Année universitaire 2018/2019
Master Mathématiques et Applications
M1 Semestre 1
Analyse : dualité et convergence

Université de Bordeaux
Collège Sciences et Technologies
UF Math. et Interactions
Ph. Jaming

Examen, seconde session.

Les exercices sont indépendants.

Dans tout cet examen, (Ω,μ) sera un espace mesuré. La transformée de Fourier est normalisée de telle sorte que, pour $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$$\hat f(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t\xi}dt.$$
Pour $A\subset\mathbb{R}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction $\mathbf{1}_A(x)=\begin{cases}1 & \text{si} x\in A\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Exercice 1. Soit f une fonction de classe $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}}|\xi||\widehat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$ converge, montrer que f coincide presque partout avec une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2. Soient $f,g\in L^3(\Omega,\mu)$ Montrez que $f^2g\in L^1(\Omega,\mu)$.

Exercice 3. Soit $f\in L^1(\Omega,\mu)\cap L^\infty(\Omega,\mu)$.

(1) Montrez que, pour tout $p\in]1,+\infty)$, $f\in L^p(\Omega,\mu)$.
(2) Montrez que l'application $p\to\|f\|_p$ est dérivable sur $]1,+\infty)$ et calculer sa dérivée.

Exercice 4. Montrer que ℓ^p est complet.

Exercice 5.

(1) Soit $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donnez la définition de T' et T''.
(2) Donnez la définition de la distribution $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donnée par $T=\delta_0$ et montrez que cela définit bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
(3) Montrez que, pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}}|x|\varphi''(x)dx=2\varphi(0)$.
(4) En déduire que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\frac{d^2}{dx^2}|x-a|=2\delta_a$ au sens des distributions.
On notera $f_a : x\to|x-a|$ et $id : x\to x$.
(5) On définit l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$, admettant un nombre fini $n\in\mathbb{N}$ (qui dépend de f) de points de non dérivabilité $a_1<\cdots<a_n$, et affines sur chaque intervalle $]a_i;a_{i+1}[$, $i\in\{0,\dots,n\}$ où l'on a posé $a_0=-\infty$ et $a_{n+1}=+\infty$ (avec la convention que si $f\in E$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $n=0$, l'ensemble des points de non dérivabilité est vide et f est affine sur $\mathbb{R}$).
   (a) Soit f définie par $f(x)=(-2x+1)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(x)+(1+3x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.
   Justifier que f est dans E et montrer que f est combinaison linéaire de la famille de fonctions $(f_0;id;\mathbf{1}_{\mathbb{R}})$.
   (b) Soit f une fonction de E non dérivable en au moins un point de $\mathbb{R}$ et soient $a_1<\cdots<a_n$ ses points de non dérivabilité. Montrer l'existence d'un unique $(n+2)$-uplet de réels $(\alpha_1,\alpha_n,\beta,\gamma)$ tels que

eq:form (0.1)
$$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_{a_i}+\beta id+\gamma\mathbf{1}.$$

   Indication : Pour l'existence, on pourra raisonner par récurrence sur le nombre n de points de non dérivabilité de f.
   (c) Donner alors, pour tout $i=1,\dots,n$ l'expression de α_i en fonction de la différence des pentes de la fonction f à droite et à gauche du point a_i.

(d) Tracer la représentation graphique en repère orthonormé de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -2 \\ 3 + \frac{x}{2} & \text{si } -2 \leq x \leq 4 \\ 1 + x & \text{si } x > 4 \end{cases} .$$

puis donner la décomposition de cette fonction sous la forme (eq:form 0.1).

(e) Déduire de ce qui précède, pour toute fonction $f \in E$, l'expression (au sens des distributions) de sa dérivée seconde comme combinaison linéaire de distributions de Dirac.