

Filtrage numérique

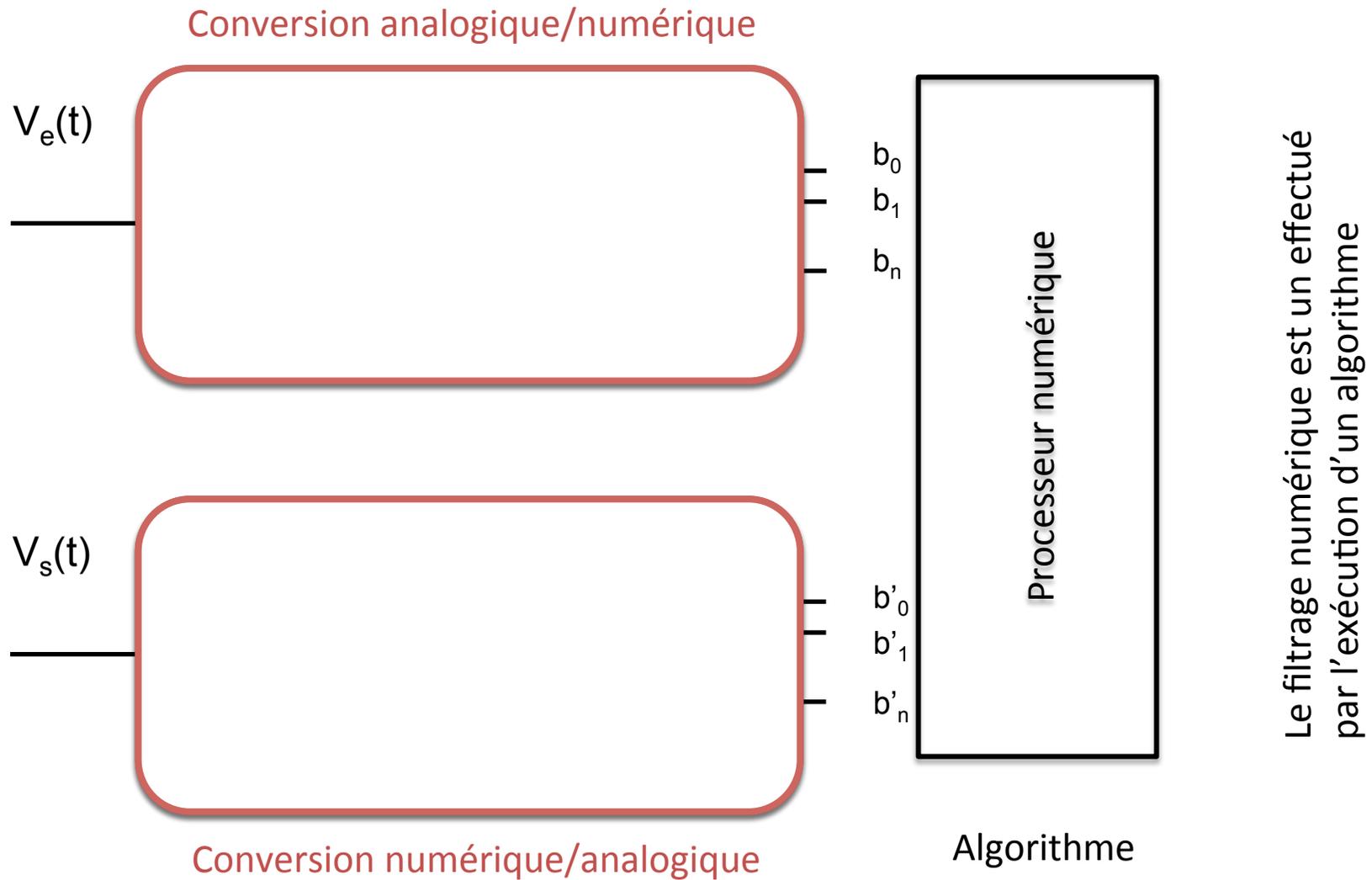
algorithme, fonction de transfert, ...

Le filtrage numérique

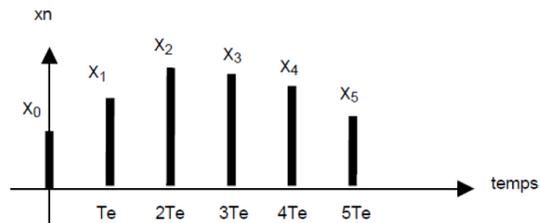
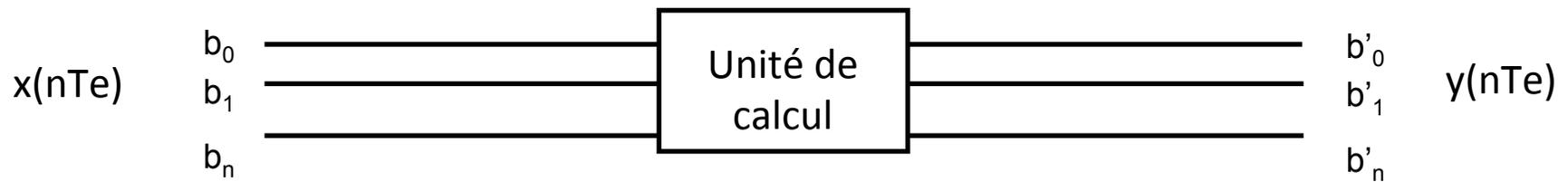
Le filtrage numérique, comme tout traitement numérique, est un calcul réalisé à l'aide d'un algorithme sur des échantillons d'un signal analogique.

Cela suppose donc un échantillonnage, une conversion analogique numérique, le traitement proprement dit, la conversion numérique analogique...

Chaîne traitement de l'information



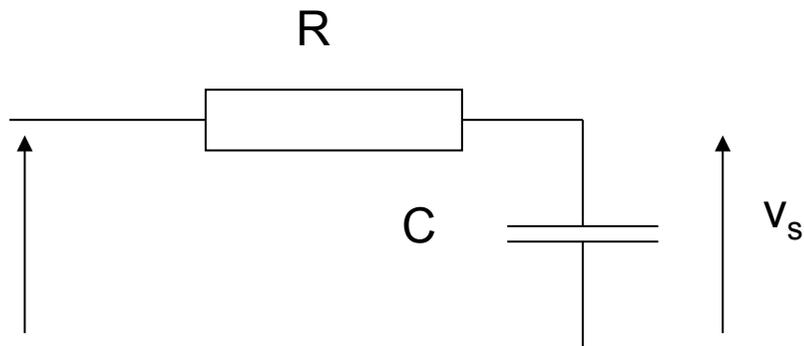
L'algorithme



$$y_n = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x_{n-i} + \sum_{j=0}^{j=N} a_j y_{n-j}$$

Le filtrage numérique

Il y a des similitudes avec le filtrage analogique bien sûr ...



(temps)

$$RC \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$$



Transformée de Fourier

(fréquence)

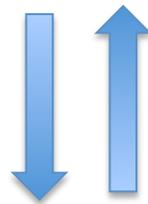
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Le filtrage numérique

Il y a des similitudes avec le filtrage analogique bien sûr ...

(temps)

$$y_n = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x_{n-i} + \sum_{j=0}^{j=N} a_j y_{n-j}$$



Transformée en z

(fréquence)

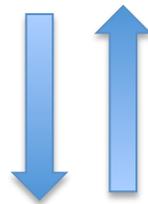
$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{i=M} b_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^{j=N} a_j z^{-j}}$$

Le filtrage numérique

Il y a des similitudes avec le filtrage analogique bien sûr ...

(temps)

$$y_n = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x_{n-i} + \sum_{j=0}^{j=N} a_j y_{n-j}$$



Transformée en z

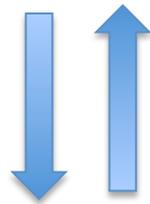
(fréquence)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{i=M} b_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^{j=N} a_j z^{-j}}$$

Quelques exemples...

(temps)

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$



Transformée en z

Les y_n ne dépendent que des $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$: on appelle ce type de filtre des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF ou FIR en anglais)

(fréquence)

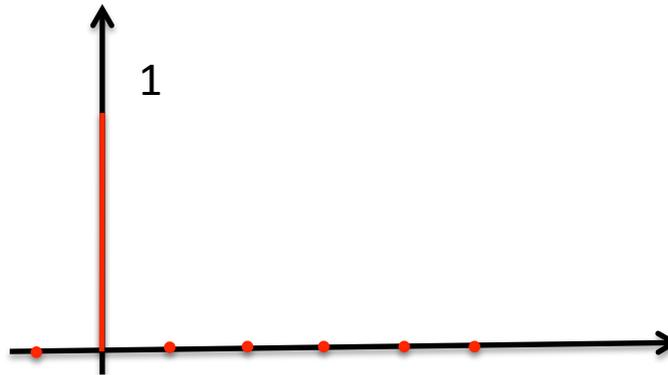
$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2}$$

Quelques exemples...

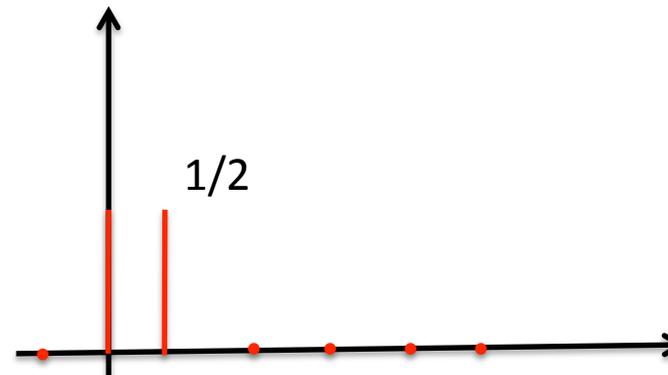
Réponse impulsionnelle

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

$$\{x_n\} = \{1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$



$$\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \dots \right\}$$

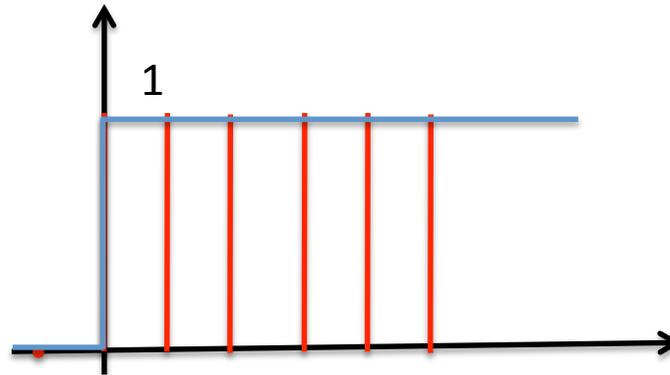


Quelques exemples...

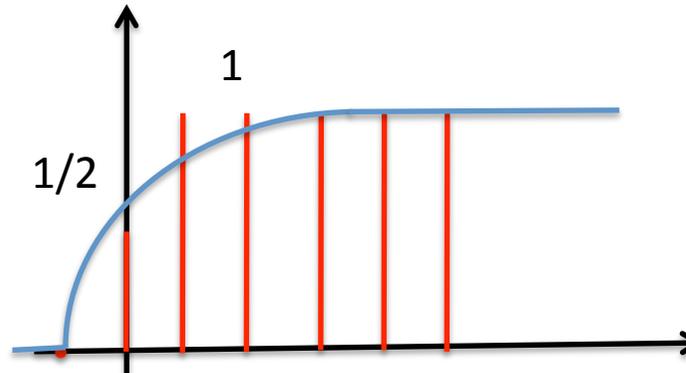
Réponse indicielle

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

$$\{x_n\} = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$



$$\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, \dots \right\}$$

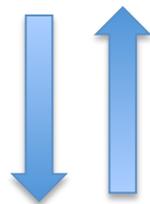


Réponse indicielle
similaire au passe-bas
du 1^{er} ordre

Quelques exemples...

(temps)

$$y_n = \frac{x_n + y_{n-1}}{2}$$



Transformée en z

y_n dépend des $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$
et des y_{n-i} : on appelle ce type de filtre
des filtres à réponse impulsionnelle
infinie (RII ou IIR en anglais)

(fréquence)

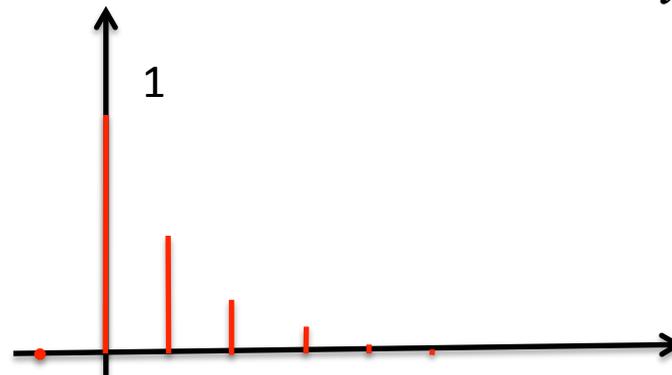
$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Quelques exemples...

Réponse impulsionnelle

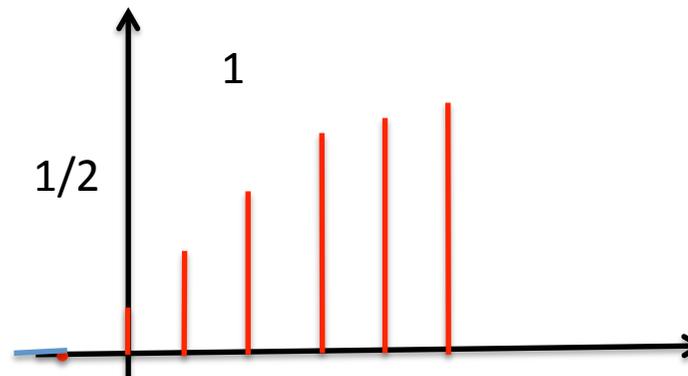
$$y_n = \frac{x_n + y_{n-1}}{2}$$

$$\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots \right\}$$



Réponse indicielle

$$\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots \right\}$$



Relation entre filtre analogique et numérique

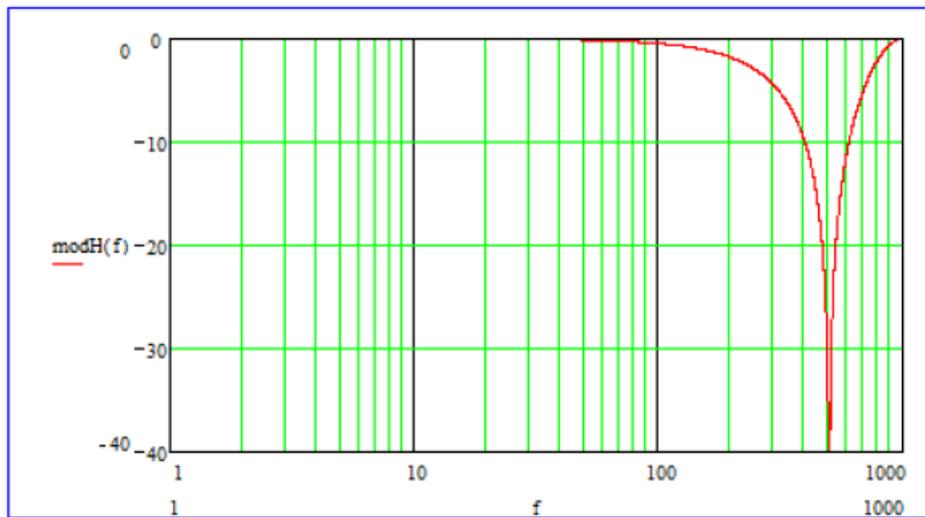
Si on veut « comparer » les filtres numériques et les filtres analogiques, il faut savoir passer de z à f . La relation de passage est donnée par :

$$z = e^{j\omega T_e}$$

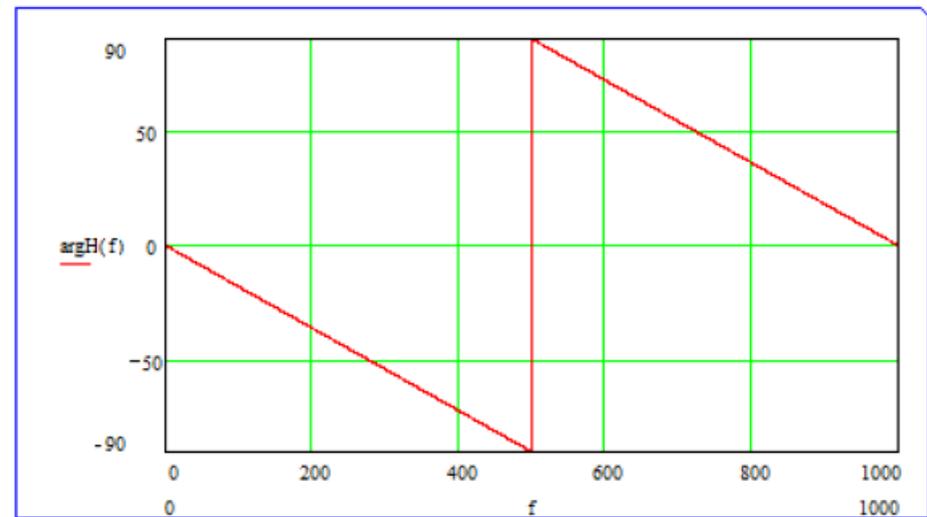
Relation entre filtre analogique et numérique

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \quad H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1+e^{-j\omega T_e}}{2}$$

Filtre moyenneur , avec $F_e = 1\text{kHz}$ soit $T_e = 1\text{ ms}$



Gain de $H(j\omega)$



Phase de $H(j\omega)$

Relation entre filtre analogique et numérique

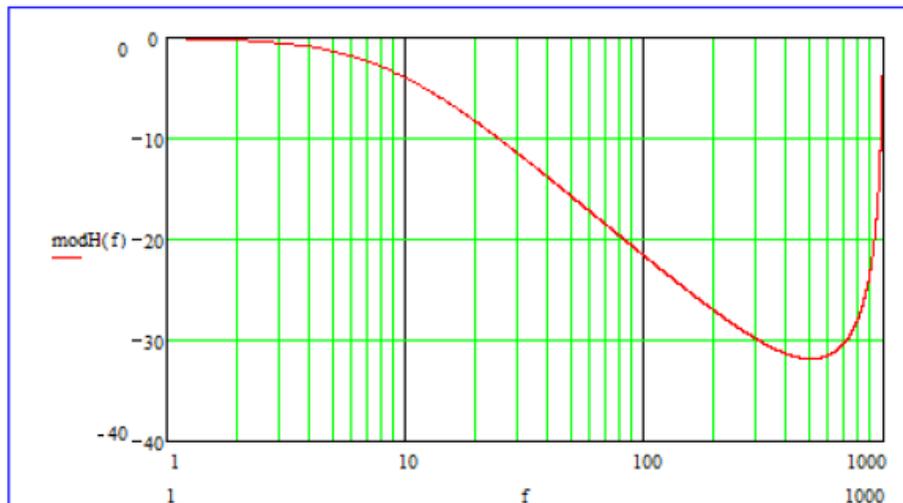
Exemple de filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) : le passe-bas récursif

$$y_n = 0,95 \cdot y_{n-1} + 0,05 \cdot x_n$$

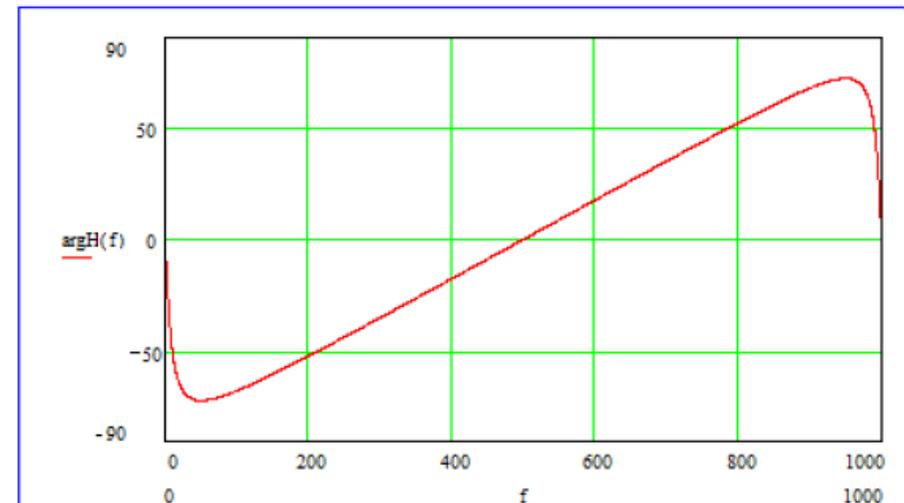
$$H(z) = \frac{0,05}{1 - 0,95 \cdot z^{-1}}$$

$$H(j\omega) = \frac{0,05}{1 - 0,95 \cdot e^{-j \frac{\omega}{1000}}}$$

avec $F_e = 1\text{kHz}$



Gain de $H(j\omega)$



Phase de $H(j\omega)$

Propriétés des différents filtres numériques

Filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR) :

avantages \Rightarrow stabilité
phase linéaire
intuitif
simple à concevoir

inconvénients \Rightarrow nombreux coefficients
implémentation lourde, couteuse ou peu performante en fréquence

Filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) :

avantages \Rightarrow peu de coefficients
implémentation simple et performante en fréquence
stabilité à étudier en raison de la présence de pôles dans $H(z)$

inconvénients \Rightarrow complexe à concevoir
utilisation de nombres à virgules

Synthèse des filtres numériques

Il existe plusieurs techniques de synthèse qui font toutes appel à des outils mathématiques plus ou moins complexes suivant le type de filtre RIF ou RII (transformation bilinéaire, optimisation sous contraintes, méthode de la fenêtre, invariance impulsionnelle,...)

Comme pour les filtres analogiques il existe des logiciels...