ANALYSE: CONVERGENCE ET DUALITÉ

PHILIPPE JAMING

Convolution - régularisation

1. Notation multi-indice

Avant de débuter cette section, nous allons introduire la notation multi-indice qui est très commode pour le calcul différentiel à plusieurs variables:

Un multi-indice est un vecteur à coordonées entières: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. Si $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$, on dira que $\beta \leqslant \alpha$ si $\beta_j \leqslant \alpha_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$. La longueur du multi-indice α est la somme de ses coordonées: $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. On écrira alors $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$, et le coefficient binomial pour $\beta \leqslant \alpha$ est donné par

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}.$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on écrira ensuite $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ on écrit

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial_{x_d}^{\alpha_d}} f.$$

Avec cette notation, certaines formules classiques en une variable s'écrivent exactement de la même façon

– Formule de Leibnitz

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g$$

– Formule de Taylor

$$f(x_0 + h) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \partial^\alpha f(x_0) \frac{h^\alpha}{|\alpha|!} + o(h^N).$$

2. La convolution, cas simple

Définition 2.1. Pour f, g deux fonctions sur $\mathbb{R}^d$, wone defini la convolution de f et g comme étant la fonction sur $\mathbb{R}^d$ donnée par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \, \mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

Notons qu'on ne dit rien a priori sur la convergence de cette intégrale. Le but de ce chapitre est précisément de donner un sens à cette expression, même quand l'intégrale ne converge pas. Avant cela, commençons par quelques exemples simples.

Date: August 24, 2020.

Exemple 2.2. Soit $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, $g = \mathbf{1}_{[c,d]}$.

Tout d'abord, le changement de variable $t = x - y$ montre que $f * g = g * f$. Quitte à échanger les rôles de f et g, on peut donc supposer que $b - a \geqslant d - c$ c'est-à-dire que l'intervalle $[a, b]$ est plus long que l'intervalle $[c, d]$.

Par ailleurs, on voit facilement que, pour x fixé $f(y)g(x - y) = \mathbf{1}_{I_x}(y)$ où I_x est l'intersection de deux intervalles et est donc un intervalle. Mais alrs $f * g(x) = |I_x|$, la longueur de cet intervalle. Ensuite $g(x - y) = 1$ si et seulement si $c \leqslant x - y \leqslant d$ soit $y \in [x - d, x - c]$ donc $I_x = [a, b] \cap [x - d, x - c]$. La longueur de cet intervalle est une fonction affine par morceaux puisque l'intervalle $[a, b]$ est fixe et le second intervalle $[-d, -c]$ "glice" à vitesse constante, *i.e.* on intersecte $[a, b]$ et $[-d, -c] + x$. Il suffit donc de déterminer les noeuds de cette fonction affine par morceaux et la longueur de I_x à ces noeuds

Il y a 5 cas:

– L'intervalle $[-d, -c] + x$ est entièrement à gauche de $[a, b]$ (à part peut-être son extrémité), tsoit $-c+x \leqslant a$ *i.e.* $x \leqslant a+c$. Dans ce cas $I_x = \emptyset$ (ou $\{a\}$) et $f*g(x) = |I_x| = 0$.

– L'intervalle $[-d, -c] + x$ recouvre partiellement $[a, b]$ depuis sa gauche: $-d + x \leqslant a \leqslant -c + x$ *i.e.* $a + c \leqslant x \leqslant a + d$. Notons que, comme $b - a > d - c$ $-c + x \leqslant b$. Dans ce cas $I_x = [a, -c + x]$ et $f * g(x) = |I_x| = x - (a + c)$.

– L'intervalle $[-d, -c] + x$ est entièrement à l'intérieur de $[a, b]$ (ceci peut se produire car la longueur de $[d, -c]$ et inférieure à celle de $[a, b]$): $a \leqslant -d + x \leqslant -c + x \leqslant b$ *i.e.* $a + d \leqslant x \leqslant b + c$. Dans ce cas $I_x = [-d, -c] + x$ et $f * g(x) = |I_x| = d - c$

– L'intervalle $[-d, -c] + x$ recouvre $[a, b]$ sur la droite: $-d + x \leqslant b \leqslant -c + x$ *i.e.* $b + c \leqslant x \leqslant b + d$. Dans ce cas $I_x = [-d + x, b]$ et $f * g(x) = |I_x| = b + d - x$.

– L'intervalle $[-d, -c] + x$ est entièrement à droite de $[a, b]$ (à part peut-être pour b), soit $b \leqslant -d + x$ *i.e.* $x \geqslant b + d$ et dans ce cas on a à nouveau $f * g(x) = 0$.

Le lecteur fera bien entendu un croquis des 5 cas ainsi que du graphe de $f * g$. On remarquera alors (et ceci sera crucial ultérieurement) que $f * g$ est continue et à support $[a, b] + [c, d] = \{x + y, x \in [a, b], y \in [c, d]\} = [a + c, b + d]$ qui est compact.

Exemple 2.3. Supposons que f, g sont à variables séparées: $f(x_1, \ldots, x_d) = f_1(x_1) \cdots f_d(x_d)$ et $g(x_1, \ldots, x_d) = g_1(x_1) \cdots g_d(x_d)$. Alors, si on peut définir $f_j * g_j$ par l'intégrale (2.1), il en va de même de $f * g$ et

$$f * g(x_1, \ldots, x_d) = f_1 * g_1(x_1) \cdots f_d * g_d(x_d).$$

Par exemple pour la fonction charactéristique d'un cube $Q = \prod_{j=1}^{d} I_j$ avec I_j des intervalles, on a $\mathbf{1}_Q(x_1, \ldots, x_d) = \mathbf{1}_{I_1}(x_1) \cdots \mathbf{1}_{I_d}(x_d)$. Ceci permet de calculer $\mathbf{1}_Q * \mathbf{1}_{Q'}$ quand Q, Q' sont des cubes et on obtient une fonction continue à support dans $Q + Q' = \{x + y : x \in Q, y \in Q'\}$.

Par ailleurs, il y a au moins un cas où tout est assez simple:

Lemme 2.4. *Soient $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, (l'espace des fonctions continues à support compact). Alors l'intégrale* (2.1) *est absolument convergente. De plus $f * g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $f * g = g * f$.*

Enfin, si g est de plus de classe $\mathcal{C}^n$, alors $f * g$ aussi et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, avec $|\alpha| \leqslant n$, $\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g) = (\partial^\alpha g) * f$.

Notons que comme $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha g) * f$, si de plus f est de classe $\mathcal{C}^m$ alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^{n+m}$ et $\partial^{\alpha+\beta}(f * g) = (\partial^\alpha f) * (\partial^\beta g)$ tan que $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant n$.

Démonstration. Contentons nous des fonctions d'une variable, la démonstration est la même pour les fonctions de plusieurs variables.

Considérons la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,t) = f(t)g(x-t)$. Alors

(1) F est continue en t donc $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien definie. De plus, le changement de variable $s = x - t$ montre que $f * g = g * f$.

(2) Notons I (resp. J) un intervalle qui contienne le support de f (resp. de g). Comme f, g sont continues à support compact, elles sont bornées et on note $C \geqslant \|f\|_\infty, \|g\|_\infty$. Mais alors $|F(x,t)| \leqslant C^2 \mathbf{1}_I(t)\mathbf{1}_J(x-t)$. Il en résulte que
$$|f * g(x)| \leqslant C^2 \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_I(t)\mathbf{1}_J(x-t)\,\mathrm{d}t = C^2 \mathbf{1}_I * \mathbf{1}_J(x).$$
Cette dernière fonction étant à support compact, $f * g$ est également à support compact. De plus, son support est inclu dans $I + J = \{x + y, x \in I, y \in J\}$.

(3) Enfin, à t fixé, F est continue en x. De plus $|F(x,t)| \leqslant C^2 \mathbf{1}_I(t)$ qui est intégrable (et ne dépend pas de x). On peut donc appliquer le théorème de continuité de Lebesgue et en déduire que $x \to f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue.

Enfin, en remarquant que $\partial_x^\alpha F(x,t) = f(t)\partial^\alpha g(x-t)$ qui est continue et bornée par $\|f\|_\infty \|\partial^\alpha g\| \mathbf{1}_I$ qui est intégrable, on peut également utiliser le théorème de dérivation de Lebesgue. □

3. Convolution entre L^p et son dual

Bien évidemment, si $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est une fonction de L^1, alors $\displaystyle\int f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ est bien défini. L'inégalité de Hölder nous dit que ceci est précisément le cas lorsque $f \in L^p$ et g est dans son dual. En fait, on a même mieux

Théorème 3.1. *Soient $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et p' son exposant dual i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ alors*
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,dt \tag{3.2}$$
est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. L'application $(f,g) \to f * g$ est bilinéaire et continue $L^p \times L^{p'} \to L^\infty$ avec $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

De plus, si $1 < p < +\infty$, alors $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. En particulier, $(f,g) \to f * g$ est bilinéaire et continue $L^p \times L^{p'} \to \mathcal{C}_0$.

Rappelons que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ qui tendent vers 0 à l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que si $\|x\| \geqslant R$ alors $|f(x)| \leqslant \varepsilon$. Ce résultat est le point central de ce chapitre et sa démonstration est un raisonnement qu'il convient de maîtriser.

Démonstration. D'abord, si $g \in L^{p'}$ alors $g_x : t \to g(x-t)$ est aussi dans $L^{p'}$. L'inégalité de Hölder nous dit alors que $fg_x \in L^1$. Ainsi $f * g$ est bien defini via (3.2). De plus, Hölder montre que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Comme $(f;g) \to f * g$ est clairement bilinéaire, il vient que $(f,g) \to f * g$ est bilinéaire et continue $L^p \times L^{p'} \to L^\infty$.

L'observation clé pour la seconde partie est que $\mathcal{C}_0$ est un sous-espace *fermé* de L^∞. En effet, soit (f_k) est une suite d'éléments de $\mathcal{C}_0$ qui converge vers une fonction f en norme L^∞, (donc uniformément puisque pour des fonctions continues sup essentiel et sup coïncident). Alors

– la limite f est continue (une limite uniforme de fonctions continues est continue);

– pour $\varepsilon > 0$ il existe n tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Comme $f_n \in \mathcal{C}_0$, il esiste R tel que pour $\|x\| \geqslant R$, $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. Finallement, pour un tel x, $|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + \|f - f_n\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$. Ainsi $f(x) \to 0$ quand $\|x\| \to +\infty$.

En conclusion $f \in \mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_0$ est bien fermé dans L^∞.

Ensuite, l'exemple 2.3 montre que si f, g sont des fonctions characteristiques de cubes, $f * g$ est contine à support compact. Par bilinéarité, si f, g sont des fonctions étagées, (des combinations linéaires finies de fonctions characteristiques de cubes), alors $f * g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Finallement, remarquons que si $1 < p < +\infty$ on a aussi $1 < p' < +\infty$ donc les fonctions étagées sont denses dans L^p et dans $L^{p'}$. Ainsi si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, il existe des suites f_k, g_k de fonctions étagées telles que $f_k \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g_k \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Mais alors,

$$\begin{aligned}\|f * g - f_k * g_k\|_\infty &= \|(f - f_k) * g + f_k(g - g_k)\|_\infty \leqslant \|(f - f_k) * g\|_\infty + \|f_k(g - g_k)\|_\infty \\ &\leqslant \|f - f_k\|_p \|g\|_{p'} + \|f_k\|_p \|g - g_k\|_{p'} \to 0\end{aligned}$$

puisque $\|f - f_k\|_p, \|g - g_k\|_{p'} \to 0$ et $\|f_k\|_p$ est bornée lorsque f_k converge. $\square$

4. Convolution de L^1 par lui-même

Le prochain résultat utilise le théorème de Fubini pour voir qu'on peut définir $f * g$ lorsque f et g sont toutes les deux dans L^1 (on est donc très loin du cadre précédent).

Le but est encore de donner un sens à

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y)\,\mathrm{d}y \tag{4.3}$$

et ceci est possible en intégration de Lebesgue dès lors que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x - y)|\,\mathrm{d}y$ est fini. Mais, en integrant ceci par rapport à la variable x et en utilisant Fubini (puisque tout est positif) on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x - y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x - y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y)|\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}y = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Ainsi, si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x - y)|\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Mais alors, pour presque tout x, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x - y)|\,\mathrm{d}y$ est fini. Par suite (4.3) est bien défini pour presque tout x. De plus, la fonction de x ainsi obtenue est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. En résumé:

Proposition 4.1. *Soeint $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy$$

est défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. De plus, l'application $(f,g) \to f * g$ est bilinéaire et continue $L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\|f * g\|_1 \leqslant \||f| * |g|\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

5. Principe d'extension

Le but de la fin de ce chapitre est de montrer qu'on peut définir $f * g$ même dans des situations où l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$ n'est plus définie au sens de Lebesgue. Avant cela, nous devons introduire un des outils essentiels de l'analyse fonctionnelle. Cet outil nous servira à nouveau pour la transformée de Fourier.

Nous allons donc considérer

— X et Y des espaces de Banach et $\mathcal{D}$ un sous-espace dense de X;

— T une application linéaire $\mathcal{D} \to Y$;

— T est bornée sur $\mathcal{D}$ au sens où i existe $C \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\|Tx\|_Y \leqslant C\|x\|_X$.

Alors T se prolonge en une application linéaire continue $\tilde{T} : X \to Y$ de même norme: pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\tilde{T}x = Tx$ et pout tout $x \in X$, $\left\|\tilde{T}x\right\|_Y \leqslant C\|x\|_X$.

Bien entendu, dans la suite on écrira $\tilde{T} = T$ pour ce prolongement.

Démonstration. Commençons par proloner T nous montrerons ensuite qu'on obtien ainsi une application linéaire continue:

Soit $x \in X$. Par densité de $\mathcal{D}$ dans X, il existe une suite $(x_n)_n \subset \mathcal{D}$ qui converge vers x dans X. En particulier, cette suite est de Cauchy. Montrons qu'alors $(Tx_n)_n$ est également de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 0$ tel que si $p, q \geqslant N$, alors $\|x_p - x_q\|_X \leqslant \varepsilon$. Mais $x_p, x_q \in \mathcal{D}$ et T est linéaire sur $\mathcal{D}$,

$$\|Tx_p - Tx_q\|_Y = \|T(x_p - x_q)\|_Y \leqslant C\|x_p - x_q\|_X \leqslant C\epsilon$$

puisque T est borné sur $\mathcal{D}$. Ainsi $(Tx_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace de Banach Y, $(Tx_n)_n$ a donc une limite qu'on note a.

On voudrait bien sûr poser $\tilde{T}x = a$. Ceci est possible si a ne dépend pas de la suite (x_n) choisie. Prenons donc une deuxième suite $(y_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers x dans X et montrons que Ty_n converge aussi vers a. Mais, comme $x_n, y_n \in \mathcal{D}$ et T est linéaire sur $\mathcal{D}$,

$$\|Tx_n - Ty_n\|_Y = \|T(x_n - y_n)\|_Y \leqslant C\|x_n - y_n\|_X \to C\|x - x\| = 0$$

puisque la norme est continue. On peut donc bien écrire $a = \tilde{T}x$.

De plus, pour $x \in \mathcal{D}$ la suite constante $x_n = x$ converge vers x donc $Tx = Tx_n \to \tilde{T}x$ et $\tilde{T}$est bien une extension de T de $\mathcal{D}$ à X. À partir de maintenant, nous ne distinguerons plus $\tilde{T} = T$.

Montrons que T est linéaire: soient $x, y \in X$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Par densité, il existe des suites $(x_n), (y_n)$ dans $\mathcal{D}$ qui convergent respectivement vers x et y. Mais alors $\lambda x_n + \mu y_n \to \lambda x + \mu y$

donc $T(\lambda x_n+\mu y_n)\to T(\lambda x+\mu y)$. D'autre part, T est linéaire sur $\mathcal{D}$, $T(\lambda x_n+\mu y_n)=\lambda Tx_n+\mu Ty_n\to\lambda Tx+\mu Ty$, donc

$$T(\lambda x+\mu y)=\lambda Tx+\mu Ty.$$

Le prolongement de T à X est donc bien linéaire.

Finallement, si $x\in X$ et $(x_n)_n\subset\mathcal{D}$ converge vers x, alors d'une part $\|x_n\|_X\to\|x\|_X$ et d'autre part $Tx_n\to Tx$ dans Y donc $\|Tx_n\|_n\to\|Tx\|_Y$. Comme $\|Tx_n\|_Y\leqslant C\|x_n\|_X$ on en déduit $\|Tx\|_Y\leqslant C\|x\|_X$. Au final le prolongement de T à X est donc bien linéaire et continu $X\to Y$. □

Illustrons ceci avec

Théorème 5.1. *Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $1\leqslant p\leqslant+\infty$. Alors $T_f:g\to f*g$ se prolonge de $L^\infty(\mathbb{R}^d)\cap L^p(\mathbb{R}^d)$ en une application linéaire continue $L^p(\mathbb{R}^d)\to L^p(\mathbb{R}^d)$. Cette application commutes avec les translations τ_a.*

Rappelons que $\tau_a g(x)=g(x-a)$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que $f*g$ est bien défini pour $f\in L^1$ et $g\in L^\infty$. On a aussi vu (à plusieurs reprises) que $L^\infty(\mathbb{R}^d)\cap L^p(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Il nous reste donc à démontrer l'exsitence de $C>0$ tel que pour tout $g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.

Mais ceci résulte de l'inégalité de Minkowski :

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^d}f(t)g(\cdot-t)\,\mathrm{d}t\right\|_r\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}|f(t)|\|g(\cdot-t)\|_r\,\mathrm{d}t=\|f\|_1\|g\|_r.$$

Finallement, quand $p\neq+\infty$ et $g\in L^\infty\cap L^p$

$$\begin{aligned}T_f\tau_a g(x)=f*(\tau_a g)(x)&=\int_{\mathbb{R}^d}f(t)g(x-t-a)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{\mathbb{R}^d}f(t)g\big((x-a)-t\big)\,\mathrm{d}t=f*g(x-a)=\tau_aT_fg(x).\end{aligned}$$

Ainsi $T_f\tau_a=\tau_aT_f$ est valable sur le sous-espace $L^\infty\cap L^p$ qui est dense dans L^p et T_f,τ_a sont continues sur L^p, donc cette égalité est vraie sur tout L^p.

Lorsque $p=+\infty$, l'argument de densité est bien entendu inutile □

Nous laissons en exercice e fait de vérifier que le principe d'extension est aussi valable pour les applications bilinéaires :

— X_1,X_2 et Y des espaces de Banach et $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) un sous-espace dense dans X_1 (resp. X_2);

— T une application bilinéaire $\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2\to Y$;

— T est bornée $\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2$, *i.e.* il existe $C\geqslant0$ tel que, pour tous $x_1\in\mathcal{D}_1$ et $x_2\in\mathcal{D}_2$ on a $\|T(x_1,x_2)\|_Y\leqslant C\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}$.

Alors T se prolonge en une application bilinéaire continue $\tilde{T}:X_1\times X_2\to Y$ de même norme: pour tout $(x_1,x_2)\in\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2$, $\tilde{T}(x_1,x_2)=T(x_1,x_2)$ et pout tout $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$, $\left\|\tilde{T}(x_1,x_2)\right\|_Y\leqslant C\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}$.

À nouveau on écrira $\tilde{T}=T$.

6. Inégalité de Young

Nous allons maintenant utiliser le principe d'extension pour étendre l'application bilinéaire $(f,g) \to f*g$ de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ à $L^p(\mathbb{R}^d)\times L^q(\mathbb{R}^d)\to L^r(\mathbb{R}^d)$. Pour que cela soit possible, nous devons trouver une constante $C>0$ telle que, pour tous $f,g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.4}$$

La première chose à faire est d'iedentifier les triplets p,q,r pour lesquels cela est possible. Cette identification se base sur une astuce très commune.

On fixe $f,g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\}$ avec $f,g\geqslant 0$ de sorte que $f*g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\}$. On prend ensuite un paramètre $\lambda>0$ et on défini $f_\lambda(x)=f(\lambda x)$, $g_\lambda(x)=g(\lambda x)$ donc avec le changement de variable $s=\lambda x$

$$f_\lambda * g_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda t)g\big(\lambda(x-t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(s)g(\lambda x - s)\,\mathrm{d}s = \lambda^{-d} f*g(\lambda x).$$

D'autre part

$$\|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(\lambda t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} = \left(\lambda^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} = \lambda^{-d/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

De même

$$\|g_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{-d/q}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \quad \text{et} \quad \|f_\lambda * g_\lambda\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{-d(1+1/r)}\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}.$$

Ainsi, en remplaçant f,g par f_λ, g_λ dans (6.4), on obtient

$$0 < \frac{\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}}{C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}} \leqslant \lambda^{d\left(1+\frac{1}{r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

En faisant tendre $\lambda\to 0$, ceci implique par croissance comparée que la puissance de λ est $\leqslant 0$ alors qu'en faisant $\lambda\to+\infty$, cette puissance λ doit être $\geqslant 0$. On a donc montré que (6.4) implique $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$. En d'autres termes, la condition sur p,q,r dans le théorème suivant est nécessaire.

Théorème 6.1 (Inegalité de Young')**.**
Soient $1\leqslant p,q,r\leqslant+\infty$ des nombres réeles vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$ (avec la convention $1/\infty=0$). Alors, pour tous $f,g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f*g\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q. \tag{6.5}$$

Il en résulte que si $p\neq+\infty$ et $q\neq+\infty$, l'application $(f,g)\to f*g$ se prolonge de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ en une application bilinéaire $L^p(\mathbb{R}^d)\times L^q(\mathbb{R}^d)\to L^r(\mathbb{R}^d)$.

De plus $f*g=g*f$.

Remarque 6.2. Il faut remarquer que si $p=+\infty$ (resp. $q=+\infty$) alors $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}\leqslant 1$ donc $r=+\infty$ et $q=1$ (resp. $p=1$). Ceci est un cas particulier Théorème 3.1 et dans ce cas, $f*g$ est directement défini par

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.6}$$

Nul besoin ici de prolonger cette application linéaire de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ (ce qui n'est d'ailleurs pas possible puisque $\mathcal{C}_c$ n'est *pas* dense dans L^∞). La même chose est d'ailleurs vraie dès que $r = +\infty$ mais également lorsque $p = 1$ ou $q = 1$.

Dans les autres cas, l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ ne joue pas un rôle particulier er peut être remplacé par n'importe quelle partie dense des espaces L^p à condition que cela permette de définir la convolution à l'aide de l'intégrale (6.6). Ceci est le cas pour $L^1 \cap L^\infty$. Toutefois, il est important de comprendre que la convolution n'est *plus* définie comme une intégrale artie dense des espaces L^p à condition que cela permette de définir la convolution à l'aide de l'intégrale (6.6) mais comme une limite de telles intégrales. Ainsi, on peut écrire

$$f = \lim_{\lambda \to +\infty} f(x)\mathbf{1}_{\{|x| \leqslant \lambda\}}\mathbf{1}_{\{|f(x)| \leqslant \lambda\}}$$

(cette limite est au sens de la norme L^p) et faire de même pour g. Alors

$$f * g(x) = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{t \in \mathbb{R}^d, |t| \leqslant \lambda, |x-t| \leqslant \lambda} f(t)g(x-t)\mathbf{1}_{\{|f(t)| \leqslant \lambda\}}\mathbf{1}_{\{|g(x-t)| \leqslant \lambda\}}\,\mathrm{d}t$$

et on sait que cette limite existe au sens de la norme L^r. Par contre, l'intégrale (6.6) peut ne pas converger.

Démonstration. Nous avons déjà vu que les cas p, q ou $r = +\infty$ sont couverts par le théorème 3.1. Le cas $p = 1$ ou $q = 1$ sont couverts par la Proposition 4.1. Enfin, si $r = 1$ alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$ ce qui implique $p = q = 1$ (puisque $p, q \geqslant 1$) qui est donc couvert par la Proposition 4.1.

Nous allons donc supposer que $1 < p, q, r < +\infty$ et que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$. Par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et $L^q(\mathbb{R}^d)$ on pourra appliquer le principe d'extension dès qu'on aura démontré (6.5). Comme $f * g = g * f$ lorsque $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, la même chose sera vraie pour le prolongement.

Notons d'abord que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ implique $r > p, q$ donc $0 < p/r, q/r, 1-p/r, 1-q/r < 1$.

L'outil essentiel ici est l'inégalité de Hölder (et son cas d'égalité) ou, de façon équivalente, la dualité L^r-$L^{r'}$ quand $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$: *si* $\varphi \in L^r$ *alors*

$$\|\varphi\|_r = \sup\{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\psi(x)\,dx \ :\ \psi \in L^{r'}, \|\psi\|_{r'} = 1\}.$$

Mais maintenant, si $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \subset L^r(\mathbb{R}^d)$. Soit $h \in L^{r'}$ avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ *i.e.* $r' = \frac{r}{r-1}$. Nous voulons majorer

$$I(f, g, h) = \int_{\mathbb{R}^d} f * g(x)h(x)\,\mathrm{d}x$$

pour obtenir $|I(f, g, h)| \leqslant \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_{r'}$.

Bien sûr

$$|I(f, g, h)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)||h(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f|(t)|g|(x-t)|h|(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = I(|f|, |g|, |h|)$$

avec Fubini. On peut donc remplacer f, g, h par $|f|, |g|, |h|$, c'est-à-dire supposer que $f, g, h \geqslant 0$ et alors

$$I(f, g, h) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)h(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Écrivons $f(t)g(x-t)h(x) = F_1(x,t)F_2(x,t)$ avec

$$F_1(x,t) = f(t)^{p/r}g(x-t)^{q/r} \quad \text{et} \quad F_2(x,t) = f(t)^{1-p/r}g(x-t)^{1-q/r}h(x)$$

de sorte que

$$I(f,g,h) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} F_1(x,t)^r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} F_2(x,t)^{r'}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r'}}. \tag{6.7}$$

Remarquons que $F_1(x,t)^r, F_2(x,t)^{r'} \geqslant 0$ nous pouvons donc changer les ordres des intégrations. La première de ces deux intégrales est simple à majorer: avec Fubini, on intègre d'abord en x,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} F_1(x,t)^r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^p g(x-t)^q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}\frac{q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{r}}\\
&= \|f\|_p^{\frac{p}{r}}\|g\|_q^{\frac{q}{r}}. \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

La seconde intégrale est plus subtile. D'abord

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} F_2(x,t)^{r'}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r'}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^{(1-p/r)r'}g(x-t)^{(1-q/r)r'}h(x)^{r'}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&\leqslant \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^{(1-p/r)r'}g(x-t)^{(1-q/r)r'}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x)^{r'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&= \left\|f^{(1-p/r)r'} * g^{(1-q/r)r'}\right\|_\infty^{1/r'}\|h\|_{r'}. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

On introduit ensuite un paramètre s que nous allons déterminer dans la suite et s' son indice dual $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$. Avec le Théorème 3.1 on a

$$\left\|f^{(1-p/r)r'} * g^{(1-q/r)r'}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(1-p/r)r'}\right\|_s \left\|g^{(1-q/r)r'}\right\|_{s'}. \tag{6.10}$$

Comme nous voulons une estimatation en $\|f\|_p$ ceci conduit au choix $s(1-p/r)r' = p$. Comme $r' = \dfrac{r}{r-1}$ ceci implique $(1-p/r)r' = \frac{r-p}{r-1}$ donc

$$s = \frac{r-1}{r-p}p.$$

Remarquons que $r > p > 1$ donc $p < s < +\infty$. L'exposant dual est alors

$$s' = \frac{s}{s-1} = \frac{(r-1)p}{r(p-1)} = \frac{p'}{r'}$$

donc

$$(1-q/r)r's' = (1-q/r)p' = \left(1-\frac{q}{r}\right)p'.$$

Mais, en multipliant $1+\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ par q et en récrivant le résultat, il vient $1-\dfrac{q}{r} = q\left(1-\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{q}{p'}$. Finalement

$$(1-q/r)r's' = q.$$

Le choix de s implique alors

$$\left\|f^{(1-p/r)r'}\right\|_s=\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x)^{(1-p/r)r's}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x)^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}=\|f\|_p^{p/s}$$

alors que

$$\left\|g^{(1-q/r)r'}\right\|_{s'}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}g(x)^{(1-q/r)r's'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s'}}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}g(x)^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s'}}=\|g\|_p^{q/s'}.$$

En réintroduisant cela dans (6.10), on obtient

$$\left\|f^{(1-p/r)r'}*g^{(1-q/r)r'}\right\|_\infty\leqslant\|f\|_p^{p/s}\|g\|_p^{q/s'}.$$

Alors (6.9) se réduit à

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}F_2(x,t)^{r'}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r'}}\leqslant\|f\|_p^{p/r's}\|g\|_p^{q/r's'}\|h\|_{r'}.$$

Enfin, avec (6.8), on voit que (6.7) se réduit à

$$I(f,g,h)\leqslant\|f\|_p^{\frac{p}{r}+\frac{p}{r's}}\|g\|_p^{\frac{q}{r}+\frac{q}{r's'}}\|h\|_{r'}.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\frac{1}{s}=\frac{1}{r}+\frac{r-1}{r}\frac{r-p}{(r-1)p}=\frac{p+r-p}{rp}=\frac{1}{p}$$

et que $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r'}\dfrac{1}{s'}=\dfrac{1}{q}$. En conclusion on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(t)g(x-t)h(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_{r'}$$

pour tout $h\in L^{r'}$. Ainsi, pour tous $f,g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$$

et avec le principe d'extension cela permet de définir $f*g$ sur $L^p\times L^q$. □

Exercice. Soient k un entier et $1\leqslant r,p_1,\dots,p_k\leqslant+\infty$ tels que $k-1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}$. Soient $f_j\in L^{p_j}(\mathbb{R}^d)$ pour $j=1,\dots,k$. Montrer que $f_1*f_2*\cdots*f_k\in L^r(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\|f_1*f_2*\cdots*f_k\|_r\leqslant\prod_{j=1}^k\|f_j\|_{p_j}.$$

7. Régularisation

7.1. **Deux espaces de fonctions régulières: $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.** Les espaces de fonctions régulières joueront un grand rôle dans la suite. Commençons par noter

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)=\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)\ :\exists R>0\text{ s.t. }f(x)=0\text{ if }\|x\|\geqslant R\}$$

l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Cet espace n'est pas vide comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 7.1.

Soit g défini sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Alors g est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

De plus, pour tout entier k, il existe un polynome P_k tel que $g^{(k)}(x) = \dfrac{P_k(x)}{x^{2k}}g(x)$ quand $x \neq 0$.

En effet, cette formule est évidente pour $k = 0$. Pour $k = 1$, $g'(x) = 0$ alors $x < 0$ alors $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x}$ donc la formule est vraie pour $k = 1$ avec $P_1 = 1$. Supposons que $g^{(k)}$ soit de la forme voulue lorsque $k \geqslant 1$ alors, pour $x > 0$

$$g^{(k+1)}(x) = \frac{P_k'(x)}{x^{2k}}g(x) - \frac{2kP_k(x)}{x^{2k+1}}g(x) + \frac{P_k(x)}{x^{2k}}g'(x) = \frac{x^2P_k'(x) - (2kx+1)P_k(x)}{x^{2k+2}}g(x).$$

De plus, si P_k est un polynome, alors $P_{k+1}(x) := x^2P_k'(x) - (2kx+1)P_k(x)$ est aussi un polynôme. Pour $x < 0$ on a bien sûr $g^{(k+1)}(x) = 0 = \dfrac{P_{k+1}(x)}{x^{2(k+1)}}g(x)$.

Ensuite, il est évident que g est continue en 0. Supposons que g soit de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$, alors comme $g^{(k)}(x) = \dfrac{P_k(x)}{x^{2k}}e^{-1/x}$ on a $g^{(k)}(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ et comme $g^{(k)}(x) = 0$ quand $x < 0$ on a $g^{(k)}(x) \to 0$ quand $x \to 0^-$. Par suite $g^{(k)}$ se prolonge par continuité en 0 donc $g^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et g est donc de classe $\mathcal{C}^k$.

Finalement, définissons f par $f(x) = g(1-\|x-a\|^2/\eta^2)$ (où $\|x\|$ est la norme euclidienne) de sorte que f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f(x) = 0$ quand $1-\|x-a\|^2/\eta^2 \leqslant 0$ *i.e.* quand $|x-a\| \geqslant \eta$. Ainsi f est $\mathcal{C}^\infty$ à support dans la boule $B(a,\eta)$.

Exemple 7.2. Considérons encore g defini sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{if } x > 0 \end{cases}$. Soit ensuite h donné par

$$h(x) = \frac{g(x)}{g(x) + g(1-x)} = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leqslant 0 \\ \frac{e^{-1/x}}{e^{-1/x}+e^{-1/(1-x)}} & \text{for } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{for } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Comme $g(x) + g(1-x) \neq 0$ pour tout x, h est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit alors $b(x) = h(2+x)h(2-x)$ qui est encore $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour $|x| \geqslant 2$, l'un de $2+x, 2-x$ est $\leqslant 0$ donc $b(x) = 0$. D'autre part, pour $|x| \leqslant 1$, on a $2+x, 2-x \geqslant 1$ donc $h(2+x) = h(2-x) = 1$ et $b(x) = 1$. Finalement, comme $0 \leqslant g \leqslant 1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$. Ainsi

la fonction b est un fonction bosse régulière: b est $\mathcal{C}^\infty$ à support $[-2,2]$ et $b(x) = 1$ pour $x \in [-1,1]$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$.

Notons que si on se donne $a < b < c < d$ il existe une fonction $B \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $B = 1$ sur $[b,c]$, $b = 0$ en-dehors de $[a,d]$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$. Une telle fonction s'obtient en choisissant proprement $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tels que $B(x) = h(\alpha+\beta x)h(\gamma-\delta x)$. Une fois une telle fonction obtenue, en tensorisant $b(x_1,\dots,x_d) = \prod_{i=1}^d B_i(x_i)$, on peut prendre deux cubes $Q_1 \subset Q_2$ dont les bords ne s'intersectent pas et obtenir une fonction $b \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $b(x) = 1$ sur Q_1, $b(x) = 0$ en-dehors de Q_2 avec $0 \leqslant b \leqslant 1$.

Remarquons aussi qu'une fois qu'on a *une* fonction dans $\mathcal{C}_c^\infty$, la convolution permet d'en obtenir beaucoup d'autres:

Lemme 7.3. *Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $\varphi * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si de plus φ est à support compact, alors $\varphi * f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.*

Nous définirons le support de $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ de façon précise plus loin, ici nous dirons que φ est à support compact s'il existe $R > 0$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour (presque) tout x avec $\|x\| \geqslant R$.

Démonstration. Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors f est bornée par $\|f\|_\infty$ et la convolution est définie par $\varphi * f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t$. Posons $F(x,t) = \varphi(t)f(x-t)$ et remarquons qu'à t fixé, $x \to F(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ (sauf si $|\varphi(t)| = +\infty$ ce qui ne se produit que sur un ensemble de mesure nulle). De plus, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial_x^\alpha F(x,t) = \varphi(t)\partial^\alpha f(x-t)$. Mais $\partial^\alpha f$ est continue à support compact donc bornée: $|\partial^\alpha f(u)| \leqslant C_\alpha$. Ainsi $|\partial_x^\alpha F(x,t)| \leqslant C_\alpha |\varphi(t)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Le théorème de dérivation de Lebesgue implique que $\varphi * f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\partial^\alpha(\varphi * f) = \varphi * \partial^\alpha f$.

Finalement si φ et f sont toutes deux à support compact, il existe $R > 0$ tel que, si $\|t\| \geqslant R$ et $\|u\| \geqslant R$ alors $\varphi(t) = 0$ et $f(u) = 0$. Mais alors, si $\|x\| \geqslant 2R$ et $\|t\| \leqslant R$, $\|x-t\| \geqslant R$. Par suite, pour $\|x\| \geqslant 2R$, $F(x,t) = \varphi(t)f(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ donc $\varphi * f = \int F(x,t)\,\mathrm{d}t = 0$. □

Bien que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ soit un espace plutôt grand (nous verrons même bientôt qu'il est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p < +\infty$), cet espace est un peu trop petit. Par exemple, la gaussienne e^{-x^2} n'est pas à support compact. Nous allors donc définir un nouvel espace un peu plus gros. Pour cela, si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, introduisons

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|.$$

Définition 7.4. La classe de Schwarz est l'ensemble

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, p_{\alpha,\beta}(f) < +\infty\}.$$

La classe de Schwarz est l'espace des fonctions qui décroissent rapidement *i.e.* plus vite que les polynômes) à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées. Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ cette classe n'est pas vide. L'inclusion est stricte comme le montre l'exemple suivant:

Exemple 7.5. Soit f une gaussienne, $f(x) = e^{-a\|x\|^2}$, $a > 0$ (la norme est encore la norme euclidienne). Alors $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

pour simplifier, montrons cela pour $d = 1$ et $a = 1/2$ soit $f(x) = e^{-x^2/2}$. Alors, pour toout entier k, il existe un polynôme P_k tel que $f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2/2}$. Cela se montre aisément par récurrence puisque $P_0 = 1$ et un simple calcul montre que $f^{(k+1)}(x) = \big(P_k'(x) - xP_k(x)\big)e^{-x^2/2}$ soit $P_{k+1} = P_k'(x) - xP_k(x)$. Finalement, $x^N P_k(x)e^{-x^2/2}$ est bien sûr borné.

Il y a une part arbitraire dans le choix de $p_{\alpha,\beta}$ pour definir $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On pourraît définir pour deux entiers m, n

$$\tilde{p}_{m,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^m \sum_{|\beta|\leqslant n} \left|\frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta} f(x)\right|.$$

Comme $(1 + \|x\|^2)^m$ est un polynôme de degré $2m$, on peut écrire

$$(1 + \|x\|^2)^m = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} c_\alpha x^\alpha$$

et poser $C = \max |c_\alpha|$. Alors
$$\tilde{p}_{m,n}(f) \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} |c_\alpha| \sum_{|\beta|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} \sum_{|\beta|\leqslant n} p_{\alpha,\beta}(f).$$
D'autre part,
$$|x^\alpha| = |x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d|^{\alpha_d} \leqslant \|x\|_\infty^{|\alpha|} \leqslant \|x\|_2^{|\alpha|} \leqslant (1 + \|x\|_2^2)^{|\alpha|}.$$
Pour voir cela, on sépare les cas $\|x\|_2 \leqslant 1$ e $\|x\|_2 \geqslant 1$. Mais alors
$$p_{\alpha,\beta}(f) \leqslant \tilde{p}_{|\alpha|,|\beta|}(f).$$
Ainsi
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \ : \forall m, n \in \mathbb{N}, \tilde{p}_{m,n}(f) < +\infty\}.$$
Il peut être plus commode d'utiliser ce choix de "semi-norme" pour définir la classe de Schwarz. Par exemple, pour le lemme suivant:

Lemme 7.6. *Pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Pour $p = +\infty$ on a simplement $\tilde{p}_{0,0}(f) = \|f\|_\infty$.

Pour $p < +\infty$, en intégrant en coordonées polaires
$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + \|x\|^2)^\kappa} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{(1 + r^2)^\kappa} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\sigma_{d-1}(\theta)$$
$$= \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{(1 + r^2)^\kappa} \,\mathrm{d}r < +\infty$$
si $2\kappa > d$. Par suite,
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |(1 + \|x\|^2)^d f(x)|^p \frac{\mathrm{d}x}{(1 + \|x\|^2)^{dp}} \leqslant \tilde{p}_{d,0}(f) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + \|x\|^2)^{dp}} < +\infty.$$
□

La proposition suivante est évidente:

Proposition 7.7. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $T \in GL(\mathbb{R}^d)$ une transformation linéaire inversible. Alors*
- *si $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a $\lambda f + \mu g$, $f \circ T$, fg, $x^\alpha f$, $\partial^\alpha f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$;*
- *si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\lambda f + \mu g$, $f \circ T$, fg, $x^\alpha f$, $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Étendons le Lemme **??** en montrant que les convolutions peuvent être ajoutées à cette liste d'opérations laissant ces espaces stables.

Lemme 7.8. *Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $\varphi * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. De plus, si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $t^\alpha \varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors $\varphi * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Pour le dernier point, il suffit d'avoir φ à support compact ou $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. L'idée est la même que pour le Lemme **??**. Notons que, comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/p' = 1$, on a $\varphi * f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et
$$\varphi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t) f(x - t) \,\mathrm{d}t.$$

Pour $p = 1$, c'est exactement la même démonstration que pour le Lemme **??**. On défini encore $F(t,x) = \varphi(t)f(x-t)$ et, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial_x^\alpha F(t,x) = \varphi(t)\partial^\alpha f(x-t)$ de sorte que $|\partial_x^\alpha F(t,x)| \leqslant p_{\alpha,0}(f)|\varphi(t)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Le théorème de déivation de Lebesgue montre qu'alors $\varphi * f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\partial^\alpha(\varphi * f) = \varphi * (\partial^\alpha f)$.

Pour $p > 1$, nous devons utiliser le supplément de décroissance de f pour compenser le fait que $\varphi \notin L^1$. D'abord remarquons qu'il suffit de montrer que $\varphi * f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur la boule $B(0,R)$ avec R arbitraire. Supposons donc que $\|x\| \leqslant R$ et alors

$$\partial_x^\alpha F(t,x) = \varphi(t)\partial^\alpha f(x-t) = \frac{\varphi(t)}{(1+\|t\|^2)^d}\frac{(1+\|t\|^2)^d}{(1+\|x-t\|^2)^d}(1+\|x-t\|^2)^d\partial^\alpha f(x-t).$$

Comme $(1+\|t\|^2)^{-d} \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ (cette fonction est dans tous les $L^q(\mathbb{R}^d)$, $q \geqslant 1$) et $\varphi \in L^p$, l'inégalité de Hölder implique donc que $\Phi(t) := \dfrac{|\varphi(t)|}{(1+\|t\|^2)^d} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Ensuite $(1+\|x-t\|^2)^d|\partial^\alpha f(x-t)| \leqslant \tilde{p}_{d,|\alpha|}(f)$.

Finalement, si $|t| \geqslant 2R$, et $|x| \leqslant R$, $|x-t| \geqslant |t| - |x| \geqslant |t| - R \geqslant |t|/2$ de sorte que

$$\frac{(1+\|t\|^2)^d}{(1+\|x-t\|^2)^d} \leqslant \left(\frac{1+\|t\|^2}{1+\|t\|^2/4}\right)^d \leqslant 4^d$$

alors que pour $|t| \leqslant 2R$,

$$\frac{(1+\|t\|^2)^d}{(1+\|x-t\|^2)^d} \leqslant (1+2R)^d.$$

Suppoons que $R \geqslant 2$, cette borne est encore valable pour $|t| \geqslant 2R$ et finallement

$$|\partial_x^\alpha F(t,x)| \leqslant \tilde{p}_{d,|\alpha|}(f)(1+2R)^d\Phi(t) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Le théorème de déivation de Lebesgue implique alors que $\varphi * f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\partial^\alpha(\varphi * f) = \varphi * (\partial^\alpha f)$ sur $B(0,R)$ avec $R \geqslant 2$ arbitraire, donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$.

Il reste à montrer que, pour α, β, $x^\alpha\partial^\beta(\varphi * f) = x^\alpha\varphi * (\partial^\beta f)$ est bornée. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ implique que $\partial^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il suffit de considérer le cas $\beta = 0$. Définissons alors $M_i\psi(t) = t_i\psi(t)$, on a

$$\begin{aligned} x_i\varphi * f(x) = \int_{\mathbb{R}}^d \varphi(t)x_i f(x-t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}}^d \varphi(t)(x_i - t_i)f(x-t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}}^d t_i\varphi(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \varphi * M_i f + M_i\varphi * f \end{aligned}$$

qui est bornée puisque $M_i\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $M_i f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Un récurrence sur la longueur $|\alpha|$ de α montre alors que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $x^\alpha\varphi * f$ est bornée. □

Remarque 7.9. En regardant la démonstration attentivement, on voit que si $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ est tel que pour tout α avec $|\alpha| \leqslant k$ il existe $\kappa > 0$ tel que $(1+|t|^2)^{-\kappa} \in L^{p'}$ (i.e. $2\kappa p' > d$) et tel que $(1+|t|^2)^\kappa\partial^\alpha f \in L^\infty$, alors $\varphi * f \in \mathcal{C}^k$.

7.2. **Régularisation par convolution.** Le résultat le plus important de ce chapître est le suivant:

Théorème 7.10 (Approximation de l'unité)**.**
Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que $\rho \geqslant 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d}\rho(x)\,dx = 1$. Pour $s > 0$, notons ρ_s la fonction défini par $\rho_s(t) = s^{-d}\rho(t/s)$.

Alors, pour tout $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\varphi * \rho_s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi * \rho_s \to \varphi$ dans L^p quand $s \to 0$.

Pout $p=+\infty$, L^∞ doit être remplacé par $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$: pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, $\varphi*\rho_s\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi*\rho_s\to\varphi$ uniformément quand $s\to 0$.

Démonstration. Nous allons nous concentrer sur le cas $1\leqslant p<+\infty$ et laissons le cas au lecteur $p=+\infty$. La seule chose qui diffère est qu'on utilisera le fait que les fonctions de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ sont uniformément continues.

Remarquons d'abord que $\rho_s\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^d}\rho_s(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}^d}\rho(t/s)\,s^{-d}\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}^d}\rho(r)\,\mathrm{d}r=1$$

avec le changement de variable $r=t/s$. Ainsi, nous avons déjà vu que $\varphi*j_s\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Ensuite, $\rho_s\in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, donc

$$\varphi*\rho_s(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\rho_s(t)\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\varphi(x)-\varphi*\rho_s(x)&=f(x)\int_{\mathbb{R}^d}\rho_s(t)\,\mathrm{d}t-\int_{\mathbb{R}^d}\rho_s(t)\varphi(x-t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\rho_s(t)\big(\varphi(x)-\varphi(x-t)\big)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\rho_s(t)\big(\varphi(x)-\tau_t\varphi(x)\big)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

— rappelons qu'on a noté τ_t l'opérateur de translaté par t, $\tau_t\varphi(x)=\varphi(x-t)$. De l'inégalité de Minkowski on déduit que

$$\|\varphi-\varphi*\rho_s\|_p\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}\rho_s(t)\|\varphi-\tau_t\varphi\|_p\,\mathrm{d}t$$

puisque $\rho_s\geqslant 0$.

Soit maintenant $\varepsilon>0$. Comme $p<+\infty$, on a vu que $\|\varphi-\tau_t\varphi\|_p\to 0$ quand $t\to 0$ de sorte qu'il existe $\eta>0$ tel que, si $|t|<\eta$, $\|\varphi-\tau_t\varphi\|_p\leqslant\varepsilon$. Pour $|t|\geqslant\eta$ nous utiliserons simplement l'inégalité triangulaire qui implique

$$\|\varphi-\tau_t\varphi\|_p\leqslant\|\varphi\|_p+\|\tau_t\varphi\|_p=2\|\varphi\|_p.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}\|\varphi-\varphi*\rho_s\|_p&\leqslant\int_{|t|\leqslant\eta}\rho_s(t)\|\varphi-\tau_t\varphi\|_p\,\mathrm{d}t+\int_{|t|\geqslant\eta}\rho_s(t)\|\varphi-\tau_t\varphi\|_p\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}\rho_s(t)\,\mathrm{d}t+2\|\varphi\|_p\int_{|t|\geqslant\eta}\rho_s(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\int_{\mathbb{R}^d}\rho_s(t)\,\mathrm{d}t=1$ et que

$$\int_{|t|\geqslant\eta}\rho_s(t)\,\mathrm{d}t=\int_{|t|\geqslant\eta}s^{-d}\rho(t/s)\,\mathrm{d}t=\int_{r\geqslant\eta/s}\rho(r)\,\mathrm{d}r\to 0$$

quand $s\to 0$. En particulier, il existe η' tel que, si $s<\eta'$, $2\|\varphi\|_p\displaystyle\int_{|t|\geqslant\eta}\rho_s(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$ et donc $\|\varphi-\varphi*j_s\|_p\leqslant 2\varepsilon$. □

On peut affaiblir un peu les hypothèses sans modifier la démonstration. Il suffit de supposer que $(\rho_s)_{s\geqslant 0}$ est une famille de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$ telles que

(1) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $s > 0$,
$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_s(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_s(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant C.$$
(2) Pour tout $\eta > 0$, $\int_{|x|\geqslant\eta} |\rho_s(x)|\,\mathrm{d}x \to 0$ quand $s \to 0$.

Une telle famille est appelée une approximation de l'unité (et parfois un mollificateur).

Corollaire 7.11. *L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $1 \leqslant p < +\infty$ et donc aussi tout espace contenant $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Proof. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\rho_s(t) = s^{-d} j(t/s)$ Tout d'abord, pour R assez grand $\|f - f\mathbf{1}_{|x|\leqslant R}\| \leqslant \varepsilon$. Il existe alors s tel que $\|f\mathbf{1}_{|x|\leqslant R} - (f\mathbf{1}_{|x|\leqslant R}) * \rho_s\| \leqslant \varepsilon$. Mais alors $\|f - (f\mathbf{1}_{|x|\leqslant R}) * \rho_s\| \leqslant 2\varepsilon$ et $(f\mathbf{1}_{|x|\leqslant R}) * \rho_s \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. □

Remarque 7.12. Il faut être prudent et ne pas utiliser un argument circulaire pour démontrer la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. La démonstration ici utilise les approximations de l'unité. Celle-ci utilise le fait que les translations sont continues (par rapport au paramètre de translation).

À son tour, cette continuité des translations utilise un argument de densité. Le plus facile est d'utiliser la densité des fonctions de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Il faut donc utiliser un autre argument tel que la densité des fonctions étagées (ce que nous avons fait dans ces notes)

Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France. CNRS, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France.

Email address: `Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr`