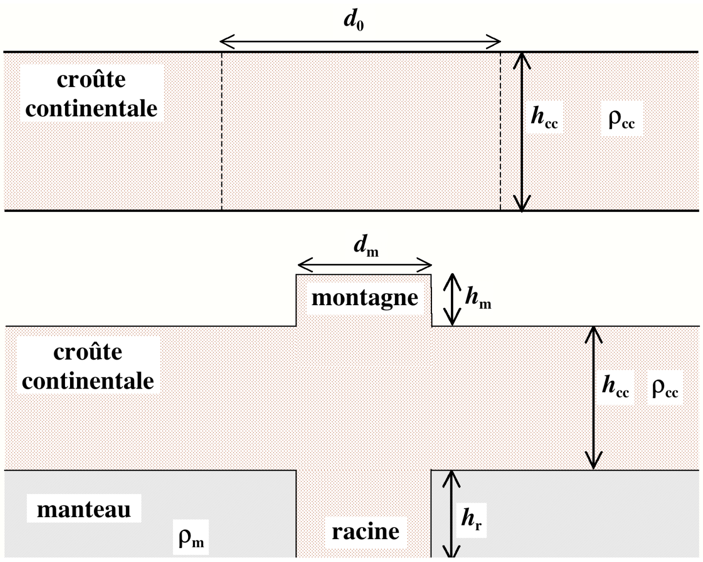
Un bloc de croûte continentale, d'épaisseur moyenne $h_{cc} = 35\ \text{km}$ et de densité $d_{cc} = 2{,}7$, repose sur le manteau supérieur de densité $d_m = 3{,}3$.

1) Calculer, d'après le principe d'isostasie, la hauteur $h$ surnageante de la croûte continentale par rapport à la surface du manteau et la profondeur de la racine $h_r$.
2) On suppose qu'une montagne de hauteur $h_m = 5\ \text{km}$ et de densité $d_{cc}$ est sur le dessus de la croûte continentale de la question 1).
   a) Calculer quelle doit est la hauteur de croûte continentale supplémentaire $h_s$ en dessous de la croûte d'épaisseur $h_{cc}$ en fonction des masses volumiques et de la hauteur de montagne $h_m$ pour avoir équilibre.
   b) Quelle est la hauteur totale de la croûte continentale $h'_{cc}$ ?

**Exercice III-16**

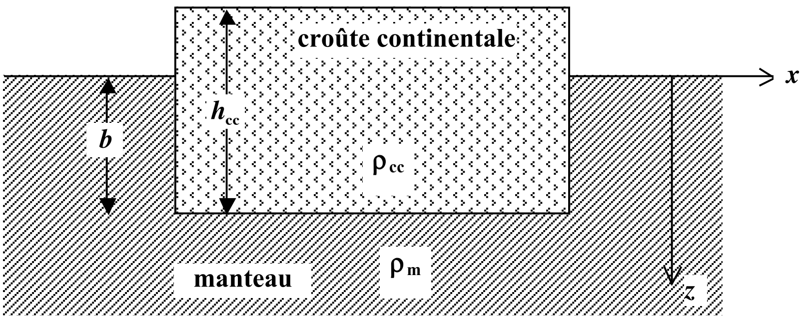
On considère une croûte continentale d'épaisseur $h_{cc} = 35$ km et de masse volumique $\rho_{cc} = 2\,700$ kg/m$^3$ qui repose sur le manteau supérieur de masse volumique $\rho_m = 3\,300$ kg/m$^3$. Par compression de la croûte continentale, il se forme une montagne de hauteur $h_m = 2\,500$ m.

1) Que vaut le facteur de compression $\beta$ ?
2) Quelle est la profondeur de la racine $h_r$ en fonction des épaisseurs et des masses volumiques ?
3) Quelle est l'épaisseur de la croûte au niveau de la chaîne de montagne $h'_{cc}$ ?
4) La montagne subit une érosion qui ramène la hauteur de la montagne à $h'_m = 500$ m. On suppose que cette montagne a la forme d'un plateau circulaire de $r = 3$ km de rayon et qu'elle se retrouve en équilibre isostatique.
   a) Calculer la nouvelle épaisseur de croûte de la montagne $h''_{cc}$.
   b) Calculer le volume de roche retiré par érosion.




**Exercice III-17 – Équilibre isostatique (sujet extrait d'annale)**

Le bloc de croûte continental, de masse volumique $\rho_{cc}$, indiqué ci-dessous est en état d'équilibre isostatique sur le manteau de masse volumique $\rho_m$ :




1) Utiliser le principe de l'équilibre isostatique pour exprimer $b$, la profondeur de la racine continentale, en fonction de $h$, l'épaisseur de la croûte continentale et des masses volumiques.
2) En supposant que le manteau adjacent au bloc continental est dans un état de contrainte lithostatique, et que sa densité est constante, calculer la force horizontale totale $F_m$ par unité de largeur qu'exerce le manteau sur la croûte continentale.

3) La contrainte horizontale $\sigma_{xx}$ dans le bloc continental est la somme de la contrainte lithostatique et d'une composante déviatorique :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{\text{lith}} + \Delta\sigma_{xx}$$

Calculer la valeur de cette contrainte déviatorique $\Delta\sigma_{xx}$ si le bloc continental est en équilibre (c'est-à-dire que la force exercée par le bloc continental sur le manteau adjacent est égale à la force exercée par le manteau sur le bloc continental).

4) On considère un plateau continental d'une épaisseur crustale de $h_{cc} = 70$ km, avec une masse volumique de la croûte $\rho_{cc} = 2700$ kg.m$^{-3}$ et une masse volumique du manteau $\rho_m = 3300$ kg.m$^{-3}$. On prendra $g = 9{,}81$ m.s$^{-2}$.

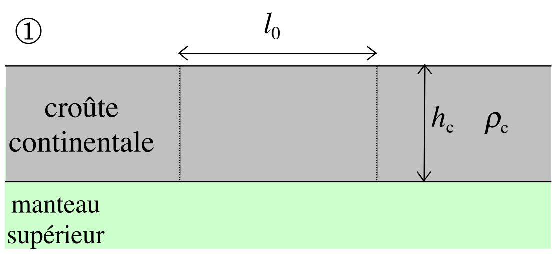
a) Calculer la profondeur de la racine $b$.

b) Calculer la force $F_m$.

c) Calculer la contrainte déviatorique $\Delta\sigma_{xx}$ nécessaire pour que le bloc soit en équilibre.

**Exercice III-18 – Formation d'une chaîne de montagne (sujet extrait d'annale)**

La croûte continentale de hauteur $h_c$ et de masse volumique $\rho_c$ repose sur le manteau supérieur de masse volumique $\rho_m$. Une largeur $l_0$ de croûte (cas ① de la figure) se contracte pour former une montagne de largeur $l$ (cas ② de la figure) de hauteur $h$ ; cette montagne possède une racine $h_r$.



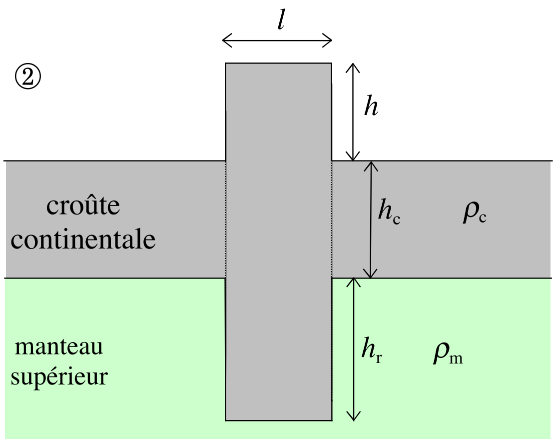

1) Donner l'expression du facteur de compression β.

2) Le volume de roche contracté se conserve. Donner l'expression de β en fonction des hauteurs $h$, $h_c$ et $h_r$.

3) En appliquant le principe d'isostasie, donner l'expression de la hauteur $h$ de montagne en fonction de $\rho_c$, $\rho_m$, $h_c$ et β.

4) Donner la hauteur de la racine $h_r$ en fonction de $\rho_c$, $\rho_m$, $h_c$ et β.

5) Application numérique : calculer $h$ et $h_r$ pour $\rho_c = 2700$ kg/m$^3$, $\rho_m = 3300$ kg/m$^3$, $h_c = 30$ km et $\beta = 1{,}7$.

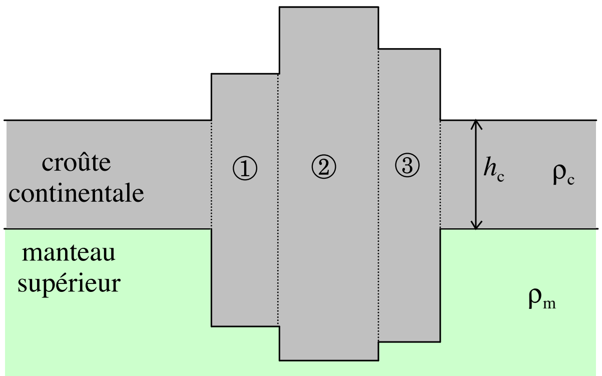



6) Il se forme 3 montagnes par contraction de la croûte continentale : les montagnes ①, ② et ③. On considère les valeurs numériques suivantes : $\rho_c = 2700$ kg/m$^3$, $\rho_m = 3300$ kg/m$^3$, $h_c = 30$ km.

a) La montagne ① a une hauteur de $h = 1$ km. Quelle est la valeur du facteur de contraction β ?

b) La montagne ② a une hauteur double de la montagne ①. Quelle est la valeur du facteur de contraction β ?

c) La montagne ③ a une profondeur de racine de $h_r = 7{,}4$ km. Quelle est la valeur du facteur de contraction β ?

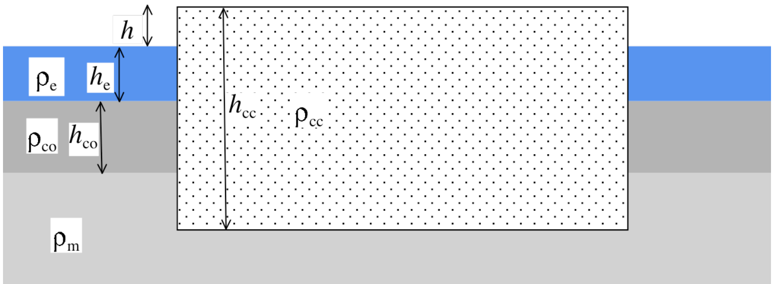


**Exercice III-19 – Le Bassin Amazonien     (sujet extrait d'annale)**

En 2004, le géologue Michael Bevis (de l'Université de l'Ohio) a étudié des mesures GPS (mesure d'altitude à l'aide de satellites) à Manaus au Brésil et s'est rendu compte qu'entre la saison sèche et la saison humide, la croûte continentale composant le bassin amazonien s'était enfoncée de 7 cm. Cet enfoncement est dû à l'eau transportée par le fleuve Amazone et ses affluents. On se propose ici, à l'aide d'un modèle simple, de calculer la quantité d'eau tombée lors de la saison humide dans le bassin amazonien.

*Attention : cet exercice mélange des hauteurs en km et en cm. Garder pour vos résultats numériques la plus grande précision (c'est-à-dire beaucoup de chiffres significatifs).*

On considère le plateau amazonien comme étant composé d'un bloc de croûte continentale de hauteur $h_{cc} = 30$ km et de masse volumique $\rho_{cc} = 2700\ \text{kg/m}^3$. Celui ci repose sur le manteau de masse volumique $\rho_m = 3300\ \text{kg/m}^3$. Ce bloc de croûte continentale surnage d'une hauteur $h$ au dessus du niveau de l'eau des océans de hauteur $h_e = 6{,}750$ km et de masse volumique $\rho_e = 1000\ \text{kg/m}^3$. L'océan repose sur une croûte océanique de hauteur $h_{co} = 6{,}105$ km et de masse volumique $\rho_{co} = 2900\ \text{kg/m}^3$. Le système est à l'équilibre et est représenté sur la figure suivante :




1) En utilisant le principe de l'isostasie, calculer la hauteur $h$.
2) Après la saison humide, la hauteur $h$ a diminué de 7 cm : la nouvelle hauteur est donc $h' = h - 7$ cm. On en déduit que la croûte continentale s'est alourdie d'une certaine quantité d'eau, donc sa masse volumique est maintenant $\rho'_{cc}$. On considère que $h_{cc}$ ne varie pas. Calculer la nouvelle masse volumique de la croûte continentale $\rho'_{cc}$.
3) On prend pour le bassin amazonien une superficie de $2{,}5 \times 10^6\ \text{km}^2$ (surface qui correspond au triangle sur la carte). Calculer la masse de la croûte continentale lors de la période sèche et lors de la période humide. Quelle est la quantité d'eau $Q$ (en litres) qui est tombée lors de la saison humide ? Quelle est alors la quantité d'eau $q$ (en litres) qui est tombée par $\text{m}^2$ ?
4) Calculer la hauteur en cm des précipitations sur le bassin amazonien lors de la période humide.

**Exercice III-20 – Le massif central (sujet extrait d'annale)**

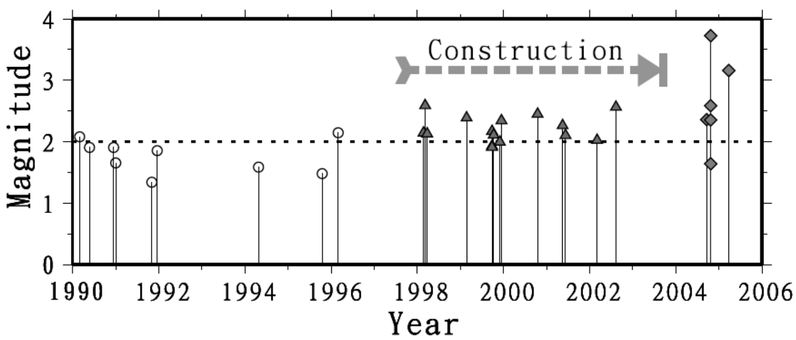
Le massif central est une des traces de la chaîne hercynienne : c'est la grande chaîne de montagne qui s'est formée du Carbonifère au Permien lors de la collision des continents Gondwana et Laurentia-Baltica pour former la Pangée. Cette chaîne hercynienne est actuellement érodée, et l'on retrouve ainsi au massif central des roches métamorphiques et des granites qui constituaient la racine profonde de la chaîne hercynienne.

Il y a 250 millions d'années la chaîne hercynienne était comparable a l'Himalaya de hauteur $h_H = 8000$ m . On suppose que la croûte continentale est en équilibre isostatique dans le massif central comme à l'hercynien.

1) Faites le schéma du massif central à l'hercynien et à l'heure actuel (on schématisera la montagne comme un rectangle).
2) Calculer la racine de la chaîne hercynienne il y a 250 millions d'années.
3) Calculer la racine du massif central actuellement considérant qu'il a une hauteur moyenne de $h_m = 1000$ m .
4) On suppose que croûte continentale a une épaisseur moyenne $h_{cc} = 28$ km et une masse volumique $\rho_{cc} = 2800$ kg/m$^3$. Elle repose sur le manteau de masse volumique $\rho_m = 3300$ kg/m$^3$. Calculer la hauteur de montagne érodée depuis 250 millions d'années.
5) Si je trouve des roches dans le massif central à une altitude de 1000 m , à quelle profondeur en dessous de la croûte continentale moyenne étaient-elles il y a 250 millions d'années ?

**Exercice III-21 – La tour TAIPEI 101 (sujet extrait d'annale)**

Inaugurée à Taïwan en 2004, la tour Taipei 101 détient le record de hauteur pour un gratte-ciel. D'après une étude[1] faite par le géologue Cheng-Horng Lin, du National Taiwan Normal University, la construction de la tour serait responsable de la réouverture d'une faille sismique située sous la tour. Alors que la région ne subissait que de micro-séismes (magnitudes aux alentours de 2) pendant la construction de la tour, il s'est produit deux séismes plus importants à une dizaine de kilomètres directement en dessous de la tour (magnitude 3,8 et 3,2) juste après la fin de la construction (voir figure ci-dessous).



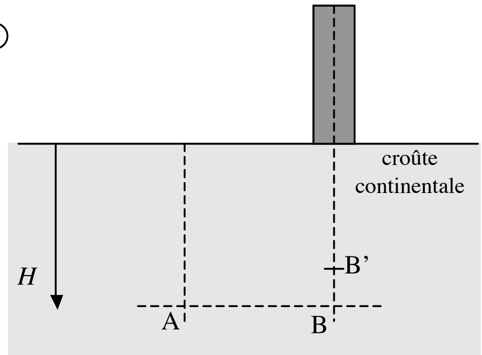

[1] "Seismicity increase after the construction of the world's tallest building : an active blind fault beneath the Taipei 101", *Geophysical Research Letters*, vol. 32, L22313, 2005

Ce gratte-ciel, qui comporte 101 étages, est d'une hauteur $H = 508$ m et repose sur une base carrée de côté $l = 122,80$ m. Pour la construction, il a été utilisé une masse d'acier $m_A = 122,288 \times 10^6$ kg, et un volume de béton $V_B = 242\,852$ m$^3$ de masse volumique $\rho_B = 2\,400$ kg/m$^3$.

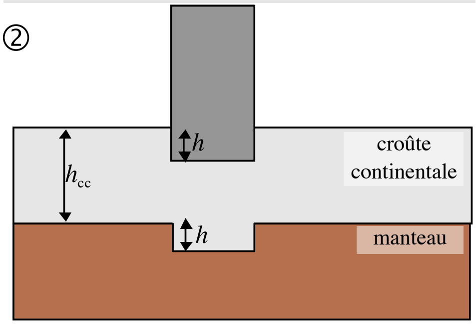
Constante de gravitation : $g = 9,81$ m.s$^{-2}$
Croûte continentale :
Masse volumique : $\rho_{cc} = 2700$ kg/m$^3$
Épaisseur : $h_{cc} = 35$ km
Manteau :
Masse volumique : $\rho_m = 3300$ kg/m$^3$
Pression atmosphérique : $p_{atm} = 101\,325$ Pa

1) En négligeant les vitres et les aménagements intérieurs, calculer :
a) la masse totale $M_T$ de la tour ;
b) son volume $V_T$ (en considérant la tour parallélépipédique) ;
c) sa masse volumique $\rho_T$ moyenne ;
d) la pression au sol $p_T$ exercée par la tour (on ne tient pas compte de la pression atmosphérique)

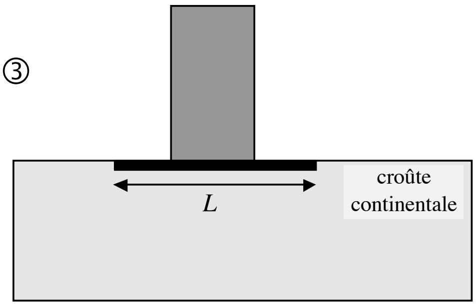
2) (Figure ①) Calculer la pression existant dans la croûte continentale à une profondeur $H = 10$ km :
a) en un point A situé en dessous de la surface du sol
b) en un point B situé en dessous de la tour (on considère que la tour a été construite en surface sur la croûte continentale).
c) À quelle profondeur $H'$ le point B' doit-il se trouver pour être à la même pression que A ?

①



3) (Figure ②) On considère que la tour a été construite en surface de la croûte continentale. Sous la pression de la tour, la croûte continentale s'enfonce d'une hauteur $h$ dans le manteau.
a) En utilisant le principe de l'isostasie, écrire la relation donnant la profondeur d'enfoncement $h$ en fonction de la pression au sol de la tour $p_T$ et des données du problème.
b) Calculer numériquement $h$.
c) Cette valeur vous semble t'elle raisonnable ?

②


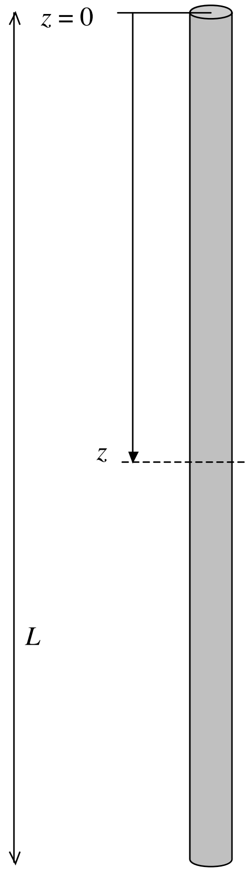

4) (Figure ③) Pour éviter que la tour s'enfonce, avant la construction, on construit une dalle de fondation en béton à base carrée de côté $L$ et d'épaisseur $e = 1$ m. Que doit valoir la longueur $L$ pour que la pression au sol due à la tour et à la dalle de béton soit égale à la moitié de la pression atmosphérique ?

③


**Exercice III-22 – Une carotte record (sujet extrait d'annale)**

Le 1er juillet 1999, le professeur Jean-Louis Turon de l'Université Bordeaux 1 et le professeur Claude Hillaire-Marcel du Département des sciences de la Terre et du GEOTOP, à bord du bateau scientifique le “Marion-Dufresne”, ont extrait une “carotte” d'une longueur record $L = 58{,}5\ \text{m}$ de sédiments du fond du Fjord du Saguenay, près de Baie Éternité. D'après les chercheurs, la sédimentation s'est faite à la vitesse de 1 cm par an.

On prendra comme référence l'axe $z$ avec pour origine $z = 0$ la partie haute de la carotte (c'est-à-dire la partie la plus récente) ; le sens positif de l'axe $z$ sera en direction de la partie la plus ancienne (comme indiqué sur le schéma ci-contre).




1) On considère dans cette question qu'il n'y a pas eu tassement de la roche sédimentaire sous l'effet de son propre poids.
   a) Combien a-t-il fallu de temps pour former une colonne de hauteur $L = 58{,}5\ \text{m}$ ?
   b) Avec cet “enregistrement” du passé, les chercheurs veulent comprendre les accidents géologiques majeurs de la région tel que le tremblement de terre de 1663. À quelle distance $z_{1663}$ doit-on analyser les dépôts sédimentaires de cette carotte pour comprendre cet événement ?

2) On considère maintenant que la roche sédimentaire a subi une compression du fait de son propre poids ; c'est-à-dire que sans compression cette “carotte” devrait être de longueur $H$, mais avec compression sa longueur est $L = 58{,}5\ \text{m}$.
   Pour la roche sédimentaire, on prendra :
   module de Young $E = 45\ \text{GPa}$, masse volumique $\rho = 2{,}5\ \text{g.cm}^{-3}$.
   a) On considère une “carotte” de longueur initiale $H$ et de section constante $S$. En position verticale, cette “carotte” subit une compression sous l'effet de son propre poids (le poids des sédiments qui se sont accumulés). Calculer la longueur $\Delta H$ perdue par compression par ce barreau.
   b) Cette “carotte” devrait donc avoir une longueur $H = L + \Delta H$. Combien a-t-il fallu de temps pour former cette colonne de hauteur $H$ ?
   c) On veut étudier les 1000 premières années de dépôt. Quelle longueur de “carotte” doit-on étudier ?