

Examen, première session. Durée 1h30.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Dans cet exercice H sera un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ séparable et $T : H \rightarrow H$ un opérateur linéaire borné.

- (1) Montrez que si, pour tout $x \in H$, $\langle x, Tx \rangle = 0$ alors $T = 0$.
Indication : considérez $x = y \pm z$ et $x = y \pm iz$.
- (2) Montrez que T est une isométrie (i.e. $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$) si et seulement si $T^*T = I$.
- (3) Montrez que T est unitaire ($T^*T = TT^* = I$) si et seulement si T est une isométrie surjective.
- (4) Montrez qu'il existe une unique paire d'opérateurs auto-adjoints (U, V) telle que $T = U + iV$.
Indication : Si $T = U + iV$ avec U, V auto-adjoints, calculez T^* .
 Dans la suite U et V désigneront les opérateurs ainsi associés à T .
- (5) Montrez que T est un opérateur normal ($T^*T = TT^*$) si et seulement si ces opérateurs U et V commutent ($UV = VU$).
- (6) Montrez que si T est de rang fini, T^* aussi.
- (7) En déduire que si T est compact, T^* aussi.
- (8) En déduire que si T est compact, U et V aussi.
- (9) On suppose maintenant que T est compact, que pouvez vous en déduire pour U et V .
- (10) Montrez que si U et V commutent, les espaces propres de U sont stables par V (et vice versa).
- (11) En déduire le théorème spectral pour les opérateurs compacts normaux.

Exercice 2. Dans cet exercice, $1 \leq p < \infty$, φ est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et $T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ est défini par $Tf = f * \varphi$ (produit de convolution).

- (1) Déterminez $\|T\|$.
 On suppose maintenant que $\|\varphi\|_1 < 1$.
- (2) En déduire que $I - T$ est inversible.
- (3) En déduire que, pour tout $g \in L^p(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $f - f * \varphi = g$.
- (4) Dans cette question, on suppose que $p = 2$. Retrouvez ce résultat directement à l'aide de la transformée de Fourier.
- (5) On suppose maintenant que $p = 1$ et que $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$.
 - (a) Que vaut $\|\varphi\|_1$ et montrez que $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(0, +\infty)$.
 - (b) On suppose qu'il existe f telle que $f - f * \varphi = g$. Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(0, +\infty)$ et déterminez f' .
 - (c) En déduire que $f \notin L^1(\mathbb{R})$.