ANALYSE: CONVERGENCE ET DUALITÉ

PHILIPPE JAMING

Rappels de topologie des espaces de Banach

Temps de travail estimé: 2h30 à 3h.

Le but de ce premier chapitre est de rappeler les notions de base de topologie dans les espaces de Banach et de les illustrer par des exemples.

1. Espaces de Banach

45 min

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Une *norme* sur E est une application $\|.\|$ de E dans les réels positifs $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes: pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$
  (1) $\|0\| = 0$, $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0$ implique $x = 0$;
  (2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
  (3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
  On dira alors que $(E, \|.\|)$ est *espace vectoriel normé.*
- Une suite (e_n) dans E *converge vers* $e \in E$ si $\|e_n - e\| \to 0$, c'est-à-dire si:
  pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N (dependant de ε) tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\|e_n - e\| \leqslant \varepsilon$.
  Dans ce cas, on écrira $e = \lim e_n$.
- Une suite (e_n) de E est une *suite de Cauchy* si
  pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N (dependant de ε) tel que, pour tous $m, n \geqslant N$, $\|e_n - e_m\| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 1.2. Il est facile de voir qu'une suite convergente est toujours de Cauchy, la réciproque n'est pas toujours vraie (pour les espaces de dimension infinie). Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit *complet* et est encore appelé *espace de Banach.*

Exemple 1.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $(e_k)_{k=1,\ldots,d}$ une base de E. Alors tout $e \in E$ s'écrit de façon unique $e = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k$. Ceci nous permet de définir $\|x\|_\infty = \sup_{k=1,\ldots,d} |x_k|$.

Il est facile de voir que ceci définit une norme sur E. Notez que cette norme dépend de la base choisie.

Date: September 8, 2020.

De plus, si (f_n) est une suite dans E, on peut écrire chaque f_n sous la forme $f_n = \sum_{k=1}^{d} x_n^{(k)} e_k$. On montre alors aisément que f_n converge (resp. est de Cauchy) si et seulement si chaque $(x_n^{(k)})$ converge (resp. est de Cauchy).

Supposons maintenant que (f_n) soit de Cauchy. Alors, pour chaque $k \in \{1, \ldots, d\}$. $(x_n^{(k)})$ est une suite de $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}$ (par définition ou construction de $\mathbb{R}$) les suites de Cauchy convergent. Ainsi (f_n) converge dans E.

Avertissement au lecteur

Tout au long de ces notes, vous trouverez des affirmations telles que “il est facile de montrer que”. Il s'agît d'exercice que le lecteur s'efforcera de systématiquement résoudre avec efficacité. Le fait de ne pas y arriver est un indicateur de lacunes héritées de vos études passées et doivent être comblées dès la première lecture de ce document.

Remarque 1.4. Il est facile de voir que toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque peut être fausse (dans un espace vectoriel de dimension infinie). Le choix de la bonne norme s'avère ici cruciale pour cette réciproque.

Définition 1.5. Soit E un espace vectoriel et $\|.\|$, $|||.|||$ deux normes sur E. On dira que ces normes sont *équivalentes* si, pour tout $e \in E$,

$$\frac{1}{C}\|e\| \leqslant |||e||| \leqslant C\|e\|.$$

Ceci définit une relation d'équivalence sur les normes, *i.e.* si $\|.\|_1$ est équivalent à $\|.\|_2$ qui elle est équivalente à $\|.\|_3$, alors $\|.\|_1$ est équivalente à $\|.\|_3$.

Le lemme suivant est facile à démontrer:

Lemme 1.6. *Soit E un espace vectoriel et $\|.\|$, $|||.|||$ deux normes équivalentes sur E. Alors toute suite de Cauchy (resp. suite convergente) pour l'une des normes est aussi une suite de Cauchy (resp. une suite convergente) pour l'autre norme.*

Un fait plus subitle est le suivant

Théorème 1.7. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors deux normes sur E sont équivalentes.*

La démonstration complète sera (re?-)donnée dans le chapitre sur la compacité du deuxième semestre. Rappelons qu'un ensemble $A \subset E$ est (séquentiellement) compact si, de toute suite $(a_n)_n \subset A$ on peut extraire une sous-suite $(a_{n_k})_k$ qui converge dans A (*i.e.* qui converge et dont la limite est dans A). Un ensemble compact est fermé et borné, mais la réciproque est *fausse* (en dimension infinie). On vérifie aisément qu'une partie fermée d'un compact est encore compacte. En utilisant le principe de dichotomie, il est facile de voir qu'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact. Partant de là, il est aussi facile de voir que, si E est une espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base et de la norme $\|.\|_\infty$ associée, alors la boule unité de E est compacte et par suite, la shère unité également. Enfin, on montre qu'une fonction continue sur un compact est bornée et que, si elle est à valeurs réelles, elle atteint son maximum et son minimum.

Esquisse de démonstration. On commence par fixer une base (e_k) de E, il suffira alors de montrer que toute norme sur E est équivalente $\grave{}$la norme $\|.\|_\infty$ définie ci-dessus.

Dans un sens, c'est facile: pour $e = \sum x_k e_k \in E$ on a

$$\|e\| = \left\|\sum x_k e_k\right\| \leqslant \sum |x_k| \|e_k\| \leqslant \left(\sum \|e_k\|\right) \max |x_k| = \left(\sum \|e_k\|\right) \|e\|_\infty.$$

La réciproque est plus subtile et basée sur les faits suivants:

- l'inégalité précedente implique que $e \to \|e\|$ est continue $E, \|.\|_\infty$ vers $\mathbb{R}$;
- la sphère unité de $E, \|.|_\infty$, $S_E = \{e \in E : \|e\|_\infty = 1\}$ est *compacte*;
- une fonction continue sur un compact atteint son minimum;
- il existe donc en un point $e_0 \in S_E$ tel que *i.e.* pour tout e avec $\|e\|_\infty = 1$, $\|e\| \geqslant \|e_0\| \neq 0$ (car $e_0 \neq 0$ puisque $e_0 \in S_E$);
- on termine en utilisant que si $x \in E \backslash \{0\}$ alors $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_E$ et par homogénéité de la norme, on en déduit que $\|x\| \geqslant \|e_0\| \|x\|_\infty$.

□

Définition 1.8. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que E est *complet* ou un *espace de Banach* si toute suite de Cauchy dans E converge.

Remarque 1.9. Ceci est une propriété clé de l'analyse puisqu'elle permet de définir un objet comme étant une limite alors que la définition d'une limite requière d'avoir une idée de sa valeur.

Théorème 1.10. *Tout espace vectoriel de dimension finie est complet.*

Démonstration. Nous avons déjà vu cela pour $E, \|.\|_\infty$ (avec une base fixée). Le cas général résulte du fait que toutes les normes sont équivalentes. □

2. Rappel sur les espaces de Hilbert

30 min

Un cas particulier d'espace de Banach qui est central est celui des espaces de Hilbert.

Rappelons qu'un espace de Hilbert H sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un *produit scalaire*, c'est-à-dire d'une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ telle que

(1) symétrie: pour tous $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
(2) bi-linéarité: pour tout $y \in H$, $x \to \langle x, y \rangle$ est linéaire et donc, par symétrie, $x \to \langle y, x \rangle$ est également linéaire
(3) la forme quadratique associée est définie positive: pour tout $x \in H$, $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Un espace de Hilbert H sur $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un *produit scalaire*, c'est-à-dire d'une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ telle que

(1) anti-symétrie: pour tous $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
(2) sesqui-linéarité: pour tout $y \in H$, $x \to \langle x, y \rangle$ est linéaire et donc, par antisymétrie, $x \to \langle y, x \rangle$ est anti-linéaire
(3) la forme quadratique associée est définie positive: pour tout $x \in H$, $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Il en résulte que $x \to \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une *norme* sur H. Enfin, un espace de Hilbert est par définition *complet*. Deux propriétés clés sont

– l'inégalité de Cauchy-Schwarz: pour tous $x, y \in H$, $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ et l'égalité a lieu si et seulement si x et y son colinéaires;

– l'identité du parallélogramme: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Notons que cette dernière *charactérise les espaces de Hilbert.* En effet, on peut péniblement vérifier que, si une norme vérifie l'identité du parallélogramme, alors l'application suivante

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) & \text{si } H \text{ est un } \mathbb{R}\text{-e.v.} \\ \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k}\|x+i^k y\|^2 & \text{si } H \text{ est un } \mathbb{C}\text{-e.v.} \end{cases}$$

définit un produit scalaire et $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Le lecteur vérifiera aisément que ces identités sont bien valables si la norme provient d'un produit scalaire.

L'exemple clé est le suivant:

Lemme 2.1. *L'espace* $\ell^2 = \left\{ x = (x_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C} \ : \ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$ *muni du produit scalaire* $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Il y a plusieurs choses à vérifier. En premier lieu que c'est bien un espace vectoriel: si $x, y \in \ell^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ alors $|\lambda x_n + \mu y_n|^2 \leqslant 2|\lambda|^2|x_n|^2 + 2|\mu|^2|y_n|^2$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n + \mu y_n|^2 < +\infty$.

Ensuite, il faut vérifier que le produit scalaire est bien définie. Soient donc $x, y \in \ell^2$ et $N \geqslant 1$ un entier. On utilise Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^N$ pour vérifier que

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \|x\|\|y\|$$

ainsi la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$ est (absolument) convergente. Il est alors évident que $\langle x, y\rangle$ définit bien un produit scalaire. Reste donc à voir la complétude.

Soit donc $x^{(k)}$ une suite de Cauchy dans ℓ^2. Chaque $x^{(k)}$ est une suite que nous noterons $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_n$. Fixons d'abord $n_0 \geqslant 1$ et remquons que

$$|x_{n_0}^{(p)} - x_{n_0}^{(q)}| \leqslant \left(\sum_{n\geqslant 1} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2\right)^2 = \left\|x^{(p)} - x^{(q)}\right\|.$$

Ainsi $(x_{n_0}^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est complet, cette suite converge, et on note x_{n_0} sa limite. Ceci nous permet donc de définir une suite $x = (x_n)$ complexe.

Mais, une suite de Cauchy est bornée, il existe donc $C > 0$ tel que, pour tout k, $\left\|x^{(k)}\right\| \leqslant C$. En particulier, si on fixe un entier N,

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(k)}|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)}|^2 \leqslant C^2$$

et, en faisant tendre $k \to +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \leqslant C^2$. Comme N est arbitraire, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leqslant C^2$ *i.e.* $x \in \ell^2$ avec $\|x\| \leqslant C$.

Enfin, soit $\varepsilon > 0$, il existe donc K tel que, si $p, q \geqslant K$, $\left\|x^{(p)} - x^{(q)}\right\| \leqslant \varepsilon$. À nouveau, prenons N un entier et observons que ceci implique

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

qui implique, en faisant tendre q vers l'infini, que

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(p)} - x_n|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Enfin, N étant arbitraire, on en déduit que, pour tout $p \geqslant K$, $\left\|x^{(p)} - x\right\| \leqslant \varepsilon$ *i.e* on a bien $x^{(p)} \to x$ dans ℓ^2. □

La propriété centrale des espaces de Hilbert est le résultat suivant:

Théorème 2.2 (Théorème de projection)**.** *Soit H un espace de Hilbert et C une partie non-vide, convexe et fermé de H. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point de C, noté $P_C(x)$, tel que $\|x - P_C(x)\| = \mathrm{dist}(x, C) := \inf_{y \in C} \|x - y\|$*

Lorsque $C = M$ est un un sous-espace fermé de H, la projection P_M sur M, définie comme ci-dessus, est linéaire, continue de norme 1. De plus, pour tout $x \in H$, $P_M(x)$ est l'unique élément de M tel que, pour tout $y \in M$, $\langle x - P_M(x), y\rangle = 0$. De plus, $Id - P_m$ est la projection sur

$$M^\perp := \{x \in H\ : \langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in M\}.$$

Enfin, les espaces de Hilbert (séparables) ont une propriété qui permet dans certain cas de reproduire des raisonnements analogues à ceux de l'algèbre linéaire:

Définition 2.3. Une base orthonormée d'un espace de Hilbert H est une suite $(e_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

(i) pour tous $j, k \geqslant 1$ avec $j \neq k$, $\langle e_j, e_k\rangle = 0$;
(ii) pour tout $k \geqslant 1$, $\|e_k\| = 1$
(iii) l'espace vectoriel engendré par les $(e_k)_{k\geqslant 1}$ est dense (on dit que la suite est *totale*).

On montre alors que si $(e_k)_{k\geqslant 1}$ est une base orthonormée de H, alors

– pour tout $x \in H$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ (qui est finie),

– pour tous $x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\overline{\langle y, e_k\rangle}$,

– tout $x \in H$ s'écrit $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$ (et cette série converge dans H).

Enfin, si M est un sous-espace vectoriel fermé de H et $(e_k)_{k\in I}$ est une base orthonormée de M alors

$$P_M(x) = \sum_{k\in I} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

L'existence de bases orthonormées est garantie par le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt, à condition que l'espace de Hilbert soit séparable, c'est-à-dire qu'il existe une suite (x_k) totale. On peut la supposer libre (si elle ne l'est pas, on se retrouve à diviser par 0 dans le processus ci-dessous, il suffirait alors de sauter l'étape en question).

La première étape consiste à poser $e_1 = \dfrac{x_1}{\|e_1\|}$. Ensuite, une fois qu'on a construit $e_1, \ldots, e_n$ on pose $E_n = Vect(e_1, \ldots, e_n)$ et $y_{n+1} = x_{n+1} - P_{E_n}(x_{n+1})$. Ce vecteur est alors orthogonal à $e_1, \ldots, e_n$ puisque c'est la projection orthogonale de x_{n+1} sur $E_n^\perp$. Par ailleurs, il sera non-nul si $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ est libre. Enfin, on pose $e_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$ et on obtient ainsi une suite orthonormée. Cette construction montre que, pour tout n, $Vect(e_1, \ldots, e_n) = Vect(x_1, \ldots, x_n)$, ce qui montre que la suite ainsi construite est encore totale.

25 min

3. Un exemple: l'espace des fonctions continues

Théorème 3.1. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1]) = \{f\,[0,1] \to \mathbb{C} : f$ est continue sur $[0,1]\}$. Munissons E de la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Alors E est un espace de Banach.

Remarque 3.2. Les fonctions continues sur $[0,1]$ sont bornées donc $\|f\|_\infty$ est bien défini et il est facile de voir que ceci est bien une norme.

Rappelons que dans E, il y a deux modes de convergences:

– la *convergence simple*: on dit qu'une suite (f_n) de fonctions $[0,1] \to \mathbb{K}$ converge simplement vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ si, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \to f(x)$. Ceci se lit aussi:

pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N (dépendant de x et de ε) tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

– La *convergence uniforme*: on dit qu'une suite (f_n) de fonctions $[0,1] \to \mathbb{K}$ converge uniformément vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ si, $\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$. Ceci se lit aussi:

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N (ne dépendant que de ε) tel que, pour tout $n \geqslant N$, pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Rappelons ce résultat clé de l'analyse de licence:

Lemme 3.3. *Il existe une suite (f_n) dans $\mathcal{C}([0,1])$ qui converge simplement vers une fonction f qui n'est pas continue.*

Soit (f_n) est une suite de $\mathcal{C}([0,1])$ et f une fonction $[0,1] \to \mathbb{C}$. Si (f_n) converge uniformément vers f, alors f est continue.

Remarque 3.4. Lorsqu'on dit $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ on entend (f_n) converge uniformément vers f. Pour montrer une convergence uniforme, on cherche une suite a_n (ne dépendant pas de x) telle que $a_n \to 0$ et, pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$. On peut bien entendu prendre $a_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$, mais ce n'est pas nécessaire puisque l'obtention de ce sup peut être délicat. Par exemple, en utilisant l'estimation du reste dans le critère des séries alternées, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k \to -\ln(1+x)$$

uniformément sur $[0,1]$.

Notez que votre cours sur les séries entières vous montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$ est 1. Ainsi, cette série converge uniformément sur $[0, a]$, pour tout $a < 1$. Ce n'est pas la même chose que la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Démonstration. Pour la convergence simple, définissons $f_n(x) = x^n$ alors f_n converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ qui n'est pas continue en 1.

Supposons maintenant que (f_n) converge uniformément vers f. Fixons $x_0 \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe n tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Comme f_n est continuue en x_0, il existe un voisinnage V de x_0 tel que, pour tout $x \in V$, $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Mais alors, pour ces x,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant 3\varepsilon$$

qui montre la continuité de f en x_0. □

Nous pouvons maintenant conclure:

Démonstration du théorème. Soit (f_n) une suite de Cauchy: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, si $m, n \geqslant N$ et $x \in [0, 1]$ alors $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Fixons $x \in [0, 1]$ et remarquons que $\big(f_n(x)\big)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, qui est complet. Par suite, $\big(f_n(x)\big)_n$ a une limite que nous allons noter $f(x)$. Ceci defini une fonction $f\ [0, 1] \to \mathbb{C}$ qui est la *limite simple* de (f_n). Il reste donc à montrer que f est aussi *limite uniforme i.e.* $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Une fois ceci fait, le lemme précédent montre que f est continue.

Pour cela, on fixe $\varepsilon > 0$, on prend N tel que si $n \geqslant N$ et $x \in [0, 1]$, alors pour tout $m \geqslant N$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Mais, pour x et $n \geqslant N$ fixés, on fait $m \to +\infty$ donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour $n \geqslant N$, $\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leqslant \varepsilon$ qui est bien ce qu'on voulait montrer. □

La première étape de la démonstration précédente consiste à montrer que la convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est *fausse, même si la limite est continue.* Pour cela, on peut définir f_n de la façon suivante:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui converge simplement vers 0, mais pas uniformément puisque $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = 1$.

Notez qu'on peut munir $\mathcal{C}([0, 1])$, d'une autre norme, par exemple

$$\|\varphi\|_1 = \int_0^1 |\varphi(x)|\, \mathrm{d}x.$$

Notons que $f_n \to f$ pour cette norme ainsi $\|\cdot\|_1$ n'est *pas equivalente* à $\|\cdot\|_\infty$. Notons aussi que si $f_n = x^n$, on a $f_n \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Comme f n'est pas continue, $\mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

Remarque 3.5. Tout ce qui a été dit dans cette section est valable pour $\mathcal{C}(K)$, l'ensemble des fonctions continues sur un compact K.

30 min

4. Un second exemple: applications linéaires continues

Dans cette section, E, F sont des espaces de Banach.

Rappelons le résultat fondamental suivant:

Théorème 4.1. *Soit $T : E \to F$ une application linéaire. On a équivalence entre:*

(1) *T est continue sur E;*
(2) *T est continue en 0;*
(3) *T est borné sur la boule unité de E: il existe C tel que, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| \leqslant 1$, $\|Tx\| \leqslant C$.*
(4) *il existe $K > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|Tx\| \leqslant K\|x\|$.*

Esquisse de démonstration. L'équivalence de (1) et (2) provient de $T(x) - T(x_0) = T(x - x_0) = T(x - x_0) - T(0)$.

(4) implique évidemment (3) avec $C = K$. Pour la réciproque, si $x \neq 0$, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1 donc $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \leqslant C$ d'où (4) avec $K = C$.

Finallement (4) implique clairement (2). Réciproquement, si on a (2), en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la continuité de T en 0, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|x\| \leqslant \eta$, $\|Tx\| \leqslant 1$. Par suite, si $\|x\| \leqslant 1$, alors $\|\eta x\| \leqslant \eta$ donc

$$\|Tx\| = \frac{1}{\eta}\|T(\eta x)\| \leqslant \frac{1}{\eta}$$

ce qui termine la démonstration. □

Lemme 4.2. *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $E \to F$ est continue.*

Esquisse de démonstration. En prenant la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur E et en écrivant $x = \sum x_i e_i$ on a $Tx = \sum x_i Te_i$ donc

$$\|Tx\| \leqslant \sum |x_i|\|Te_i\| \leqslant \left(\sum \|Te_i\|\right) \|x\|_\infty.$$

En utilisant l'équivalence des normes sur E, on conclue facilement que T est continue quel que soit la norme choisie. □

Pour une application linéaire *continue (bornée)* $T : E \to F$, on défnit

$$\|T\| = \sup_{x\in E, \|x\|_E \leqslant 1} \|Tx\|_F = \sup_{x\in E, \|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Il est facile de voir que les trois quantité ainsi définies sont bien égales et qu'elles définissent une norme sur $B(E, F) := \{T : E \to F \text{ linéaire et continue}\}$. Une telle norme sur $B(E, F)$ est dite *subordonée*.

Théorème 4.3. *L'espace $B(E, F)$ munie de cette norme est une espace de Banach.*

Esquisse de démonstration. La démonstration est presque la même que pour la complétude de $\mathcal{C}([0,1])$. Soit T_n une suite de Cauchy dans $B(E,F)$.

Étape 1: observons que pour $x \in E$, $T_n(x)$ est une suite de Cauchy dans F qui est complet. On peut donc définir $T(x) = \lim T_n(x)$.

Étape 2: il est facile de voir que T est une application linéaire.

Étape 3: T_n est de Cauchy donc une suite bornée *i.e.* il existe $C > 0$ tel que $\|T_n\| \leqslant C$. En d'autres termes, pour $x \in E$ avec $\|x\| \leqslant 1$, $\|T_n(x)\| \leqslant C$.

Comme la norme est une fonction continue $E \to \mathbb{R}$ (exercice), $\|T_n(x)\| \to \|T(x)\|$ donc pour $x \in E$ avec $\|x\| \leqslant 1$, $\|T(x)\| \leqslant C$ et T est bornée *i.e.* continue.

Étape 4: $\|T_n - T\| \to 0$ c'est-à-dire $T_n \to T$ dans $B(E,F)$. □

Un cas particulier important est l'espace dual de E:

Définition 4.4. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le *dual* de E est l'espace de Banach $E' = B(E,\mathbb{K})$.

Si $(E')' = E$ on dit que E est un espace reflexif.

Si E est une espace de Hilbert, il est réflexif:

Théorème 4.5 (Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ alors H' s'identifie à H de le sens que, pour tout élément $\ell \in H'$ il existe un unique $a \in H$ tel que $\ell(x) = \langle x, a\rangle$ où $\langle .,.\rangle$ est le produit scalaire de H.*

Notons que Cauchy-Schwarz implique que $x \to \langle x, a\rangle$ est effectivement borné sur H. D'autres exemples d'espaces réflexifs seront donnés dans ce cours.

La dualité nous permet de définir une nouvelle convergence.

Définition 4.6. Soit E un espace de Banach et E' son dual. Une suite (x_n) de E *converge faiblement* vers $x \in E$ si, pour tout $\ell \in E'$, $\ell(x_n) \to \ell(x)$. On écrit $w - \lim x_n = x$ ou $x_n \rightharpoonup x$.

Le terme convergence "faible" est justifiée par le fait que la convergence implique la convergence faible. En effet, ℓ étant continue, si $x_n \to x$ alors $\ell(x_n) \to \ell(x)$.

Il se trouve que si E est de dimension finie, la réciproque est également vraie. Pour voir cela, fixons une base $(e_k)_{k=1,\ldots,d}$ de E de sorte que chaque $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = \sum x_k e_k$. On définit l'application $l_k : E \to \mathbb{K}$ par $l_k(x) = x_k$. L'unicité des x_k implique que chaque l_k est linéaire. Come E est de dimension finie, les l_k sont continues, *i.e.* $l_k \in E'$. Mais alors, si $(x^{(n)})$ converge faiblement vers x, pour $k = 1, \ldots, d$, $l_k(x^{(n)}) \to_{n\to\infty} l_k(x)$ et alors

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{d} l_k(x^{(n)}) e_k \to_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{d} l_k(x) e_k = x.$$

En dimension infinie, la situation est différente, même si E est un espace de Hilbert séparable. En effet, un tel espace a une base orthonormale (e_n). Une telle suite ne converge **pas** (et n'a même pas de sous-suite convergente) puisque, pour $m \neq n$

$$\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 + 2\Re\langle e_n, e_m\rangle = 2.$$

D'autre part, si $\ell \in H'$ alors d'après Riesz, il existe $a \in H$ tel que $\ell(x) = \langle x, a\rangle$. Mais alors

$$\sum_{n\geqslant 0} |\ell(e_n)|^2 = \sum_{n\geqslant 0} |\langle e_n, a\rangle|^2 = \|a\|^2.$$

En particulier, cette serie converge donc son terme général tend vers 0: $|\ell(e_n)|^2 \to 0$ donc $\ell(e_n) \to 0$. Comme ℓ est arbitraire, on vient de montrer que $w - \lim e_n = 0$.

La notion de convergence faible est essentielle en dimension infinie. Une des raisons à cela est qu'un ensemble fermé borné n'est pas forcément compact, mais, sous certaines conditions, une suite bornée aura une sous-suite faiblement convergente.

10 min

5. Compléments utiles sur la convergence

5.1. **Convergence au sens de Cesaro.**

Définition 5.1. Soit E un espace de Banach, $x \in E$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans E. On dit que (x_n) Cesaro-converges vers x si la moyenne de ses $n+1$ premiers termes converge

$$\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1} \to x.$$

Il est facile de trouver une suite Cesaro-convergente sans être convergente. Par exemple, si $x_n = (-1)^n$, alors

$$\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1} = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{si } n \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases} \to 0.$$

Toutefois, la réciproque est vraie:

Lemme 5.2. *Si (x_n) converge vers x alors (x_n) Cesaro-converge vers x.*

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1} - x = \frac{(x_0 - x) + (x_1 - x) + \cdots + (x_n - x)}{n+1}.$$

En remplaçant x_n par $x_n - x$ on peut donc supposer que $x = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\|x_n\| \leqslant \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1} \right\| &\leqslant \frac{\|x_0\| + \cdots + \|x_{N-1}\| + \|x_N\| + \cdots + \|x_n\|}{n+1} \\ &\leqslant \frac{C}{n+1} + \frac{(n-N+1)}{n+1}\varepsilon \end{aligned}$$

où $C = \|x_0\| + \cdots + \|x_{N-1}\|$. Choisissons alors $N' \geqslant C/\varepsilon$, alors pour $n \geqslant N'$,

$$\left\| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon$$

ce qui montre la convergence. □

5.2. **Convergence de séries.** Enfin, nous allons conclure avec quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite.

Soit E un espace de Banach. Pour une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de E on considère la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$ des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$.

Définition 5.3. On dit que la seérie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge* si la suite des sommes partielles S_N converge et, dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim S_N$.

On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est *normalle convergente* si la série (réelle) $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ converge.

Notons que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la convergence normale est appelée convergence absolue.

Nous allons utiliser les 2 lemmes suivants:

Lemme 5.4. *Soit (x_n) une suite dans un espace de Banach E. Si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est normallement convergente, elle est convergente. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Pour la réciproque, il suffit de considér la suite réelle $(-1)^n/n$. La série associée est convergente, mais pas absolument convergente. On fixe alores $e \in E$, $e \neq 0$ et on prend la suite $x_n = (-1)^n e/n$.

Rappelons que, pour la convergence, rappelons que le reste est estimé par le critère des séries alternées: pour $p \leqslant q$

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \frac{(-1)^n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{p}$$

ce qui montre que la suite des sommes partielles est de Cauchy, donc convergente.

Pour voir que $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ diverge, le plus rapide est de comparer à une intégrale:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(N+1) \to +\infty.$$

Pour le sens qui nous intéressen in suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ converge et on considère les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$. Alors, pour $N \geqslant M$,

$$\|S_N - S_M\| = \left\|\sum_{n=M+1}^{N} x_n\right\| \leqslant \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|.$$

Ainsi S_N est de Cauchy donc converge. □

Il se trouve que cette propriété caractérise les espaces de Banach. Cette propriété est parfois pratique pour montrer qu'un espace est complet:

Lemme 5.5. *Soit $E, \|.\|$ un espace vectoriel normé. Supposons que dans E, toute série normallement convergente est convergente. Alors E est complet i.e. est un espace de Banach.*

Démonstration. Supposons que E ait cette propriété et soit (x_n) une suite de Cauchy.

D'abord, en utilisant la définition d'une suite de Cauchy ($\varepsilon = 10^{-k}$), on peut construite une suite d'entiers n_k tels que $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| \leqslant 10^{-k}$.

On defini ensuite $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ et on note que

— la série $\sum u_k$ est normallement convergente, donc convergente,

— comme $x_{n_N} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k + x_{n_0}$, la sous-suite suite x_{n_k} converge.

Finallement, on va utiliser le fait simple suivant:

Lemme 5.6. *Si une suite de Cauchy a une sous-suite convergente, alors est elle-même convergente.*

Démonstration du Lemme 5.6. Soit (f_k) une suite de Cauchy et supposons qu'une sous-suite converge: $f_{k_j} \to f$ quand $j \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, si $k, l \geqslant N$, $\|f_k - f_l\|_p \leqslant \varepsilon/2$. Il existe J tel que, si $j \geqslant J$, $k_j \geqslant N$ (puisque $k_j \to \infty$ par définition d'une sous-suite) et $\left\|f_{k_j} - f\right\|_p \leqslant \varepsilon/2$ (la suite

$(f_{k_j})_j$ converge vers f). Mais alors $\|f_k - f\|_p \leqslant \|f_k - f_{k_j}\|_p + \|f_{k_j} - f\|_p \leqslant \varepsilon$ qui montre que $f_k \to f$. $\square$

$\square$

Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France. CNRS, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France.

Email address: `Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr`