Année universitaire 2017/2018
Master Mathématiques et Applications
M1 Semestre 1
Analyse spectrale

Université de Bordeaux
Collège Sciences et Technologies
UF Math. et Interactions
Ph. Jaming

Examen, première session. Durée 3h.

Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1. Dans cet exercice, on considère deux espaces : $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $H = L^2([0,1]$ muni de la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$, dans ce cas, le produit scalaire associé est noté $\langle f, g\rangle$. On considère les deux applications linéaires sur E et H définies par

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad Wf(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Soit D une partie dense de H et S, T deux opérateurs bornés sur H tels que, pour tous $x, y \in D$, $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$. Montrez que $T = S^*$.

(2) Montrer que V est un opérateur borné sur E. Est-il compact ?

(3) Montrer que V est un opérateur borné sur H. Est-il compact ?

(4) Montrer que W est un opérateur borné sur H.

(5) Montrez que si f, g sont continues, alors $\langle Vf, g\rangle = \langle f, Wg\rangle$.

(6) Que pouvez vous en déduire sur W.

(7) Soit U l'opérateur défini sur H par $U = VV^*$. Montrez que U est compact auto-adjoint, positif ($\langle Uf, f\rangle \geq 0$ pour tout $f \in H$). Que pouvez vous en déduire ?

(8) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f \in H$ définie par $f(t) = \cos \alpha t$.
   (a) Calculez Uf_α.
   (b) Pour quels α, f_α est-il vecteur propre de U.

(9) Déterminez l'ensemble des vecteurs propres de U : soit f un vecteur propre pour une valeur propre λ.
   (a) Montrez que $\lambda \neq 0$.
   (b) Montrez que f est continu puis que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   (c) Déterminez une équation différentielle satisfaire par f.
   (d) que pouvez vous dire de f en 0 et en 1.
   (e) Résoudre l'équation différentielle.
   (f) Conclure.

(10) Que pouvez vous dire des fonctions que vous avez obtenues.

T.S.V.P

Exercice 2. Dans cet exercice H sera un espace de Hilbert. Tous les opérateurs sont supposés linéaires **bornés**. On notera I l'opérateur identité sur H.

(1) Soient S, T deux opérateurs sur H. Montrez que si $ST = TS$ et si ST est inversible, alors S et T sont tous deux inversibles.

(2) En déduire que, si $c, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ sont tels que $c(S - \mu_1 I) \cdots (S - \mu_d I)$ est inversible alors $\mu_1, \ldots, \mu_n \notin \mathrm{Sp}(S)$

(3) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme, en déduire que

$$\mathrm{Sp}\big(P(S)\big) = P\big(\mathrm{Sp}(S)\big) := \{P(\lambda) \,:\, \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\}.$$

Indication : écrire $(P(z) - \lambda = c\prod_{j=1}^{n}(z - \mu_j)$ et distinguer les cas $\lambda \notin P\big(\mathrm{Sp}(S)\big)$ et $\lambda \in P\big(\mathrm{Sp}(S)\big)$.

(4) Soit P un polynôme et S, T deux opérateurs. Montrez que si $ST = TS$ alors $P(S)T = TP(S)$. En déduire que si S est normal ($SS^* = S^*S$) alors $P(S)$ aussi.

Dans la suite S sera supposé **normal**.

(5) Soit P un polynôme. En déduire que

$$\|P(S)\| = \sup\{|P(\lambda)| \,:\, \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\}.$$

(6) Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge normalement sur $\mathrm{Sp}(S)$. En déduire que $P_n(S)$ converge.

(7) Soit f une fonction continue sur $\mathrm{Sp}(S)$. Comment définiriez vous $f(S)$? (Que faut-il faire pour montrer que votre définition a bien un sens ?)

(8) Vérifiez que votre définition vous permet de montrer les 2 propriétés suivantes :
— si T commute avec S alors T commute avec $f(S)$;
— si S est hermitien ($S^* = S$) et f est à valeurs réelles, alors $f(S)$ est hermitien.

The two exercices are independent

Exercice 3. In this exercise, we consider two spaces : $E = \mathcal{C}([0,1])$ endowed with the norm $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ and $H = L^2([0,1]$ endowed with the norm $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$, and in this case, the scalar product is denoted by $\langle f, g\rangle$. We consider the two linear mappings on E and on H given by

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad Wf(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Let D be a dense subset of H and S, T two bounded operators on H such that, for every $x, y \in D$, $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$. Show that $T = S^*$.

(2) Show that V is a bounded operator on E. Is it compact ?

(3) Show that V is a bounded operator on H. Is it compact ?

(4) Show that W is a bounded operator on H.

(5) Show that for f, g continuous, we have $\langle Vf, g\rangle = \langle f, Wg\rangle$.

(6) What can you then say about W.

(7) Let U be the operator on H given by $U = VV^*$. Show that U is compact self-adjoint, positive ($\langle Uf, f\rangle \geq 0$ for every $f \in H$). What can you then say about U ?

(8) Let $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $f \in H$ be defined by $f(t) = \cos \alpha t$.

   (a) Compute Uf_α.

   (b) For which α's, is f_α an eigenvector of U.

(9) Determine all eigenvectors of U : let f be an eigenvector for the eigenvalue λ.

   (a) Show that $\lambda \neq 0$.

   (b) Show that f is continuous and then that f is of class $\mathcal{C}^2$.

   (c) Find a differential equation satified by f.

   (d) What can you say about f at 0 and at 1.

   (e) Solve the differential equation.

   (f) Conclude.

(10) What can you say about the family of functions that you have obtained.

Exercice 4. In this exercise H is a Hilbert space. All operators are assumed to be lineair and **bounded**. I is the identity operator on H.

(1) Let S, T be operators on H such that $ST = TS$. Show that if ST is invertible, then so are S and T.

(2) From this deduce that if $c, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ are such that $c(S - \mu_1 I) \cdots (S - \mu_d I)$ is invertible then $\mu_1, \ldots, \mu_n \notin \mathrm{Sp}(S)$

(3) Let $P \in \mathbb{C}[X]$ be a polynomial, show that

$$\mathrm{Sp}\big(P(S)\big) = P\big(\mathrm{Sp}(S)\big) := \{P(\lambda) \,:\, \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\}.$$

Indication : write $(P(z) - \lambda = c\prod_{j=1}^{n}(z - \mu_j)$ and distinguish the cases $\lambda \notin P\big(\mathrm{Sp}(S)\big)$ and $\lambda \in P\big(\mathrm{Sp}(S)\big)$.

(4) Let P be a polynomial and S, T two operators such that $ST = TS$. Show that $P(S)T = TP(S)$. Conclude that if S is normal ($SS^* = S^*S$) so is $P(S)$.

From now on S is **normal**.

(5) Le P be a polynomial. Show that

$$\|P(S)\| = \sup\{|P(\lambda)| \,:\, \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\}.$$

(6) Let(P_n) be a sequence of polynomials that is uniformly convergent on $\mathrm{Sp}(S)$. Show that $P_n(S)$ converge.

(7) Let f be a continuous function on $\mathrm{Sp}(S)$. How would you define $f(S)$? (What would you have to do to show that this definition is correct ?)

(8) Make sure that the 2 following properties hold :

— if T commutes with S then T commutes with $f(S)$;

— if S is hermitian ($S^* = S$) and f is real valued, then $f(S)$ is hermitian.