# LES TOURS DE HANOÏ :
# un exemple de récursivité

## Situation déclenchante

« La légende dit que dans un temple de Hanoï, à l'origine du monde, 64 disques de diamètre croissant étaient empilés sur un taquet. Deux autres taquets sont disponibles, qui sont utilisés pour déplacer les disques, la condition étant qu'un disque d'un certain diamètre ne peut pas être placé au dessus d'un disque de diamètre inférieur. Donc, les disques sont toujours empilés dans un certain ordre: les plus grands sont toujours en bas du taquet. La légende dit aussi que des moines sont en train de déplacer les 64 disques vers l'un des deux autres, au rythme d'un par seconde et quand ils auront terminé, ce sera la fin du monde. »

Cette récréation mathématique inventée par Edouard Lucas en 1883 a donné lieu à plus de 300 publications scientifiques. Outre le fait de trouver une solution à ce problème, un autre intérêt est aussi de savoir quelle est la meilleure méthode pour y parvenir c'est à dire celle qui nécessite le moins de déplacements

## Activité découverte

Matériel : jeu “tour de Hanoi”

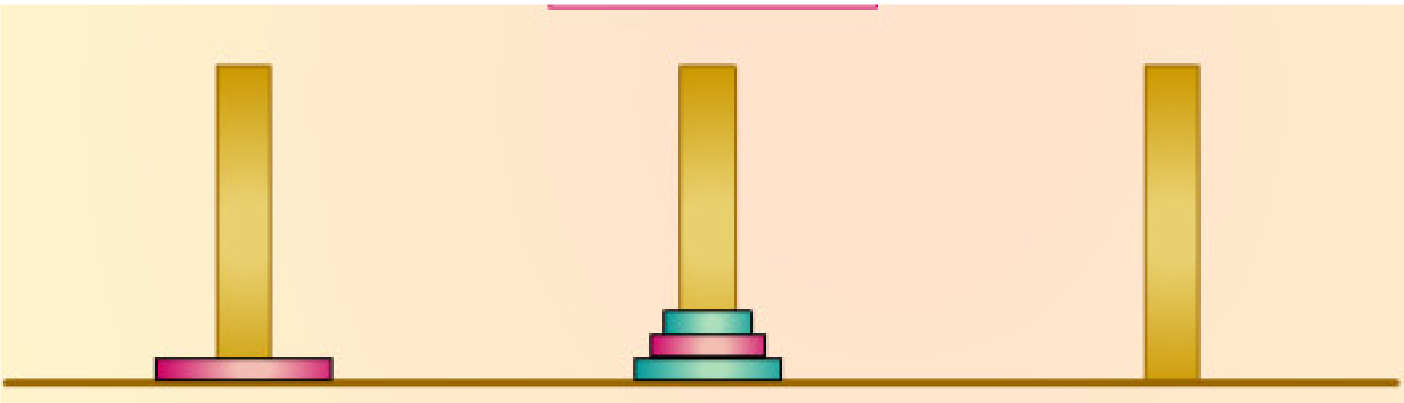
- Résoudre à la main le problème des tours de Hanoï pour n=1,2,3,4 plateaux en réalisant le moins de déplacements possible. (Comptez le nombre de déplacements réalisés : challenge !!)

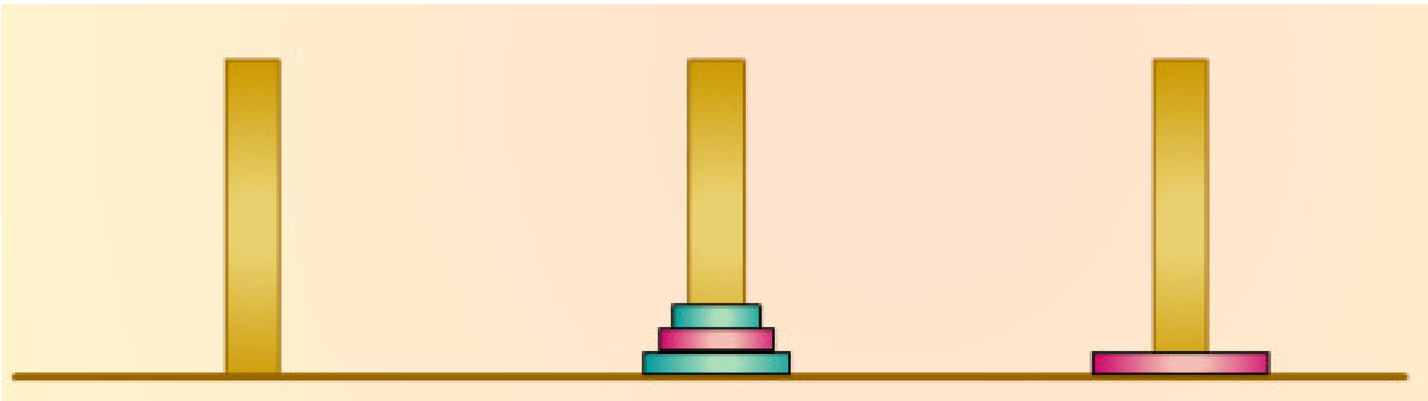
  https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tower_of_Hanoi_4.gif#/media/Fichier:Tower_of_Hanoi_4.gif

- Noter les séquences de déplacements : il est inutile de désigner le plateau déplacé mais uniquement les taquets de départ et d'arrivée.

Ex : on déplace un plateau de 1 vers 3 = 1 → 3.
On note chaque déplacement sur une nouvelle ligne.

- Pour les cas à 2, 3 et 4 plateaux
    - Encadrer le déplacement « central », que remarquez-vous ?
      Réponse : on déplace le plus grand plateau du taquet de départ au taquet d'arrivée
    - Représenter la position des plateaux avant et après ce déplacement « central ». Que remarquez-vous ?
      Réponse : avant et après le déplacement du plateau le plus grand, tous les plateaux de taille inférieure sont empilés selon la contrainte sur le taquet intermédiaire.





## Construction de l'algorithme : comprendre sa logique

Imaginons une fonction « hanoi ([nombre de plateaux, départ,arrivée, intermédiaire] » exemple hanoi(3, D,A,I) qui concerne 3 plateaux, un piquet de départ D, un piquet d'arrivée A et un piquet intermédiaire I et qui déplace un ensemble de plateaux d'un piquet de départ vers un piquet d'arrivée utilisant par un piquet intermédiaire.

a) Décrire le (ou les) mouvement(s) que réalisé(s) par la fonction Hanoi(1,D,A,I) à l'aide de D, A et I et de → ? Le piquet intermédiaire est-il nécessaire ici ?

Solution :

D → A (I inutile)

b) Décrire de la même manière le (ou les) mouvement(s) que réalisé(s) par la fonction Hanoi(2,D,A,I) à l'aide de D, A et I et de → ?

Solution :

D → I

D → A

I → A

c) Que remarque-t-on pour le mouvement central ?

Réponse : c'est le mouvement identifié plus tôt avec le plus grand plateau qui passe du départ à l'arrivée

d) Décrire de la même manière les mouvements qui sont réalisés par la fonction Hanoi(3,D,A,I) à l'aide de D, A et I et de → ?

Solution :

D → A

D → I

A → I

D → A

I → D

I → A

D → A

e) Que remarque-t-on pour le mouvement central ?

Réponse : c'est le mouvement identifié plus tôt avec le plus grand plateau qui passe du départ à l'arrivée

f) Comparez Hanoi(2,D,A,I) avec les 3 premières lignes de Hanoi(3,D,A,I)

| Hanoi(3,D,A,I) | Hanoi(2,D,A,I) |
|---|---|
| D → A | D → I |
| D → I | D → A |
| A → I | I → A |

Donc A et I sont permutés

g) Comment écrire Hanoi(2,*,*,*) pour qu'il exécute cette première partie ? Comment écrire les 3 dernières lignes de Hanoi(3,D,A,I) en utilisant Hanoi(2,*,*,*)? Ajouter le déplacement central.

Solution :

Hanoi(2,D,I,A)

D -> A

Hanoi (2,I,A,D)

h) Ré écrire Hanoi(2,D,A,I) en appliquant la même méthode.

Solution :

Hanoi(1,D,I,A)

D -> A

Hanoi(1,I,A,D)

On remarque ainsi qu'à chaque fois que l'on veut résoudre le problème pour n plateaux, on peut s'appuyer sur les mouvements appliqués pour un problème à n-1 plateaux, jusqu'à arriver au problème à un seul plateau (le déplacement « central » !). C'est ce que l'on appelle la RÉCURSIVITÉ.

## Construction de l'algorithme : appliquer les observations

a) Déduire des observations précédentes les déplacements pour 4 plateaux et les comparer à ceux de Hanoi(3,D,A,I).

| Hanoi(4,D,A,I) | Hanoi(3,D,A,I) |
|---|---|
| D → I | D → A |
| D → A | D → I |
| I → A | A → I |
| D → I | D → A |
| A → D | I → D |
| A → I | I → A |
| D → I | D → A |
| D → A | |
| I → A | |
| I → D | |
| A → D | |
| I → A | |
| D → I | |
| D → A | |
| I → A | |

b) Écrire la suite des déplacements concernant Hanoi(4,D,A,I) en fonction de Hanoi(3,*,*,*)

| Hanoi(4,D,A,I) | Hanoi(3,D,I,A) |
|---|---|
| D → I | D → I |
| D → A | D → A |
| I → A | I → A |
| D → I | D → I |
| A → D | A → D |
| A → I | A → I |
| D → I | D → I |

D → A déplacement D → A central conservé

| | Hanoi(3,I,A,D) |
|---|---|
| I → A | I → A |
| I → D | I → D |
| A → D | A → D |
| I → A | I → A |
| D → I | D → I |
| D → A | D → A |
| I → A | I → A |

c) Écrire un algorithme Hanoi(4,D,A,I) en fonction de Hanoi(3,*,*,*)

Solution :

Hanoi(3,D,I,A)

D -> A

Hanoi (3,I,A,D)

d) Enoncer les permutations effectuées dans le triplet (D,A,I) entre Hanoi(4) et Hanoi(3). Sont elles valables pour les niveaux prédédents

Solution :

Hanoi(4,D,A,I)

| Hanoi(3,D,I,A) | Hanoi (3,I,A,D) |
|---|---|
| D inchangé | D et I permutés |
| A et I permutés | A inchangé |

e) Remplir les cases oranges du tableau ci-dessous réalisé à partir de Hanoi(4,D,A,I) en nommant correctement les formules Hanoi de rang inférieur. Repérer le mouvement central de chaque Hanoi

| Hanoi(4,D,A,I) | Hanoi(3,D,I,A) | Hanoi(2,D,A,I) | Hanoi(1,D,I,A) |
|---|---|---|---|
| D → I | D → I | D → I | D → I |
| D → A | D → A | D → A | D → A |
| | | | Hanoi(1,I,A,D) |
| I → A | I → A | I → A | I → A |
| D → I | D → I | D → I | D → I |
| | | Hanoi(2,A,I,D) | Hanoi(1,A,D,I) |
| A → D | A → D | A → D | A → D |
| A → I | A → I | A → I | A → I |
| | | | Hanoi(1,D,I,A) |
| D → I | D → I | D → I | D → I |
| D → A | D → A | D → A | D → A |
| | Hanoi(3,I,A,D) | Hanoi(2,I,D,A) | Hanoi(1,I,A,D) |
| I → A | I → A | I → A | I → A |
| I → D | I → D | I → D | I → D |
| | | | Hanoi(1,A,D,I) |
| A → D | A → D | A → D | A → D |
| I → A | I → A | I → A | I → A |
| | | Hanoi(2,D,A,I) | Hanoi(1,D,I,A) |
| D → I | D → I | D → I | D → I |
| D → A | D → A | D → A | D → A |
| | | | Hanoi(1,I,A,D) |
| I → A | I → A | I → A | I → A |

f) Généraliser l'algorithme à n plateaux.

Solution :

***Hanoi(n-1,D,I,A)***

***D -> A***

***Hanoi (n-1,I,A,D)***

## Comprendre l’algorithme

a) L’algorithme permettant de résoudre le problème à n plateaux s’écrit :

```
def hanoi(n,D=1,A=3,I=2):
    if (n > 0):
        hanoi(n-1,D,I,A)
        print ("Déplace ",D,"sur",A)
        hanoi(n-1,I,A,D)
```

Recopier le code et vérifier qu’il fonctionne pour 1,2,3 et 4 plateaux.

b) L’algorithme se termine-t-il ? Trouver un convergent

Solution : oui, n est le convergent

c) L’algorithme est il correct ?

Solution : cas de base n=0 marche bien, 1 marche bien et on démontre par récurrence

d) Évaluer la complexité de cet algorithme

Solution :

$C_n$ = complexité (=nombre de déplacements) de hanoi(n)

$C_0 = 0$

$C_1 = 1$

.

.

.

$C_{n+1} = C_n + 1$ (le print) $+ C_n = 2C_n + 1$

Par récurrence on montre que $C_n = 2^n - 1$

Par intuition, on fait calculer les 7 premiers termes de la suite 0 1 3 7 15 31 63 que l’on compare aux puissances de 2

Supposons que $C_n = 2^n - 1$

alors $C_{n+1} = 2C_n + 1 = 2 ( 2^n – 1 ) + 1 = 2^{n+1} – 2 + 1 = 2^{n+1} – 1$

La complexité O(n) est en **$2^n$**

e) Vérifier l’affirmation de la situation déclenchante

Solution :

$C_{64} = 2^{64} – 1$ = 18 446 744 073 709 551 616 secondes = 584 542 046 090,6 ans soit 584 Ga sachant que l’Univers à 13,8 Ga… Aucun rapport !!! Sauf si on admet que le Soleil se transformera en géante rouge dans environ 5,4 Ga.

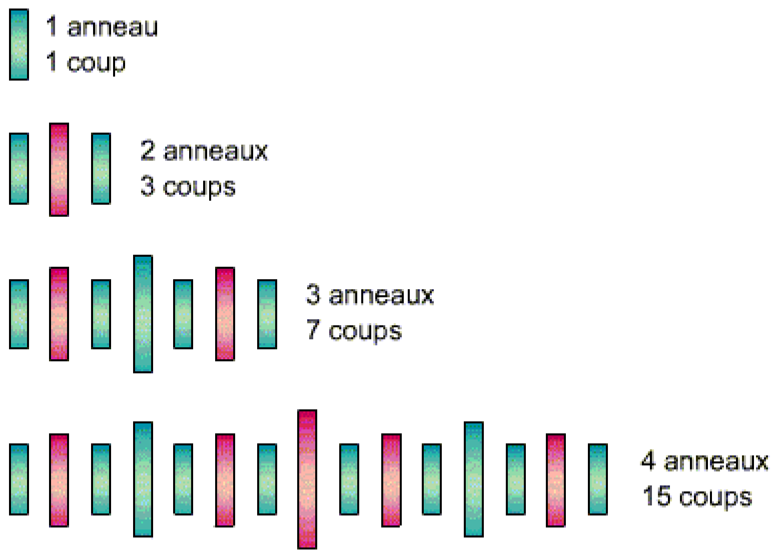
## Observations - Pistes non encore explorées

**Source :** [http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/tour_hanoi.htm](http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/tour_hanoi.htm)

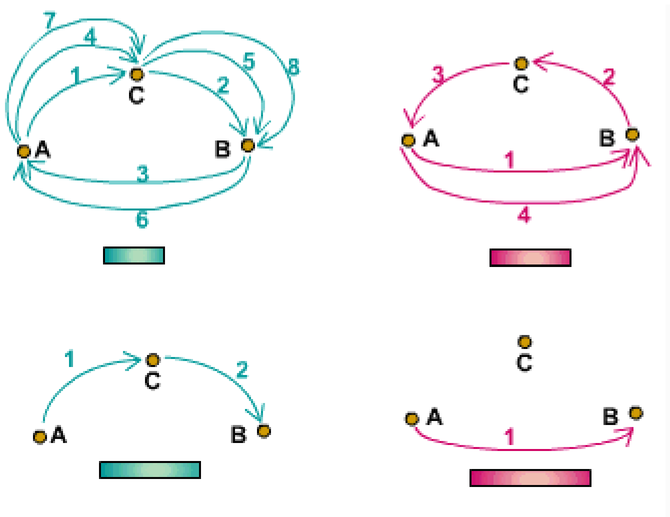
Regardons très attentivement les déplacements de chaque anneau lorsqu'on joue dans un temps minimal.
Disposons les tours selon un triangle ABC et alternons les couleurs des anneaux.
Nous notons que :
- Un coup sur deux déplace le plus petit anneau ;
- L'anneau supérieur passe successivement sur chacune des tours en tournant toujours dans le même sens ;
- Un anneau est toujours posé sur un anneau de couleur différente ;
- La suite des déplacements est symétrique ;
- Chaque suite reprend la totalité des mouvements de la suite antérieure selon la disposition S + 1 + S ;

On peut spontanément écrire la suite des déplacements des anneaux dès lors que l'on connaît la suite des déplacements pour 2 ou 3 anneaux.

**Voici de gauche à droite les anneaux à déplacer quand on dispose de 1 à 4 anneaux.**




**Voici comment tournent 4 anneaux sur des tours disposées triangulairement.**
Chaque anneau tourne toujours dans le même sens. Ici les verts tournent dans un sens et les rouges dans l'autre.



Le plus petit anneau est déplacé 8 fois, le suivant 4 fois, puis l'autre 2 fois et enfin le plus grand est déplacé 1 seule fois.
Un anneau est déplacé deux fois moins souvent que celui qui est de taille immédiatement inférieure.

**Nous pouvons organiser les résultats dans un tableau**

**a1** représente le plus petit anneau ; **a2** le suivant et ainsi de suite... nous irons ici jusqu'à 4 anneaux donc jusqu'à **a4**. Dans le tableau, nous notons d'abord la suite des anneaux déplacés et enfin à droite du tableau le nombre de déplacements de chacun d'entre eux.

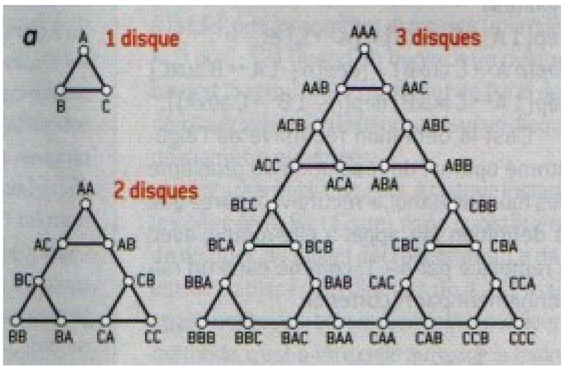
| **Nombre d'anneaux** | **Suite des déplacements** | | | | | | | | | | | | | | | | | | **a1** | **a2** | **a3** | **a4** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | |
| 2 | $a_1$ | $a_2$ | $a_1$ | | | | | | | | | | | | | | | | 2 | 1 | | |
| 3 | $a_1$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_1$ | | | | | | | | | | | | 4 | 2 | 1 | |
| 4 | $a_1$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_1$ | | | | 8 | 4 | 2 | 1 |

**Autre représentation :**

**Source : Pour la science, n°457, Nov. 2015**

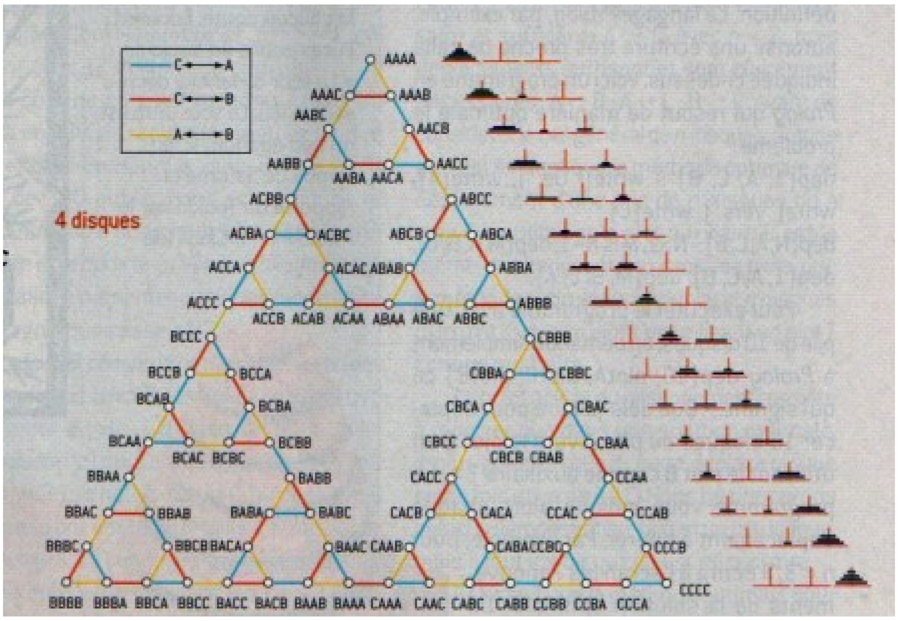
Il y a plusieurs façons de résoudre le problème des tours de Hanoi . Par exemple, dans le cas d'un seul disque, on peut déplacer le disque directement du taquet de départ à celui d'arrivée ou avoir une étape supplémentaire par le taquet intermédiaire :

Avec deux disques, le nombre de possibilités de mouvements augmente mais on retrouve le schéma du cas précédent qui se repète plusieurs fois et ainsi de suite :




Il existe un grand nombre de solutions valides au problème et une solution optimale qui correspond au parcours du graphe sur son arrête de droite (pour 3 disques, 7 coups sont nécessaires au minimum)

Et pour 4 disques ?



# Un peu de vraie science

La tâche de la Tour de Hanoï est utilisée dans la recherche en psychologie notamment au travers de la résolution de problème. Il est également utilisé comme test neuropsychologique.

Cette tâche est sensible aux dysfonctionnements frontaux et préfrontaux.
Ce test permet ainsi l'évaluation des fonctions exécutives, comme la planification, la mémoire de travail et l'inhibition.
**La performance à la tour d’Hanoï dépend des capacités d'inhibition, de la mémoire de travail, de la mémoire procédurale, et de l'intelligence fluide.**
Or l'inhibition nécessite la suppression de l'activité du cortex moteur primaire, du cortex frontal inférieur droit et de l'aire motrice supplémentairement. La mémoire de travail implique la partie dorso-latérale du cortex frontal qui permet la manipulation active et le contrôle des informations. De même, la planification est corrélée avec l'activation de la partie dorsale du cortex préfrontal, du cortex pariétal et prémoteur et du cerebellum.

On comprend pourquoi la tour d'Hanoï est sensible aux dysfonctionnements frontaux et préfontaux.

La mémoire procédurale est évaluée par des épreuves dans lesquelles on propose au sujet d’acquérir une procédure (qui doit donc être nouvelle) grâce à la répétition des essais, et sans recours nécessaire au souvenir explicite. Malgré l'utilisation de méthodologies diverses expliquant certaines différences de résultats selon les études, les travaux convergent généralement vers une préservation des capacités d'acquisition d'une procédure nouvelle, perceptivomotrice (épreuve du Rotor test), perceptivo-verbale (tâche de lecture en miroir) ou cognitive (épreuve de la tour de Hanoï). Cependant, certains auteurs ont cherché à mieux comprendre la dynamique de l’apprentissage procédural et la participation d’autres composantes cognitives à la mise en place de la procédure. Ainsi, dans l’étude de Beaunieux et al. (soumis), la mémoire déclarative, la mémoire de travail et les capacités perceptives et psychomotrices étaient évaluées en parallèle avec les capacités à résoudre le problème de la tour de Hanoï. Les auteurs ont conclu à des modifications, avec l’âge, des stratégies utilisées pour parvenir à la solution de la tour de Hanoï, ainsi qu’à un ralentissement de la dynamique de l’apprentissage. En effet, les sujets âgés parviennent plus tard que les jeunes à la « phase procédurale » qui signe l’automatisation de la procédure et constitue la dernière étape de l’apprentissage.

Du coup les algorithmes, c’est pas si mal...