Année universitaire 2017/2018
Master Mathématiques et Applications
M1 Semestre 1
Analyse fonctionnelle

Université de Bordeaux
Collège Sciences et Technologies
UF Math. et Interactions
Ph. Jaming

Examen, première session. Durée 3h.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. L'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

(1) Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge. Est-elle absolument convergeante ?

(2) Donnez une primitive de la fonction $x\to e^{-xt}\sin x$.
Indication : $\sin x=\operatorname{Im} e^{ix}$.

(3) En déduire une expression de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, pour tout $A>0$.
Indication : Remarquez que $\displaystyle\frac{1}{x}=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ et utiliser Fubini.

(4) Conclure à l'aide du théorème de convergence dominée.

Exercice 2. Banach-Steinhaus.

(1) Rappelez l'énoncé du théorème de Banach-Steinhaus

(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que, pour toute suite de carré sommable $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2(\mathbb{N})$, $\sum x_ny_n$ est absolument convergente. Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 3. Densité.

(1) Rappelez l'énoncé du théorème de densité de Weierstrass

(2) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$ (fonctions continues de $[0,1]\times[0,1]$ à valeurs réelles) donné par
$$E=\left\{U(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i(x)v_i(y), n\in\mathbb{N},\lambda_i\in\mathbb{R},u_i,v_i\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\right\}.$$
Montrez que E est dense dans $\mathcal{C}([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq1}$ définie sur $[0,+\infty)$ par $f_n(t)=\sin\sqrt{t+(2n\pi)^2}$.

(1) Rappelez l'énoncé du théorème d'Ascoli.

(2) Montrer que cette suite est équicontinue et tend simplement vers 0.
Indication : On pourra utiliser le théorème des accroissements finis

(3) Montrez qu'elle ne converge pas uniformément vers 0.
Indication : On trouvera t_n tel que $f_n(t_n)$ ne tend pas vers 0.

Exercice 5. Polynômes orthogonaux

(1) Soit μ un mesure dont le support est $(0,+\infty)$. Donnez un critère sur μ permettant d'établir la densité des polynômes dans $L^2(\mu)$.
Donnez en quelques lignes les grandes étapes de la démonstration de ce critère.

(2) Soit maintenant μ la mesure sur $(0,+\infty)$ définie par $\mathrm{d}\mu(x)=e^{-\ln^2(x)}\,\mathrm{d}x$.
  (a) Montrez que les polynômes appartiennent à $L^2(\mu)$.
  (b) Soit f définie sur $(0,+\infty)$ par $f(x)=\sin(2\pi\ln x)$. Montrez que $f\in L^2(\mu)$ et que, pour tout entier positif n, $\langle f,x^n\rangle_{L^2(\mu)}=0$.

(c) Que pouvez vous en déduire sur la famille $(P_n)_{n\geq 0}$ obtenue par orthonormalisation de Gramm-Schmidt dans $L^2(\mu)$ de la famille $(x^n)_{n\geq 0}$.

(3) Les polynômes de Tchebichev (de première espèce) sont définis sur $[-1,1]$ par la relation $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, c'est-à-dire, pour $x \in [-1,1]$,

$$T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big).$$

(a) Déterminez T_0, T_1, T_2.

(b) Démontrez la relation de récurrence reliant $T_n + T_{n+2} = 2xT_{n+1}$. En déduire que T_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le terme dominant de T_n.

(c) Montrez que T_n est paire (resp. impaire) lorsque n est paire (resp. impaire).

(d) Quels sont les zéros de T_n.

(e) Montrez que (T_n) est une famille orthogonale de $L^2\big((-1,1),(1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x\big)$. Quelle est la norme de T_n.

(f) Montrez que $T_n'(\cos\theta) = n\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ et en déduire les extrema de T_n sur $(-1,1)$. En déduire que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1.$$

(g) Montrez que $T_n(\cosh x) = \cosh nx$ et en déduire que, pour $|t| \geq 1$, $|T_n(t)| \geq 1$.
Indication : prolongement analytique.

(h) Montrez que T_n vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

(i) Soient $-1 \leq x_0 < \cdots < x_n \leq 1$. Pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1,1])$ on désigne par P son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, \ldots, x_n$ *i.e.* P est l'unique polynôme de degré n tel que $f(x_j) = P(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$. Montrez que

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{j=0}^n (x-x_j)}{(n+1)!} \sup_{\xi\in(-1,1)} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Indication : Introduire

$$\Phi(x) = \frac{f(x) - P(x)}{\prod_{j=0}^n (x-x_j)}$$

et

$$g(x,t) = f(t) - P(t) - \Phi(x)\prod_{j=0}^n (t-x_j).$$

On fixe alors $x \in (-1,1)$ et on vérifie que $t \to g(x,t)$ s'annule en $n+2$ points qu'on déterminera. En déduire qu'il existe $\xi \in (-1,1)$ tel que $\partial_t^{n+1} g(x,\xi) = 0$. On conclue en calculant explicitement $\partial_t^{n+1} g(x,\xi) = 0$.

(j) Soient maintenant $x_0, \ldots, x_n$ les racines de T_n et Q un polynôme de degré n de terme dominant x^n (un polynôme monique). Montrer que

$$\sup_{x\in(-1,1)} \left|\prod_{j=0}^n (x-x_j)\right| \leq \sup_{x\in(-1,1)} |Q(x)|.$$

Indication : Introduire $\tilde{T}_{n+1}(x) = 2^{-n}T_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x-x_j)$ et x_j' tel que $|\tilde{T}_{n+1}(x_j')|$ soit maximal (que pouvez vous dire des x_j' et quelle est la valeur de $\tilde{T}_{n+1}(x_j')$?).
On raisonne ensuite par l'absurde en supposant que $\sup_{x\in(-1,1]} |Q(x)| < 2^{-n}$ en introduisant $P(x) = Q(x) - \tilde{T}_{n+1}$ (quel est son degré ?). Montrez que P a alors au moins n zéros.