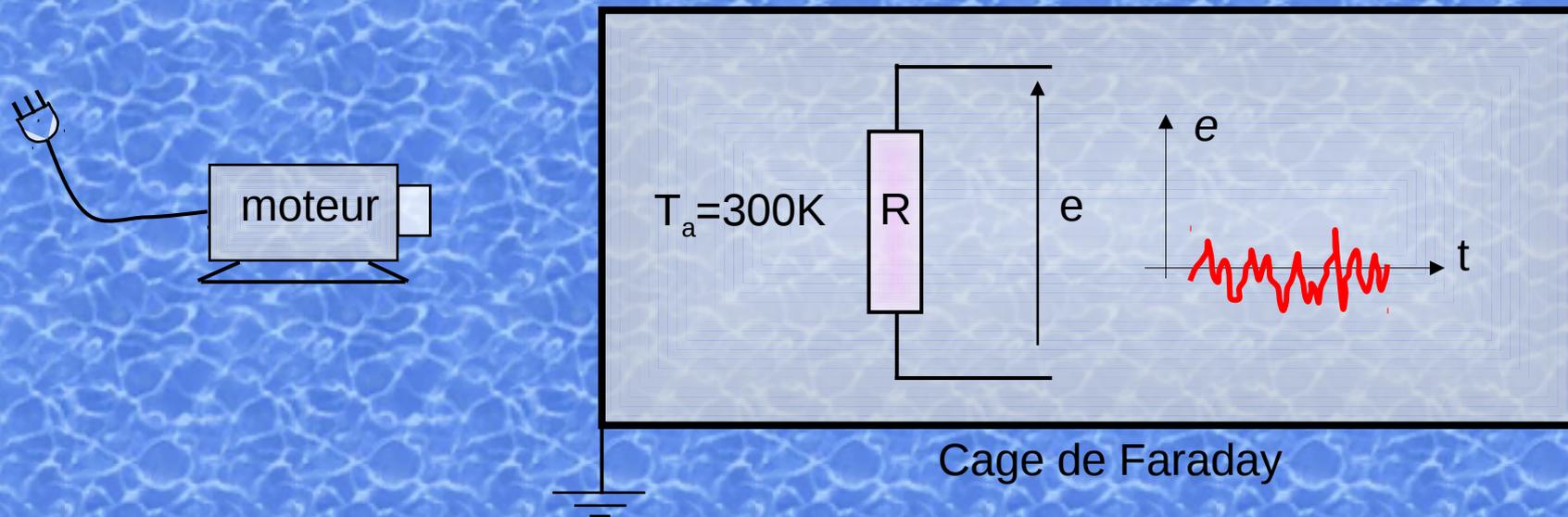
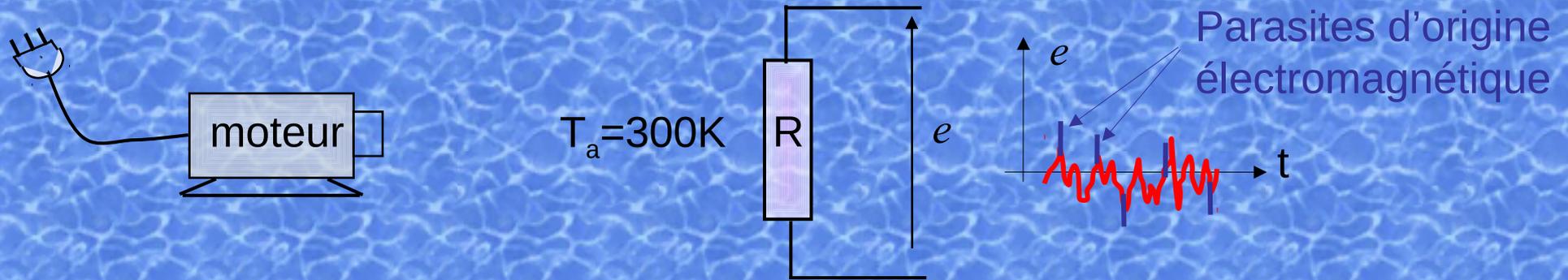


# INITIATION AUX BRUITS EN ELECTRONIQUE

-

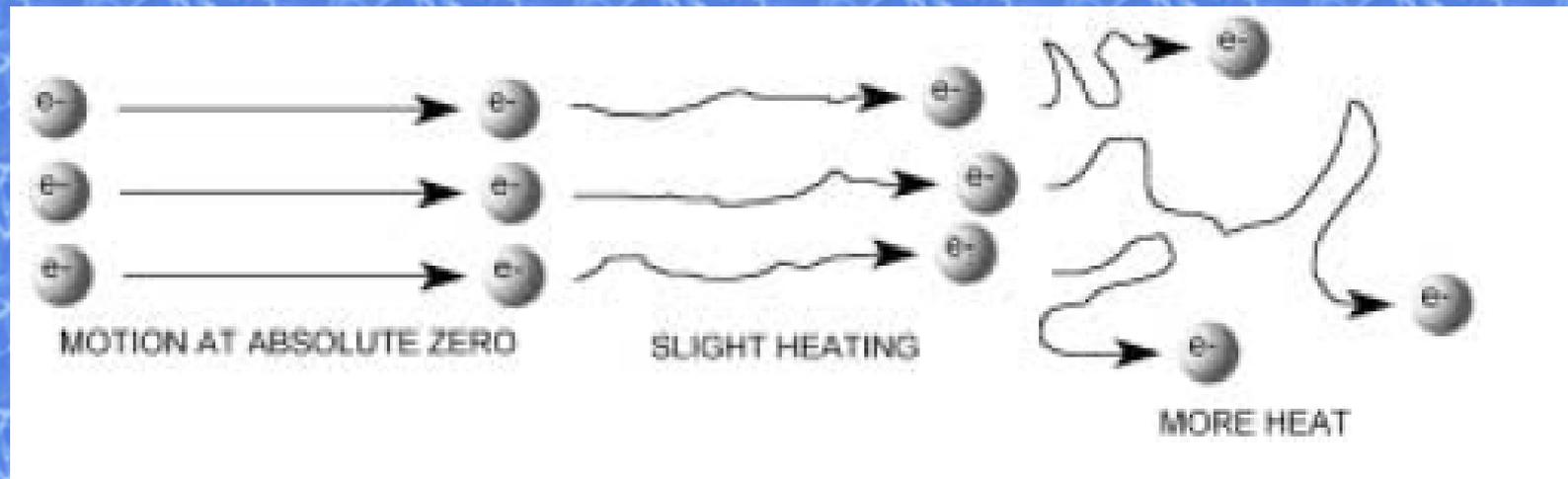
## DETECTION SYNCHRONES

# MAIS DE QUELS BRUITS PARLE T-ON ?



On ne parle pas ici des parasites électromagnétiques, seulement des bruits d'origine thermique et ceux liés à la nature discrète du courant électrique (bruit de fond)

Le bruit thermique des résistances (bruit Johnson) est dû à l'agitation thermique



*d'après Ron Mancini dans Op Amps for everyone Texas Instruments*

THERMAL AGITATION OF ELECTRICITY IN CONDUCTORS

BY J. B. JOHNSON

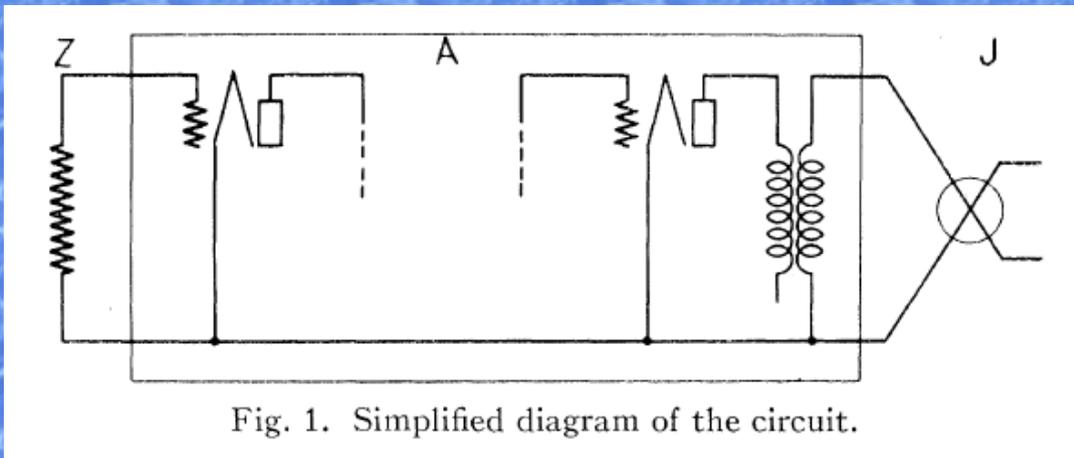


Fig. 1. Simplified diagram of the circuit.

Filtre passe-bande

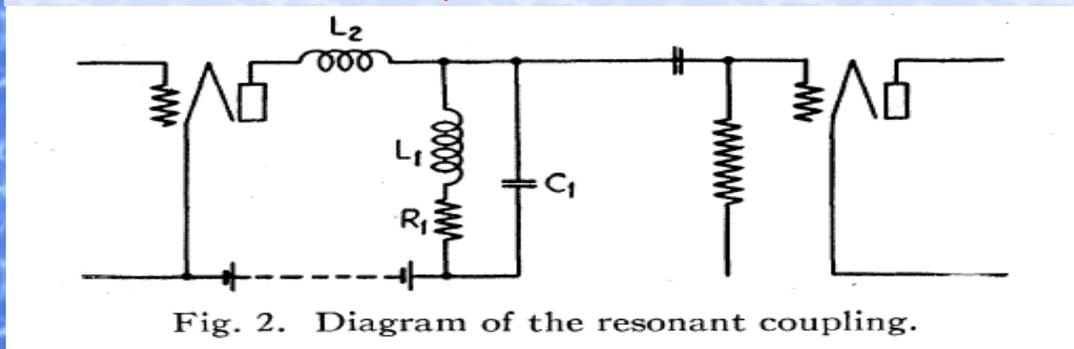


Fig. 2. Diagram of the resonant coupling.

Mesure de la **valeur efficace** avec thermocouple + galvanomètre (en 1928, pas de PC, pas de Labview...)

THERMAL AGITATION OF ELECTRICITY IN CONDUCTORS

BY J. B. JOHNSON

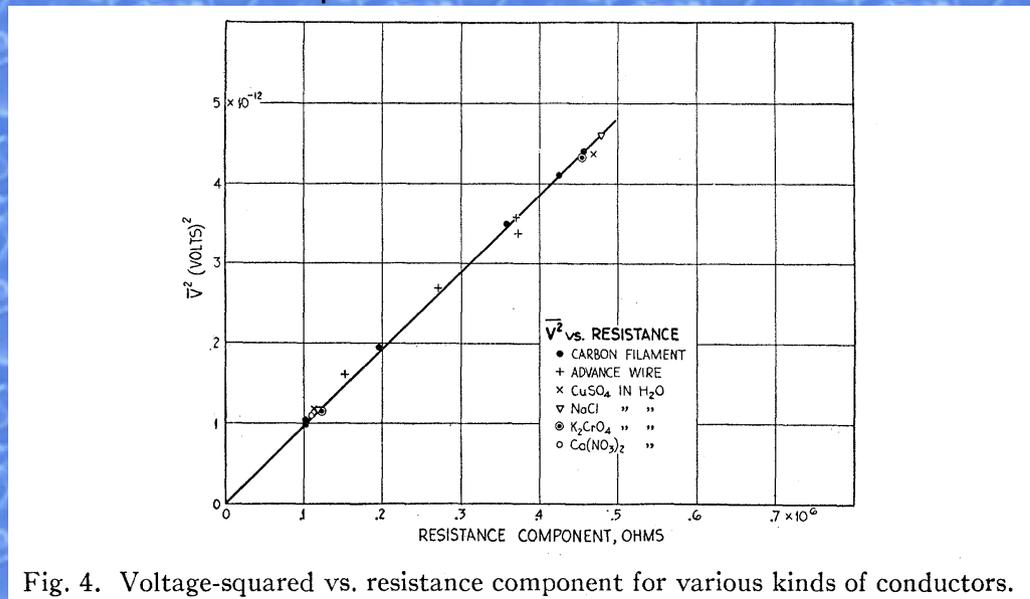
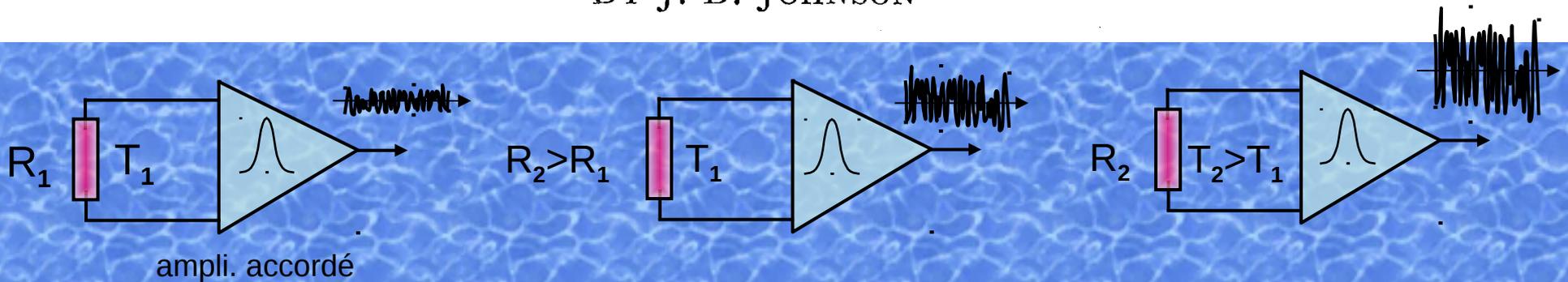


Fig. 4. Voltage-squared vs. resistance component for various kinds of conductors.

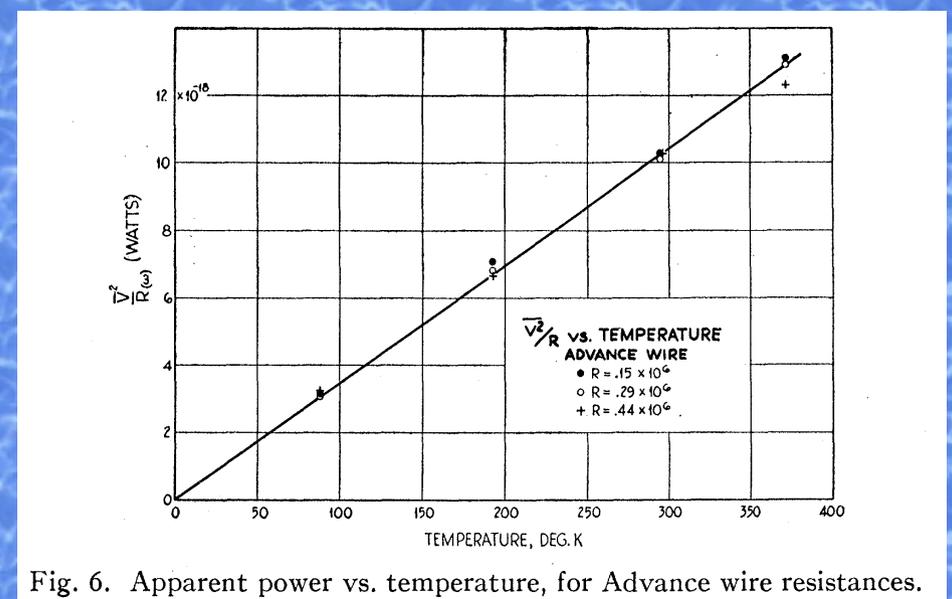
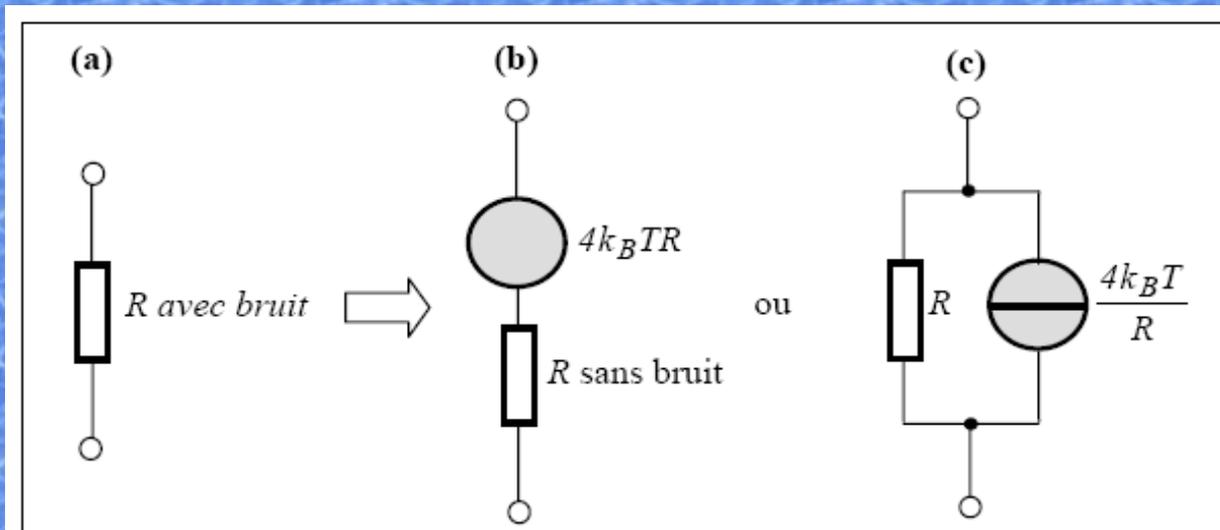


Fig. 6. Apparent power vs. temperature, for Advance wire resistances.

# THERMAL AGITATION OF ELECTRIC CHARGE IN CONDUCTORS\*

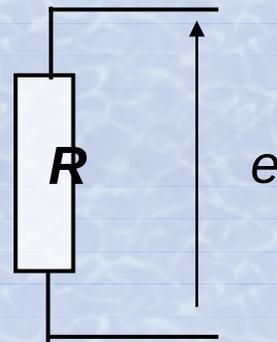
BY H. NYQUIST



**Figure III.1** : Une résistance  $R$  à la température  $T$  (a), modélisation du bruit de la résistance  $R$  par un générateur de tension de bruit en série (b) modélisation par un générateur de courant de bruit en parallèle (c)

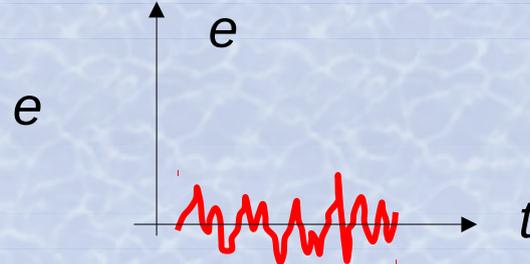
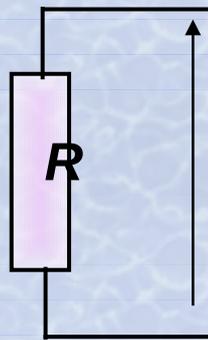
Pour sa démonstration, H. Nyquist utilisa la théorie des lignes et le théorème d'équipartition ( $k_B T/2$  par degré de liberté)

# Bruit thermique (bruit Johnson) des résistances



Quand  $T_a \rightarrow 0K$ , le bruit disparaît

Résistance avec bruit

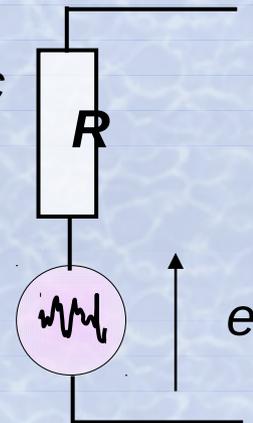


$T_a = 300K$



résistance sans bruit

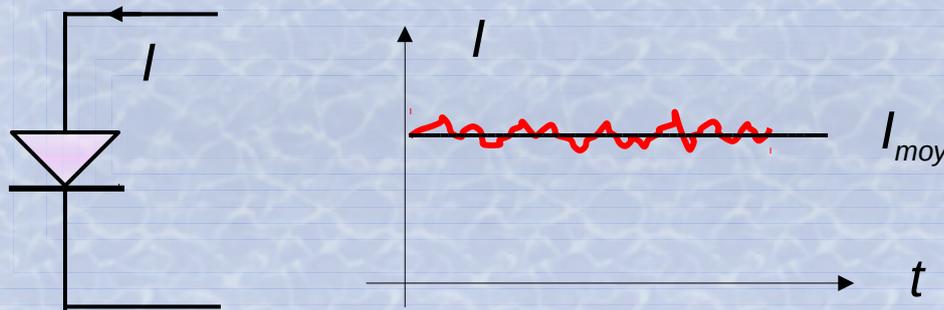
source de bruit en tension



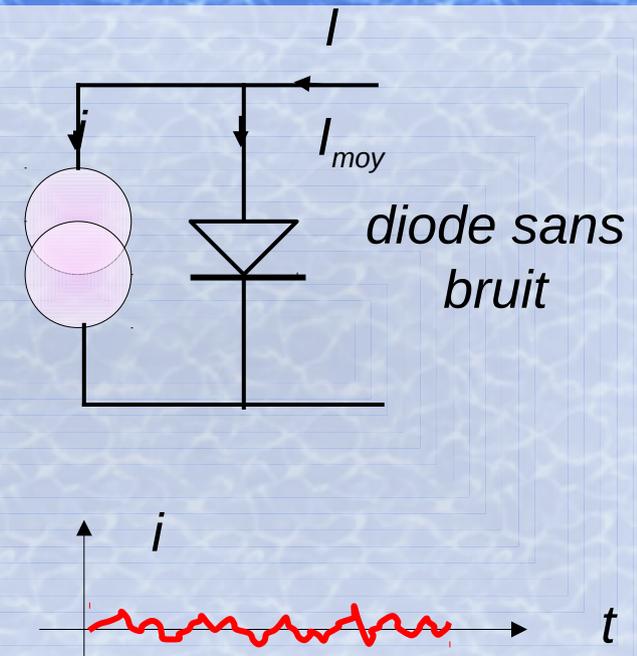
Origine physique : Dans la limite  $T_a \rightarrow 0$  les atomes sont immobiles. A la température ambiante ( $T_a = 300K$ ), les atomes vibrent autour de leurs positions d'équilibre. La vibration des atomes entraîne une fluctuation spatiale de la densité électronique générant ainsi une fluctuation de tension.

# Bruit de grenaille (shot noise) d'une diode à jonction polarisée en directe

diode avec bruit



source de  
bruit en  
courant



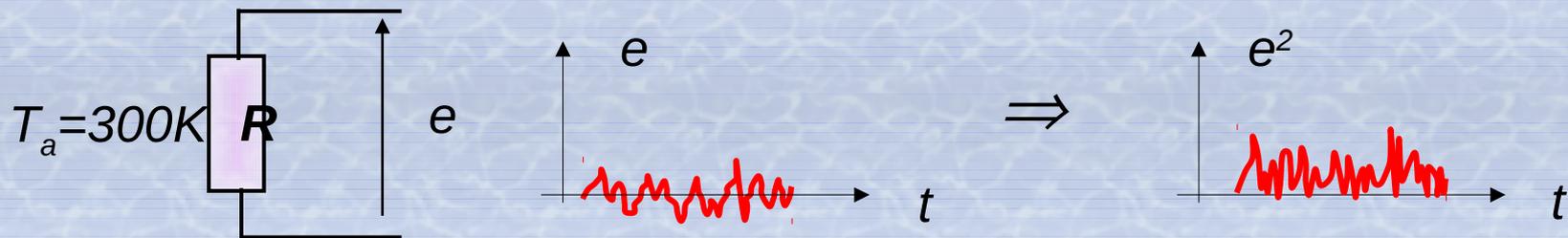
Origine physique : Le bruit de grenaille est dû à la fluctuation dans le temps du flux de porteurs passant d'un côté à l'autre de la jonction ( $I=dQ/dt$ ). Le courant est à l'image du peloton du tour de France : le nombre de coureurs passant, par seconde, devant un observateur immobile fluctue dans le temps.

- *Répartition du bruit dans le domaine des fréquences : introduction de la densité spectrale*

Dans le cas des signaux périodiques non sinusoidaux, les coefficients de la série de Fourier renseignent sur la répartition de la puissance dans le domaine des fréquences.

**Question** : comment obtenir une information sur la répartition en fréquence d'un bruit, encore appelé signal aléatoire ?

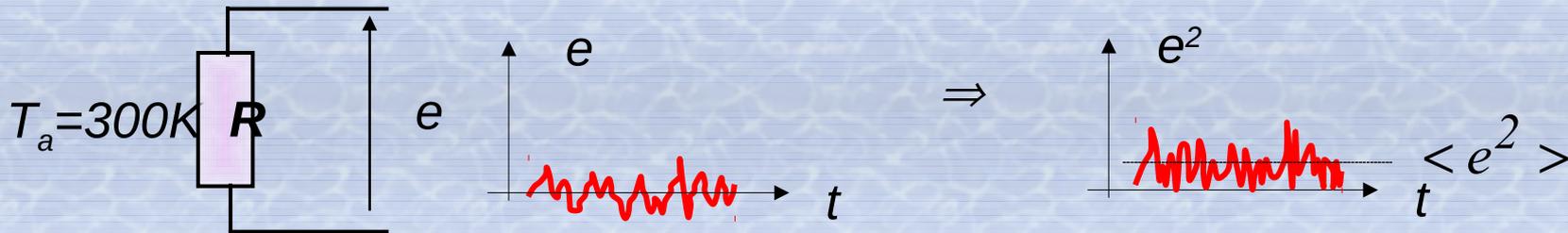
**Problème** : le bruit n'est pas périodique et on ne dispose pas d'une expression analytique dans le domaine temporel. Intuitivement, la valeur moyenne d'un bruit est nulle, par contre le carré de la valeur moyenne est différent de zéro.



La valeur quadratique moyenne  $\langle e^2 \rangle$ , encore notée  $\overline{e^2}$ , est une information intéressante mais ne renseigne pas sur la répartition du bruit dans le domaine des fréquences.

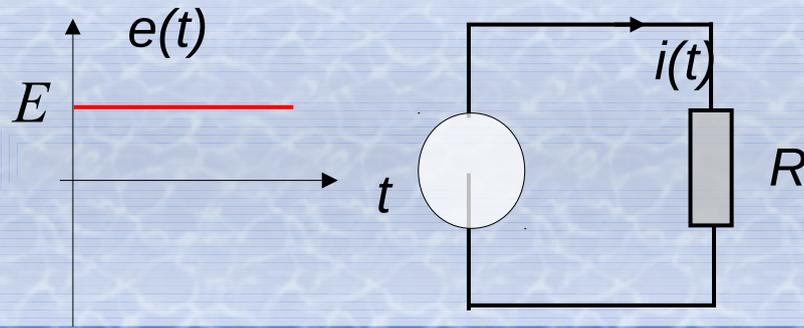
$$\text{Valeur quadratique moyenne de bruit} = \langle e^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt$$

$T$  est la durée d'observation



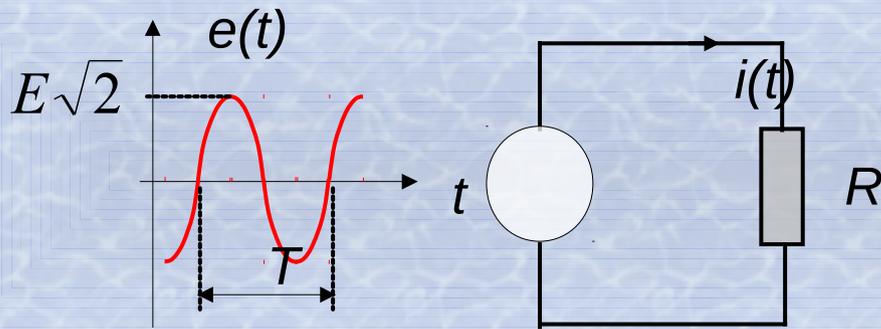
On peut par contre chercher la répartition de la valeur quadratique dans le domaine des fréquences. Pour cela il suffit de s'inspirer de l'expérience suivante, faite sur des signaux classiques.

# Rappel sur la notion de valeur efficace et quadratique moyenne



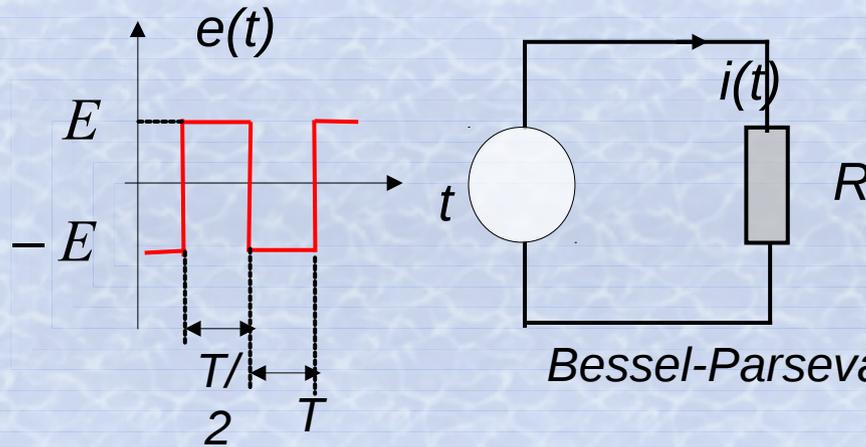
$$P = \text{puissance moy. dissipée ds. } R = \frac{E^2}{R}$$

$$\text{Val. quad. moy. de } e(t) = E$$



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T e(t)i(t)dt = \frac{E^2}{R}$$

$$\text{Val. quad. moy. de } e(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t)dt} = E$$



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T e(t)i(t)dt = \frac{E^2}{R}$$

$$\text{Val. quad. moy. de } e(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t)dt} = E$$

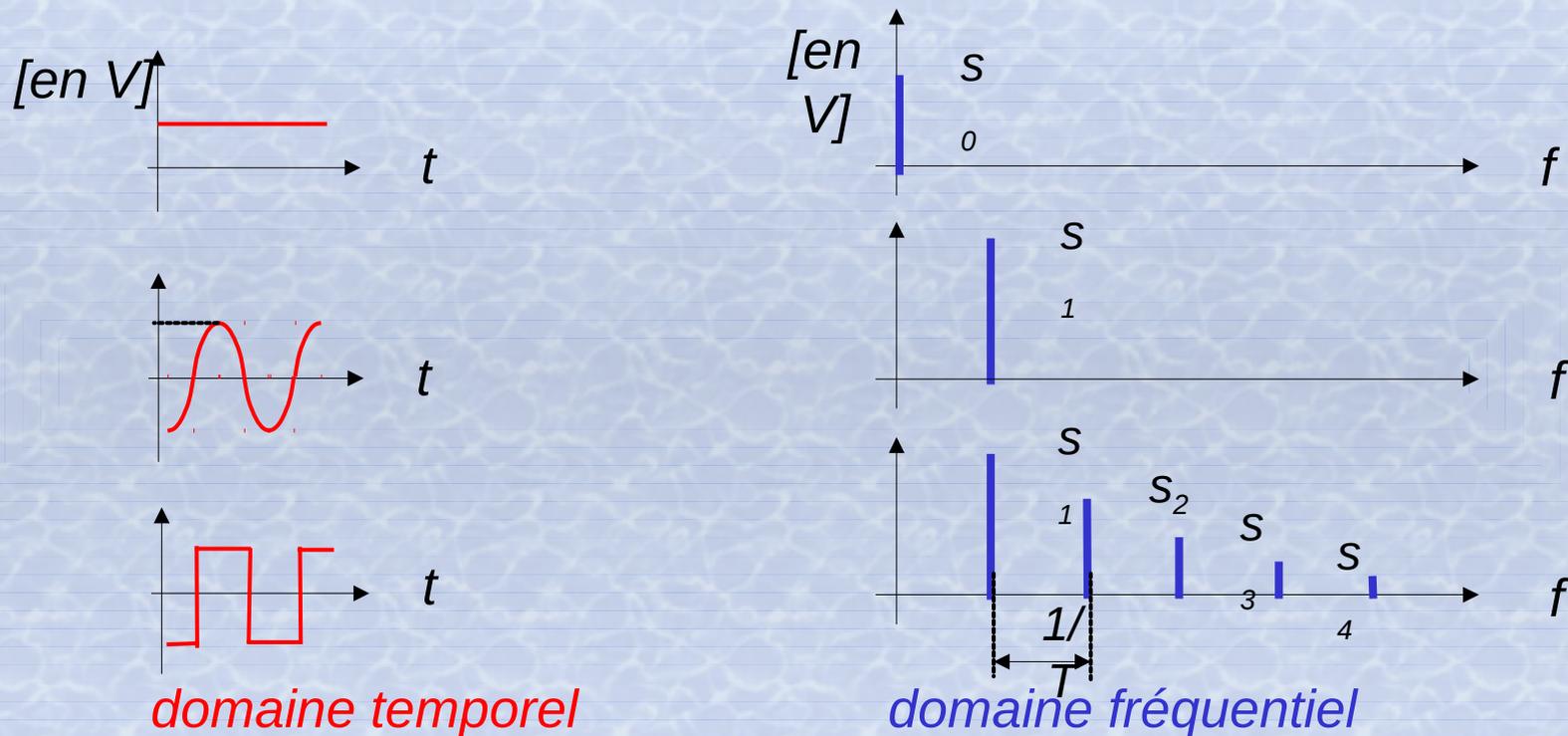
$$\text{Bessel-Parseval} \Rightarrow \text{Val. quad. moy. de } e(t) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^2}{2}}$$

Conclusion : Les 3 sources ont même valeur efficace car elles produisent la même puissance dans la charge  $R$ .

Les 3 sources ont effectivement la même valeur quadratique moyenne (carré de la valeur efficace) et pourtant la répartition de la puissance dans le domaine des fréquences est très différente dans les 3 cas. La répartition en puissance dépend de la distribution du signal  $e(t)$  dans le domaine des fréquences. La décomposition en série de Fourier de  $e(t)$  renseigne sur la distribution :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

Avec  $\omega=2\pi/T$ ,  $s_n$  et  $\varphi_n$  sont respectivement l'amplitude et la phase de l'harmonique de rang  $n$ .



*La valeur quadratique moyenne d'un signal peut s'écrire soit dans le domaine temporel soit encore dans le domaine fréquentiel :*

$$\text{Val. quad. moy.} = \frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \right)^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^2}{2}$$

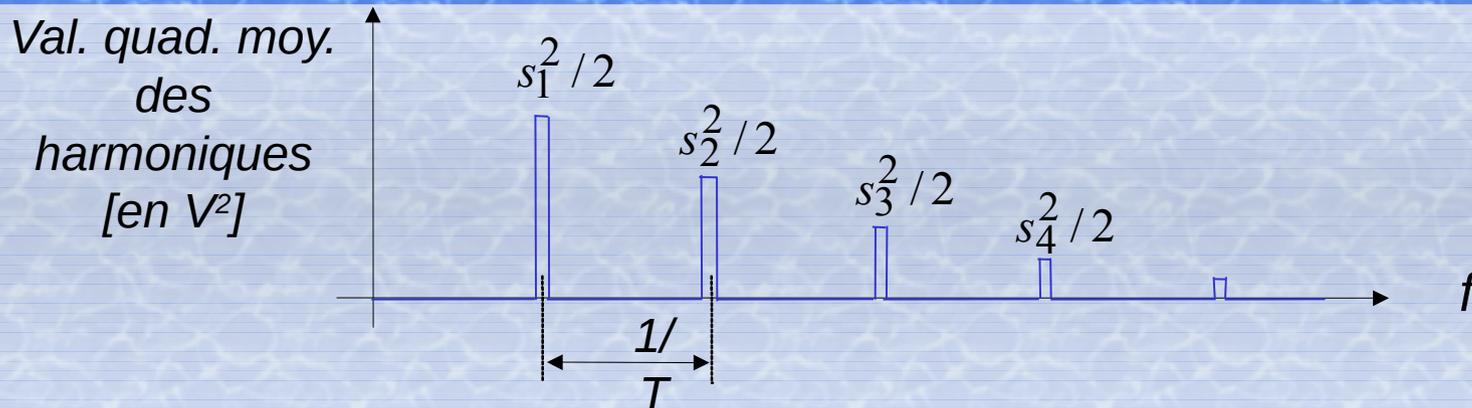
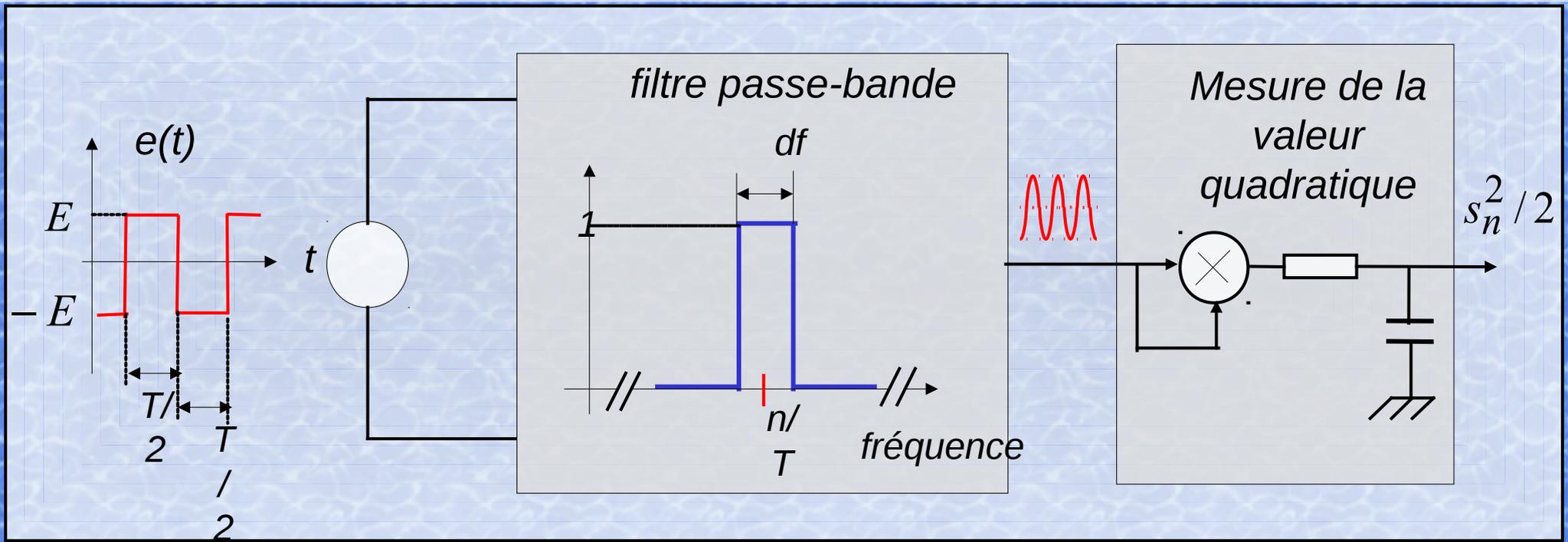
*La puissance dissipée dans la résistance  $R$  se met sous la forme :*

$$P = \frac{E^2}{R} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^2}{2}$$

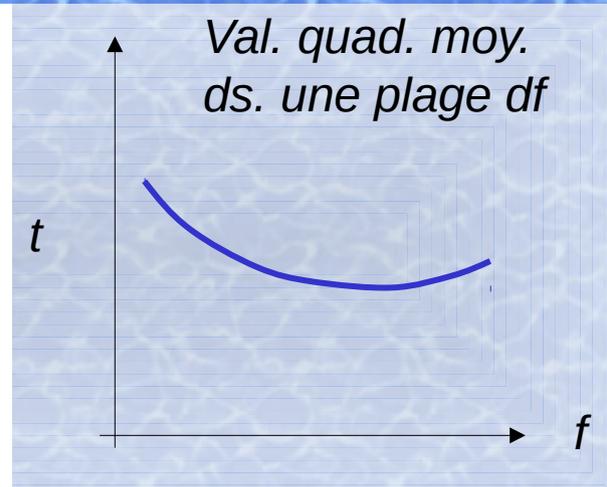
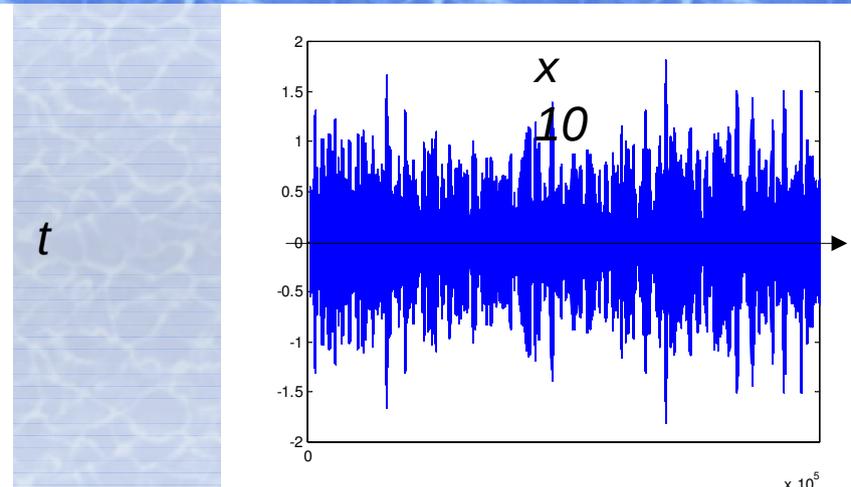
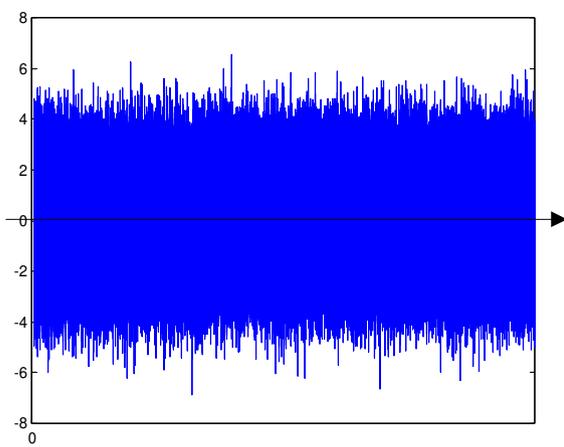
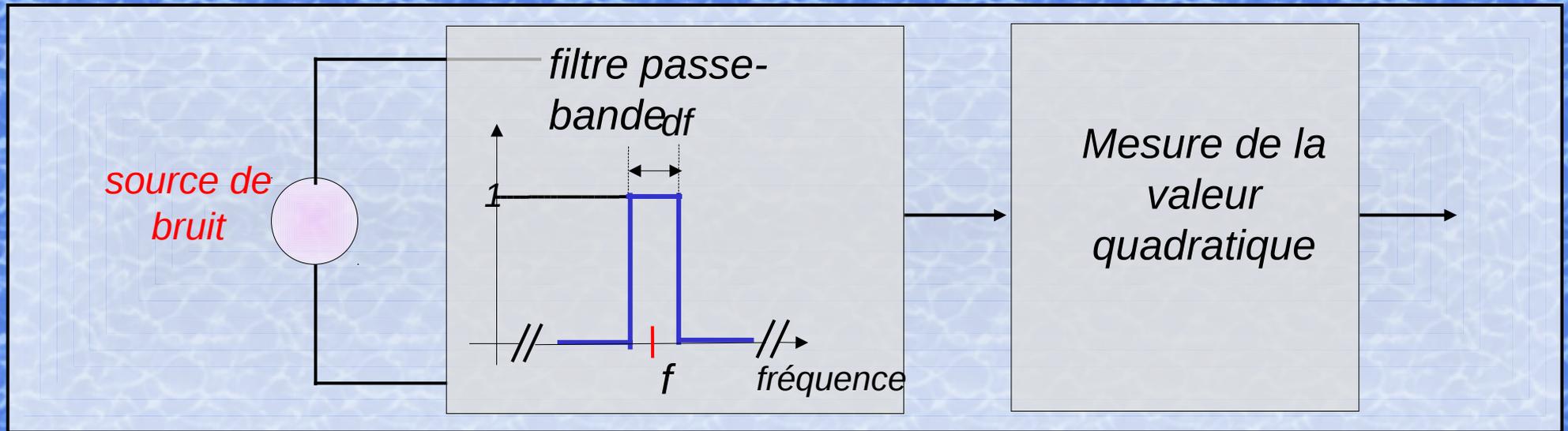
*La quantité  $s_n^2 / 2$  est la val. quad. moy. de l'harmonique de rang  $n$ .  $s_n / \sqrt{2}$  est la valeur efficace.*

Question : Comment accéder aux val. quad. moy  $s_n^2 / 2$  ?

Réponse : en mesurant la val. quad. moy en sortie d'un filtre passe-bande de fréquence centrale variable.



Quand on remplace le signal périodique, de période  $T$ , par un bruit électronique non périodique, c'est à dire de période  $T \rightarrow \infty$ , l'écart entre deux raies tend vers zéro et le signal de sortie du mesureur de val. quad. moy. devient un signal continu en fonction de la fréquence.



On écrit que la valeur quadratique moyenne de bruit mesurée en sortie est proportionnelle à : 1) la largeur de bande  $df$  et 2) une grandeur appelée **densité spectrale** :

Val. quad. moy. de bruit dans une plage  $df$  située en  $f = e(f) df$

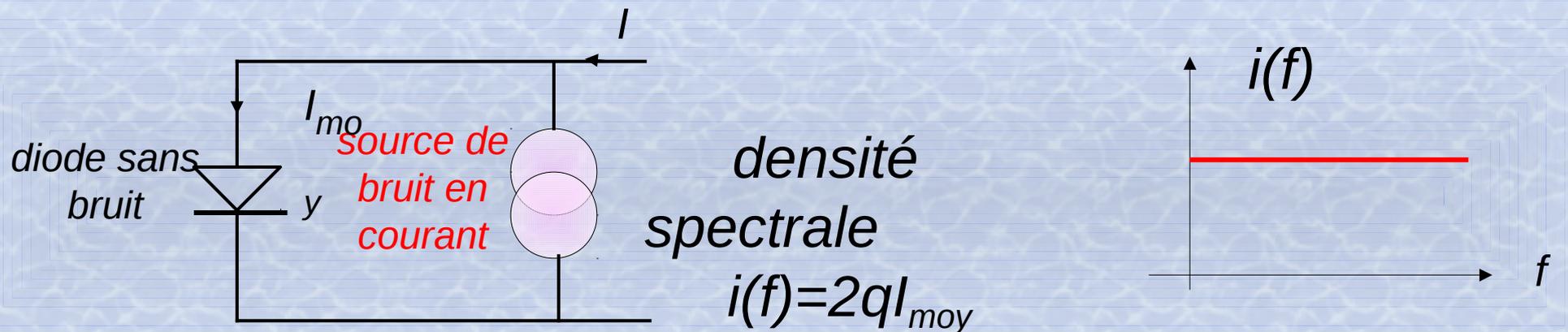
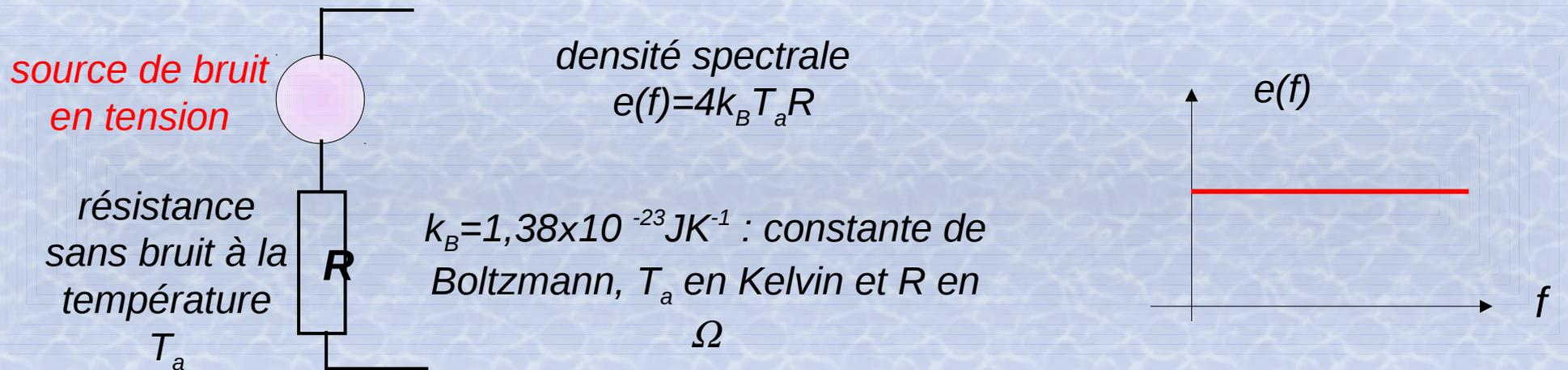
Les unités  $\Rightarrow [V^2]$   $[V^2/Hz]$   $[Hz]$

La densité spectrale  $e(f)$  d'une source de bruit est donc la valeur quadratique moyenne de bruit par unité de fréquence, c'est à dire pour une largeur de bande 1 Hertz.

Si la source de bruit est un générateur de courant, cas de la diode, la densité spectrale s'exprime en  $[A^2/Hz]$ .

# Densités spectrales des résistances et diodes

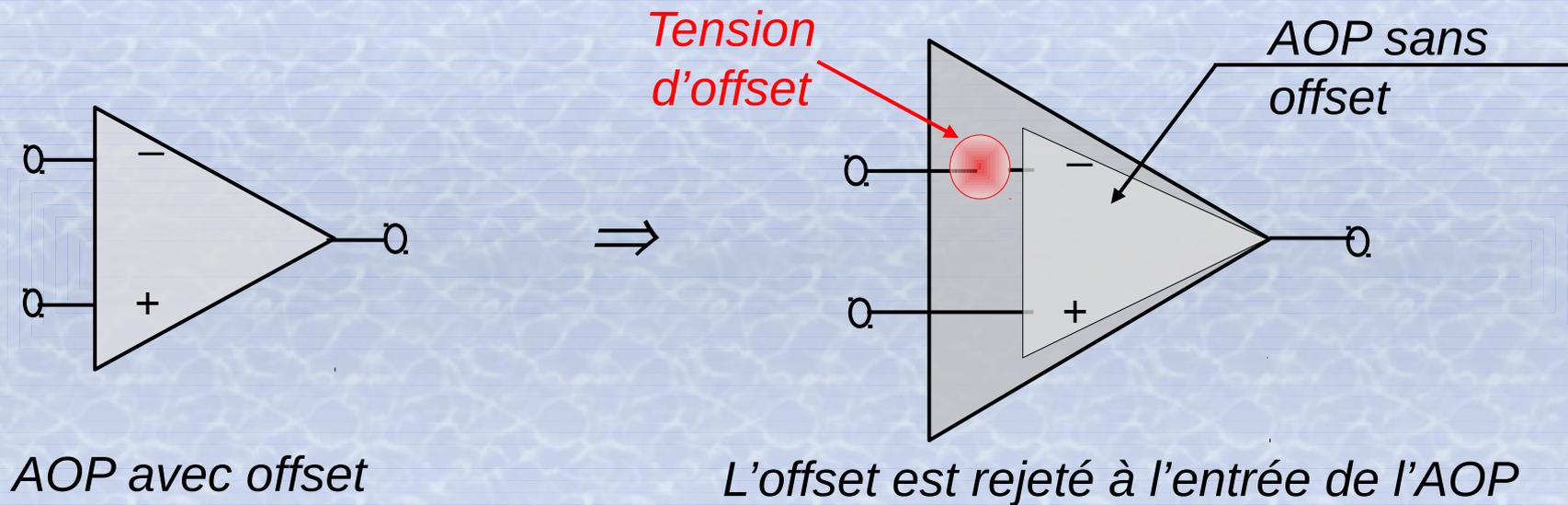
(sans démonstration à ce niveau d'étude)



**NB** : En toute rigueur, les densités spectrales  $e(f)$  et  $i(f)$  ne sont pas constantes, elles diminuent aux fréquences très élevées.

# Bruit dans les transistors

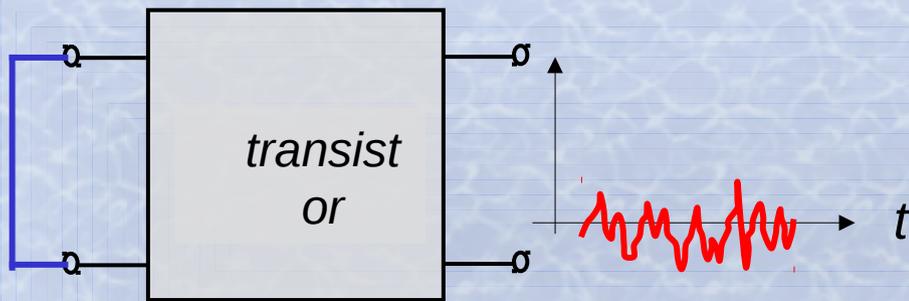
Un transistor c'est au minimum 2 diodes et trois résistances d'accès, en conséquence il n'est pas envisageable, pour obtenir le bruit en sortie d'un transistor de le calculer à partir des densités spectrales de chaque source. En pratique, on adopte une méthode similaire à celle utilisée pour traiter par exemple l'offset d'un AOP



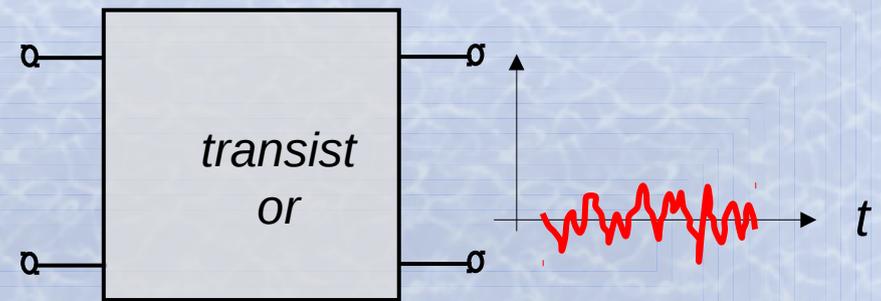
Transistors = diodes + résistances d'accès ⇒ **sources de bruit**

# Bruit dans les transistors

Question : combien de sources de bruit pour représenter le bruit d'un transistor ?

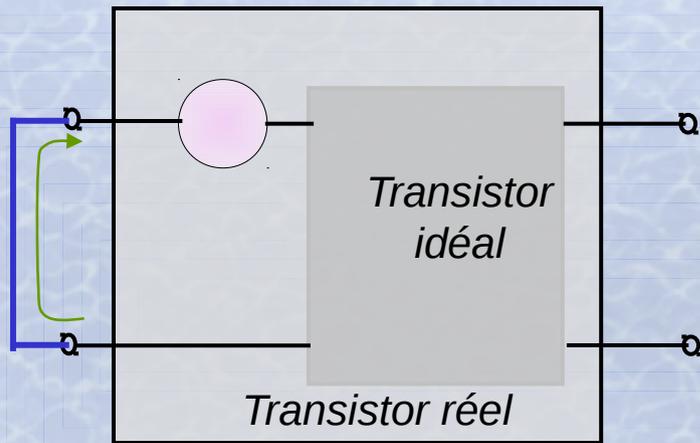


Avec un court-circuit à l'entrée, on observe du bruit en sortie

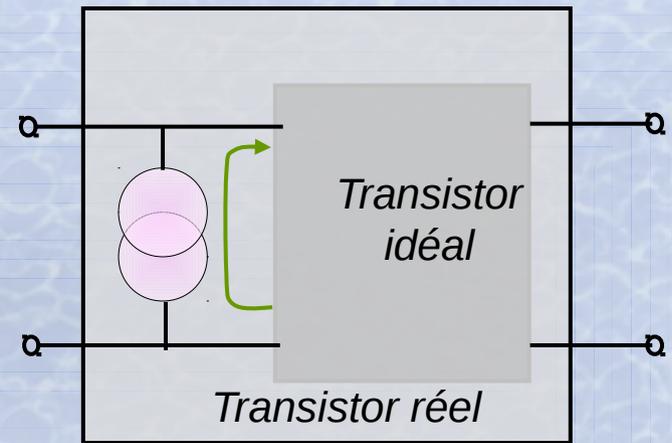


Avec un circuit ouvert à l'entrée, on observe du bruit en sortie

# Bruit dans les transistors

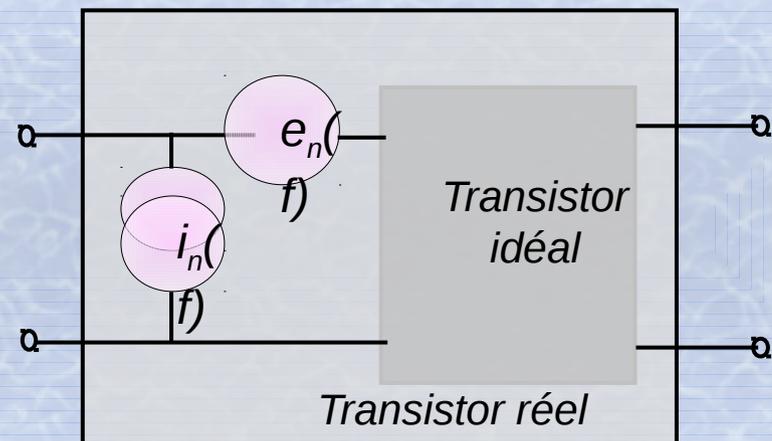


*Un générateur de bruit en tension permet d'expliquer le bruit de sortie*



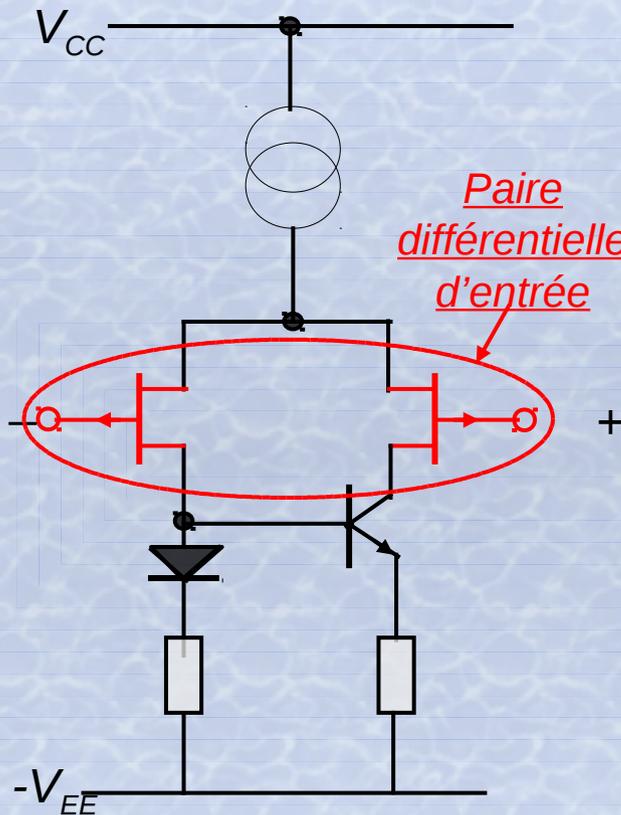
*Un générateur de bruit en courant permet d'expliquer le bruit de sortie*

Conclusion : 2 générateurs de bruit, un de tension et un de courant, de densité spectrale  $e_n(f)$  et  $i_n(f)$ , sont nécessaires pour modéliser le bruit d'un transistor.

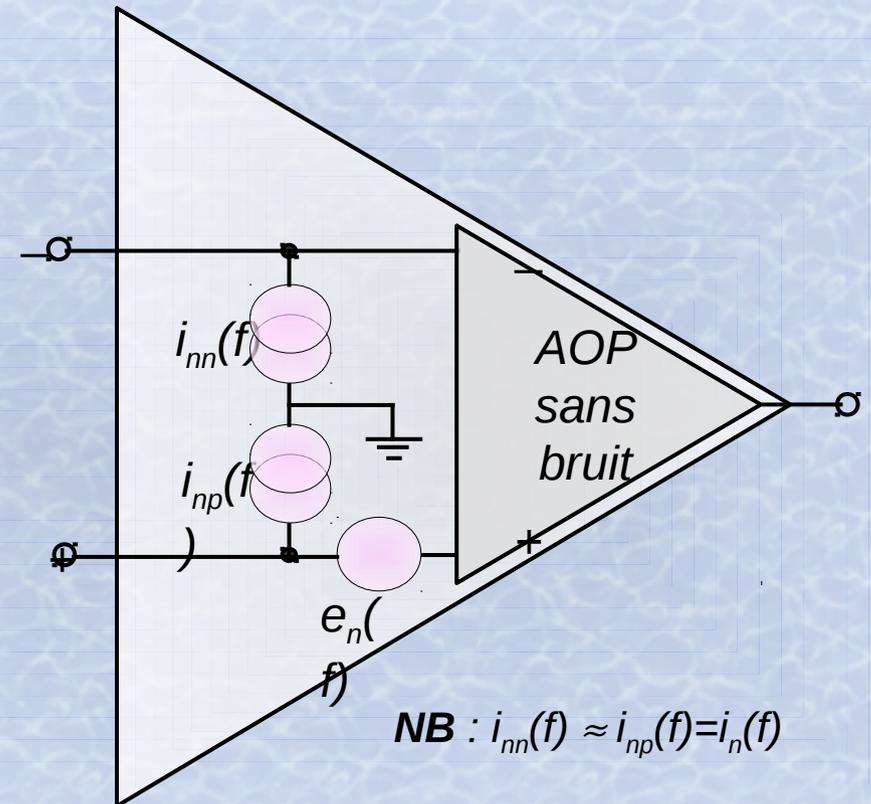


# Modélisation du bruit dans les AOP

Le bruit des AOP est modélisé par trois générateurs de bruit : deux de courant, de densités spectrales  $i_{nn}(f)$  et  $i_{np}(f)$  dus à la paire différentielle d'entrée, et un de tension de densité spectrale  $e_n(f)$ .



Entrée d'un AOP JFET (ex : TL081)



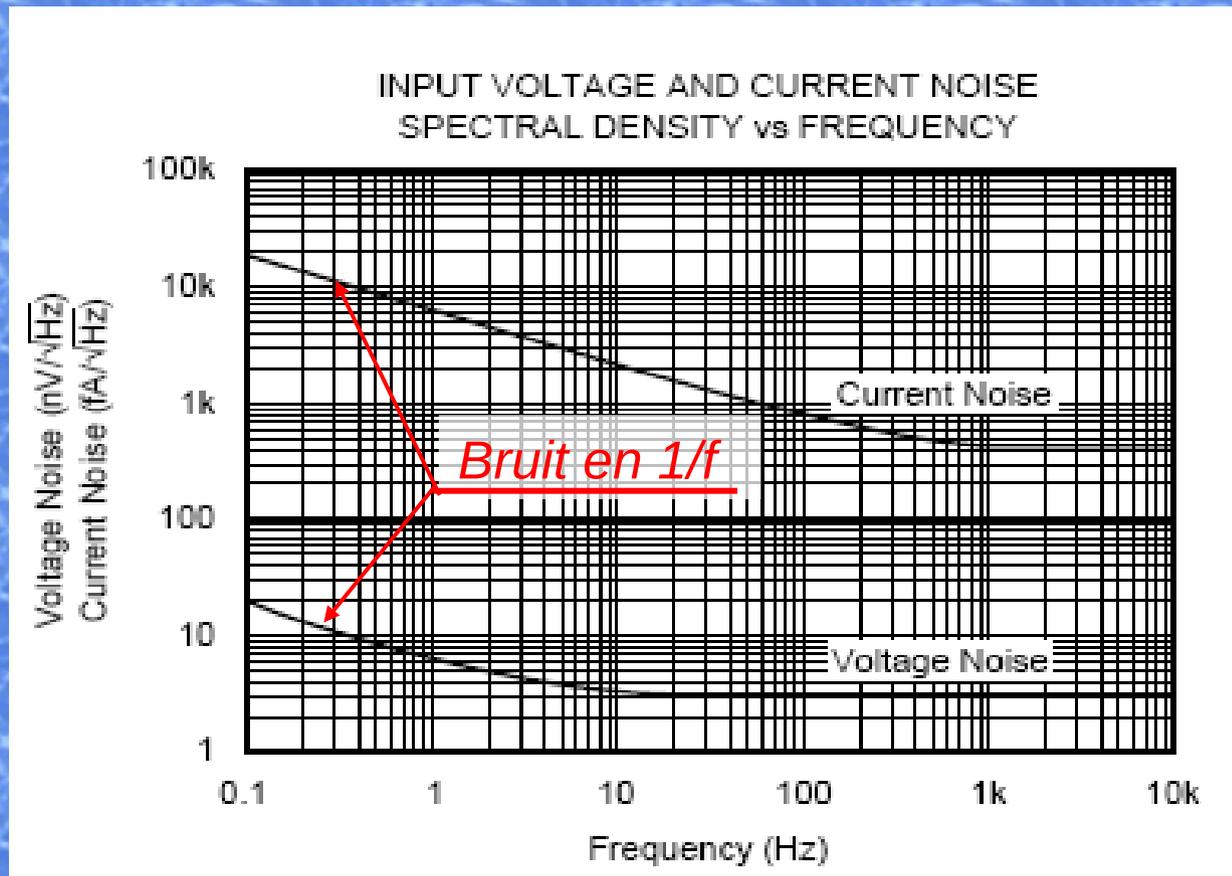
Modélisation du bruit dans un AOP

# Modélisation du bruit dans les AOP



Burr-Brown Products  
from Texas Instruments

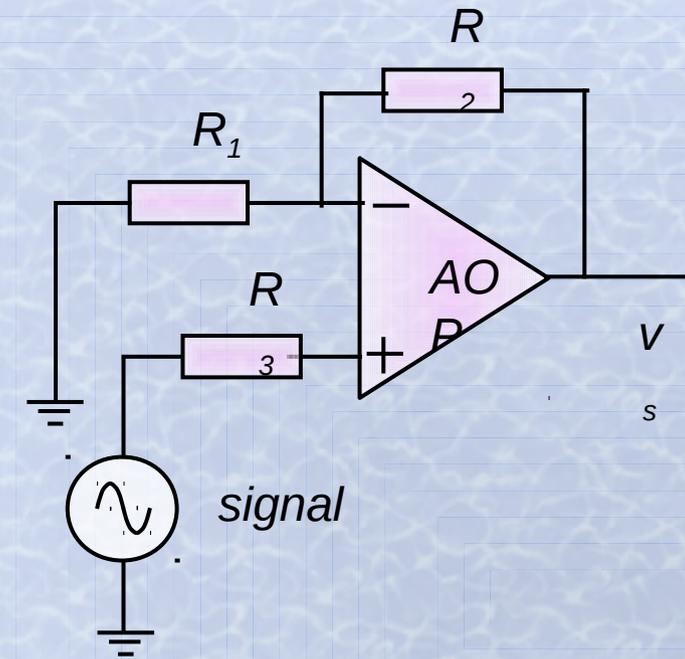
OPA227  
OPA2227  
OPA4227  
OPA228  
OPA2228  
OPA4228



Attention : le graphe donne les racines carrées des densités spectrales  $e_n(f)$  et  $i_n(f)$  et non les densités spectrales.

Exemple :  $f=100\text{Hz} \Rightarrow e_n \approx 9 \times 10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}$  et  $i_n \approx 8 \times 10^{-25} \text{ A}^2/\text{Hz}$

# Modélisation du bruit Bruit en sortie d'un montage non-inverseur



$$v_s = A_d (v^+ - v^-)$$

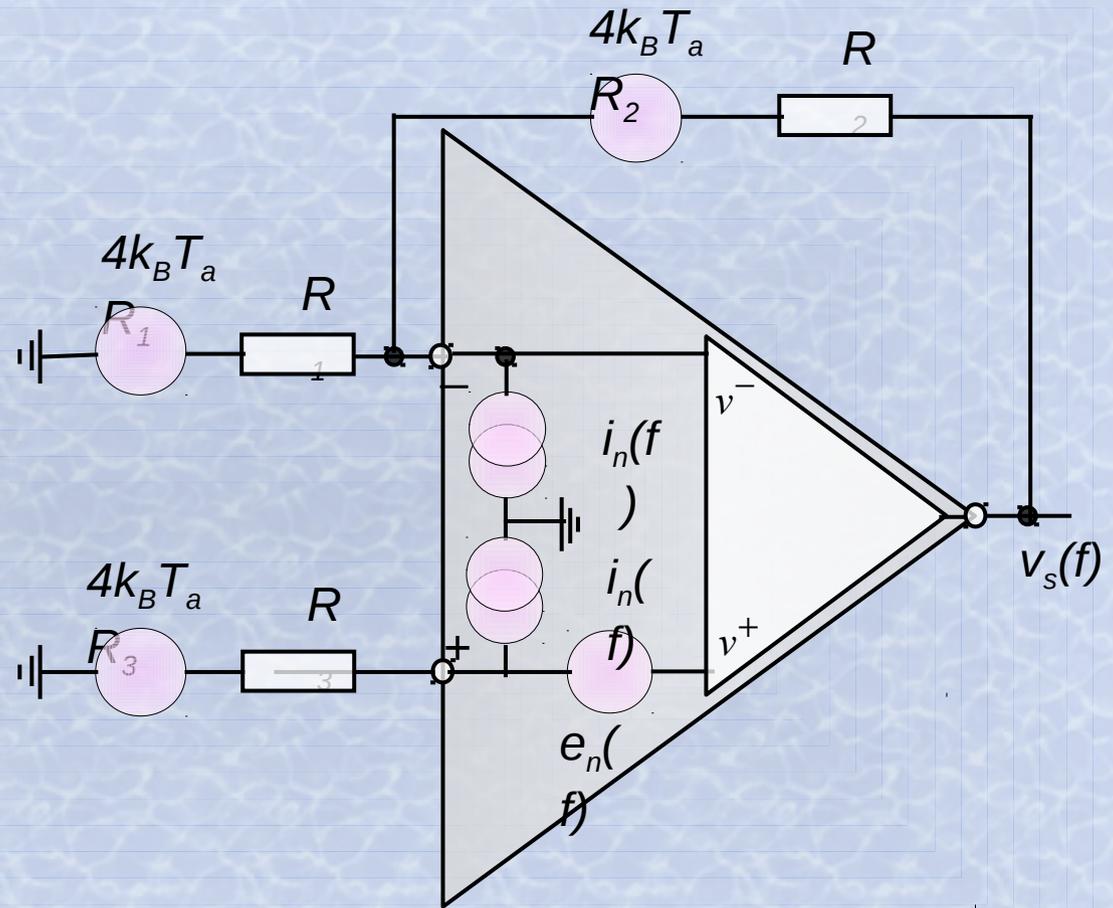
$A_d$  = gain mode différence

Gain aux basses

fréquences :

$$G_m = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

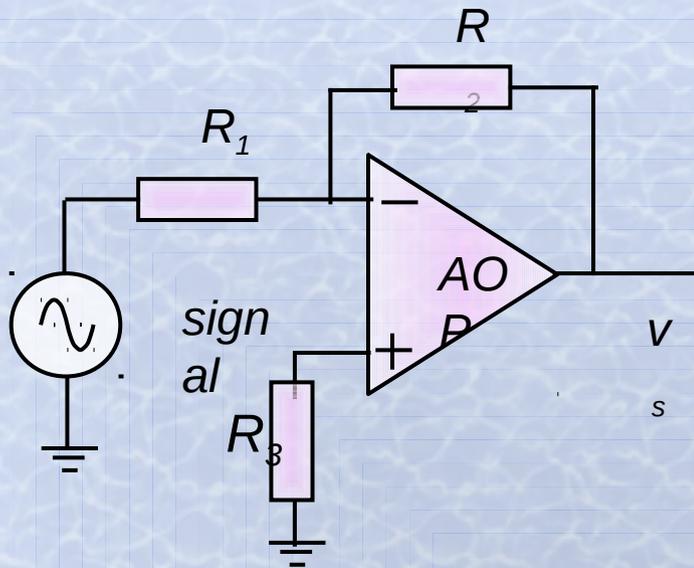
Montage non-inverseur



Sources de bruit du montage non-inverseur

Question : quelle est la valeur efficace de bruit en sortie de l'amplificateur ?

# Modélisation du bruit Bruit en sortie d'un montage inverseur



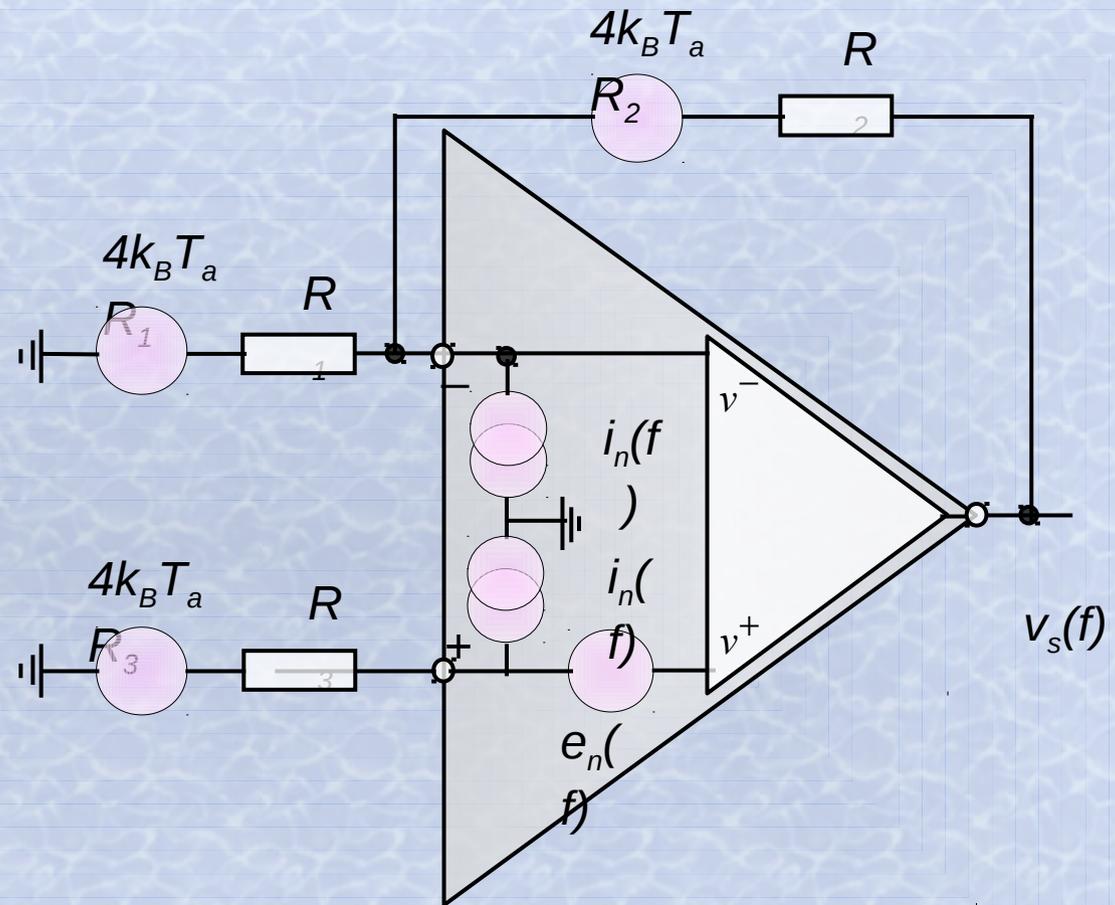
$$v_s = A_d(v^+ - v^-)$$

$A_d$  = gain mode différence

Gain aux basses fréquences :

$$G_m = -\frac{R_2}{R_1}$$

Montage inverseur

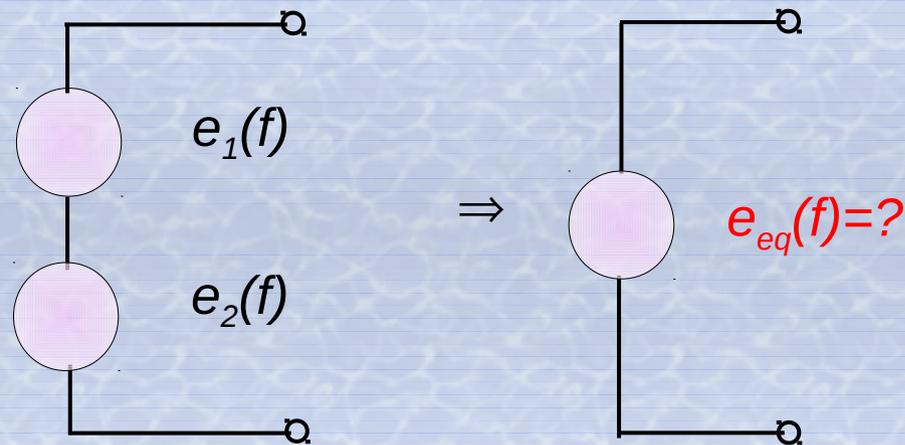


Sources de bruit du montage inverseur

Remarque : la valeur efficace de bruit en sortie de l'amplificateur est identique à celle du montage non-inverseur.

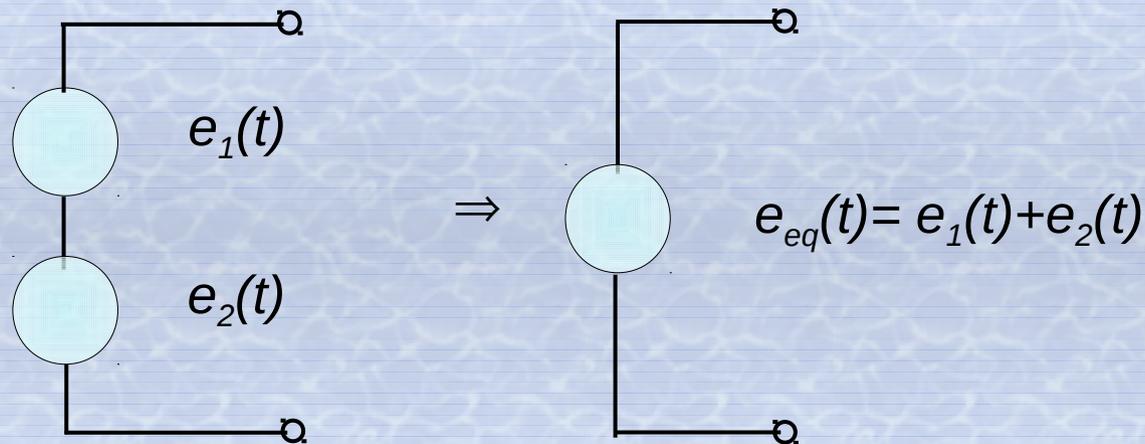
# Manipulation des densités spectrales : exemple n°1

Nous avons appris à manipuler les générateurs de tension et de courant, maintenant il nous faut apprendre à manipuler les densités spectrales. Pour aborder simplement ce problème prenons le cas de deux sources de bruit en tension et montées en série dont les densités spectrales sont respectivement  $e_1(f)$  et  $e_2(f)$  et cherchons la densité spectrale équivalente  $e_{eq}(f)$



# Manipulation des densités spectrales : exemple n°1

Pour résoudre ce problème, on introduit momentanément deux générateurs de tension  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  dont les densités spectrales sont égales à  $e_1(f)$  et  $e_2(f)$ . Nous ne disposons pas bien entendu d'expression analytique pour  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ , ce sont juste des intermédiaires de calcul qui disparaîtront dans le résultat final.



Calculons la val. quad. moy. de bruit de la source équivalente :

$$\begin{aligned} \text{val. quad. moy.} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_{eq}^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (e_1(t) + e_2(t))^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (e_1^2(t) + e_2^2(t)) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 2e_1(t)e_2(t) dt \end{aligned}$$

# Manipulation des densités spectrales : exemple n°1

Des égalités :

$$\begin{cases} \int_0^\infty e_{eq}(f)df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_{eq}^2(t)dt \\ \int_0^\infty e_1(f)df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_1^2(t)dt \\ \int_0^\infty e_2(f)df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_2^2(t)dt \end{cases}$$

On tire :  $\int_0^\infty e_{eq}(f)df = \int_0^\infty (e_1(f) + e_2(f))df + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T e_1(t)e_2(t)dt$

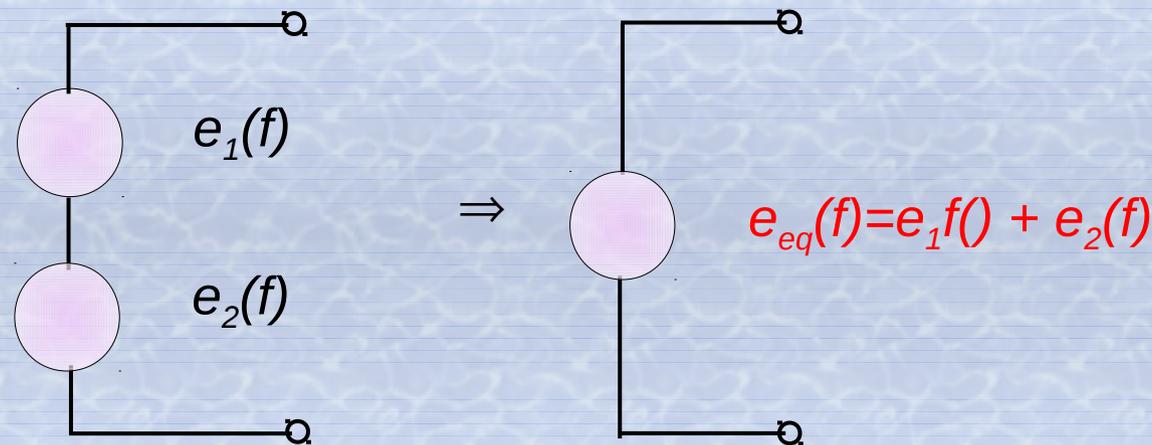
L'intégrale  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T e_1(t)e_2(t)dt$  nous renseigne sur la corrélation des sources de bruit  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ . Pour comprendre ce qu'est la corrélation, mettons par exemple deux résistances en série. Le bruit est, comme nous l'avons déjà dit, dû aux fluctuations spatiales de la densité électronique, dire que les sources sont corrélées revient à dire qu'elles se connaissent. Faisons l'hypothèse, non raisonnable, que les fluctuations sont les mêmes dans les deux résistances, il s'ensuit que  $e_1(t) = e_2(t)$  et donc  $e_1(f) = e_2(f)$ .

# Manipulation des densités spectrales : exemple n°1

Dans ce cas  $\int_0^\infty e_{eq}(f)df = 2\int_0^\infty e_1(f)df + 2\int_0^\infty e_1(f)df$  et  $e_{eq}(f) = 4e_1(f)$

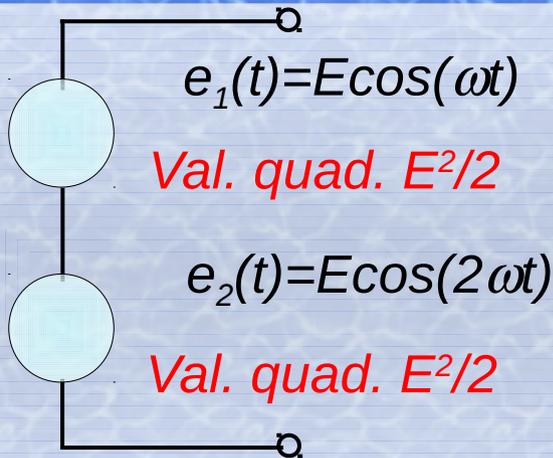
Dans la réalité, les déplacements des électrons dans les deux résistances sont totalement indépendant, autrement dit les deux sources de bruit ne sont pas corrélées et l'intégrale  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^\infty e_1(t)e_2(t)dt$  est nulle.

Dans le cas où les sources de bruit ne sont pas corrélées, ce qui sera toujours supposé vraie par la suite, les densités spectrales s'ajoutent.

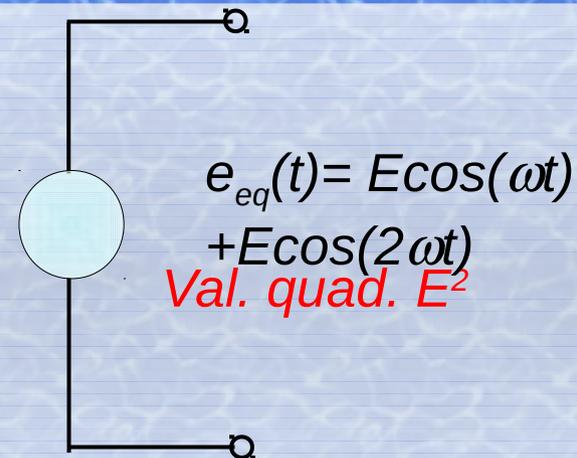


# Remarque : valeurs quadratiques et signaux déterministes

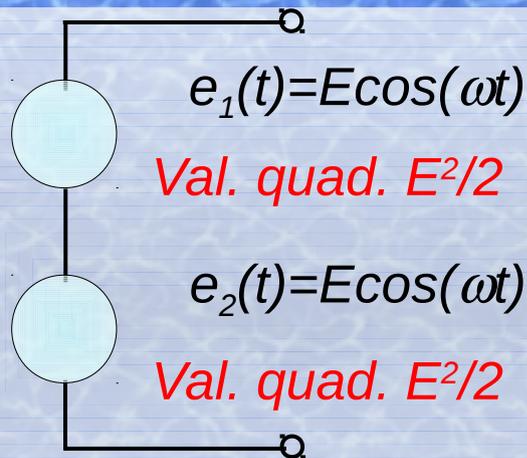
Comme pour les sources de bruit, la val. quad. d'un signal déterministe n'est pas toujours la somme des val. quad.



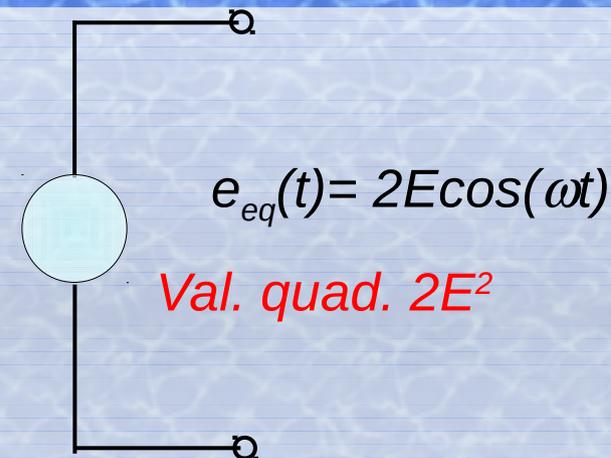
$\Rightarrow$



Les deux signaux  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  sont indépendants, la val. quad. de  $e_{eq}(t)$  est la somme des val. quad.



$\Rightarrow$

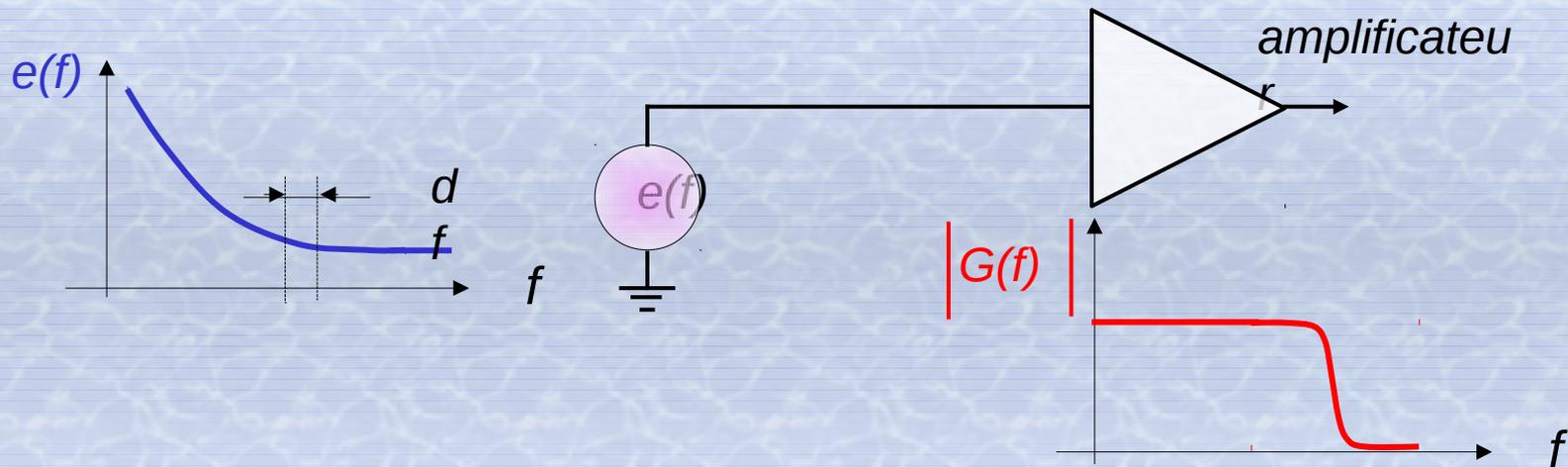


Les deux signaux  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  ne sont pas indépendants, la val. quad. de  $e_{eq}(t)$  est différente de la somme des val. quad.

# Bande passante équivalente de bruit d'un amplificateur

Un amplificateur, supposé sans bruit, de gain en tension  $G(f)$  est attaqué par un générateur de bruit de densité spectrale  $e(f)$ .

Question : quelle est la valeur efficace de bruit en sortie de l'amplificateur ?



Val. eff. de la source de bruit dans une plage  $df$  :  $\sqrt{e(f)df}$

Val. eff. en sortie de l'ampli. dans une plage  $df$  :  $|G(f)|\sqrt{e(f)df}$

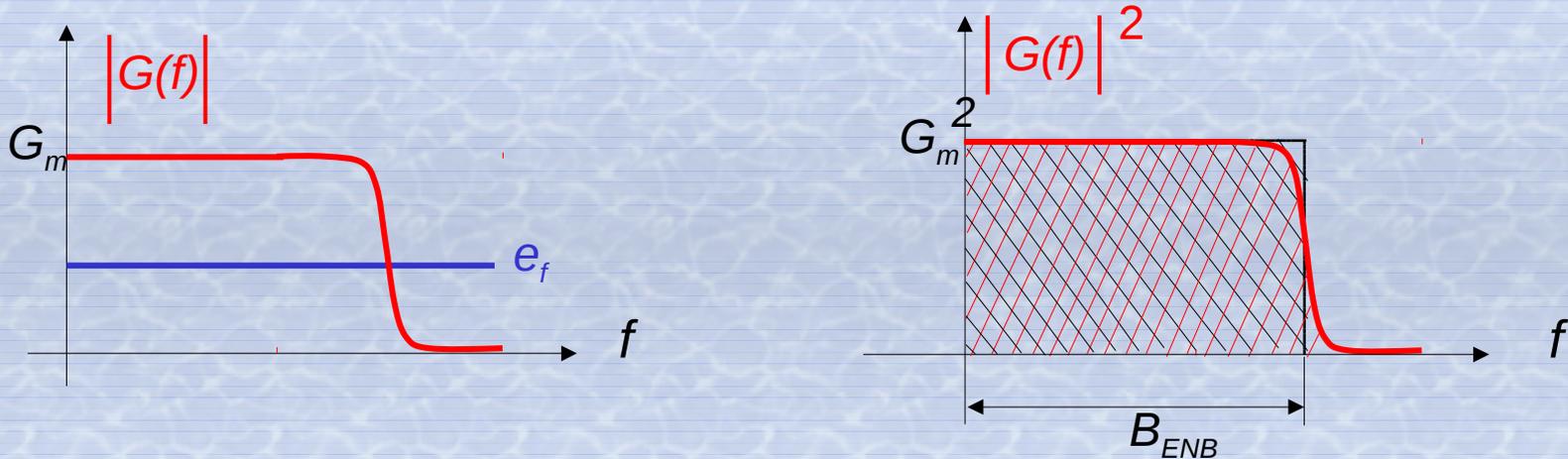
Val. quad. moy. en sortie de l'ampli. dans une plage  $df$  :  $|G(f)|^2 e(f)df$

Val. quad. moy. en sortie de l'ampli. :  $\int_0^\infty |G(f)|^2 e(f)df$

# Bande passante équivalente de bruit d'un amplificateur

Dans le cas où la densité spectrale est indépendante de la fréquence,  $e(f)=e_f$ , c'est le cas par exemple d'une résistance, la val. quad. moy. de bruit s'écrit :

$$\int_0^{\infty} |G(f)|^2 e(f) df = e_f \int_0^{\infty} |G(f)|^2 df$$



L'intégrale  $\int_0^{\infty} |G(f)|^2 df$ , zone hachurée rouge, est encore égale à la zone hachurée noire:  $\int_0^{\infty} |G(f)|^2 df = G_m^2 B_{ENBW}$ , où  $G_m$  et  $B_{ENBW}$  sont le gain aux basses fréquences et la **Bande Passante Équivalente de Bruit (Equivalent Noise BandWidth)**

DETECTION SYNCHRONNE

OU

COMMENT EXTRAIRE UN SIGNAL DE FREQUENCE CONNUE

NOYE DANS LE BRUIT

# Model 7124

## Precision Lock-in Amplifier

...with unique fiber optic link to prevent digital switching noise entering the experiment



the new standard for measurements in:

- ◆ low temperature physics
- ◆ electrical engineering
- ◆ electrochemistry
- ◆ optics

**SIGNAL RECOVERY**

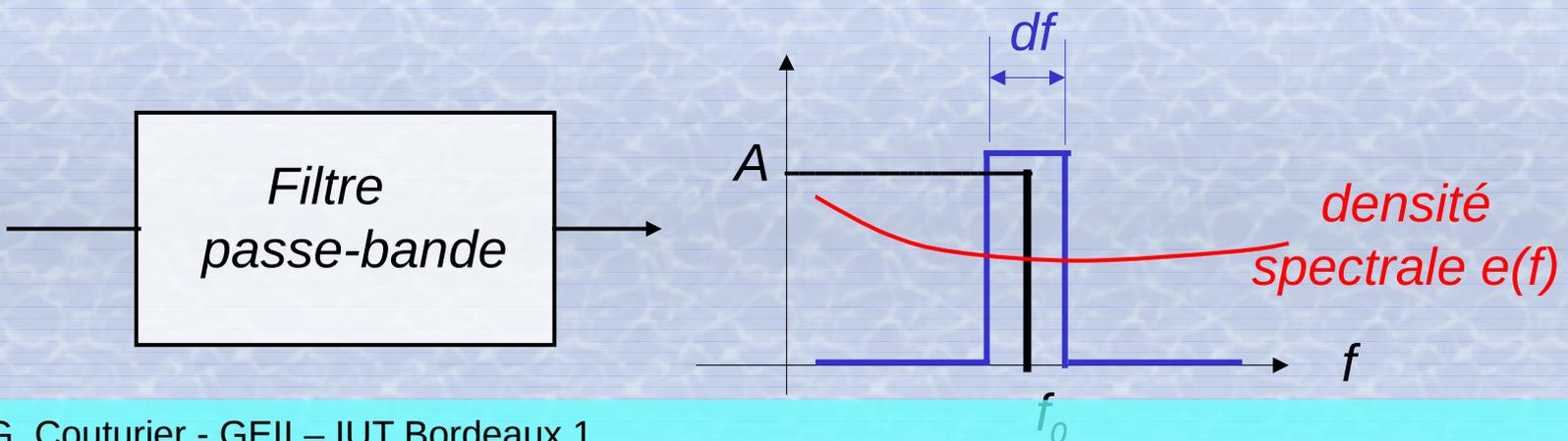
—part of AMETEK® Advanced Measurement Technology

# Détection synchrone

La détection synchrone permet d'extraire un signal de fréquence connue noyé dans le bruit.

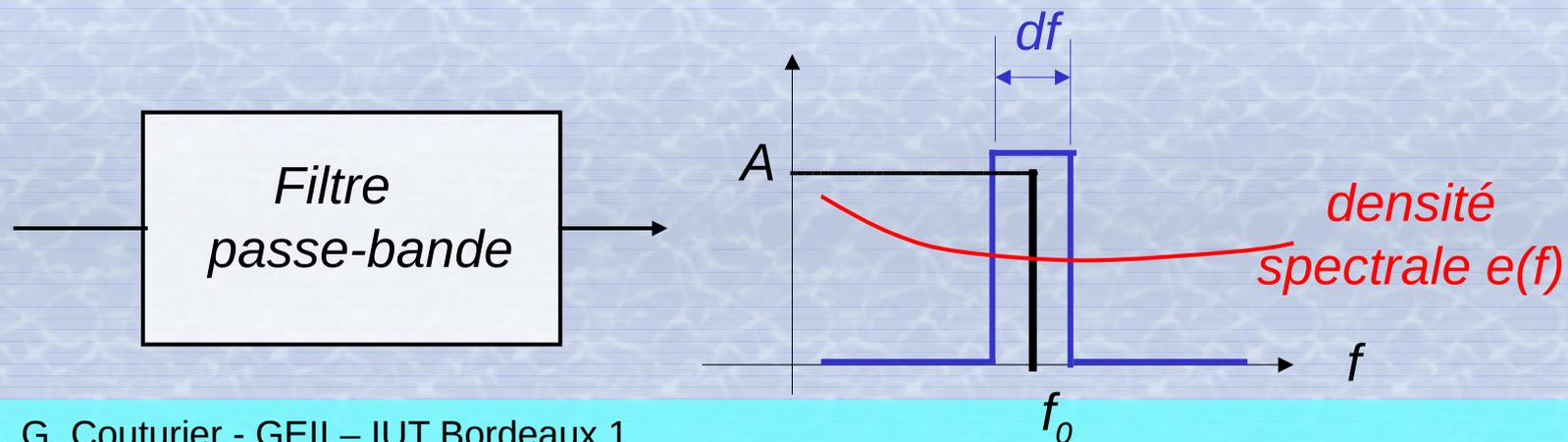
La première méthode qui vient à l'esprit pour extraire l'amplitude  $A$  d'un signal  $A\cos(\omega_0 t)$  noyé dans un bruit de densité spectrale  $e(f)$  consiste à utiliser un filtre passe-bande de largeur  $df$  aussi étroite que possible. On fait l'hypothèse raisonnable que la densité spectrale  $e(f)$  est quasi constante sur la largeur  $df$ . En sortie du filtre de gain supposé égal à l'unité, le rapport Signal/Bruit s'écrit :

$$\frac{S}{B} \Big|_{dB}^{filtrage} = 20 \log_{10} \frac{A/\sqrt{2}}{\sqrt{e(f_0) df}}$$



# Détection synchrone

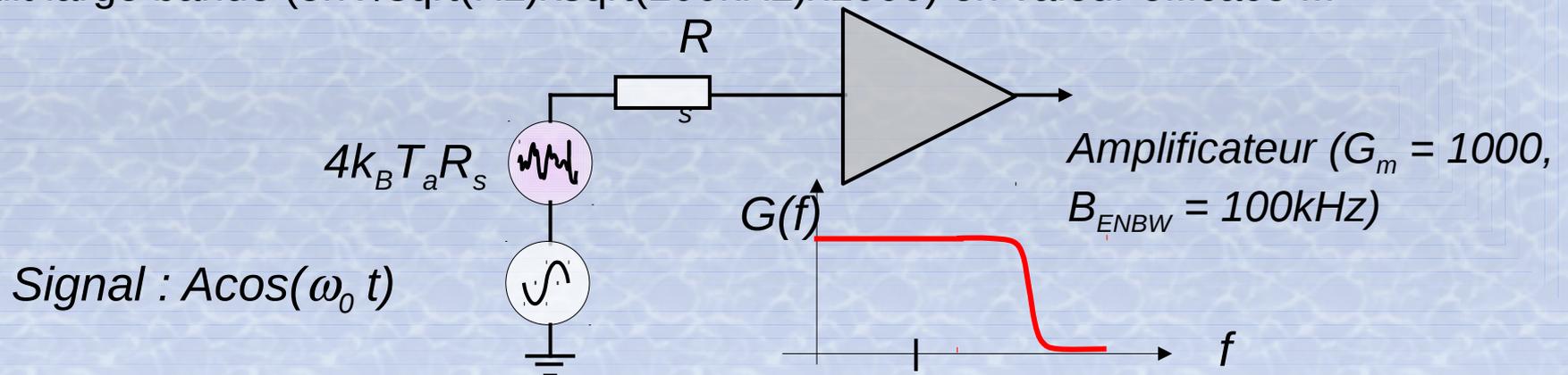
Le rapport Signal/Bruit est d'autant plus grand que la largeur de bande  $df$  est faible. D'un point de vue pratique il est difficile de réaliser un filtre passe-bande avec  $df$  très faible, en effet pour obtenir  $df$  très faible il faut un coefficient de surtension  $Q$  très élevé ( $df=f_0/Q$ ). Si par ailleurs la fréquence  $f_0$  du signal vient à changer, il faut déplacer la fréquence centrale du filtre passe-bande. En pratique, il est difficile de réaliser un filtre passe-bande étroit avec une fréquence centrale ajustable. Une alternative à cette difficulté consiste à transposer le signal à la fréquence zéro et utiliser alors un filtre passe-bas de faible largeur de bande.



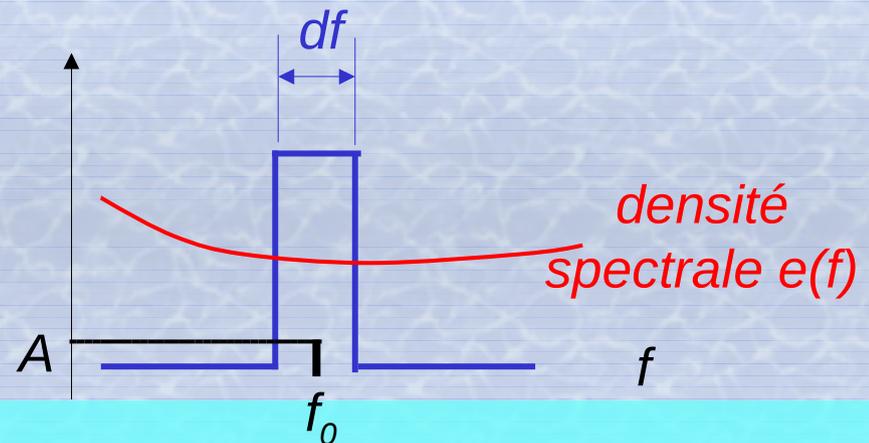
# Détection synchrone

La détection synchrone permet d'extraire un signal de fréquence connue noyé dans le bruit.

Supposons un signal sinusoïdal de 10nV d'amplitude à 10kHz de fréquence amplifié par un AOP bas bruit  $5nV/\sqrt{Hz}$  de bruit en entrée. On peut donc espérer 10 $\mu$ V de signal (10nVx1000) et 1,6mV de bruit large bande ( $5nV/\sqrt{Hz} \times \sqrt{100kHz} \times 1000$ ) en valeur efficace !!!

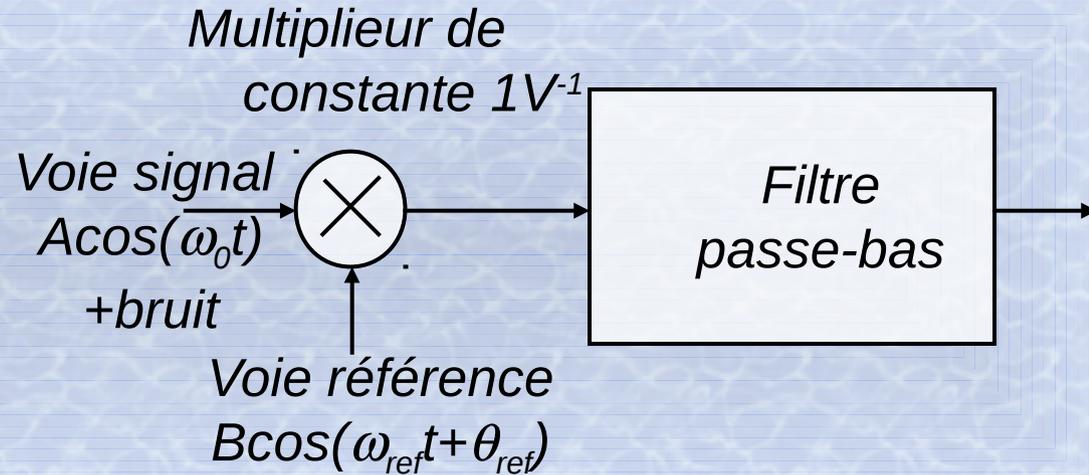


Peut-on sortir ce signal du bruit ??



# Détection synchrone

Pour transposer le signal de fréquence  $f_0$  à la fréquence zéro, c'est à dire en continu, il suffit de multiplier le signal  $A \cos(\omega_0 t)$  par le signal de référence de fréquence  $f_{ref} = f_0$  (condition 1) et déphasé de  $\theta_{ref} = 0$  (condition 2).



Après multiplication, on obtient :

$$[A \cos(\omega_0 t) + b(t)] \cdot B \cos(\omega_{ref} t + \theta_{ref}) = \frac{AB}{2} [\cos((\omega_0 - \omega_{ref})t + \theta_{ref}) + \cos((\omega_0 + \omega_{ref})t + \theta_{ref})] + B \cos(\omega_{ref} t + \theta_{ref}) b(t)$$

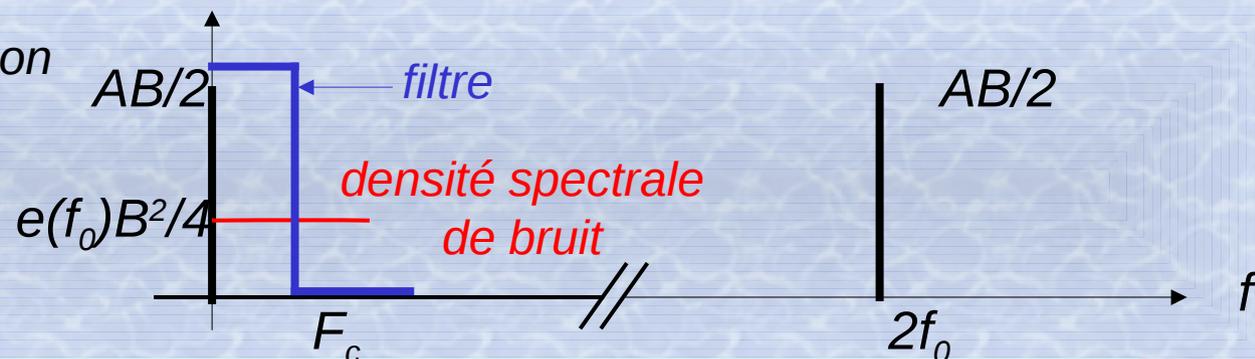
Après le filtre passe bas, on obtient :

$$[A \cos(\omega_0 t) + b(t)] \cdot B \cos(\omega_{ref} t + \theta_{ref}) = \frac{AB}{2} [\cos((\omega_0 - \omega_{ref})t + \theta_{ref})] + \sqrt{\left(\frac{B^2 e(f_0)}{4}\right)}$$

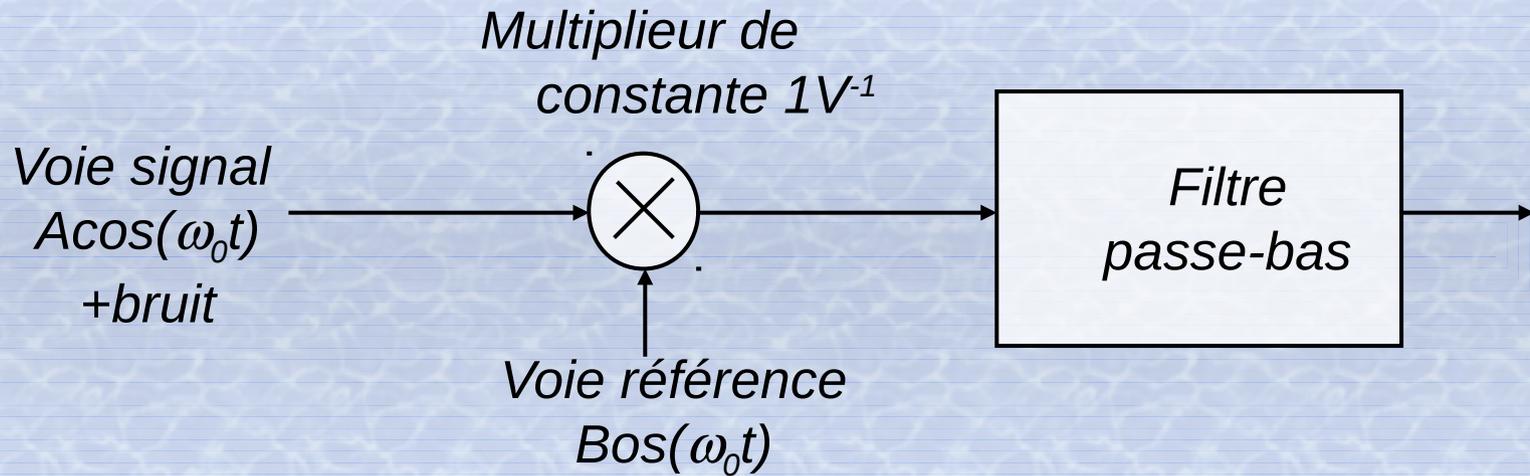
Si l'on maintient au mieux la

condition 1 (asservissement de fréquence) :  $[A \cos(\omega_0 t) + b(t)] \cdot B \cos(\omega_{ref} t + \theta_{ref}) = \frac{AB}{2} [\cos(\theta_{ref})] + \sqrt{\left(\frac{B^2 e(f_0)}{4}\right)}$

Donc a densité spectrale constante on peut extraire le signal du bruit en réduisant la bande passante du filtre passe bas



# Détection synchrone



Rapport Signal/Bruit en sortie du filtre passe-bas

$$\frac{S}{B} \Big|_{dB}^{detection\ synchronique} = 20 \log_{10} \frac{\frac{AB}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{e(f_0)B^2}{4} F_c}} = 20 \log_{10} \frac{A/\sqrt{2}}{\sqrt{e(f_0) F_c}}$$

Il est intéressant de comparer la détection synchrone avec le filtrage passe-bande, que gagne t-on ?

$$\frac{S}{B} \Big|_{dB}^{detection\ synchronique} - \frac{S}{B} \Big|_{dB}^{filtrage} = 20 \log_{10} \frac{df}{F_c}$$

# Détection synchrone

Il n'y a pas a priori de limite sur la bande  $F_c$  du filtre passe-bas comme il y en a sur la bande  $df$  du passe-bande. D'un point de vue mathématiques si  $F_c \rightarrow 0$ , le gain est infini, mais ne rêvons pas si  $F_c \rightarrow 0$ , le résultat est obtenu au bout d'un temps infini .... Le choix de  $F_c$  résulte d'un compromis entre le rapport Signal/Bruit acceptable et le temps de réponse.

