Filtrage analogique

Fonctions de transfert, familles, synthèse,⋯

Claude Pellet

2016-2017

Objectifs

L'objectif de ce cours est la présentation de techniques de synthèse des filtres analogiques actifs.

On commencera par rappeler quelques définitions :

Fonction de transfert d'un système linéaire?

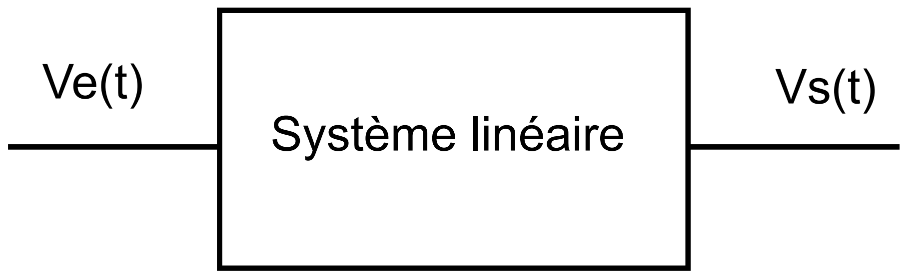
Filtrage ?

Filtrage analogique ?

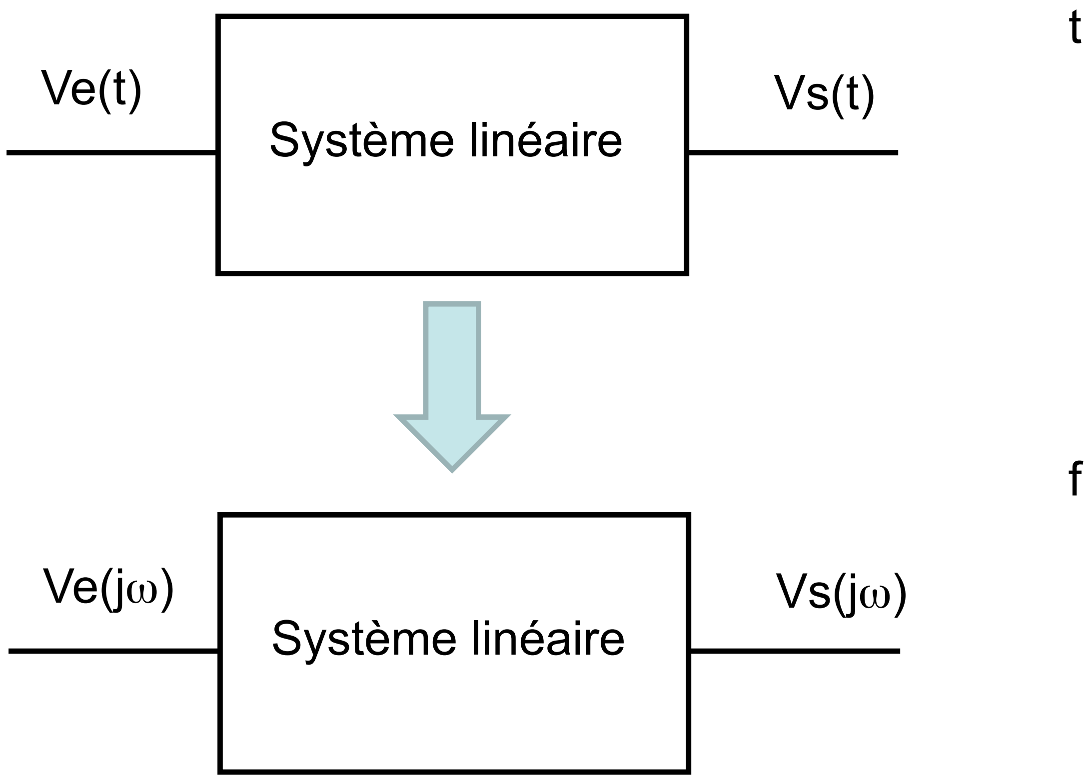
Filtrage

Le filtrage est une opération linéaire qui consiste à sélectionner certaines parties du spectre d'un signal.

Comme tout système linéaire les filtres sont caractérisés par leur fonction de transfert.



Fonction de transfert



$$H(j\omega) = \frac{Vs(j\omega)}{Ve(j\omega)}$$

Fonction de transfert

En Laplace

$$H(p) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j \times p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i \times p^i}, \;\; avec \;\; m \leq n$$

$$H(j\omega) \;\; est \;\; obtenue \; en \;\; remplaçant \;\; p \;\; par \;\; j\omega$$

On appelle ordre du filtre n, l'ordre du polynôme du dénominateur

Dans la bande de coupure la pente de l'asymptote est de ± nx20 dB par décade

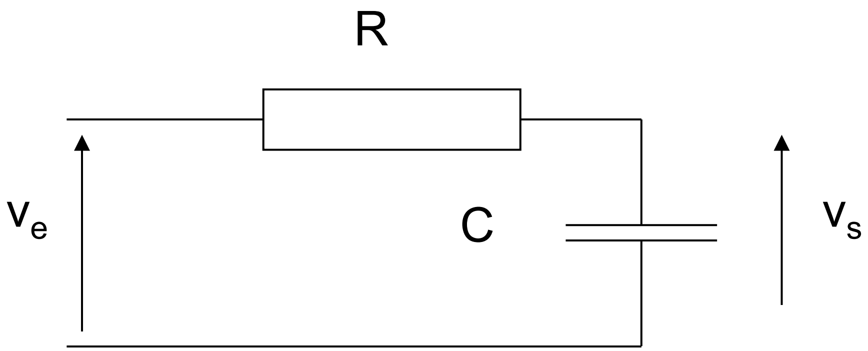
Filtrage

On distingue 4 catégories de filtres :

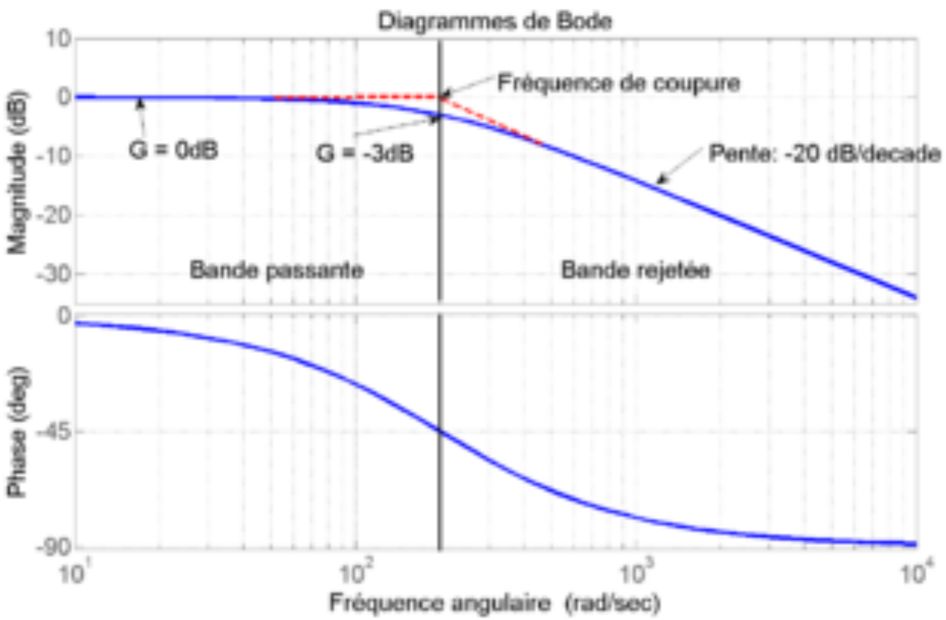
- Filtre passe bas
- Filtre passe haut
- Filtre passe bande
- Filtre réjecteur

On montre que l'on peut, par des transformations mathématiques, passer d'un type de filtre aux autres. Aussi la plupart du temps on ne présente que les filtres passe-bas.

Passe bas du premier ordre



$$RC\frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$$

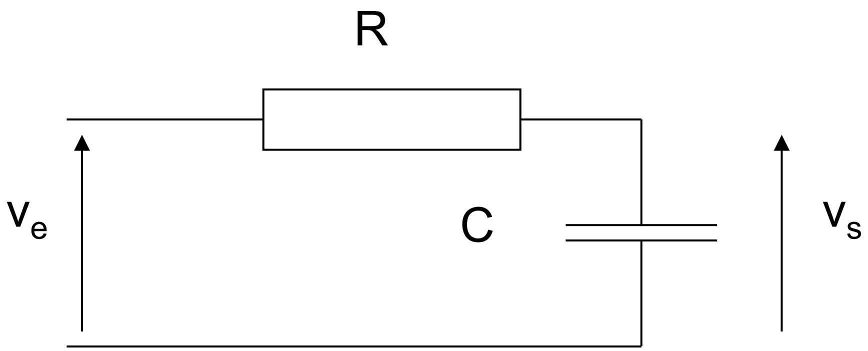


$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = RC$$

Passe bas du premier ordre



AVANTAGES :
Simplicité
Que des éléments passifs

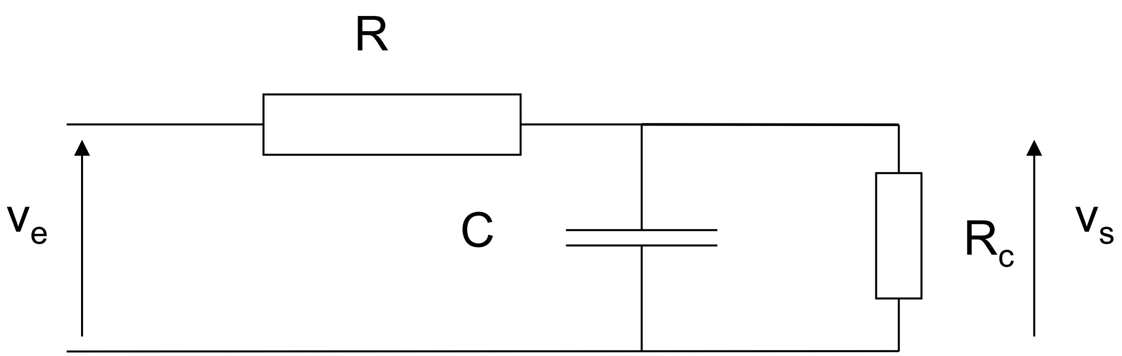
INCONVENIENTS:
La fonction de transfert dépend de la charge

$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = RC$$

Passe bas du premier ordre

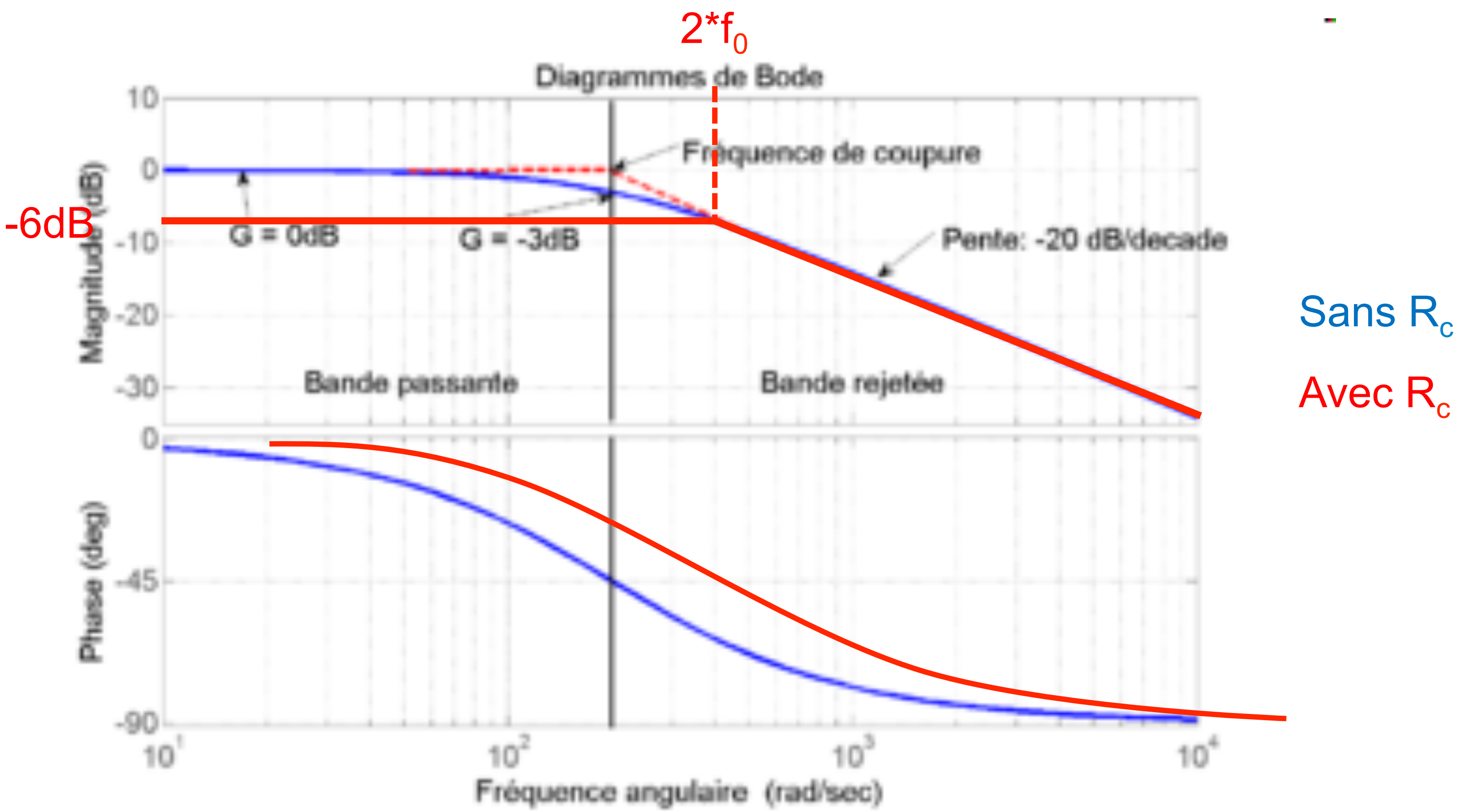


$$H_c(j\omega) = \frac{Z}{Z+R} \qquad avec\, Z = \frac{R_c}{1 + R_c \times jC\omega}$$

$$H_c(j\omega) = \frac{R_c}{R_c + R + R_c \times R \times jC\omega}$$

$$\boxed{H_c(j\omega) = \frac{R_c}{R_c + R} \times \frac{1}{1 + \frac{R \times R_c}{R + R_c} \times jC\omega}}$$

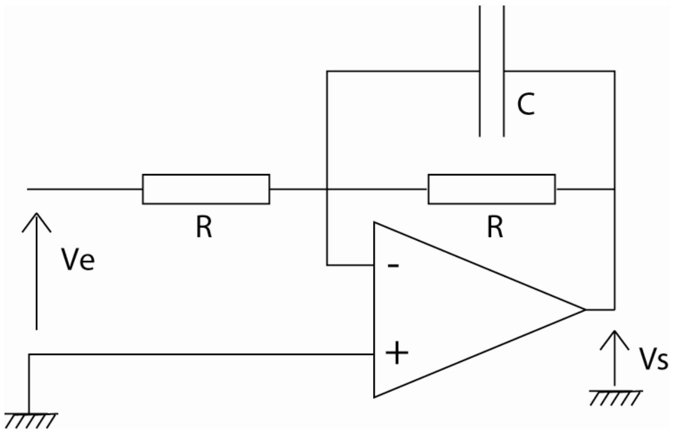
Passe bas du premier ordre



Filtres actifs

Le filtre précédent est un filtre passif (composé d'éléments passifs). Son principal inconvénient est que sa fonction de transfert dépend de la charge branchée à sa sortie. C'est pourquoi on lui préférera en général un filtre actif.

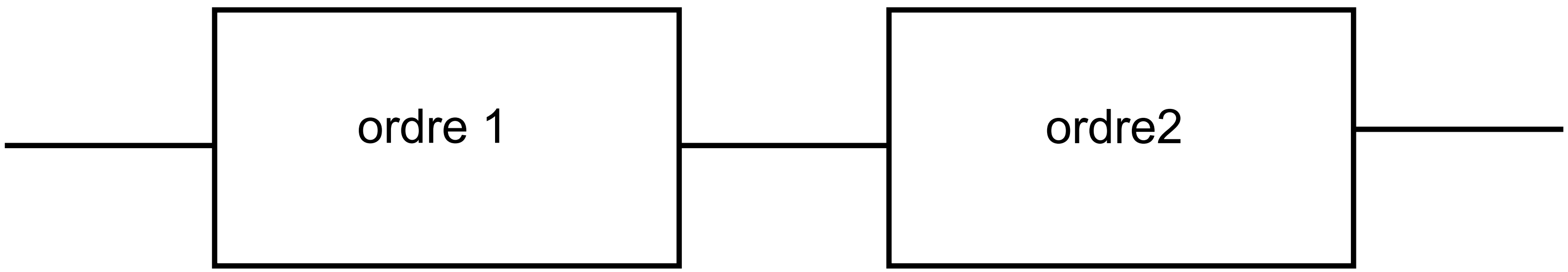
Un filtre actif contient systématiquement au moins un élément actif (amplificateur opérationnel). Le schéma ci-dessous est un filtre actif du premier ordre



$$H(p) = \frac{-1}{1 + RCp}$$

Filtres actifs ordre élevé

On montre que l'on peut décomposer tout filtre d'ordre supérieur à 2 en filtres élémentaires d'ordre 1 et 2. Par exemple un ordre 3 se construit en associant un ordre 1 à un ordre 2



C'est pourquoi dans ce cours on ne parlera que de ces deux ordres

Filtre passe bas d'ordre 2

$$H(p) = \frac{A_0}{1 + \frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$H(j\omega) = \frac{A_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$H(s) = \frac{A_0}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1}$$

A_0 : gain dans la bande passante

ω_0 = 2p f_0 : pulsation caractéristique

Q : coefficient de surtension

Écriture réduite en posant s = p/ω_0

Filtre passe bas d'ordre 2

Pour $A_0 = 1$

$\omega = \omega_0$

$|H(j\omega_0)| = Q$

$$\boxed{H_{dB} = 20\log(Q)}$$

$\omega \ll \omega_0$

$|H(j\omega_0)| = 1$

$$\boxed{H_{dB} = 0}$$

$\omega \gg \omega_0$

$$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\boxed{H_{dB} = -40\log(\omega) + 40\log(\omega_0)}$$

Filtre passe bas d'ordre 2

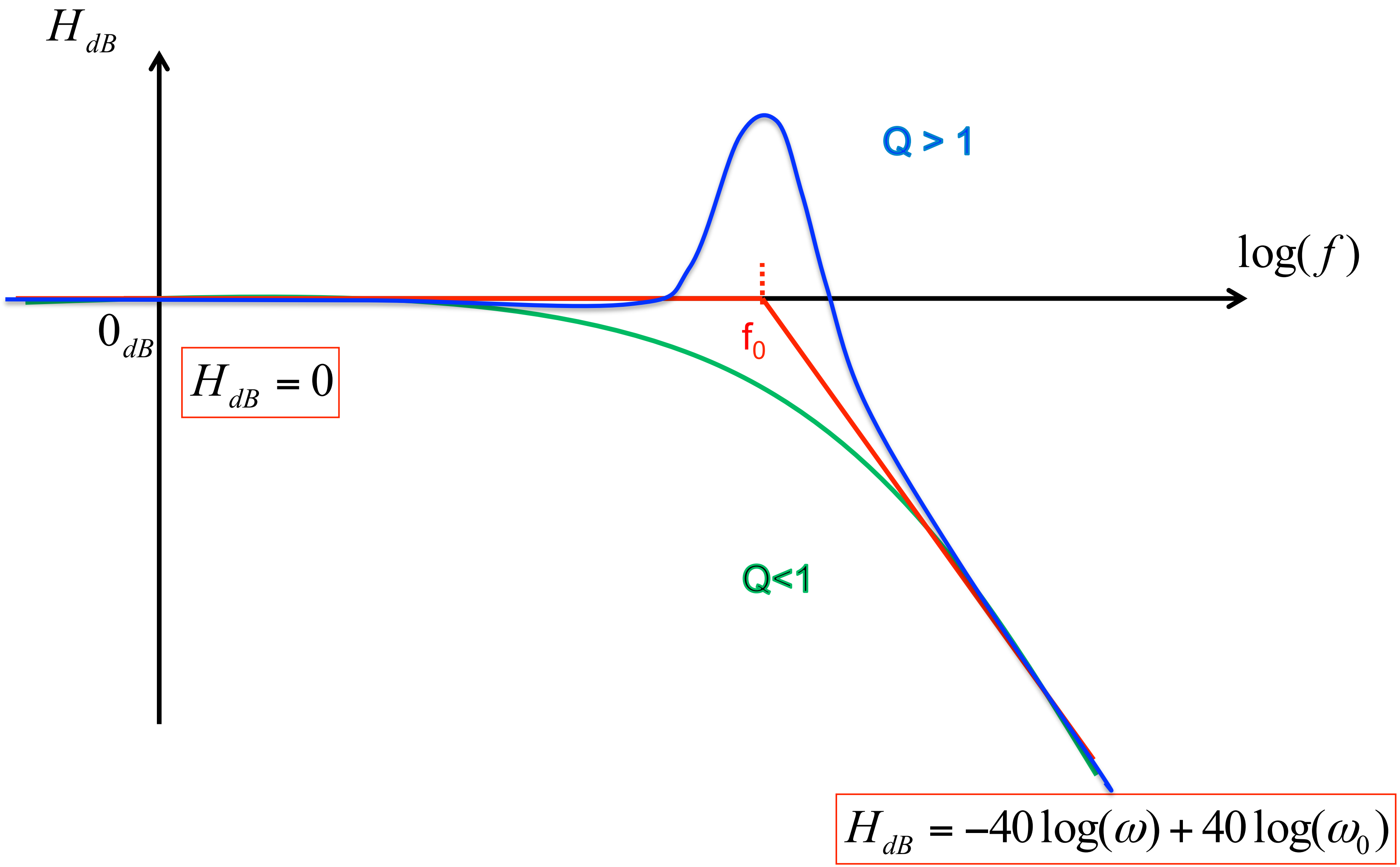
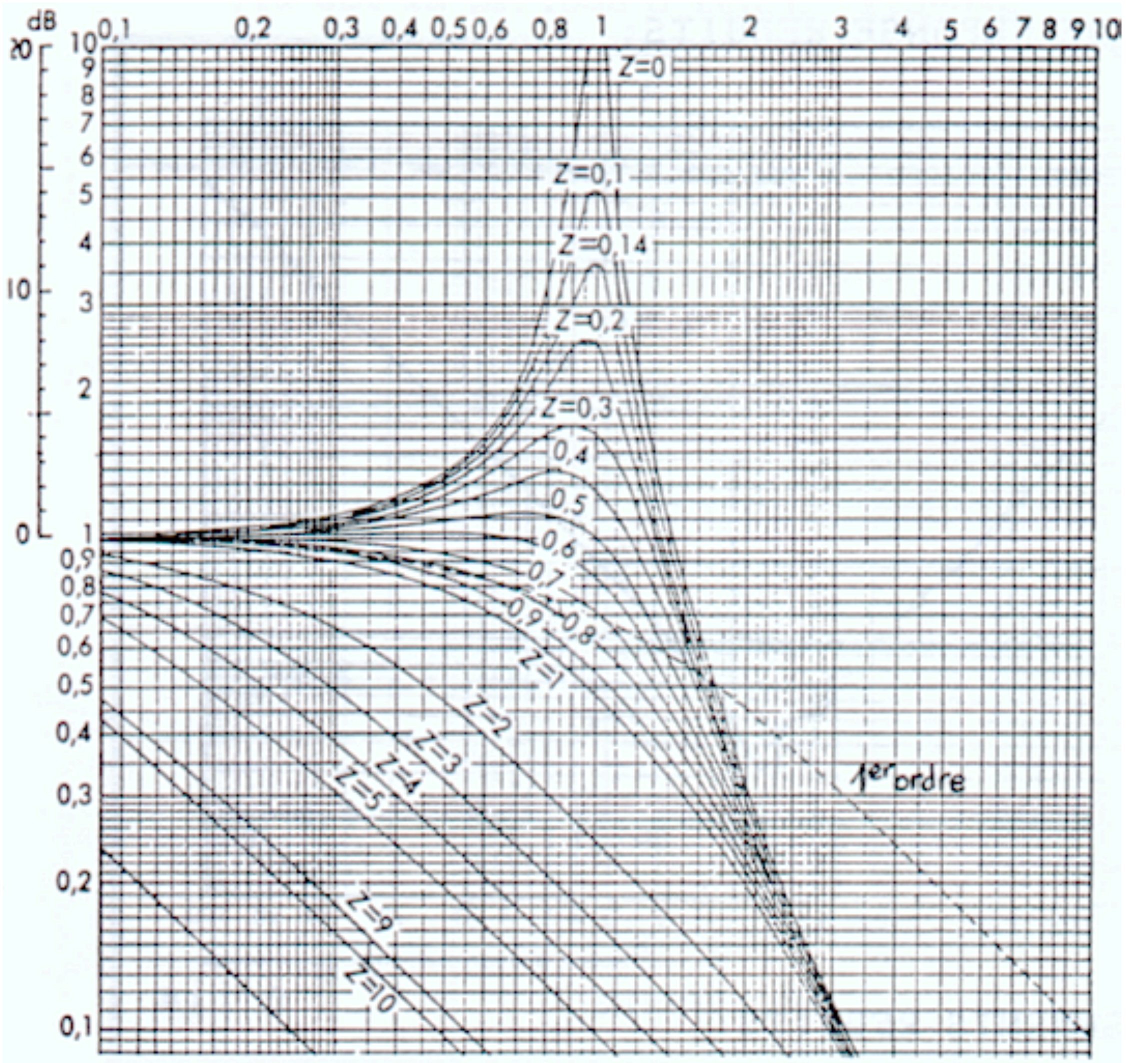


Diagramme de Bode (module)

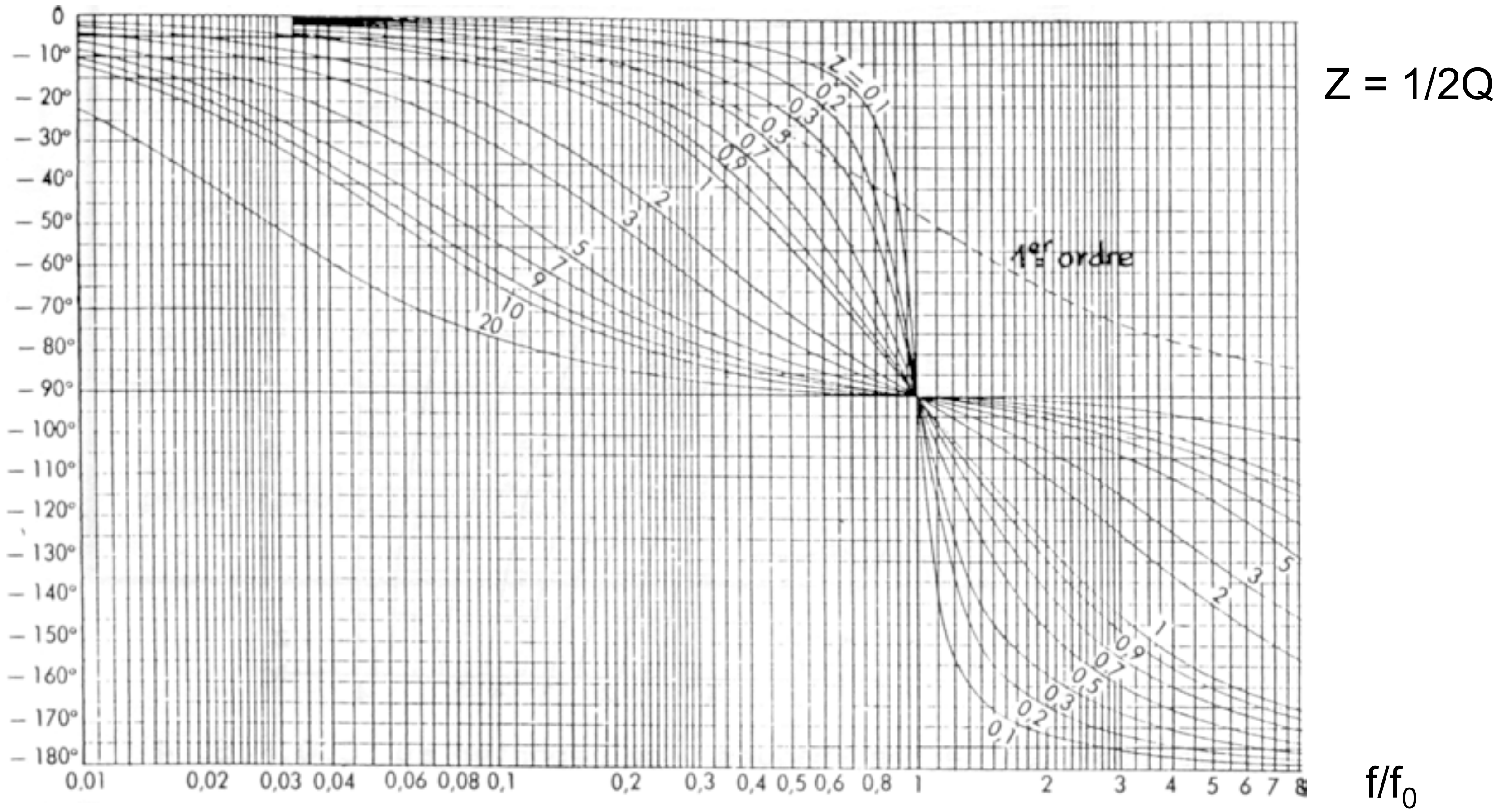


f/f_0

Z = 1/2Q

A_0 =1

Diagramme de Bode (phase)



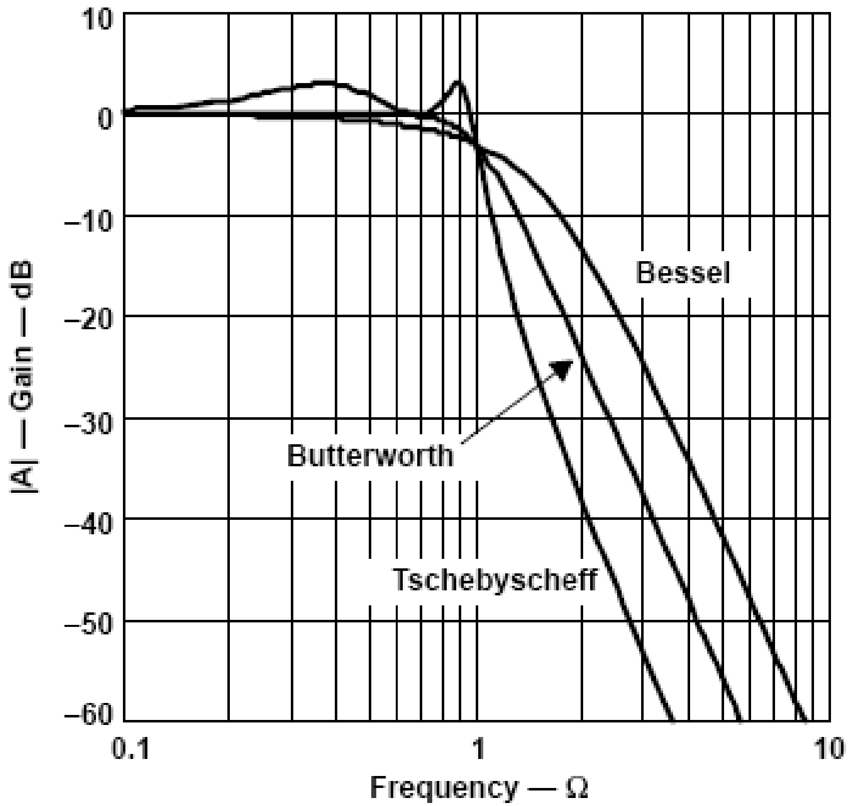
Maintenant que l'on connait les fonctions de transfert des filtres de base le 1^{er} ordre et le $2^{ème}$ ordre , on va présenter les principales familles de filtre

Familles de filtre

Ces familles correspondent à des écritures particulières de la fonction de transfert.
Les principales familles sont les suivantes :

- •Fonctions de Bessel
- •Fonctions de Butterworth
- •Fonctions de Chebychev

Chaque famille a ses avantages



Courbes de réponses comparées
Pour un passe bas d’ordre 4

Bessel

$$\boxed{\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{F_n(j\frac{\omega}{\omega_0})}}$$

Les fonctions Fn sont des polynômes de Bessel définis par récurrence

$$F_0(j\frac{\omega}{\omega_0}) = 1, F_1(j\frac{\omega}{\omega_0}) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}, \ldots\ldots\ldots$$

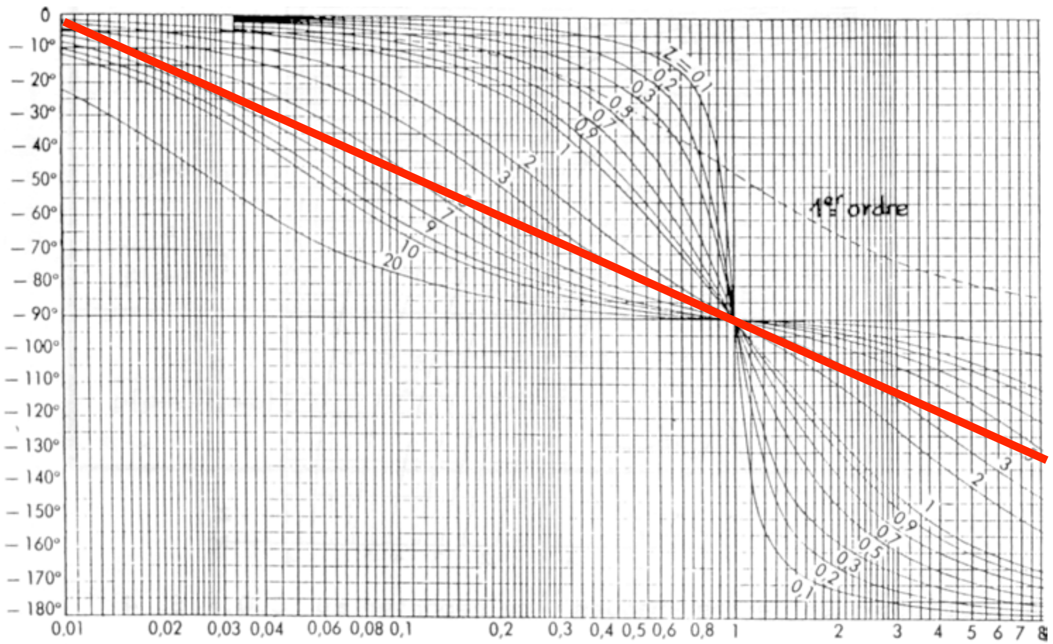
$$F_n(j\frac{\omega}{\omega_0}) = (2n-1) \times F_{n-1}(j\frac{\omega}{\omega_0}) - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \times F_{n-2}(j\frac{\omega}{\omega_0})$$

Bessel

Ces filtres sont ceux qui optimisent la régularité du retard de groupe.
Pour cette raison ils sont aussi appelés filtres à phase linéaire

$$\boxed{\varphi \approx -\tau_g \omega}$$

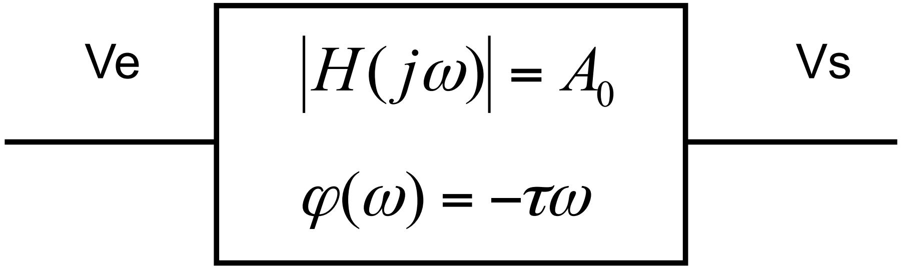
$$\tau_g = \left| \frac{\varphi}{\omega} \right|$$



Si les composantes du signal sont toutes dans la bande passante du filtre,
on le retrouvera simplement retardées à la sortie du filtre.

Bessel

Exemple : $v_e(t)$ = A1 $\cos(\omega_1 t)$+A2 $\cos(\omega_2 t)$+A3 $\cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_0 >> \omega_{1,2,3}$



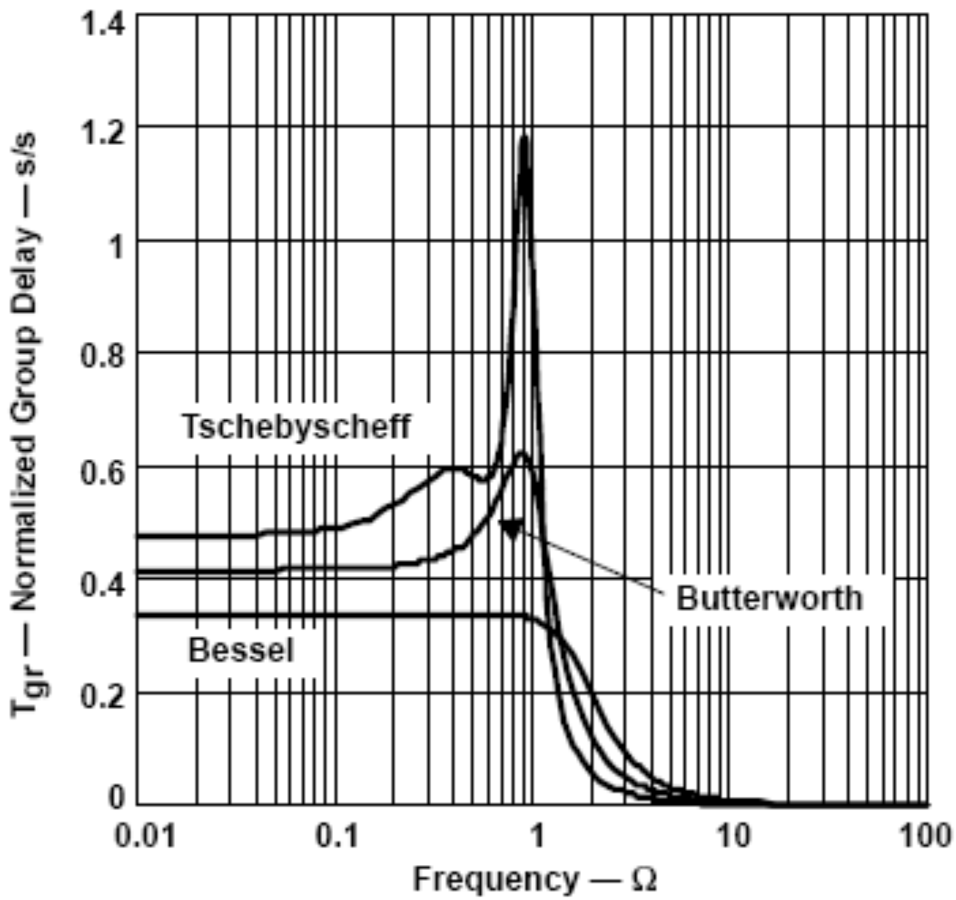
$v_s(t) = A_0$ [A1 $\cos(\omega_1 t+\phi_1)$)+A2 $\cos(\omega_2 t+\phi_2)$+A3 $\cos(\omega_3 t+\phi_3)$]

$v_s(t) = A_0$ [A1 $\cos(\omega_1 t-\tau\omega_1)$)+A2 $\cos(\omega_2 t-\tau\omega_2)$+A3 $\cos(\omega_3 t-\tau\omega_3)$]

$v_s(t) = A_0$ [A1 $\cos(\omega_1$ $(t-\tau)$)+A2 $\cos(\omega_2$ $(t-\tau)$)+A3 $\cos(\omega_3$ $(t-\tau)$)]

$v_s(t) = A_0\, v_e(t-\tau)$

Bessel



Retard de groupe pour les différentes familles de filtres

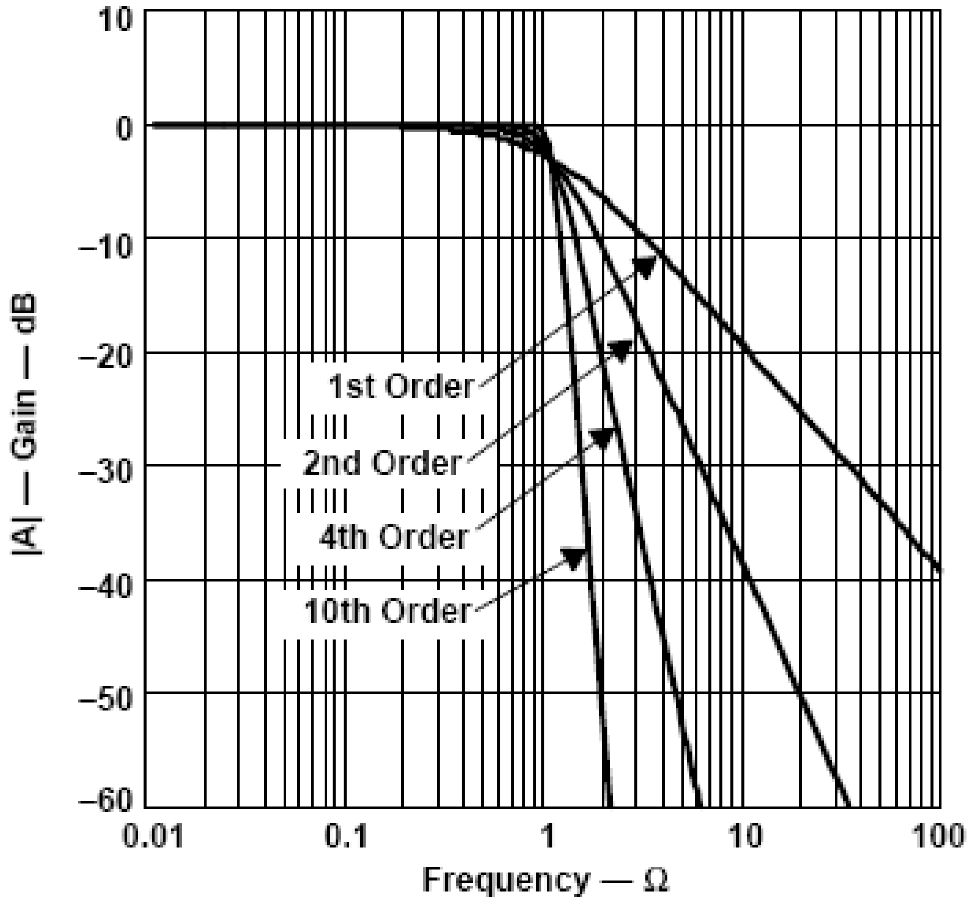
Butterworth

Les filtres de Butterworth présentent le gain le plus constant dans la bande passante.
Le module est toujours décrit par la fonction ci-dessous :

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{(1+(\frac{\omega}{\omega_0})^{2n})}}$$

Où n est l'ordre du filtre. Il en découle que la fréquence caractéristique f_0 est aussi dans ce cas la fréquence de coupure à -3dB

Butterworth



Chebychev

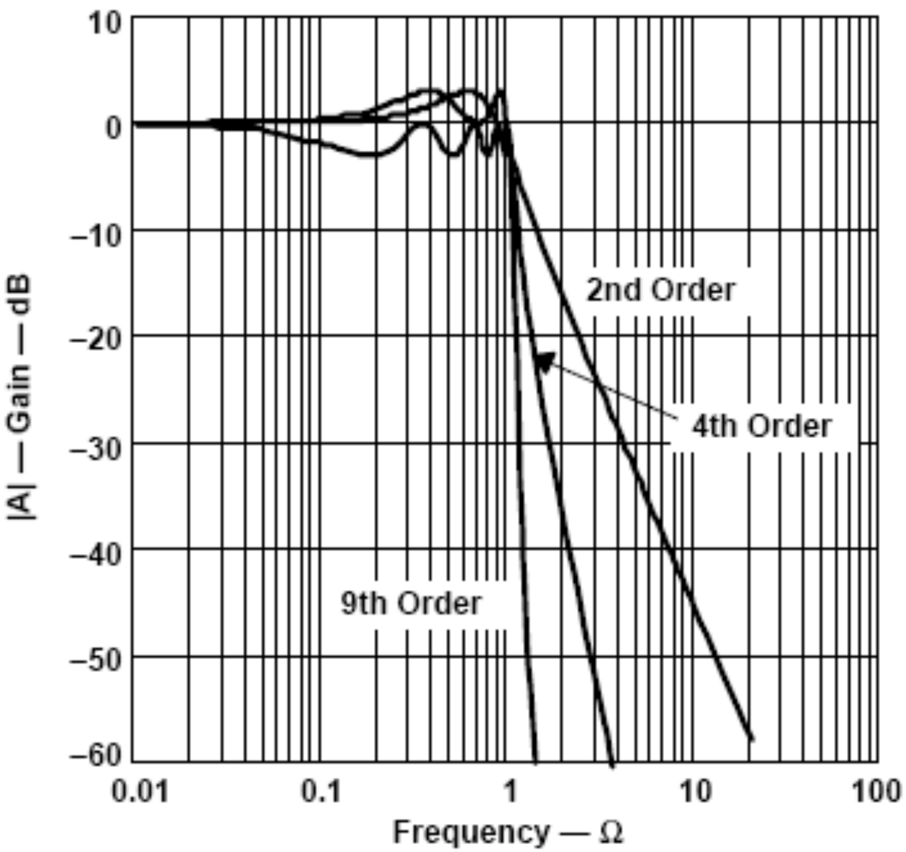
$$\boxed{\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 \times C_n^2(\frac{\omega}{\omega_0}))}}}$$

$$où : C_0(\frac{\omega}{\omega_0}) = 1, C_1(\frac{\omega}{\omega_0}) = \frac{\omega}{\omega_0}, ...C_n(\frac{\omega}{\omega_0}) = 2 \times C_{n-1}(\frac{\omega}{\omega_0}) - C_{n-2}(\frac{\omega}{\omega_0})$$

sont les polynômes de Chebychev

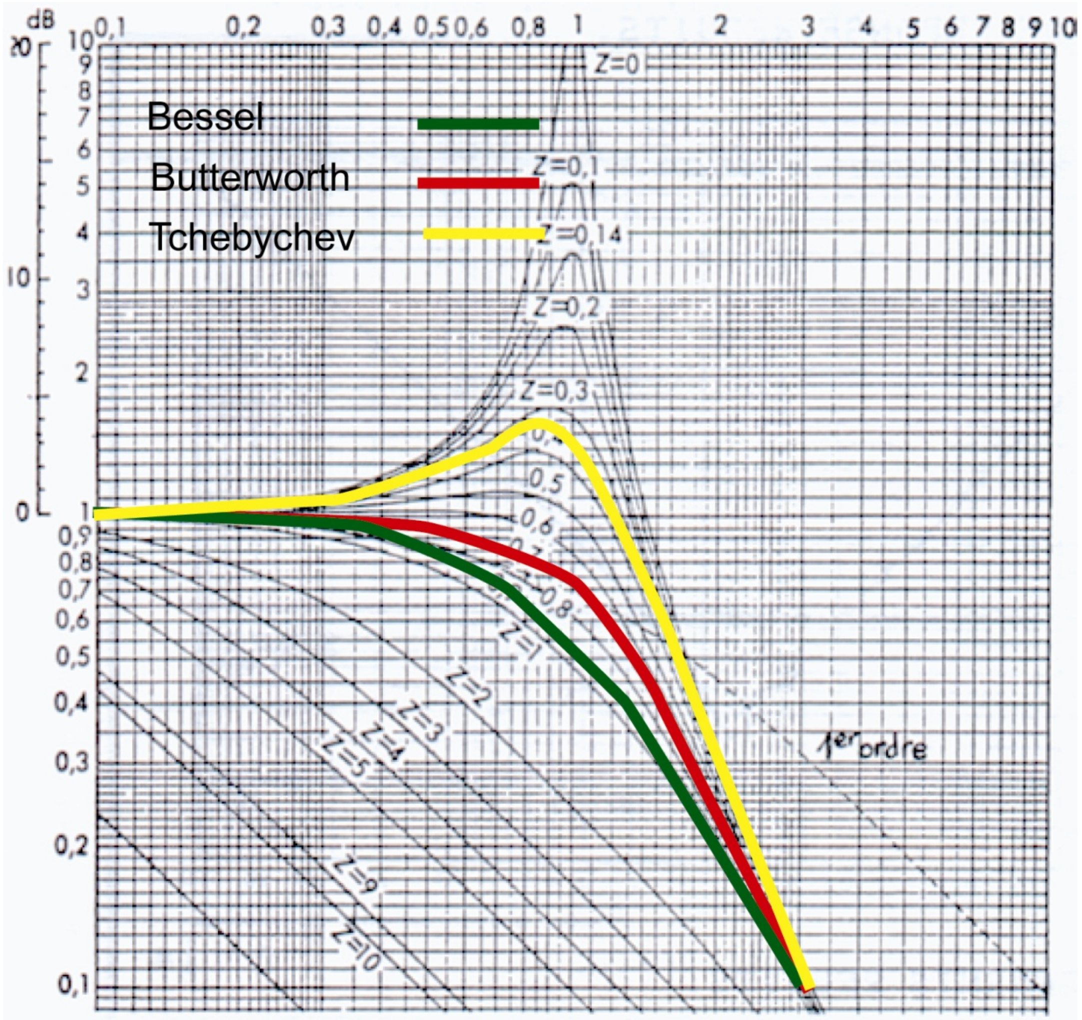
Chebychev

Contrairement à la famille Butterworth, les filtres de la famille Chebychev présentent de l’ondulation dans la bande passante. Ceci permet d’obtenir un passage plus rapide entre la bande passante et la bande d’arrêt.

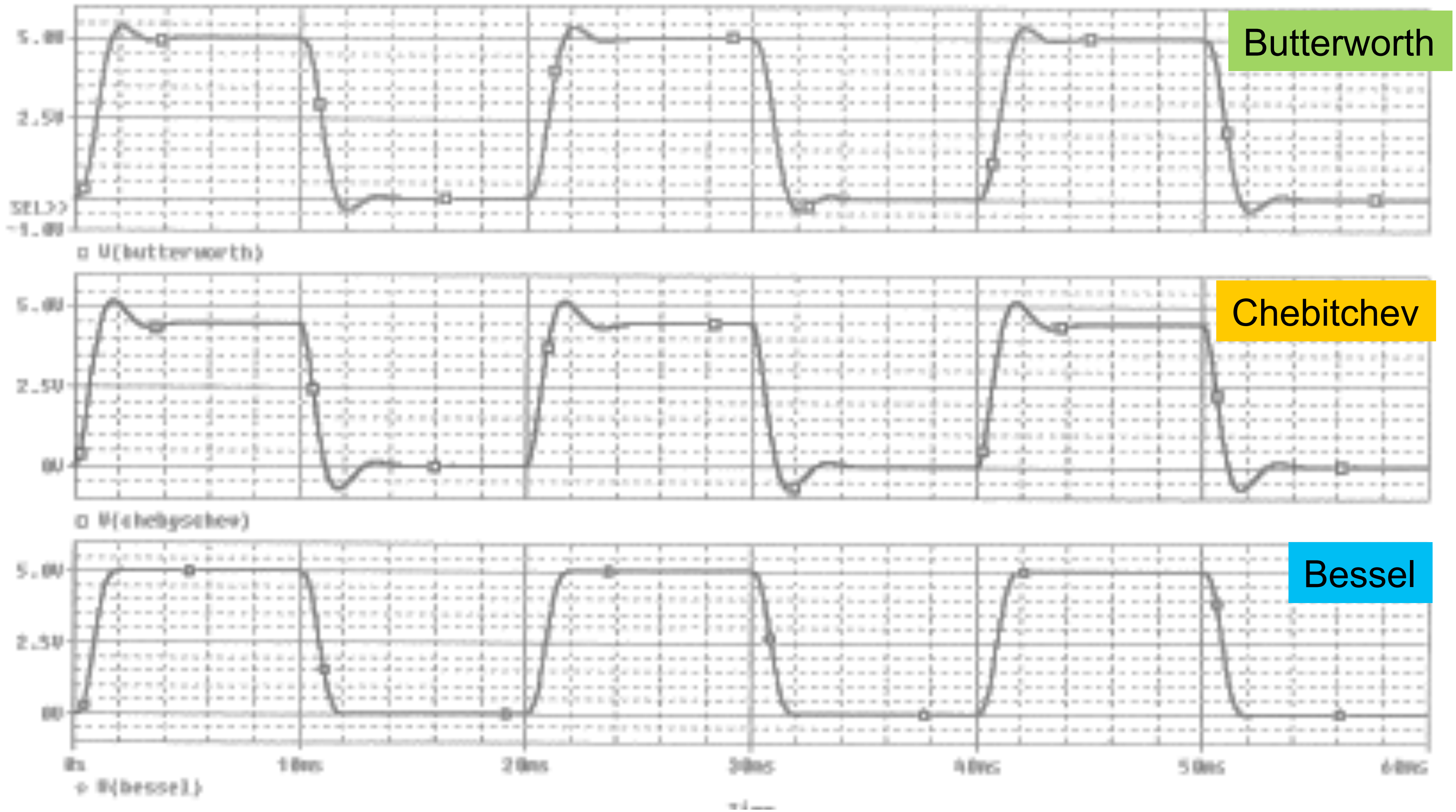


Application au passe bas d'ordre 2

a) Q=1.128 Chebyschev (ripple band = 2dB)
b) Q=0.707 Butterworth
c) Q=0.577 Bessel

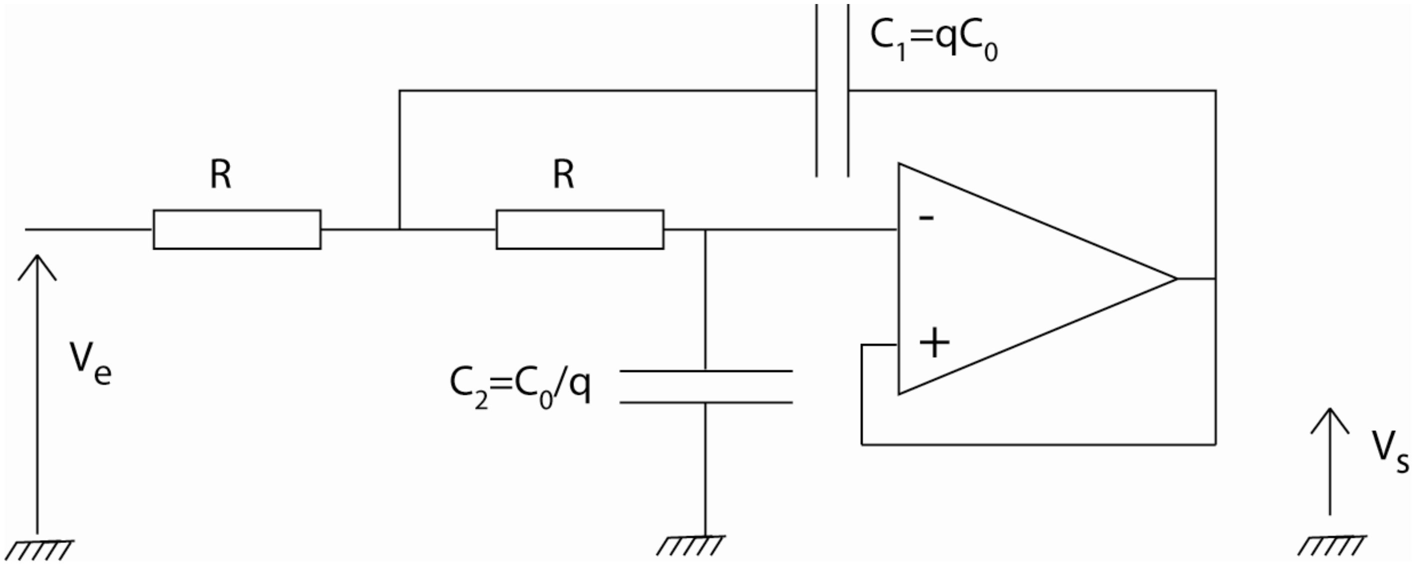


Réponse à un signal TTL



Exemple de réalisation

Il y a plusieurs circuits permettant de réaliser un filtre donné. Une des solutions est l'utilisation de cellules de Sallen-Key. Ici pour un passe-bas du 2ème ordre



$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{RC_0} \\ Q = \dfrac{q}{2} \end{cases}$$

Autres types

Comment passer du passe bas au passe-haut ?

Écriture réduite en posant s = p/ω_0

En effectuant le changement de variable s→(1/s)

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1} \rightarrow H(s) = \frac{1}{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{Q}\frac{1}{s} + 1} = \frac{s^2}{1 + \frac{1}{Q}s + s^2}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Passe-haut 2ème ordre

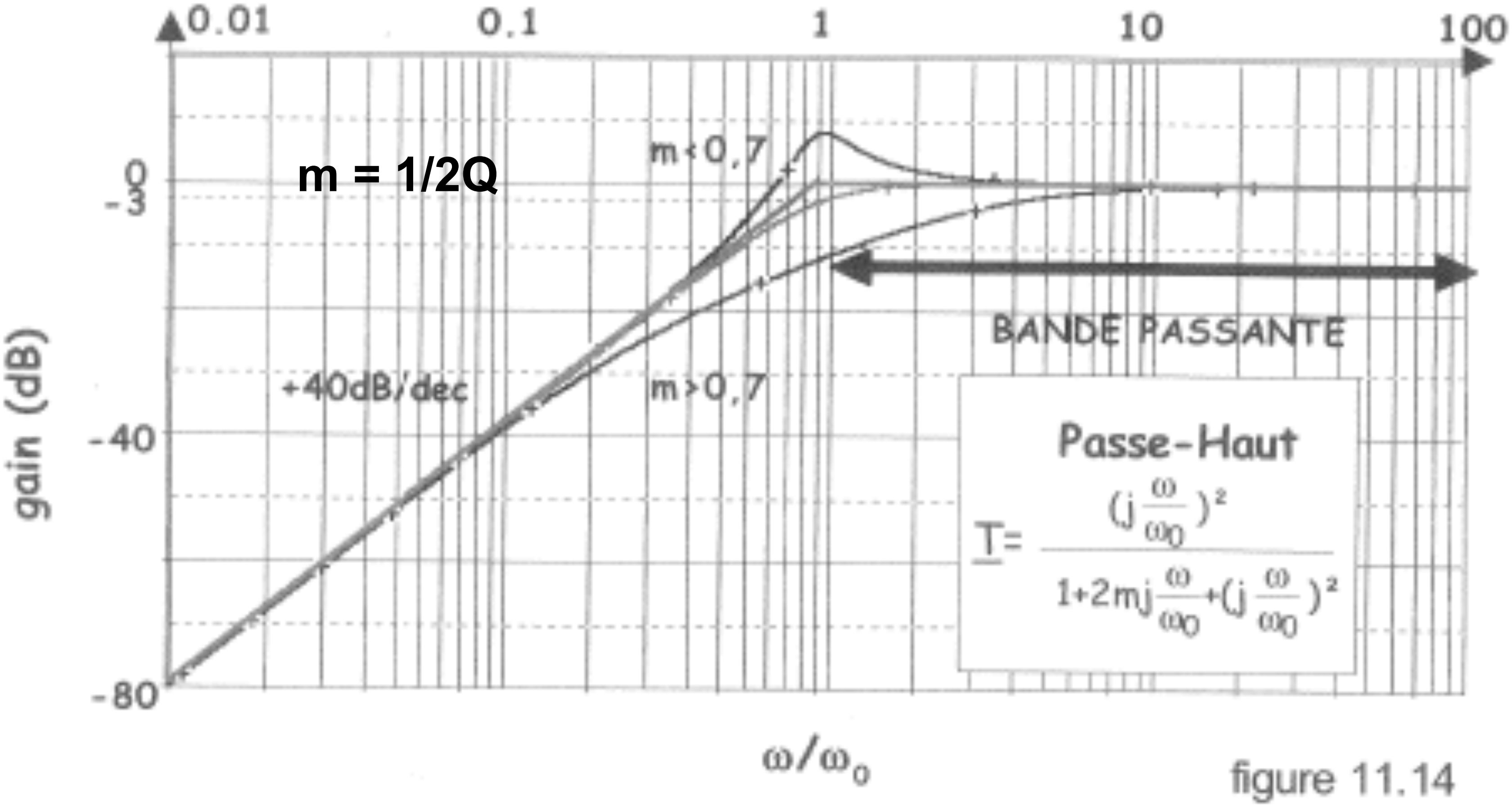
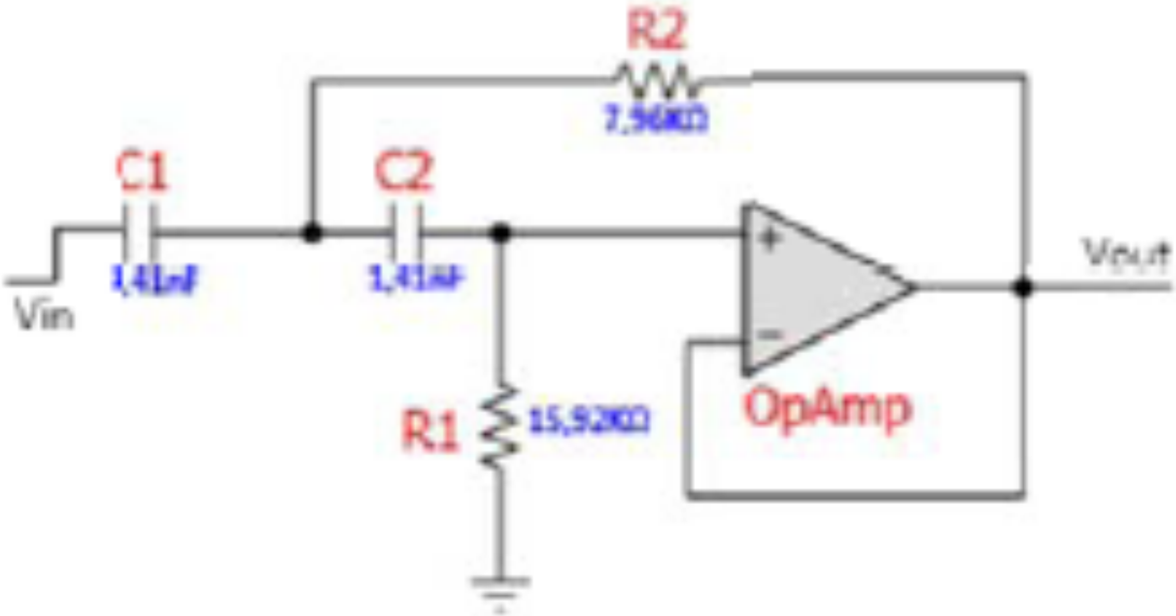


figure 11.14

Cellule Sallen-Key



Autres types

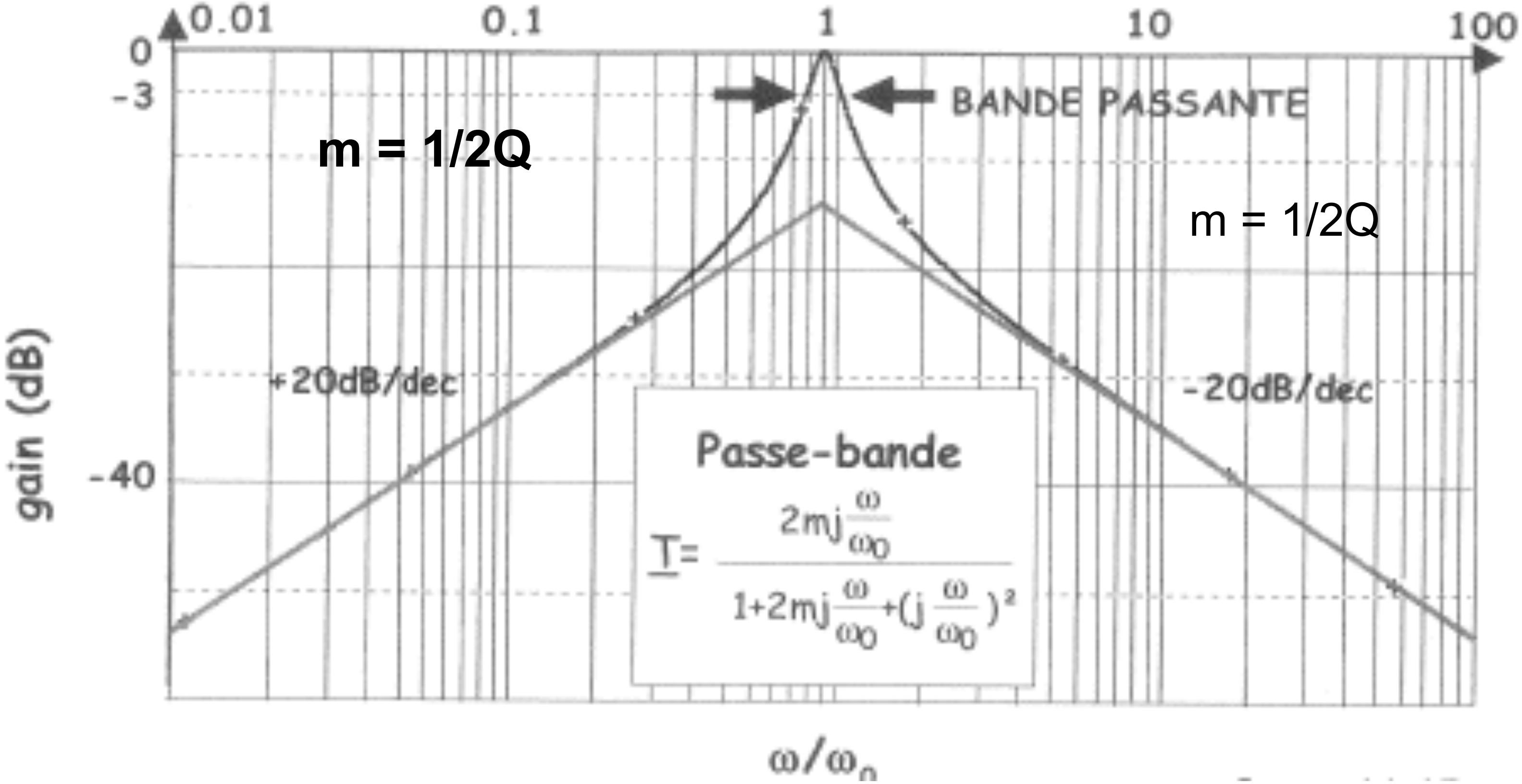
Comment passer du passe bas au passe-bande ?

Écriture réduite en posant $s = p/\omega_0$

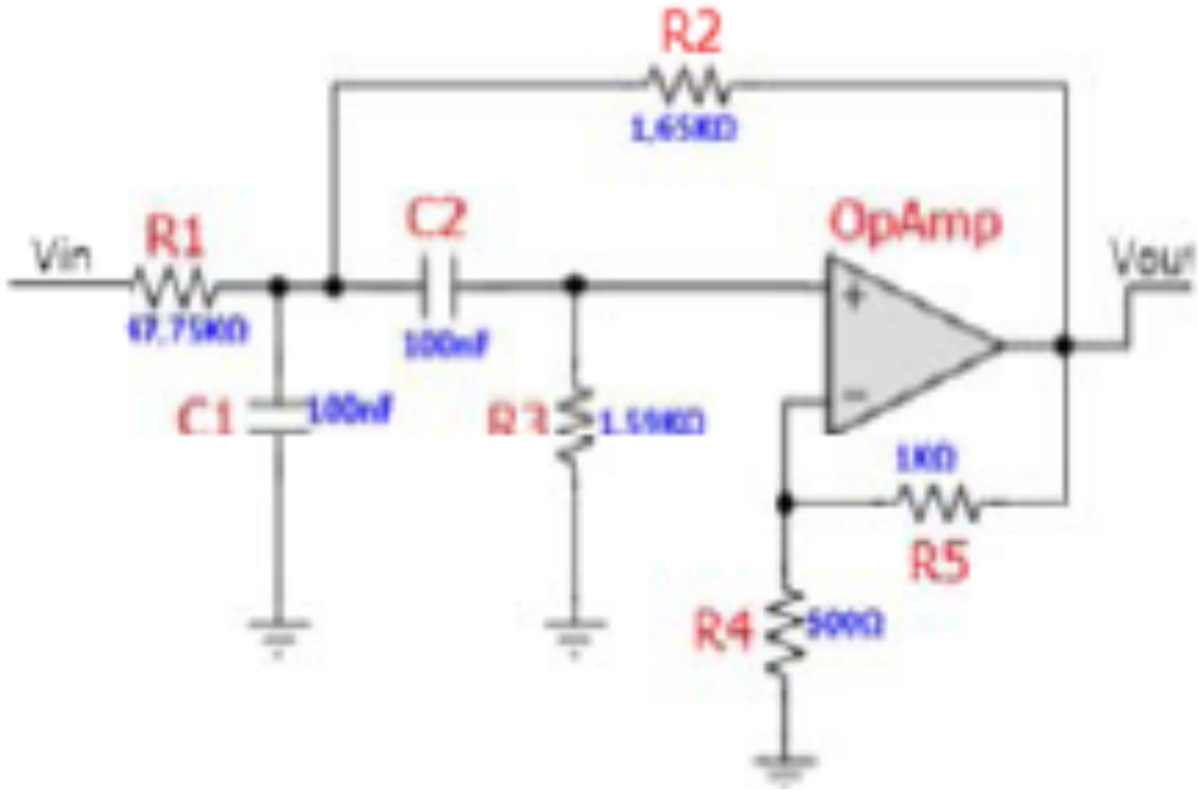
En effectuant le changement de variable $s \rightarrow Q(s+(1/s))$

$$\boxed{H(p) = \frac{\frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0}}{1+\frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Passe-bande 2ème ordre



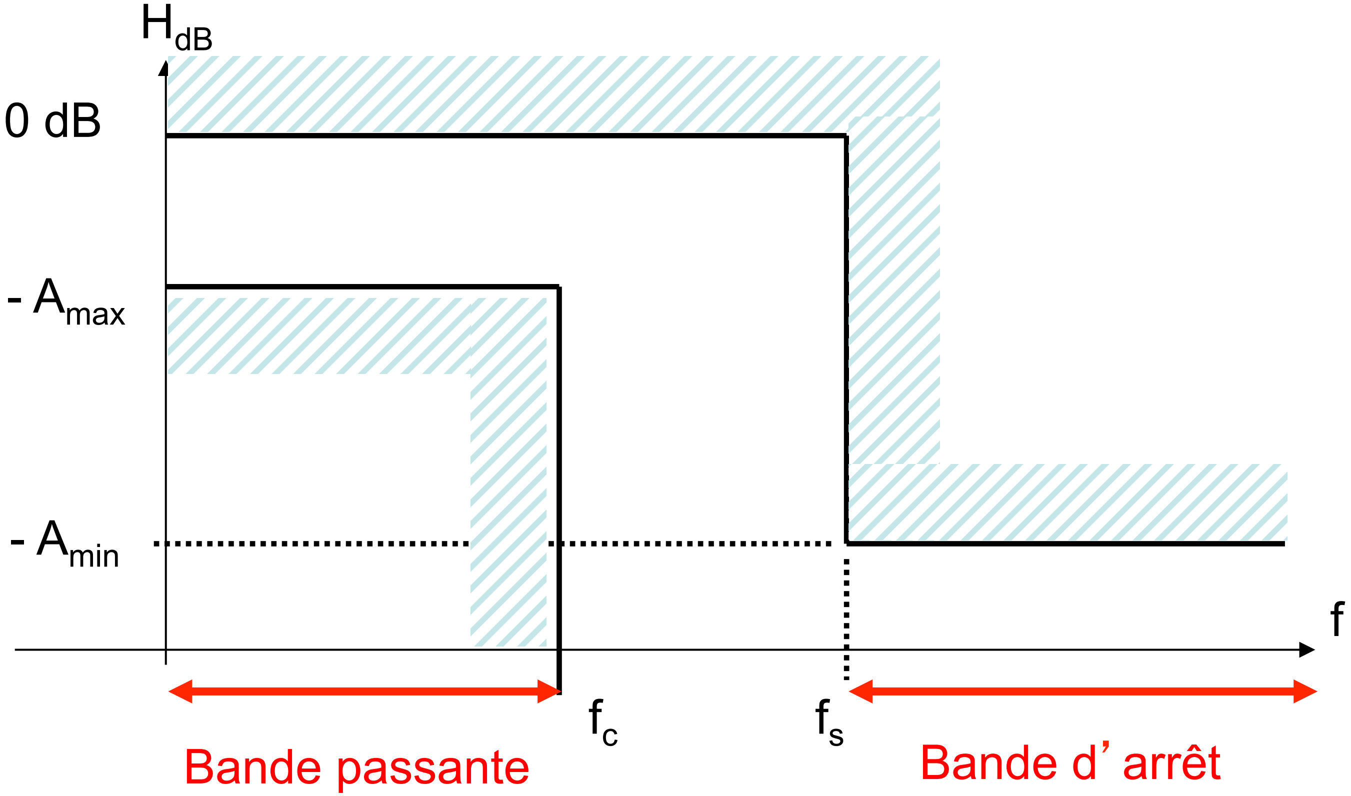
Passe-bande 2ème ordre



Synthèse de filtres

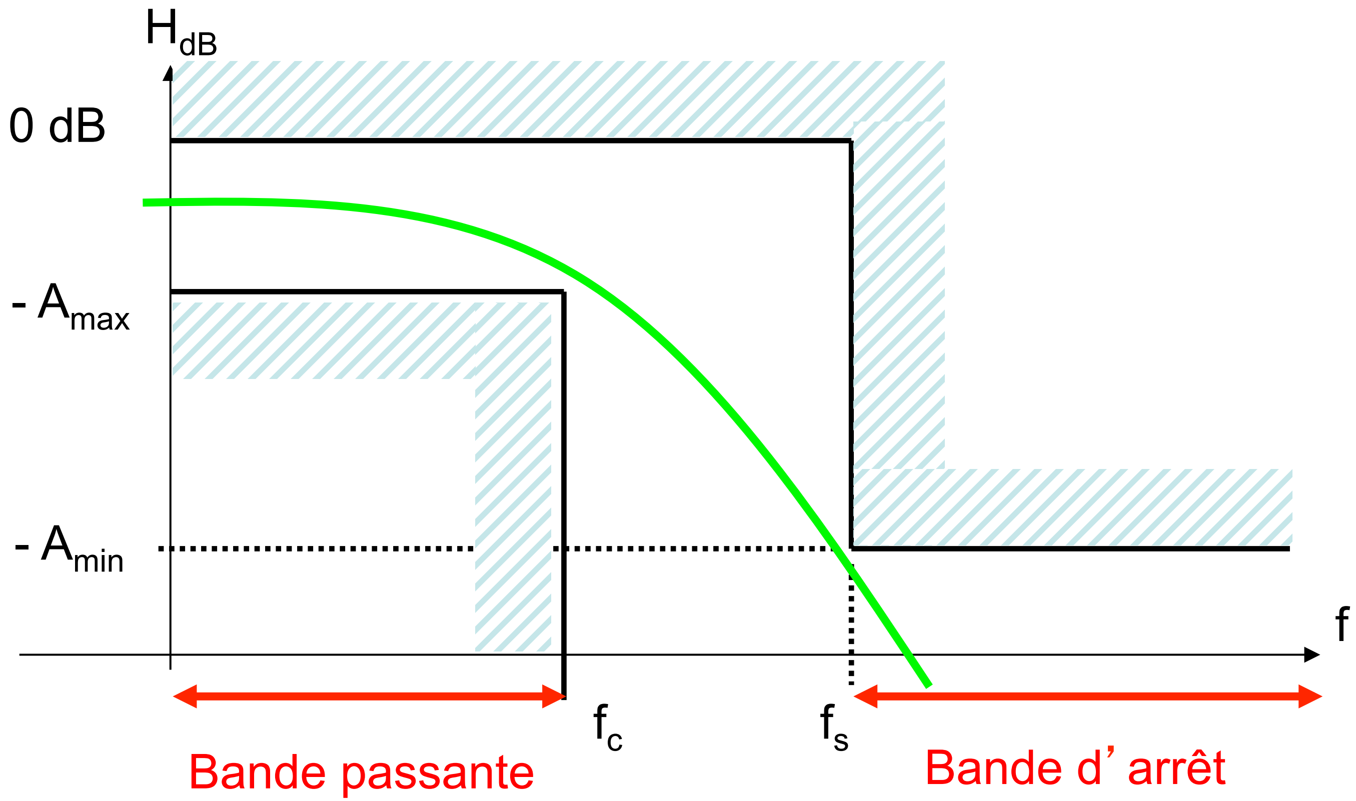
Lorsque l'on a à choisir un filtre, on commence par définir le gabarit de ce filtre.

f_c : fréquence de coupure
f_s : fréquence d'arrêt
A_{max} : atténuation max dans la bande passante
A_{min} : atténuation min dans la bande d'arrêt



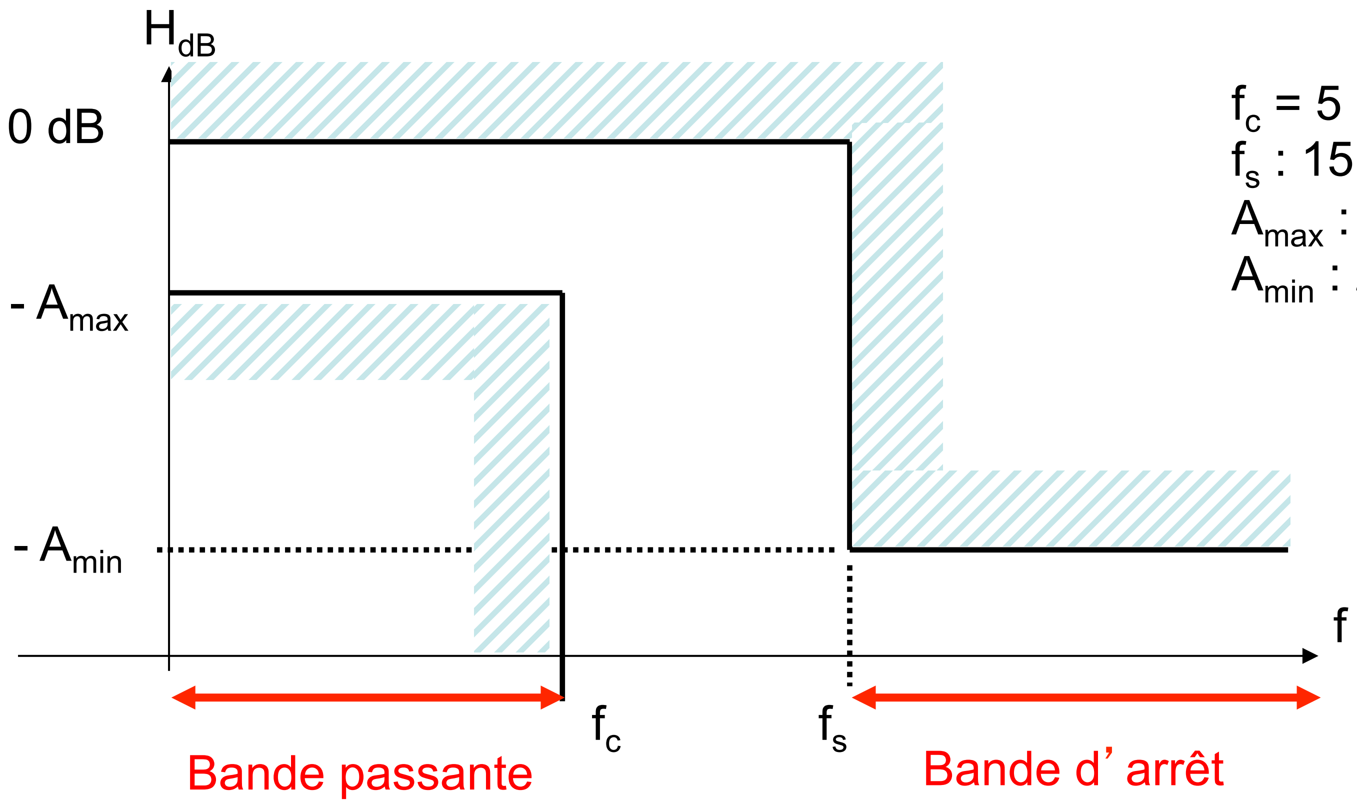
Synthèse de filtres

L’objectif est alors de trouver la fonction de transfert qui passe dans le gabarit



Exemple de synthèse

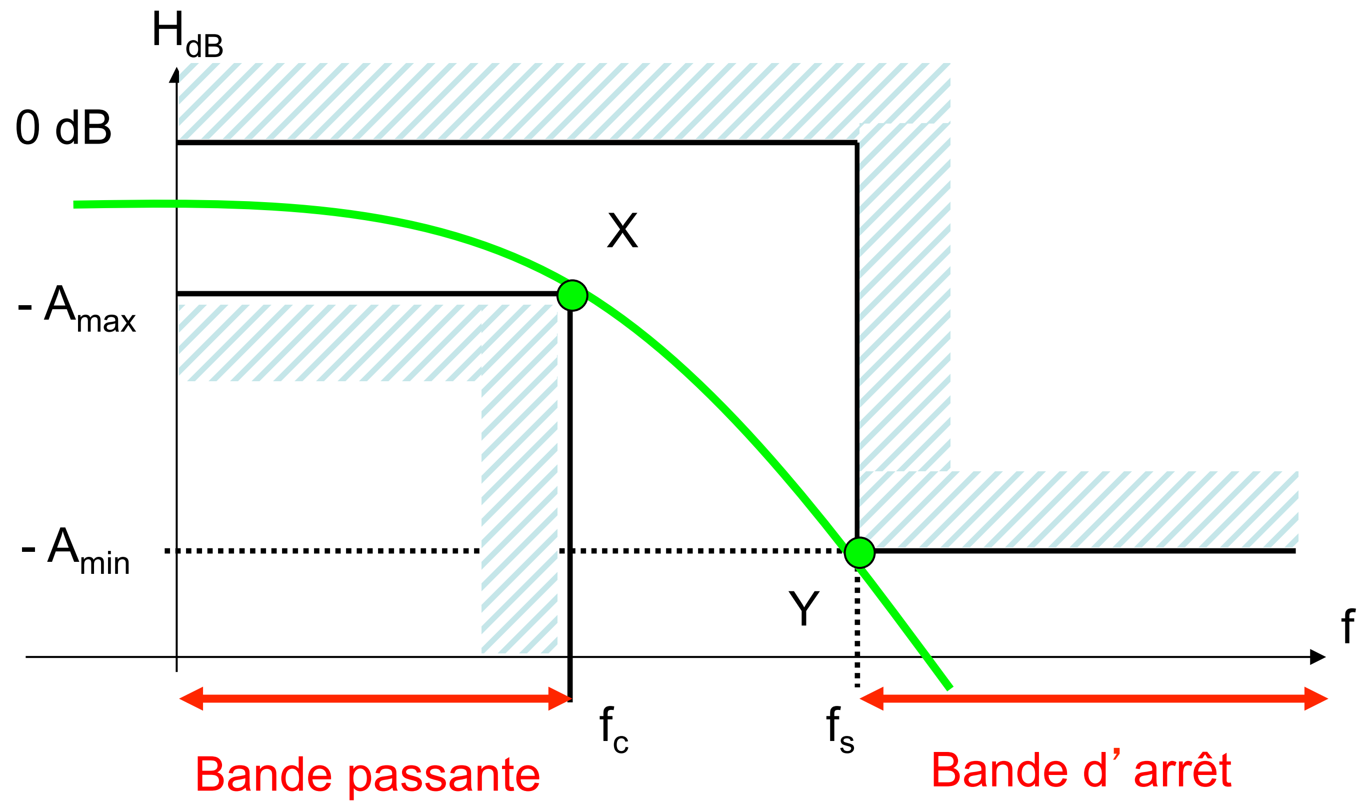
Supposons que l’on souhaite réaliser un filtre passe bas de type Butterworth, correspondant au gabarit ci-dessous.



f_c = 5 kHz
f_s : 15 kHz
A_{max} : 3 dB
A_{min} : 25 dB

Exemple de synthèse

Pour obtenir n , l'ordre du filtre et f_0, on écrit que la focntion de transfert doit au pire passer par les deux points X et Y



Exemple de synthèse

On a choisi un type Butterworth, donc :

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{(1+(\frac{\omega}{\omega_0})^{2n})}}$$

En X on a :

$$\boxed{\left|H(f_c)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f_c^{2n}}{f_0^{2n}}}} = 10^{\frac{-A_{max}}{20}} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

En Y on a :

$$\boxed{\left|H(f_s)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f_s^{2n}}{f_0^{2n}}}} = 10^{-\frac{A_{min}}{20}}}$$

Exemple de synthèse

Ce qui permet d'obtenir n et f_0

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}\right]}{2 \times \log\left[\dfrac{fc}{f_s}\right]}$$

Rq : il existe aussi des abaques,

Et bien sûr des programmes téléchargeables sur internet.

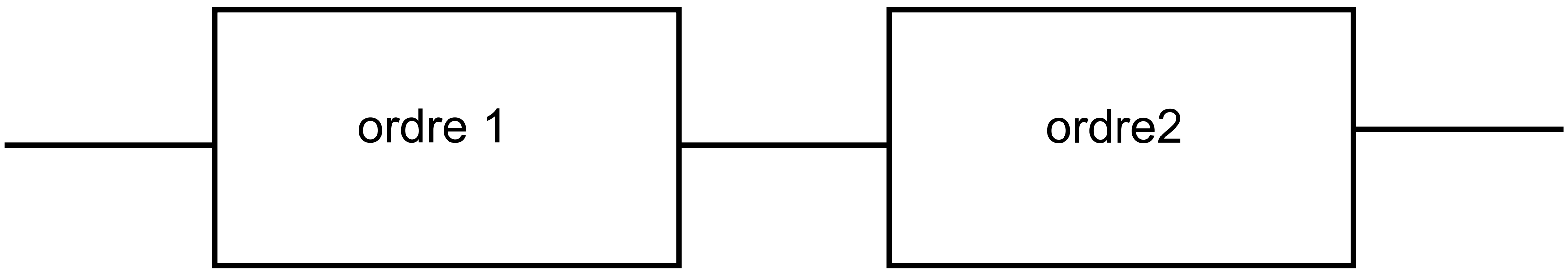
$$f_0 = \frac{f_c}{\left[10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1\right]^{\frac{1}{2n}}}$$

f_c = 5 kHz
f_s : 15 kHz
A_{max} : 3 dB
A_{min} : 25 dB

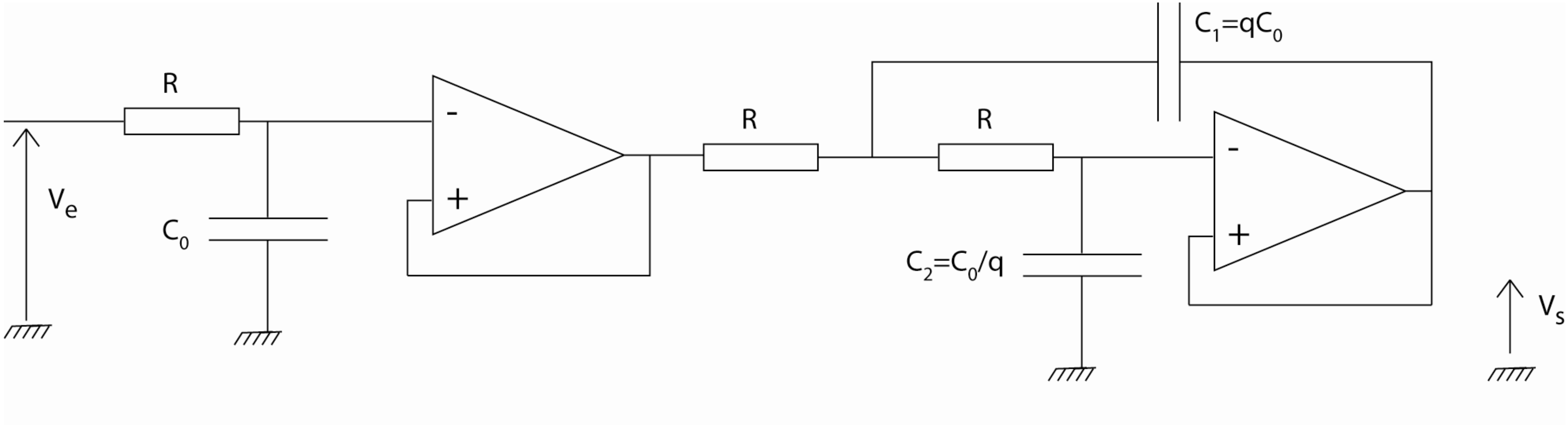
Exemple de synthèse

Avec les valeurs numériques données , on trouve : n = 2,62 et f_0 = 5kHz

On choisira donc un ordre 3



Exemple de synthèse



Q=1 ⇒ q = 2 et $(f_{-3dB}/f_0) = 1$ ⇒ f_0 = 5 kHz

R = 1,59kΩ
f_0 = 5 kHz ⇒ $$C_0 = \frac{1}{2\pi R f_0} = 20nF$$ ⇒ C_1 = 40 nF et C_2 = 10 nF

Exemple de synthèse

Il existe des programmes téléchargeables gratuitement sur internet.
On va en voir un réalisé par Texas Instrument : Filter Pro que vous utiliserez en TD et en TP

Exemple de synthèse

On va lire dans le tableau les valeurs des coefficients de chacun des ordres

NUMBER OF POLES	BUTTERWORTH		BESSEL		CHEBYSCHEV 0.5dB RIPPLE		CHEBYSCHEV 2dB RIPPLE	
	fn(1)	Q	fn(1)	Q	fn(2)	Q	fn(2)	Q
2	1.0	0.70711	1.2742	0.57735	1.23134	0.86372	0.907227	1.1286
3	1.0	----	1.32475	----	0.626456	----	0.368911	----
	1.0	1.0	1.44993	0.69104	1.068853	1.7062	0.941326	2.5516
4	1.0	0.54118	1.43241	0.52193	0.597002	0.70511	0.470711	0.9294
	1.0	1.3065	1.60594	0.80554	1.031270	2.9406	0.963678	4.59388
5	1.0	----	1.50470	----	0.362320	----	0.218308	----
	1.0	0.61805	1.55876	0.56354	0.690483	1.1778	0.627017	1.77509
	1.0	1.61812	1.75812	0.91652	1.017735	4.5450	0.97579	7.23228
6	1.0	0.51763	1.60653	0.51032	0.396229	0.68364	0.31611	0.9016
	1.0	0.70711	1.69186	0.61120	0.768121	1.8104	0.730027	2.84426
	1.0	1.93349	1.90782	1.0233	1.011446	6.5128	0.982828	10.4616
7	1.0	----	1.68713	----	0.256170	----	0.155410	----
	1.0	0.55497	1.71911	0.53235	0.503863	1.0916	0.460853	1.64642
	1.0	0.80192	1.82539	0.66083	0.822729	2.5755	0.797114	4.11507
	1.0	2.2472	2.05279	1.1263	1.008022	8.8418	0.987226	14.2802
8	1.0	0.50980	1.78143	0.50599	0.296736	0.67657	0.237699	0.89236
	1.0	0.60134	1.83514	0.55961	0.598874	1.6107	0.571925	2.5327
	1.0	0.89998	1.95645	0.71085	0.861007	3.4657	0.842486	5.58354
	1.0	2.5629	2.19237	1.2257	1.005984	11.5305	0.990142	18.6873

Premier ordre avec $f_0 = f_{-3dB}$

Deuxième ordre avec $f_0 = f_{-3dB}$ et $Q = 1$

NUMBER OF POLES	BUTTERWORTH		BESSEL		CHEBYSCHEV 0.5dB RIPPLE		CHEBYSCHEV 2dB RIPPLE	
	fn(1)	Q	fn(1)	Q	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	1.0	0.70711	1.2742	0.57735	1.23134	0.86372	0.907227	1.1286
3	1.0	----	1.32475	----	0.626456	----	0.368911	----
	1.0	1.0	1.44993	0.69104	1.068853	1.7062	0.941326	2.5516
4	1.0	0.54118	1.43241	0.52193	0.597002	0.70511	0.470711	0.9294
	1.0	1.3065	1.60594	0.80554	1.031270	2.9406	0.963678	4.59388
5	1.0	----	1.50470	----	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	1.0	0.61805	1.55876	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	1.0	1.61812	1.75812	0.91652	1.017735	4.5450	0.97579	7.23228
6	1.0	0.51763	1.60653	0.51032	0.396229	0.68364	0.31611	0.9016
	1.0	0.70711	1.69186	0.61120	0.768121	1.8104	0.730027	2.84426
	1.0	1.93349	1.90782	1.0233	1.011446	6.5128	0.982828	10.4616
7	1.0	----	1.68713	----	0.256170	----	0.155410	----
	1.0	0.55497	1.71911	0.53235	0.503863	1.0916	0.460853	1.64642
	1.0	0.80192	1.82539	0.66083	0.822729	2.5755	0.797114	4.11507
	1.0	2.2472	2.05279	1.1263	1.008022	8.8418	0.987226	14.2802
8	1.0	0.50980	1.78143	0.50599	0.296736	0.67657	0.237699	0.89236
	1.0	0.60134	1.83514	0.55961	0.598874	1.6107	0.571925	2.5327
	1.0	0.89998	1.95645	0.71085	0.861007	3.4657	0.842486	5.58354
	1.0	2.5629	2.19237	1.2257	1.005984	11.5305	0.990142	18.6873