

Activité :

Exponentiation « rapide » et *complexité d'un algorithme*

Exponentiation « naïve »

```
def mystere(a,n):  
    p = 1  
    for i in range(n):  
        p = p*a  
    return p
```

1. Compléter l'évolution des valeurs des variables de l'algorithme ci-contre si l'on appelle `mystere(2,5)`.

p	1					
n	0					

2. Combien d'opérations ont été nécessaires pour retourner la valeur du tableau ?
3. Quel autre nom plus explicite pourrait-on donner à la fonction `mystere` ?
4. Dans le cas général, combien d'opérations la fonction `mystere(a,n)` réalise-t-elle ?
 \Rightarrow **Vers une approche de la « complexité »**

Exponentiation « rapide »

1. Combien de multiplications sont effectuées avec la fonction `mystere(15,7)` ?

Avec `mystere(15,22)` ?

2. Combien de multiplication(s) lorsque l'on élève un nombre au carré ?

3. (a) Écrire sous forme 15^n les nombres suivants :

- $A = 15 \times 15^2 \times (15^2)^2$
- $B = 15^2 \times (15^2)^2 \times \left(\left((15^2)^2 \right)^2 \right)^2$

- (b) Combien de multiplications utilise-t-on pour calculer A , puis pour calculer B ?

\Rightarrow **Discussion**

En reprenant le résultat de la question 1., que peut-on dire ?

4. Écrire 7 comme somme de puissances de 2 ; recommencer avec 22. Quelle écriture de 7 et de 22 est donnée par ce qui précède ?
5. (a) Quelle est l'écriture binaire de 37 ?
 (b) En déduire une écriture de 9^{37} similaire à celle de A et B dans la question 3.
6. Au regard de ce qui précède, on dispose de l'expression de a^n suivante :

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (a^{\frac{n}{2}})^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ a \times (a^{\frac{n-1}{2}})^2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Voici un algorithme qui permet de calculer a^n en utilisant l'expression précédente :

```

1 def exponentiation_rapide(a,n):
2     result = 1
3     puissance_a = a
4     m = n
5     while m != 0 :
6         if m%2 == 1 :
7             result = result * puissance_a
8             puissance_a = puissance_a * puissance_a
9             m = m//2
10    return result

```

Commentaires des lignes

Compléter la trace de l'algorithme précédent avec $a = 15$ et $n = 22$.

<i>while</i>	×					
<i>if</i>	×					
<i>result</i>						
<i>puissance_a</i>						
<i>m</i>						