

Représentation \mathcal{T} emps \mathcal{F} réquence

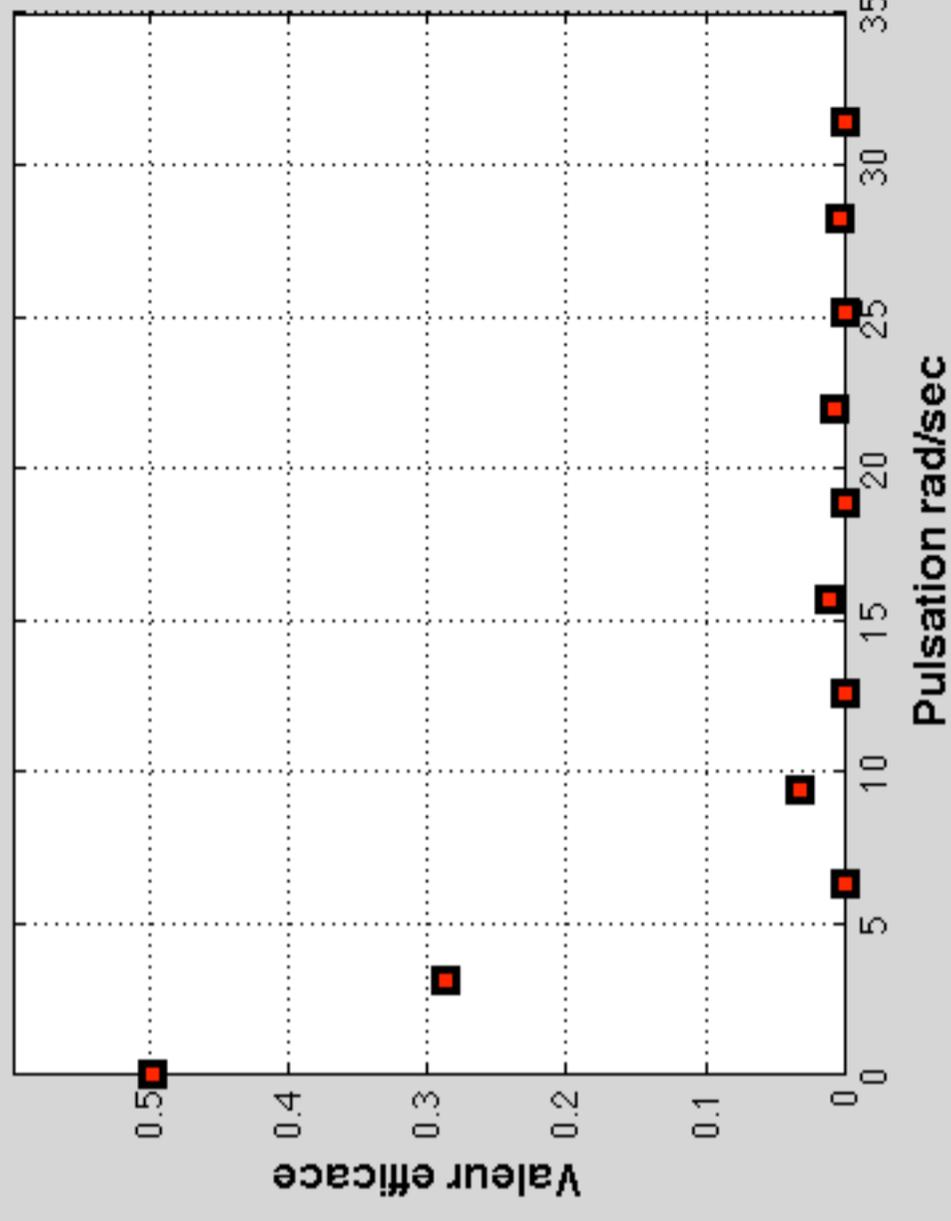
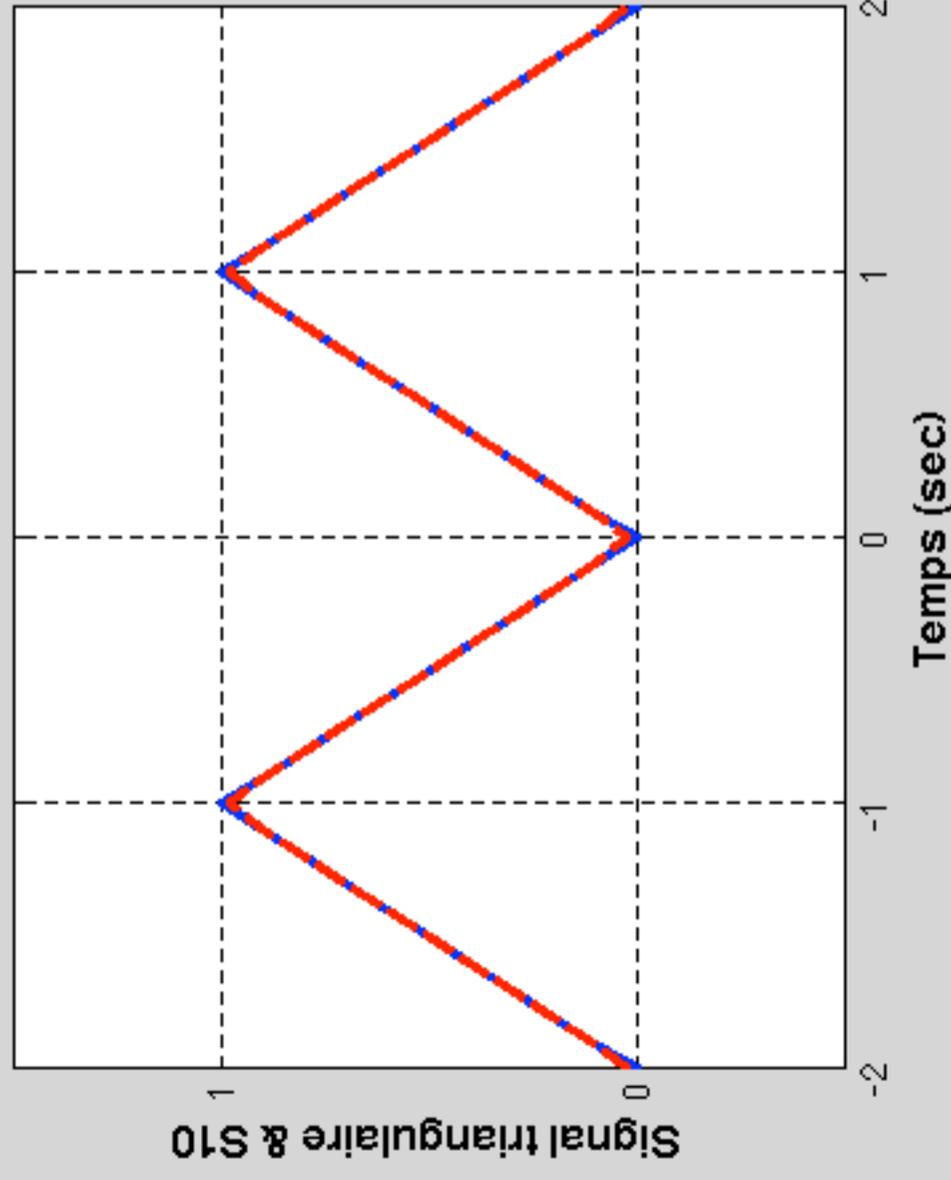
- 1 – Cours : Séries de \mathcal{F} ourier
- 2 – TD : Séries de \mathcal{F} ourier
- 3 – TP : Séries de \mathcal{F} ourier en simulation sous Matlab
- 4 – TD : Analyse spectrale
- 5 – TP : Analyseur de spectre

""""T00 cnk'HOCtpcn'F 0I wekm/F²tli p{."
E0Rgrgv."N0Dgej qw'I 0Eqwwtkgt."U0J go qwt

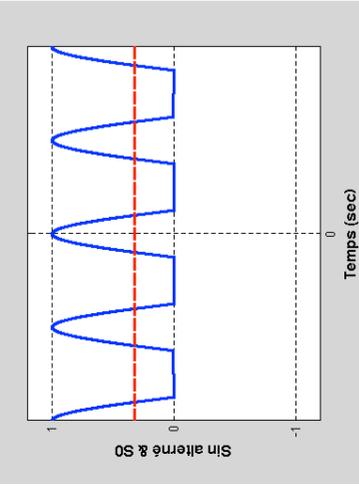
2017-2018

Décomposition en Série de Fourier

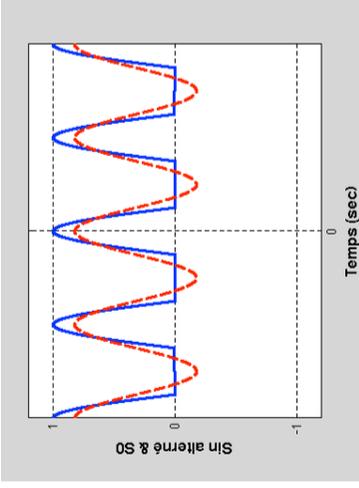
Prof. Rachid MALTI



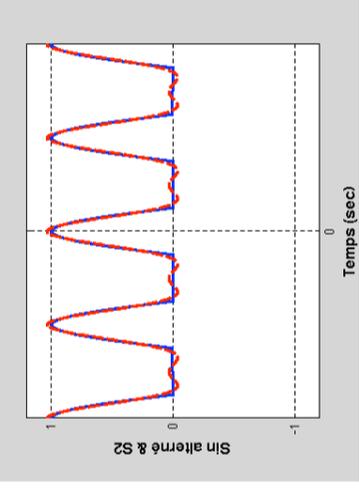
$$S_{10}(t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_0} + \sum_{p=1}^5 \underbrace{\frac{-4}{(2p-1)^2\pi^2}}_{a_{2p-1}} \cos((2p-1)\omega t)$$



$$S_0(t) = \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{a_0}$$



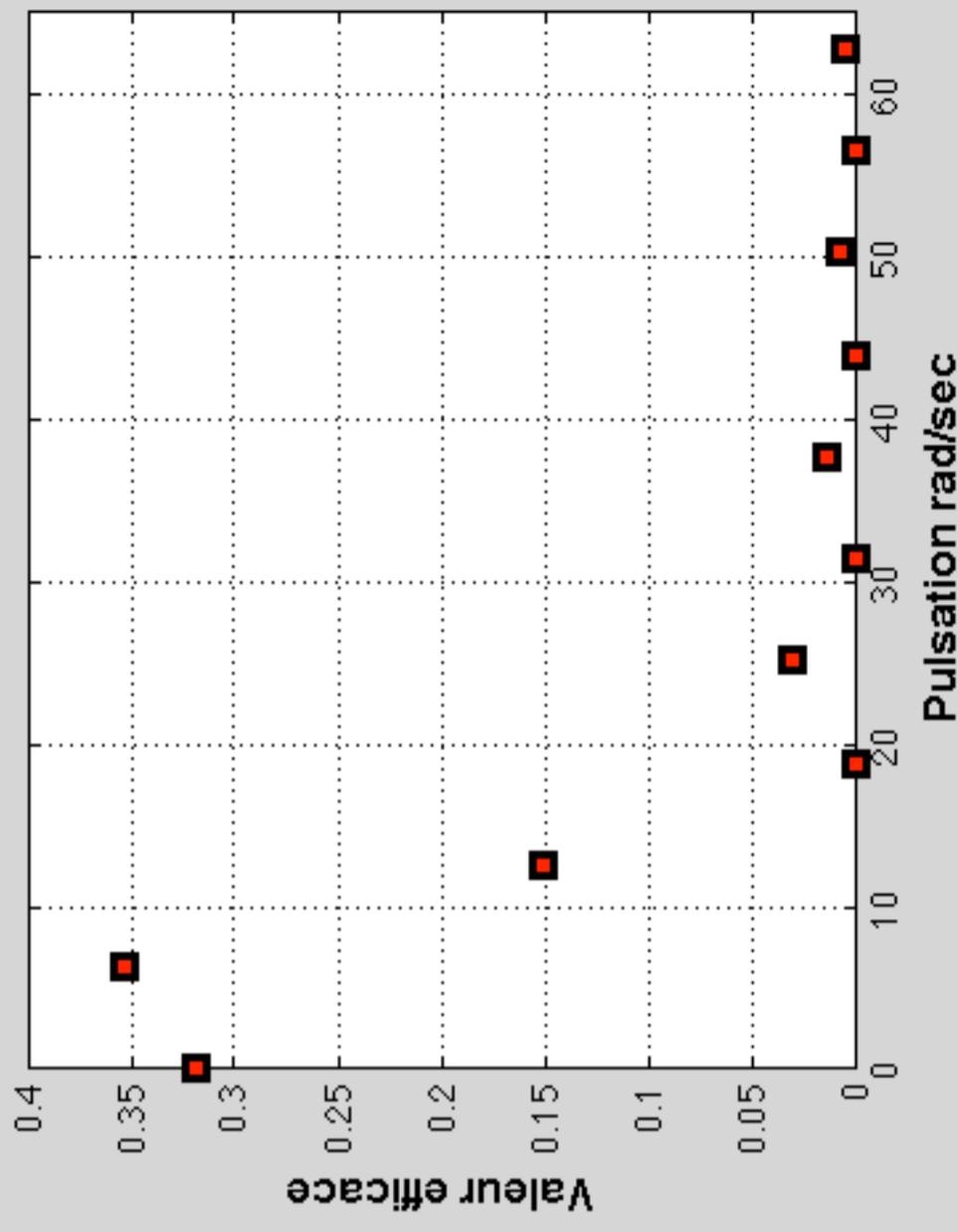
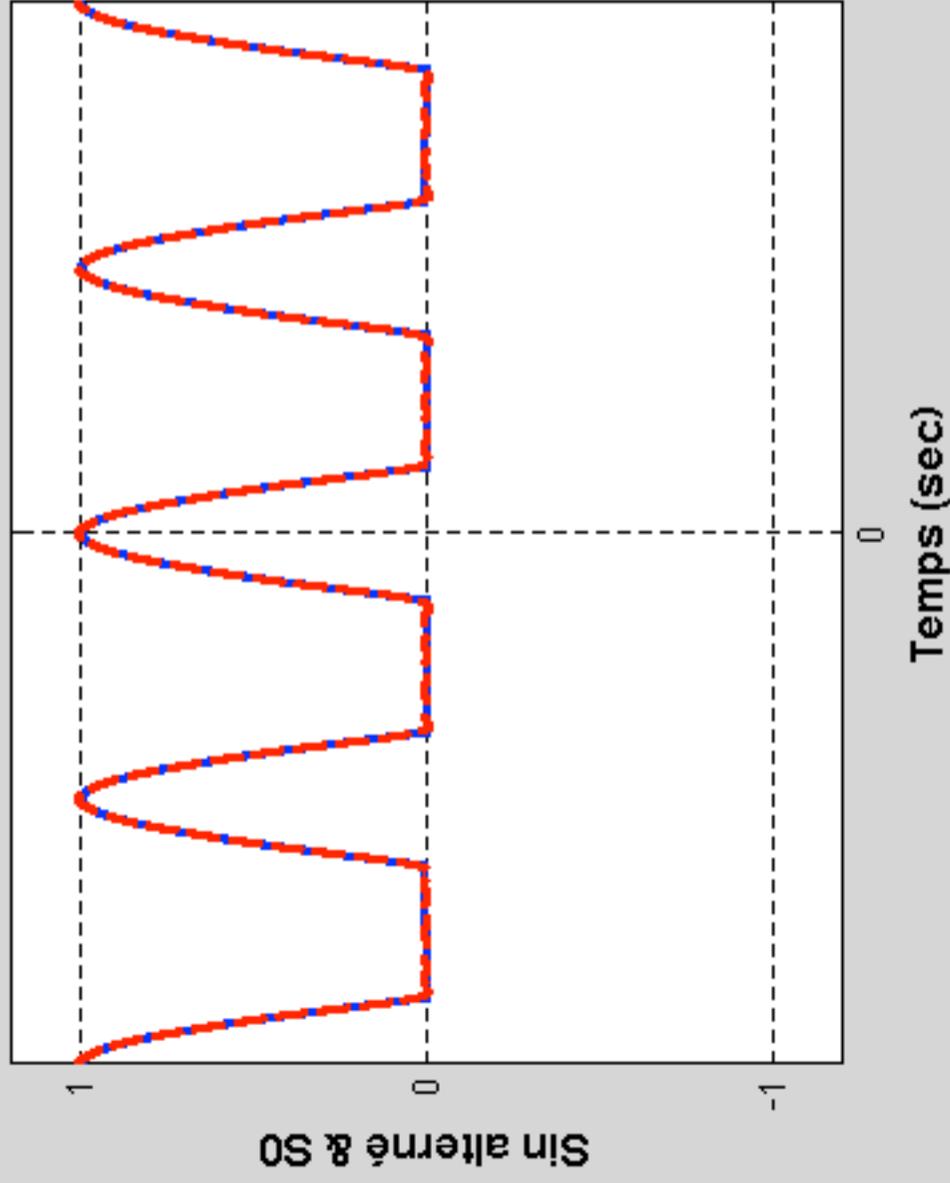
$$S_1(t) = \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{a_0} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos(\omega t)}_{a_1}$$



$$S_3(t) = \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{a_0} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos(\omega t)}_{a_1} + \underbrace{\frac{2}{3\pi} \cos(2\omega t)}_{a_2} + \underbrace{0}_{a_3} \times \cos(3\omega t)$$

Temps

Pulsation (ou fréquence)



$$S_{10}(t) = \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{a_0} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos(\omega t)}_{a_1} + \sum_{p=1}^5 \underbrace{\frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2 - 1)}}_{a_{2p}} \cos(2p\omega t)$$

Séries de Fourier

I	Motivation en électronique	5
II	Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace des fonctions	7
II.1	Produit scalaire	7
II.2	Norme quadratique et valeur efficace	8
II.3	Orthogonalité	8
II.4	Orthonormalité	10
II.5	Base	10
III	Décomposition d'une fonction en série de Fourier	10
III.1	Calcul des coefficients de la décomposition	11
III.2	Interprétation physique	14
IV	Formule de Bessel-Parseval	16
IV.1	Convergence des coefficients de Fourier	17
V	Série de Fourier sous forme complexe	19
VI	TD : Séries de \mathcal{F} ourier	21

Séries de Fourier



Jean Baptiste Joseph Fourier, né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris, est un mathématicien et physicien français, connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur. Depuis lors, les séries de Fourier, leur généralisation aux intégrales de Fourier et les fonctions orthogonales, sont devenues des outils indispensables tant du point de vue théorique que des applications.

I Motivation en électronique

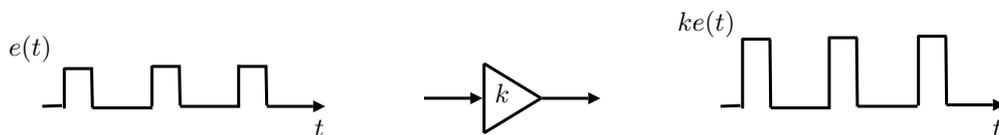


FIGURE 1 – Est-il possible d’amplifier le signal $e(t)$?

Est-il possible d’amplifier le signal $e(t)$ de la figure 1 ? Pour répondre à cette question, il faut connaître la répartition de la puissance de $e(t)$ dans l’espace des fréquences et ensuite dimensionner correctement la bande passante de l’amplificateur. Les séries de Fourier permettent de connaître la distribution en puissance dans l’espace des fréquences.

$$\text{Espace du temps} \overset{SF}{\rightsquigarrow} \text{Espace des fréquences} \quad (1)$$

Soit f une fonction continue par morceaux comme sur la figure 2. Le problème posé par Fourier dans les années 1880 est *sous quelles conditions peut-on écrire, pour $t_0 < t < t_0 + T$,*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t), \quad (2)$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$?

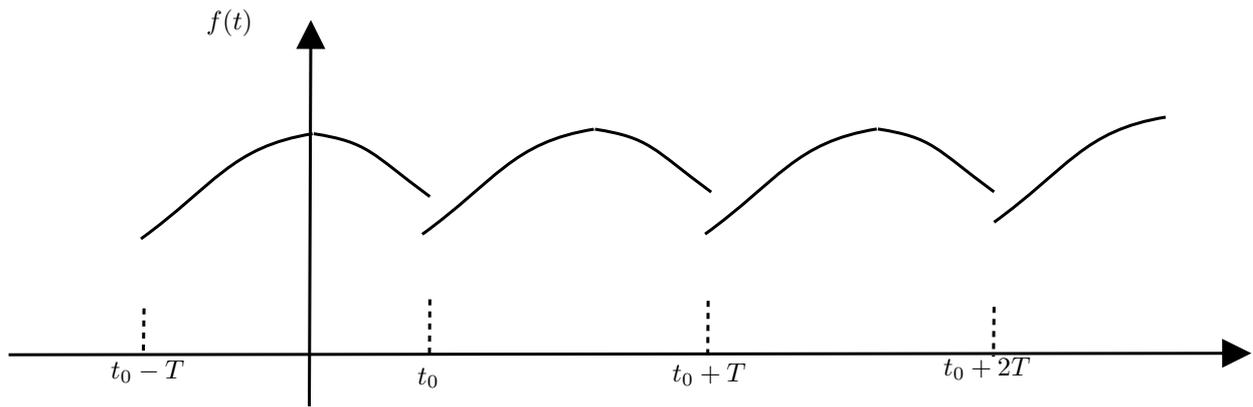


FIGURE 2 – Décomposition d’une fonction périodique f en sin et cos entre t_0 et $t_0 + T$.

La formulation (2) revient à décomposer une fonction f sur une base de fonctions sin et cos, comme si l’on décomposait un vecteur \vec{v} en deux vecteurs :

$$\vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j} \quad (3)$$

d’une base orthonormée, avec

$$\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = 0 \quad (4)$$

$$\langle \vec{i}, \vec{i} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle = 1. \quad (5)$$

II Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace des fonctions

II.1 Produit scalaire

DÉFINITION 1 : Un produit scalaire est une **forme bilinéaire symétrique définie positive**

sur un espace vectoriel sur les nombres réels. Soit E un espace vectoriel réel. On dit qu'une application

$$E \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad (6)$$

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle \quad (7)$$

est un produit scalaire si elle est

- bilinéaire : le produit scalaire est linéaire relativement à chaque argument (l'autre étant fixe). $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall (f_1, f_2) \in E^2$:

$$\langle af_1 + bf_2, \cdot \rangle = a\langle f_1, \cdot \rangle + b\langle f_2, \cdot \rangle \quad (8)$$

$$\langle \cdot, af_1 + bf_2 \rangle = a\langle \cdot, f_1 \rangle + b\langle \cdot, f_2 \rangle \quad (9)$$

- symétrique

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_2, f_1 \rangle \quad (10)$$

- définie

$$\langle f_1, f_1 \rangle = 0 \Rightarrow f_1 = 0 \quad (11)$$

- positive

$$\langle f_1, f_1 \rangle \geq 0 \quad (12)$$

En se basant sur la définition 1, on peut définir le produit scalaire de 2 fonctions.

DÉFINITION 2 : Le produit scalaire de deux fonctions, f_1 et f_2 , dans l'intervalle $[a, b]$, est défini par l'intégrale

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(t)f_2(t) dt. \quad (13)$$

Lorsque les fonctions f_1 (et similairement f_2) sont de carrés intégrables (sommables) dans l'intervalle $[a, b]$, c.-à-d. :

$$\langle f_1, f_1 \rangle = \int_a^b f_1^2(t) dt < \infty, \quad (14)$$

on dit qu'elles appartiennent à l'espace de Lebesgue, $\mathcal{L}_2[a, b]$.

II.2 Norme quadratique et valeur efficace

DÉFINITION 3 : La norme 2 ou norme quadratique d'une fonction f , associée au produit scalaire (13), est définie par :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}. \quad (15)$$

Il est clair que la valeur efficace d'une fonction correspond à sa norme quadratique divisée par la durée de l'intervalle :

$$f_{eff} = \frac{\|f\|}{\sqrt{b-a}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt}. \quad (16)$$

II.3 Orthogonalité

Par analogie au produit scalaire de 2 vecteurs, lorsque le produit scalaire de deux fonctions f_1 et f_2 est nul, alors f_1 et f_2 sont dites orthogonales :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0 \Rightarrow f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont orthogonales} \quad (17)$$

Exercice 0.1 (Orthogonalité des fonctions sin et cos) Montrer que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\omega = 2\frac{\pi}{T}$:

$$\langle \sin(n\omega t), \cos(m\omega t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0 \quad (18)$$

$$\langle \cos(n\omega t), \cos(m\omega t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ T & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\langle \sin(n\omega t), \sin(m\omega t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases} \quad (20)$$

La relation (19) sera démontrée en cours. Les relations (18) et (20) sont à démontrer chez soi.

Il s'ensuit que les fonctions $\{t \mapsto 1, t \mapsto \cos(\omega t), t \mapsto \cos(2\omega t), t \mapsto \cos(3\omega t), \dots, t \mapsto \sin(\omega t), t \mapsto \sin(2\omega t), t \mapsto \sin(3\omega t), \dots\}$ sont orthogonales les unes aux autres.

II.4 Orthonormalité

De plus lorsque le produit scalaire de deux fonctions identiques vaut 1, la suite de fonctions est dite orthonormée. Ainsi, les fonctions $\left\{t \mapsto \frac{1}{\sqrt{T}}, t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega t), t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\omega t), t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(3\omega t), \dots, t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega t), t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\omega t), t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(3\omega t), \dots\right\}$ sont orthonormées.

II.5 Base

Par analogie aux vecteurs,

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} \quad (21)$$

où les vecteur \vec{i} et \vec{j} forment une base orthonormée sur un plan, les fonctions $\left\{t \mapsto \frac{1}{\sqrt{T}}, t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega t), t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\omega t), t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(3\omega t), \dots, t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega t), t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\omega t), t \mapsto \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(3\omega t), \dots\right\}$ forment une base orthonormée dans l'espace des fonctions $\mathcal{L}_2[t_0, t_0 + T]$.

A la différence des vecteurs, où 2 éléments suffisent pour engendrer un plan ou bien 3 éléments suffisent pour engendrer un espace à trois dimensions, il faut une infinité de fonctions pour engendrer l'espace des fonctions $\mathcal{L}_2[t_0, t_0 + T]$. En effet dans la mesure où l'on ne peut pas utiliser une infinité de fonctions en pratique, on ne pourra qu'approcher une fonction de carré intégrable par une somme de sinus et de cosinus.

III Décomposition d'une fonction en série de Fourier

Dans la mesure où les fonctions décrites précédemment constituent une base, on peut les utiliser pour décomposer toute fonction f continue ou continue par morceaux appartenant à $\mathcal{L}_2[t_0, t_0 + T]$ sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ (voir figure 2).

THÉORÈME 1 : [Théorème de Dirichlet] Soit f une fonction réelle T -périodique, de classe \mathcal{C}^1 ^a par morceaux sur \mathbb{R} . Alors pour tout nombre réel t , la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à :

$$\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f(x + \epsilon) + f(x - \epsilon)) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, en tout point t où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(t)$.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (22)$$

$$\text{ou} \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (23)$$

a. Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^1 dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ lorsqu'elle est dérivable sur cet intervalle et lorsque sa dérivée, f' , est continue.

La fonction f peut présenter une ou plusieurs discontinuités de première espèce (f est discontinue et les dérivées à droite et à gauche existent), et être développée en série de Fourier. Sur la figure 3 la fonction f est discontinue en t_1 , les dérivées à droite et à gauche existent. Un exemple d'une telle discontinuité, traité en exemple ultérieurement, est le signal carré.

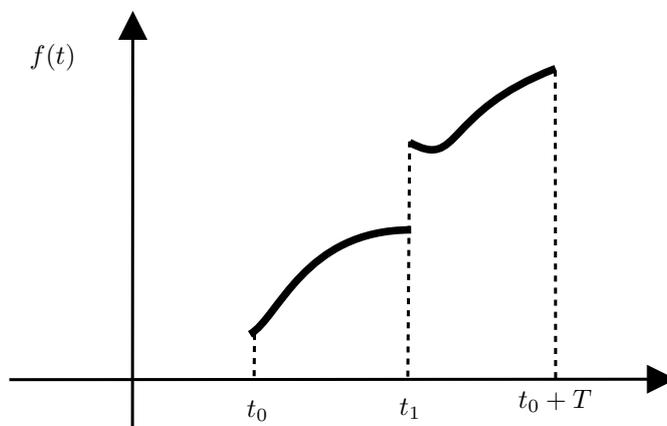


FIGURE 3 – Décomposition de f en sin et cos entre t_0 et $t_0 + T$.

III.1 Calcul des coefficients de la décomposition

Fonction quelconque

Calcul du coefficient a_0 En multipliant, dans le sens du produit scalaire, les deux membres de l'équation (23) par la fonction constante 1, on obtient :

$$\langle f, 1 \rangle = a_0 \langle 1, 1 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos(n\omega t), 1 \rangle + b_n \langle \sin(n\omega t), 1 \rangle \quad (24)$$

Compte-tenu de l'orthogonalité (18)-(20) tous les termes de la somme s'annulent et le terme $\langle 1, 1 \rangle$ vaut T :

$$\langle f, 1 \rangle = a_0 T + 0 \quad (25)$$

Par conséquent, le coefficients de Fourier a_0 se calcule par :

$$a_0 = \bar{f} = \frac{1}{T} \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (26)$$

Le coefficient a_0 correspond donc à la valeur moyenne de la fonction f notée \bar{f} .

Calcul du coefficient $a_n, n \in \mathbb{N}^*$ Pour suivre plus facilement les calculs suivants, remplacez n par 3 (par exemple) et notez que la série (23) s'exprime indifféremment en utilisant l'indice n ou m . Pour obtenir les coefficients a_n , on calcule $\langle f(t), \cos(n\omega t) \rangle$, d'après (23) :

$$\langle f(t), \cos(n\omega t) \rangle = a_0 \langle 1, \cos(n\omega t) \rangle + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \langle \cos(m\omega t), \cos(n\omega t) \rangle + b_m \langle \sin(m\omega t), \cos(n\omega t) \rangle \quad (27)$$

Or d'après la propriété d'orthogonalité (18)-(20), tous les termes du membre de droite s'annulent sauf celui correspondant à $n = m$:

$$\langle f(t), \cos(n\omega t) \rangle = a_n \langle \cos(n\omega t), \cos(n\omega t) \rangle \quad (28)$$

$$\langle f(t), \cos(n\omega t) \rangle = a_n \frac{T}{2} \quad (29)$$

d'où l'on tire

$$a_n = \frac{2}{T} \langle f(t), \cos(n\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (30)$$

Comme pour les vecteurs, le coefficient a_n associé à la fonction $\cos(n\omega t)$, s'obtient par projection de la fonction f sur la fonction $\cos(n\omega t)$, divisée par la norme de la fonction $\cos(n\omega t)$.

Calcul du coefficient $b_n, n \in \mathbb{N}^*$ De même, le coefficient b_n associé à la fonction $\sin(n\omega t)$, s'obtient par projection de la fonction f sur la fonction $\sin(n\omega t)$, divisée par la norme de la fonction $\sin(n\omega t)$:

$$b_n = \frac{2}{T} \langle f(t), \sin(n\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (31)$$

Fonctions paire et impaire

On rappelle que si la fonction $t \mapsto g(t)$ est paire, $g(t) = g(-t)$, alors :

$$\int_{-a}^a g(t) dt = 2 \int_0^a g(t) dt \quad (32)$$

De même si la fonction $t \mapsto h(t)$ est impaire, $h(t) = -h(-t)$, alors :

$$\int_{-a}^a h(t) dt = 0. \quad (33)$$

Fonction paire

Par conséquent, il est facile de montrer que lorsque la fonction $f(t)$ est paire, les expressions des coefficients de Fourier (26), (30) et (31) deviennent :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad (34)$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \quad (35)$$

$$b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (36)$$

Fonction impaire

De même, lorsque la fonction f est impaire :

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (37)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \quad (38)$$

ASTUCE (HINT EN ANGLAIS) : Pour savoir lesquels des coefficients a_n ou b_n s'annulent lorsque la fonction f est paire (respectivement impaire), un moyen mnémotechnique consiste à se référer à (23) et à ne conserver que les termes associés à la fonction paire (respectivement impaire) en annulant les autres.

Exercice 0.2 Calculer les coefficients a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier du signal de la figure 4, puis donner l'expression temporelle de la série de Fourier.

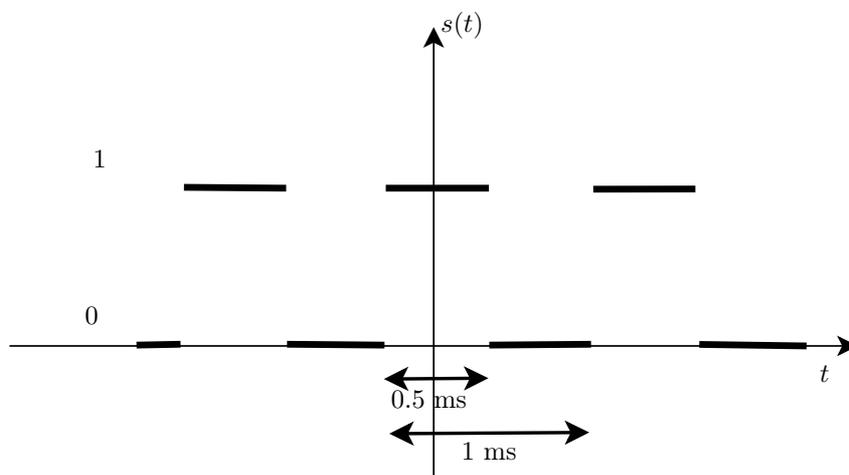
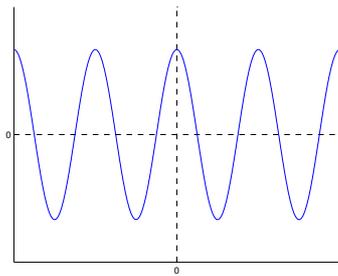


FIGURE 4 – Signal carré $s(t)$ de rapport cyclique $r = 0.5$.

III.2 Interprétation physique

On considère la décomposition en série de Fourier des fonctions sinusoïdales f_1 , f_2 et f_3 des figures 5, 6 et 7.



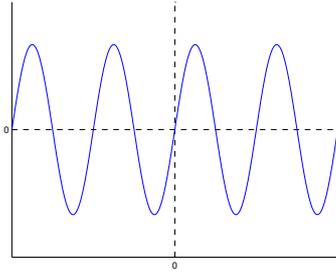
$$f_1(t) = A \cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} a_0 = \dots \\ a_1 = \dots \\ a_n = \dots \text{ pour } n = \dots, \dots, \dots \\ b_n = \dots \text{ pour } n = \dots, \dots, \dots \end{cases}$$

FIGURE 5 – Fonction f_1

Vue d'un oscilloscope ou d'un analyseur de spectre, ces signaux sont identiques, car ils ont la même amplitude. Bien que les écritures mathématiques des fonctions f_1 , f_2 et f_3 soient différentes, on peut remarquer qu'il existe un invariant pour ces signaux : l'amplitude au carré associée à chaque pulsation, soit

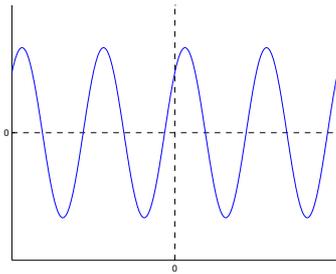
$$\underbrace{a_1^2}_{\text{pour } f_1} = \underbrace{b_1^2}_{\text{pour } f_2} = \underbrace{a_1^2 + b_1^2}_{\text{pour } f_3} \quad (39)$$



$$f_2(t) = A \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} a_n = \dots \text{ pour } n = \dots, \dots, \dots \\ b_1 = \dots \\ b_n = \dots \text{ pour } n = \dots, \dots, \dots \end{cases}$$

FIGURE 6 – Fonction f_2



$$f_3(t) = A \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} a_1 = \dots \\ b_1 = \dots \\ a_n = \dots \text{ pour } n = \dots, \dots, \dots \\ b_n = \dots \text{ pour } n = \dots, \dots, \dots \end{cases}$$

FIGURE 7 – Fonction f_3

On peut donc adopter une autre notation pour la série de Fourier qui fait apparaître une seule fonction sinusoïdale (au choix cos ou sin) associée à chaque pulsation $n\omega$, une amplitude s_n (qui correspond à l'invariant vu d'un analyseur de spectre), et un déphasage, φ_n :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad s_0 \cos(\varphi_0) = a_0 \quad (40)$$

Exercice 0.3 (Un peu de trigo ...) Montrer que l'expression (23) est équivalente à (40). Montrer aussi que

$$s_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad (41)$$

et que

$$\tan(\varphi_n) = \frac{b_n}{a_n} \quad (42)$$

Afin de pouvoir formuler le théorème de Bessel-Parseval (voir plus bas) de manière plus compacte, on adoptera la convention suivante :

$$\begin{cases} \cos(\varphi_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ s_0 = a_0\sqrt{2} \end{cases} \quad (43)$$

Tout autre choix aurait pu convenir à partir du moment où la relation $a_0 = s_0 \cos(\varphi_0)$ est satisfaite.

On appelle spectre d'un signal la représentation de la figure 8.

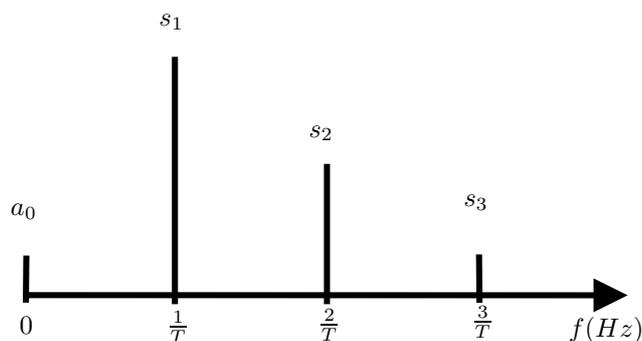


FIGURE 8 – Spectre d'un signal f . La fréquence 0, correspond à la moyenne du signal. La fréquence $f_1 = \frac{1}{T}$ correspond à la fréquence fondamentale du signal ; les fréquences $f_2 = \frac{2}{T}, f_3 = \frac{3}{T}, \dots$ sont connues sous le nom d'harmoniques de rang 2, 3, ...

Exercice 0.4 *On reprend l'exercice 0.2.*

1. *Calculer l'amplitude s_n et le déphasage φ_n associés à chaque fréquence $\frac{n}{T}$ (ou à chaque pulsation $n\omega$).*
2. *Tracer le spectre de $s(t)$ avec les cinq premières raies.*

IV Formule de Bessel-Parseval

En multipliant, dans le sens du produit scalaire, chaque terme de l'égalité (22) par lui-même, on peut écrire :

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t), \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t) \right\rangle \quad (44)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n a_m \langle \cos(n\omega t), \cos(m\omega t) \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m \langle \cos(n\omega t), \sin(m\omega t) \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n a_m \langle \sin(n\omega t), \cos(m\omega t) \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n b_m \langle \sin(n\omega t), \sin(m\omega t) \rangle \quad (45)$$

Compte-tenu de l'orthogonalité

$$\|f\|^2 = T a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{2} a_n^2 + \frac{T}{2} b_n^2 \quad (46)$$

Si l'on écrit explicitement la norme quadratique de f (terme de Gauche) et qu'on divise l'équation (46) par T , on obtient à gauche, la valeur quadratique moyenne d'une fonction, ou le carré de la valeur efficace f_{eff} (16) :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \quad (47)$$

La relation (47) peut aussi s'exprimer en utilisant l'amplitude s_n et compte tenu de la convention énoncée précédemment en (43) concernant s_0 et φ_0 :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n^2}{2} \quad (48)$$

où f_{eff}^2 représente la valeur efficace au carré du signal périodique. Si f est une tension en V (volt), alors f_{eff}^2 est en V². En mathématiques, on dit souvent que f_{eff}^2 représente la puissance, or une puissance s'exprime en W (Watt). En fait, on sous-entend qu'il s'agit de la puissance dans une résistance de 1 Ω.

La formule de Bessel-Parseval indique que la valeur efficace au carré de la fonction f correspond à la somme des valeurs efficaces contenues dans chaque fréquence (0 ou valeur moyenne, le fondamental, le premier harmonique, ...).

IV.1 Convergence des coefficients de Fourier

Si f est une fonction, T -périodique, localement intégrable sur \mathbb{R} , les suites a_n et b_n constituées par ses coefficients de Fourier tendent vers zéros quand n tend vers l'infini. C'est ce qui permet de tronquer la représentation (23) à un nombre N fini de termes :

$$f(t) \approx a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (49)$$

Exercice 0.5 On reprend l'exercice 1.3.

1. Déterminer le nombre de termes nécessaires à la série de Fourier pour capturer au minimum 95% de la puissance du signal carré $s(t)$.

Application au calcul du taux de distortion d'un amplificateur

Lorsqu'un amplificateur est linéaire (amplificateur idéal), un signal sinusoïdal $e(t) = A \sin(\omega t)$ est amplifié en sortie de l'amplificateur, et on a $s(t) = AK \sin(\omega t)$.

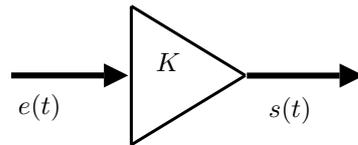


FIGURE 9 – Amplificateur.

Cependant en pratique, les amplificateurs sont souvent non linéaires (NL) et la sortie d'un amplificateur s'écrit :

$$s(t) = Ke(t) + k_2e^2(t) + \underbrace{k_3e^3(t)}_{\text{terme NL prépondérant}} \quad . \quad (50)$$

Les termes de puissance impaires sont prépondérants compte-tenu de la symétrie des tensions d'alimentation.

On appelle taux de distorsion

$$D = \frac{\text{Valeur efficace des harmoniques}}{\text{Valeur efficace du fondamental}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)/2}{(a_1^2 + b_1^2)/2}} \quad (51)$$

Exercice 0.6 Déterminer le taux de distortion d'un amplificateur où

$$s(t) = 10e(t) - 10^{-2}e^3(t) \quad (52)$$

V Série de Fourier sous forme complexe

A partir de (22), on peut écrire le cosinus et le sinus sous une forme exponentielle en utilisant la formule d'Euler :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \quad (53)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \quad (54)$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} e^{-jn\omega t} \quad (55)$$

avec

$$c_0 = a_0 \quad (56)$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (57)$$

$$c_n = \frac{1}{2T} \left[\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} dt - j \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} dt \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (58)$$

soit finalement

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}} \quad (59)$$

L'équation (59) est également valable pour $n = 0$, car le calcul de c_0 se confond avec celui de $c_n, n \in \mathbb{N}^*$. L'équation (55) peut se récrire, moyennant le changement d'indice $m = -n$ dans la deuxième somme,

$$f(t) = c_0 e^{j0\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{m=-\infty}^{-1} \overline{c_{-m}} e^{jm\omega t} \quad (60)$$

or, compte-tenu de (59),

$$\overline{c_{-m}} = c_m, \quad (61)$$

ce qui permet d'obtenir la forme condensée de la décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad (62)$$

Le module de c_n est donné, en fonction de a_n et b_n , à partir de (56) et (57) par :

$$\begin{cases} |c_0| = a_0 \\ |c_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^* \quad (63)$$

ou donné en fonction de s_n et φ_n , compte-tenu de (41) et (43), par :

$$\begin{cases} |c_0| = s_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ |c_n| = \frac{s_n}{2} \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^* \quad (64)$$

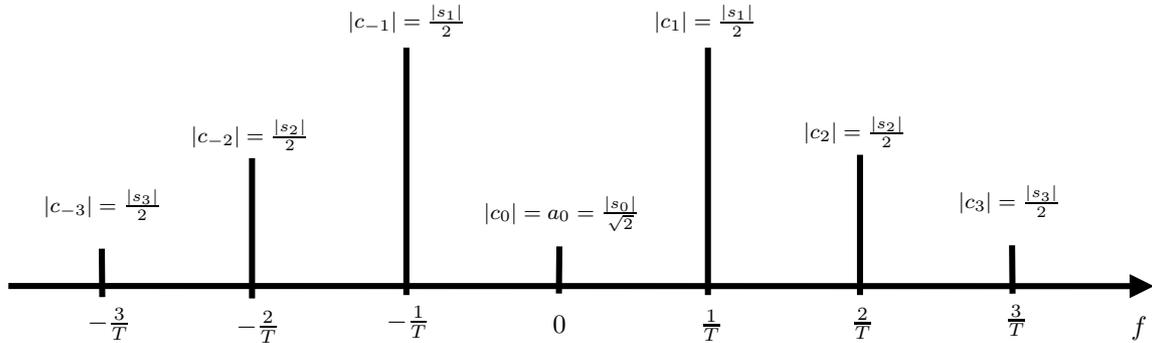


FIGURE 10 – Représentation du module des coefficients complexes de la décomposition en série de Fourier. Attention, ceci n'est pas le spectre du signal, car les fréquences négatives n'existent pas !

Bien que la série de Fourier (62) et le calcul des coefficients de Fourier c_n (59) fassent intervenir des exponentielles complexes, **la série de Fourier est une fonction réelle du temps**, car toutes les parties imaginaires s'éliminent lors du développement de la somme. De plus, les fréquences négatives n'existent pas. Par conséquent, la représentation de la série de Fourier (62) n'est qu'une écriture plus condensée de (23).

VI TD : Séries de Fourier

Exercice 1* :

Soit la fonction cosinusoidale $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(t) = 2 \cos(5t). \quad (65)$$

1. Donner la période T de g , puis tracer la fonction.
2. Calculer la valeur moyenne de g .
3. Calculer la valeur efficace de g .
4. Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier de g .
5. Refaire, chez soi, l'exercice en remplaçant la fonction cos par la fonction sin.

Exercice 2* :

Soit le signal $s(t)$ représenté sur la figure 11.

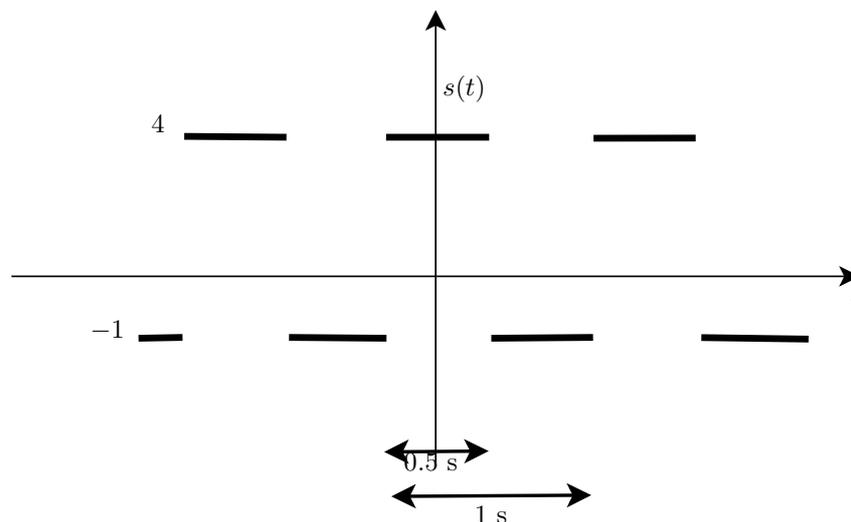


FIGURE 11 – Signal carré $s(t)$.

1. Calculer la valeur moyenne du signal $s(t)$.
2. Calculer la valeur efficace du signal $s(t)$.

Exercice 3* :

Soit la fonction

$$f(t) = 2 \cos^2(4\pi t). \quad (66)$$

1. Réécrire $f(t)$ sous une forme linéaire de sin et cos.
2. En déduire les coefficients a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier de $f(t)$.
3. Donner la pulsation fondamentale du signal.

4. Calculer la valeur moyenne de f .
5. Calculer sa valeur efficace.
6. Refaire, chez soi, l'exercice pour les fonctions
 - (a) $f(t) = 2 \sin^2(4\pi t)$,
 - (b) $f(t) = 2 \sin^3(4\pi t)$,
 - (c) $f(t) = 5 \sin(4\pi t) \cos(6\pi t)$.

Exercice 4 :**

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire, périodique de période $T = 2$ sec, telle que $\forall t \in [0, 1[$:

$$g(t) = t. \quad (67)$$

1. Tracer la courbe de $g(t)$ sur $[-2, 2]$.
2. Calculer les coefficients a_n et b_n .
3. Exprimer les quatre premiers termes de la SF (23), correspondant à une troncature à $n = 3$.
4. Calculer la précision de l'approximation quand l'ordre de troncature de la SF (23) est fixé à 3 à partir du rapport

$$\text{Précision} = \frac{\text{Puissance de la SF tronquée à } n = 3}{\text{Puissance du signal}} \quad (68)$$

5. Vérifier en vous basant sur la relation de Bessel-Parseval que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (69)$$

Exercice 5 :**

Soit le signal sinusoïdal redressé simple alternance de la figure 12.

1. Placer l'origine des temps pour faire apparaître une symétrie et réduire le volume de calcul des coefficients a_n et b_n de la SF. Donner l'expression temporelle de la fonction sinusoïdale alternée, d'amplitude 1, et de période T .
2. Calculer les coefficients a_n et b_n . Attention ! Le calcul de a_1 doit être fait séparément ! Pourquoi ?
3. Exprimer les quatre premiers termes de la SF (23), correspondant à une troncature à $n = 3$.
4. Dédire les termes s_n et φ_n , puis exprimer les quatre premiers termes utilisant la notation (40).
5. Calculer par intégration les coefficients de Fourier c_n .
6. Exprimer les sept termes de $n = -3$ à $n = 3$ de la SF utilisant la notation complexe (62).
7. Calculer la précision de l'approximation quand l'ordre de la troncature de la SF (23) est fixé à 3 à partir du rapport

$$\text{Précision} = \frac{\text{Puissance de la SF tronquée à } n = 3}{\text{Puissance du signal}} \quad (70)$$

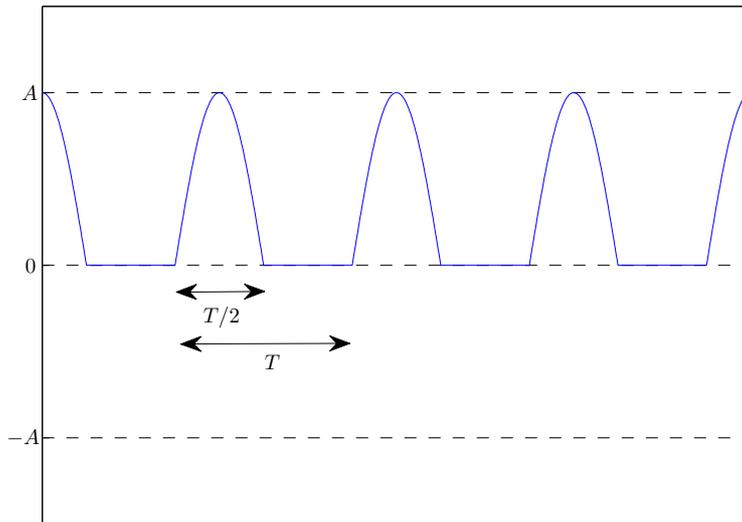


FIGURE 12 – Sinus alterné

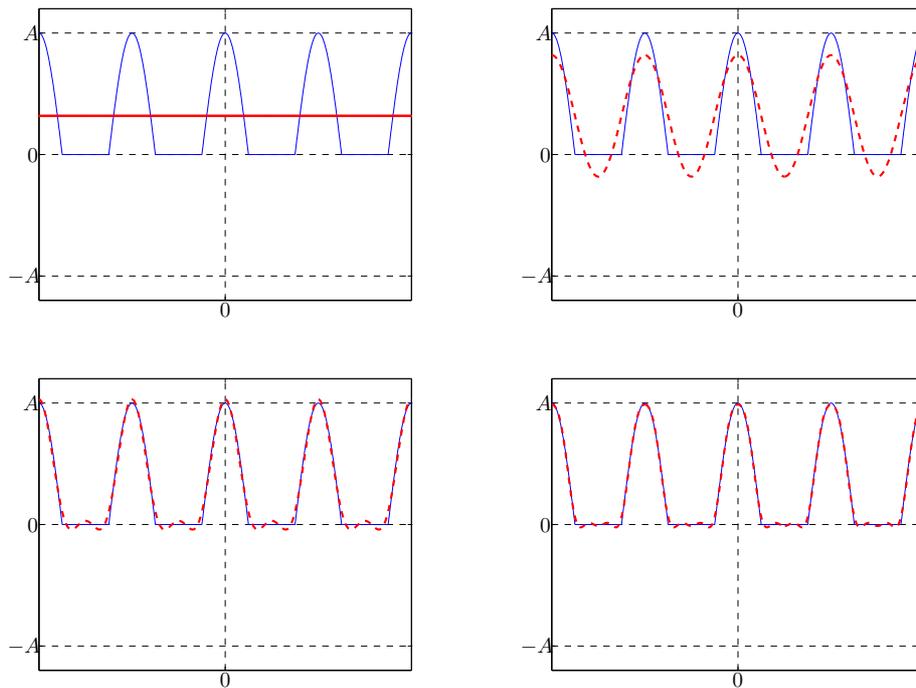


FIGURE 13 – Série de Fourier tronquée respectivement à $n = 0$ (seule la moyenne du signal est conservée), $n = 1$, $n = 2$ et $n = 4$.

8. Vérifier en vous basant sur la relation de Bessel-Parseval que :

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(4p^2 - 1)^2} \quad (71)$$

La figure 13 représente la SF du signal type sinusoïdal redressé simple alternance, tronquée respectivement à $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, et $n = 4$. L'objectif de l'exercice est de trouver les coefficients de la SF.

Exercice 6 :**

Soit le signal triangulaire de la figure 14.

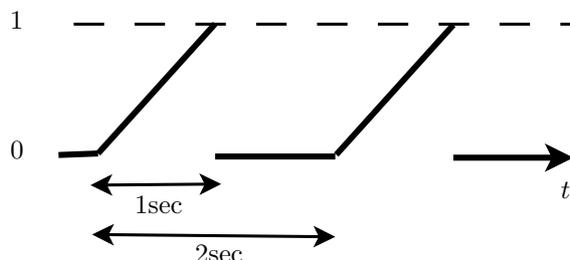


FIGURE 14 – Signal triangulaire

1. Déterminer la période T du signal. Dédire la pulsation fondamentale ω de la SF.
2. Placer l'origine des temps t , puis donner l'expression temporelle du signal triangulaire dans le repère choisi.
3. Calculer les coefficients a_n et b_n de la SF.
4. Exprimer les quatre premiers termes de la série de Fourier (23), c.-à-d. jusqu'à $n = 3$.
5. Dédire les termes s_n et φ_n , puis exprimer les quatre premiers termes utilisant la notation (40).
6. Calculer par intégration les coefficients de Fourier c_n .
7. Exprimer les sept termes de la série de Fourier utilisant la notation complexe (62) de $n = -3$ à $n = 3$.
8. Calculer la précision de l'approximation quand l'ordre de troncature de la SF (23) est fixé à $n = 3$ à partir du rapport des puissances (70).
9. Ecrire la série résultante du théorème de Bessel-Parseval.

Exercice 7* :**

Refaire l'exercice 0.2 p.13 du cours sur le signal $s_r(t)$ de la figure 15 pour un rapport cyclique quelconque $0 < r = \frac{\theta}{T} < 1$. Lors des réponses aux questions, il est important de présenter le résultat sous la forme de la fonction sinus cardinal $\frac{\sin(x)}{x}$ qui fait partie des fonctions élémentaires à connaître.

1. Placer l'origine des temps pour que le calcul des coefficients de Fourier soit le plus simple possible.
2. Calculer les coefficients a_n et b_n de cette décomposition. Donner l'expression temporelle de s_r .
3. Calculer l'amplitude s_n et le déphasage φ_n associés à chaque fréquence $\frac{n}{T}$ (ou à chaque pulsation $n\omega$).
4. Tracer le spectre de s_r avec les cinq premières raies, pour un $\frac{\theta}{T} = \frac{1}{5}$.
5. Déterminer le nombre de termes nécessaires à la série de Fourier pour capturer au minimum 95% de la puissance du signal carré $s_{\frac{1}{5}}$.

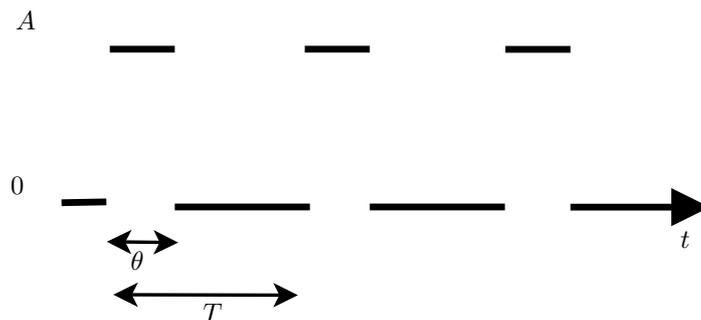


FIGURE 15 – Signal carré s_r de rapport cyclique $r = \frac{\theta}{T}$.

Exercice 8 :**

Cet exercice est extrait du partiel de maths de Janvier 2010.

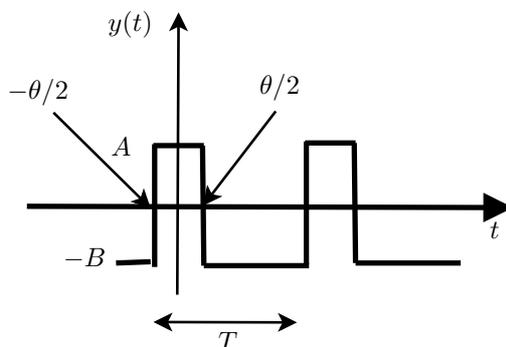


FIGURE 16 – Signal rectangulaire

1. Pour que la valeur moyenne du signal périodique y de la figure 16 soit nulle, A, B, θ , et T doivent vérifier la relation $B = \frac{A\theta}{T-\theta}$, démontrer cette relation.
2. Calculer les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier.
3. Dans le cas particulier où $\frac{\theta}{T} = \frac{1}{N}$, avec $N \in \mathbb{N}^*$, certaines raies du spectre de y sont nulles. Déterminer les valeurs de n , en fonction de N , pour lesquelles les a_n sont nuls.
4. Dans le cas particulier où $\frac{\theta}{T} = \frac{1}{2}$, quelle est la relation entre B et A ? Déterminer, pour ce cas particulier, l'expression générale des coefficients a_n . Calculer les 4 premiers coefficients en fonction de A .
5. Toujours dans le cas particulier où $\frac{\theta}{T} = \frac{1}{2}$, montrer, en utilisant le théorème de Bessel-Parseval (conservation de puissance), que :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad (72)$$

Exercice 9 :

Cet exercice est extrait du concours ENSEA 2008.

Pour un entier non nul n , on considère la somme $S_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$. On calculera la somme

$T(x) = \sum_{k=0}^n e^{jkx}$ comme somme de termes consécutifs d'une suite géométrique puis on exprimera $S_n(x)$ à l'aide de $\operatorname{Re}\{T(x)\}$, enfin on en déduira la valeur de $S_n(x)$.

Entourer les propositions correctes des questions 11 et 12.

Question 11 du concours

1. On a $T(x) = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$
2. Pour x non multiple de 2π , on a $T(x) = e^{\frac{inx}{2}} \frac{\sin[(n+1)x/2]}{\sin(x/2)}$
3. On a $2\operatorname{Re}(T(x)) = \frac{1}{\sin(x/2)} [\sin((2n+1)x/2) + \cos(x/2)]$
4. Pour x non multiple de 2π , on a $S_n(x) = 2\operatorname{Re}(T(x))$
5. Pour x non multiple de 2π , on a $S_n(x) = \frac{\sin[(2n+1)x/2]}{\sin(x/2)}$

On considère ici $S_n(x)$ comme une série de Fourier ayant ses coefficients a_k nuls pour $k > n$. On lui applique alors la formule de calcul des coefficients de Fourier, le calcul de valeurs particulières, et la formule de Bessel-Parseval.

Question 12 du concours

1. On a $0 = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$
2. Pour $1 \leq k \leq n$, on a $\int_0^{2\pi} S_n(x) \cos(kx) dx = 4\pi$
3. On a $\frac{2}{\pi} \int_0^{4\pi} \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin(u)} \cos(2ku) du = 2$, si $0 < k \leq n$
4. $\int_0^{2\pi} S_n(x)^2 dx = 2\pi(1+4n)$
5. $S_n(x)$ s'annule n fois exactement sur l'intervalle $[0, \pi]$.

DUT GEII – Semestre 3
M 3201 - OL3 - Outils Logiciels
florent.arnal@u-bordeaux.fr

TP MATLAB 3 : Autour des séries de Fourier

Objectifs – Compétences attendues :

- Représenter un signal
- Décomposer et représenter un signal en série de Fourier
- Calculer la précision d'une troncature de décomposition

1. Représentations graphiques de signaux	1
2. Décomposition en série de Fourier	1

1. Représentations graphiques de signaux

On considère le signal triangulaire f 2-périodique défini sur $[0; 2]$ par

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0;1] \\ 2-t & \text{sinon} \end{cases}$$

- Représenter f sur $[0; 2]$.
- Déterminer des valeurs approchées des valeurs moyennes et efficaces de f .
- Représenter f sur $[0; 4]$.

2. Décomposition en série de Fourier

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} , paire, périodique de période 1 et dont la restriction $f|_{[0;0,5]}$ sur l'intervalle $[0;0,5]$ est telle que :

$$f|_{[0;0,5]}: t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0,25 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La série de Fourier partielle à l'ordre n de la fonction f est définie par :

$$S_n\{f\}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(2\pi kt)$$

avec a_0 valeur moyenne de f et $a_k = \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

a) Représenter ci-dessous la fonction f sur $[-1;1]$.

b) Déterminer la valeur de a_0 .

c) Représenter avec Matlab la fonction f et S_1 sur l'intervalle $[0;1]$.

d) Déterminer les valeurs de a_k pour $k \in \llbracket 0; 10 \rrbracket$ et représenter les raies associées à ce signal.

e)

- À l'aide d'un script, calculer la somme S_5 sur l'intervalle $[0;1]$.
- Représenter f et S_5 sur un même graphe.

f) Représenter les fonctions f , S_5 et S_{60} sur un même graphe.

g) Déterminer une approximation de la valeur efficace de f , S_1 , S_5 et S_{60} .

h) On rappelle que la précision P_n d'une décomposition peut être obtenue par

$$P_n = \frac{\text{Puissance Série tronquée}}{\text{Puissance du signal}}$$

- Déterminer la précision vis-à-vis de f des décompositions S_1 , S_5 et S_{60} .
- À l'aide d'un script, déterminer à partir de quelle valeur de n la précision de S_n vis-à-vis de f atteint 99%.

Devoir à faire à la maison

I- Les séries de Fourier

L'objectif du TD n'est pas de calculer les coefficients de la série de Fourier associée à un signal périodique, cela a été fait en cours et TD de mathématique. Nous allons ici utiliser une application disponible sur internet ou applet, qui permet d'afficher simultanément la représentation temporelle et la représentation fréquentielle d'un signal périodique. Cette applet va nous permettre de nous familiariser avec les représentations fréquentielles de signaux de type sinusoïdal, triangulaire ou carré.

Pour utiliser cette applet se rendre à l'adresse : <http://www.falstad.com/fourier/>

Vous devez observer la fenêtre représentée figure 1. Sur l'écran s'affiche la représentation temporelle du signal (en blanc) sur laquelle se superpose la série de Fourier (en rouge), puis juste en dessous on peut visualiser les coefficients b_n puis encore en dessous a_n en fonction de n . Différents « boutons » sont accessibles à droite de la fenêtre d'affichage qui permettent de choisir le type de signal, de déphaser le signal, de le redresser, d'appliquer un filtre,... Enfin deux curseurs permettent de choisir le nombre de termes de la série (n_{max}) ou la fréquence du signal.

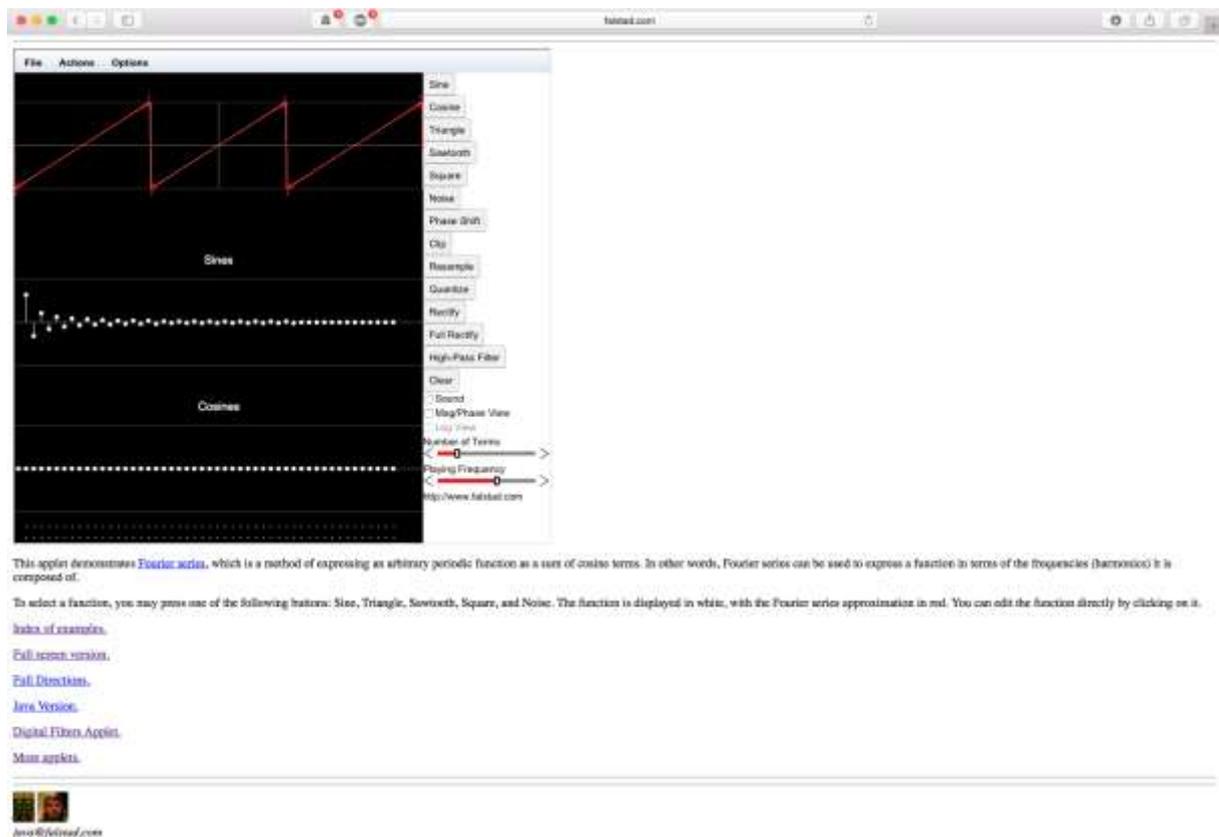


Figure 1 : site www.falstad.com/fourier/

I-1. Construction d'un signal périodique par addition de fonction sinusoïdales

RAPPEL DE MATHS

THÉORÈME 1 : [Théorème de Dirichlet] Soit f une fonction réelle T -périodique, de classe \mathcal{C}^1 ^a par morceaux sur \mathbb{R} . Alors pour tout nombre réel t , la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à :

$$\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f(x + \epsilon) + f(x - \epsilon)) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, en tout point t où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(t)$.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.22)$$

$$\text{ou} \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (2.23)$$

a. Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^1 dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ lorsqu'elle est dérivable sur cet intervalle et lorsque sa dérivée, f' , est continue.

avec

$$a_0 = \bar{f} = \frac{1}{T} \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt.$$

$$a_n = \frac{2}{T} \langle f(t), \cos(n\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$b_n = \frac{2}{T} \langle f(t), \sin(n\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Lancer l'applet en se rendant à l'adresse : site www.falstad.com/fourier/

Sur l'écran d'accueil est représentée une fonction « dent de scie » (sawtooth en anglais) et juste en dessous les termes a_n et b_n de sa décomposition en série de Fourier.

Sur la droite de la figure, en bas apparaissent 2 curseurs : l'un permet de régler la fréquence du signal, l'autre de choisir le nombre de termes a_n, b_n affichés.

Positionner ce dernier curseur (« number of terms ») complètement à gauche, ainsi vous limitez la série à $n = 0$.

Question 1 : En vous référant au cours de maths, dites pourquoi il n'y a plus que le terme a_0 qui apparaît ? A quoi correspond-t-il ? Pourquoi la courbe rouge (série de Fourier) se réduit-elle à une constante ?

Question 2 : Vérifier que ce terme reste à zéro pour les différentes formes de fonction : sinus (« sine »), cosinus (« cosine »), triangle, carré (« square ») et expliquer pourquoi.

Question 3 : Choisir la fonction sinus, et cliquez sur « rectify ». Quelle transformation a-t-on réalisée ?

Mesurer le coefficient a_0 .

Pour connaître la valeur d'un coefficient il suffit de passer la souris dessus.

Répéter l'expérience en appuyant cette fois sur « full rectify ». Que devient a_0 ?

Question 4 : Revenir au signal « dent de scie », et augmenter le nombre de termes en augmentant d'une unité à chaque fois. Commenter les courbes qui s'affichent en blanc et en rouge. On expliquera notamment pourquoi les termes a_n sont tous nuls. Relever l'amplitude de chaque raie et remplissez le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5
a_n						
b_n						

A partir de combien d'harmoniques peut-on considérer que la somme des fonctions sinusoïdales est identique à une dent de scie ?

I-2. Séries de Fourier de signaux sinusoïdaux, triangulaires ou carrés.

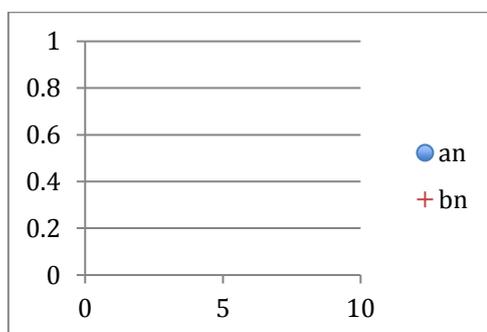
Question 5 : Relever les décompositions en série de Fourier des signaux sinus, cosinus, triangle, et carré en remplissant les tableaux ci-dessous puis tracer sur les diagrammes associés les coefficients a_n et b_n en respectant l'échelle verticale :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n										
b_n										

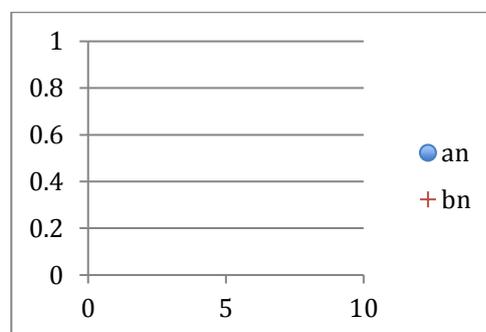
sinus

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n										
b_n										

cosinus



sinus



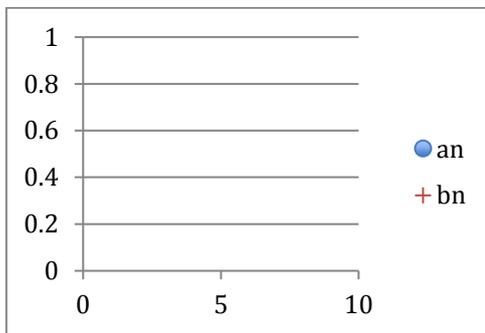
cosinus

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a _n										
b _n										

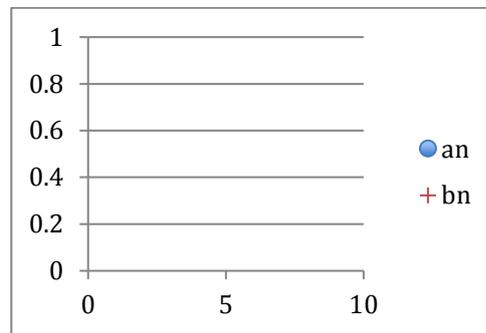
triangle

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a _n										
b _n										

carré



triangle



carré

I-3 : Seconde écriture , représentation en s_n, φ_n

Un inconvénient majeur de l'écriture des séries de Fourier avec les coefficients a_n et b_n , est que deux signaux de formes identiques mais décalés dans le temps (déphasés) ont des représentations en fréquence très différentes. C'est pour cela que cette écriture n'est pas utilisée en électronique et qu'on lui préfère l'écriture en s_n et φ_n .

RAPPEL DE MATHS

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad s_0 \cos(\varphi_0) = a_0$$

avec

$$s_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

$$\tan(\varphi_n) = \frac{b_n}{a_n}$$

Question 6 : Pour visualiser ce phénomène on vous demande de relever les coefficients a_1 et b_1 pour une fonction sinus que l'on va décaler dans le temps à l'aide du bouton « phase shift ». On cliquera successivement 5 fois sur le bouton. Observer et commenter l'évolution des deux paramètres.

Déphasage	1 :	2 :	3 :	4 :	5 :
a_1					
b_1					
s_1					
φ_1					

Question 7 : Lorsqu'on appuie 5 fois en quoi est transformé le sinus ? En déduire le déphasage introduit par un clic.

On va maintenant utiliser la représentation en s_n et φ_n .

Question 8 : Revenir sur la fonction sinus puis cocher la case « Mag/Phase view » et relever s_1 et φ_1 dans les mêmes conditions que précédemment.

Quel terme reste constant quelque soit le déphasage ?

Question 9 : Refaire la même expérience avec des signaux triangulaires, dent de scie ou carré. Sans reporter les valeurs (a_n , b_n) et (s_n , φ_n), constater que seuls les s_n ne varient pas lorsque un signal est simplement décalé dans le temps.

Relever s_n et φ_n pour le signal en dent de scie, ces valeurs seront réutilisées à la question 30.

n	0	1	2	3	4	5
s_n						
φ_n						

Dent de scie

La connaissance du spectre en amplitude renseigne donc sur l'allure du signal (carré, triangle, sinusoïdal, rampe,...) , c'est la raison pour laquelle ce dernier est privilégié . On l'appelle **spectre du signal**.

I-4 : Amélioration de la représentation du spectre : échelle logarithmique

Comme vous l'avez constaté à la question 5 en traçant les représentations des signaux triangulaire, dent de scie ou carré, les raies harmoniques ont des amplitudes qui peuvent être très différentes les unes par rapport aux autres .

Pour mieux visualiser un spectre on utilise souvent une échelle logarithmique.

Question 10 : Choisir un signal « triangle », puis cocher la case « Log View » tout en gardant coché la case « Mag/Phase view ».

Relever les amplitudes des s_n , quelle unité est utilisée ? On rappellera sa définition.

Thème 2 :

Analyse Spectrale : principes et outils de mesure

I- Séries de Fourier

- I-1. Bilan du Devoir fait à la maison
- I-2. Visualisation du spectre d'un signal

II – L'Analyseur de spectre

- II-1 : Les réglages verticaux
- II-2 : Les réglages horizontaux
- II-3 : Fonctionnement détaillé d'un analyseur et principaux réglages
 - a. Principe de l'hétérodynage
 - b. Description des principaux réglages
- II-4 : Pour aller plus loin sur l'hétérodynage ou changement de fréquence

III- Exercice d'application (*extrait d'un partiel de S3*)

Objectifs :

L'objectif de ce TD est de **comprendre la décomposition en série de Fourier** puis d'**étudier le fonctionnement d'un analyseur de spectre analogique** par la technique de l'hétérodynage et les principaux réglages associés. Il permet d'analyser les caractéristiques du spectre d'un signal électrique périodique et d'interpréter la relation temps-fréquence de ce dernier.

Pré-requis :

Relation temps-fréquence. Décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique. Filtrage d'ordre 2.

I-1. Bilan du Devoir fait à la maison

I-2. Visualisation du spectre d'un signal

Pour mesurer le spectre d'un signal il faut être capable de le décomposer en fréquence. Pour cela une première idée est d'utiliser un filtre passe-bande avec une bande passante suffisamment étroite pour ne laisser passer qu'une harmonique à la fois.

Comme illustré sur la figure 2, il faut donc que $RBW < f_{\text{fondamentale}}$

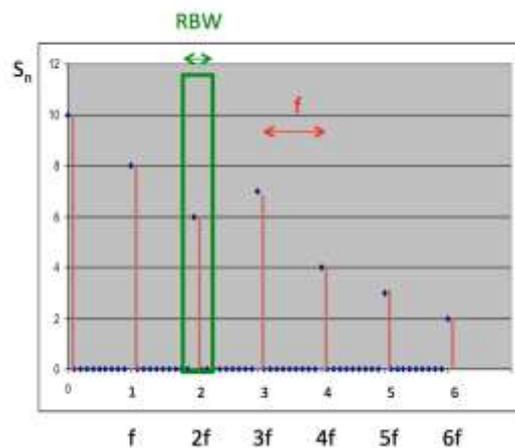


Figure 2

Si on veut visualiser les différentes raies il faudrait disposer soit d'une infinité de tels filtres juxtaposés, c'est à dire avec des fréquences centrales positionnées tous les RBW (Figure 3-a), soit d'un filtre dont la fréquence centrale soit ajustable (figure 3-b).

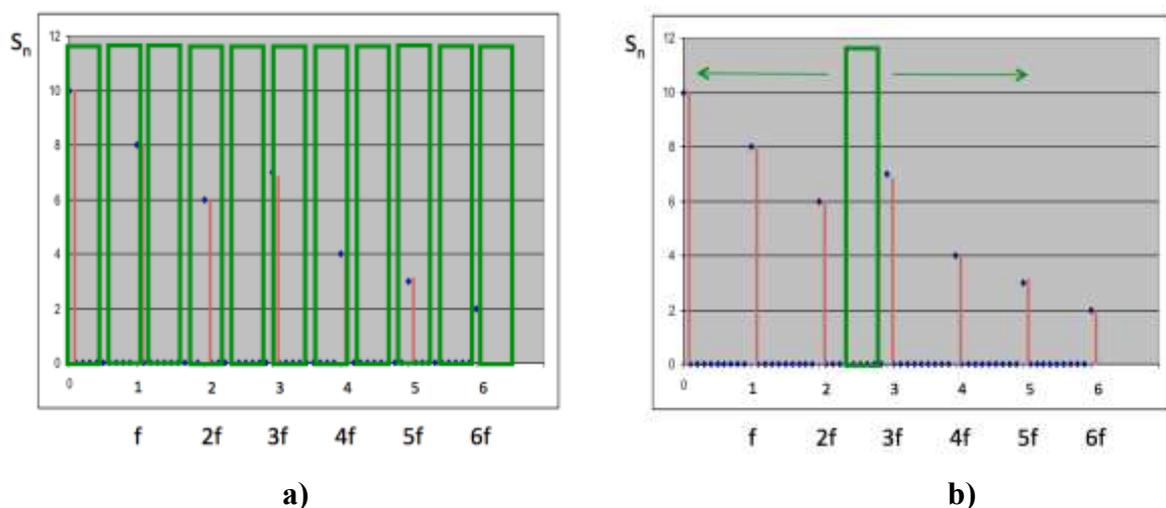


Figure 3 : a) association de nombreux filtres en parallèle et b) un seul filtre glissant

Ces deux solutions sont très difficiles à mettre en œuvre en pratique.

Il existe une autre technique qui elle est très simple de mise en œuvre : le changement de fréquence. Il s'agit ici de faire défiler le spectre du signal devant un filtre fixe (figure 4)

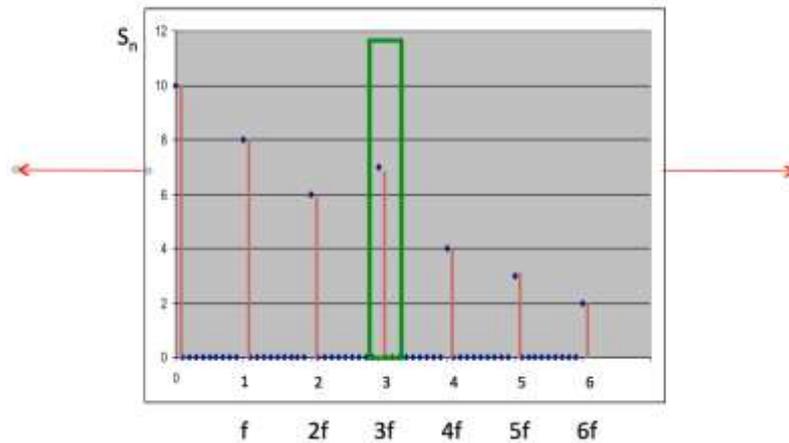


Figure 4 : spectre glissant devant un filtre fixe

le dispositif électronique qui permet de réaliser cette translation du spectre devant le filtre est appelé Mélangeur ou « Mixer » en anglais.

Nous ne rentrerons pas dans les détails du circuit qui permet de réaliser cette fonction, il sera modélisé ici par l'association d'un oscillateur sinusoïdal et d'un multiplieur selon le schéma de la figure 5 :

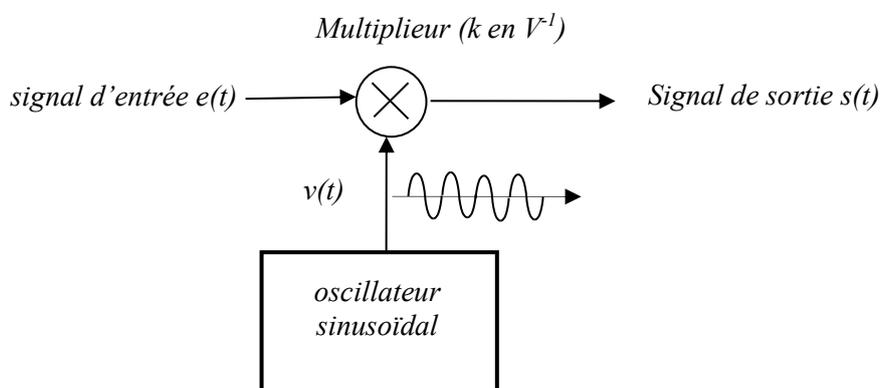


Figure 5 : Mélangeur basique (Mixer an anglais)

Le multiplieur est caractérisé par un facteur $k = 1 \text{ V}^{-1}$, $s(t) = k.e(t).v(t)$

On supposera que $v(t) = V_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $f_0 = 100\text{MHz}$ et $e(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec $f = 1\text{MHz}$.

On rappelle que $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$

Question 11 : Tracer les spectres de $e(t)$ et de $v(t)$.

Question 11 : Calculer le signal de sortie $s(t)$.

Question 12 : Tracer le spectre de $s(t)$

On applique la sortie du Mélangeur à l'entrée d'un filtre passe-bande de fréquence centrale $F_c = 100 \text{ MHz}$ et de bande passante $RBW = 500 \text{ kHz}$ comme indiqué figure 6.

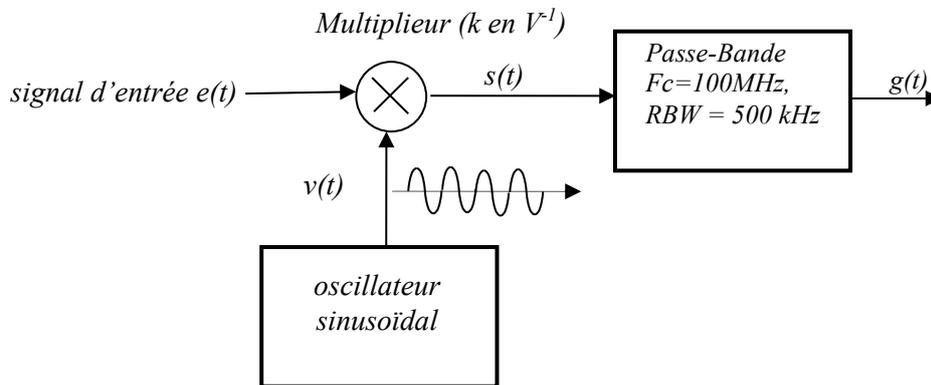


Figure 6 : schéma fonctionnel du mélangeur basique

Question 13 : Tracer le spectre du signal à la sortie du filtre. En déduire l'expression de $g(t)$.

Question 14 : On modifie la fréquence de l'oscillateur sinusoïdal $f_0 = 99 \text{ MHz}$. Tracer le spectre du signal à la sortie du Mélangeur, en déduire le spectre du signal à la sortie du filtre . En déduire l'expression de $g(t)$.

Question 15 : A votre avis pour quelle autre valeur de f_0 , obtiendra-t-on un signal $g(t)$ non nul à la sortie ?

On applique maintenant un signal en dent de scie à l'entrée du mélangeur, dont la fréquence fondamentale est de 1 MHz .

Question 16 : En supposant qu'on ne conserve dans son spectre que les composantes de s_0 à s_5 relevées à la question 9, tracer le spectre du signal $s(t)$ obtenu à la sortie du mélangeur.

II- L'Analyseur de spectre analogique

Pour mesurer le chronogramme d'un signal on utilise un oscilloscope, pour mesurer le spectre d'un signal on utilise un analyseur de spectre (figure 7).

L'analyseur de spectre est un appareil permettant de relever le spectre d'un signal (représentation en fréquence) à partir de l'application d'une tension à l'entrée.



Figure 7 : Face avant d'un analyseur de spectre

Comme sur un oscilloscope, on peut effectuer des réglages verticaux et horizontaux :

- Sensibilité verticale (utilisant plusieurs unités : Volts ou dBm)
- Gamme de fréquence (SPAN)

Mais ici, aussi d'autres paramètres :

- La position de la fréquence centrale (CENTER FREQUENCY)
- La résolution de l'analyse (RBW)
- La vitesse de balayage (SWEEP TIME)

II-1 : Les réglages verticaux

Sur un analyseur de spectre, on peut choisir deux types d'échelle verticale :

- une échelle linéaire (comme sur un oscilloscope) pour laquelle les unités sont le Volt et ses déclinaisons (mV, μ V)
- une échelle logarithmique beaucoup plus utilisée pour laquelle on utilise le décibel comme unité de base.

On va dans un premier temps se focaliser sur les définitions des unités dB, dBm , dBV,...

- Le gain d'un amplificateur s'exprime en dB

Exemple : Si les tensions d'entrée et de sortie d'un amplificateur sont respectivement égales à

10 mV et 100 mV , le gain de l'amplificateur est égale à 10 soit $20 \log_{10} \left(\frac{0,1}{0,01} \right) = 20\text{ dB}$.

- $\text{dBm} = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{Puissance en W}}{10^{-3}\text{ W}} \right)$

Exemple : Une tension de 2 V efficace aux bornes d'une résistance de 50 Ω, la puissance dissipée dans la résistance est égale à : $10 \log_{10} \left(\frac{2^2/50}{10^{-3}} \right) = 19 \text{ dBm}$.

• $dBV = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{tension en V}}{1V} \right)$,

Exemple : A une tension de 2 V correspond $20 \log_{10} \left(\frac{2}{1} \right) = 6 \text{ dBV}$.

Question 17 : A quelle valeur du rapport de deux tensions correspond 0 dB ?

Question 18 : A quelle puissance (en mW) correspond 0 dBm ?

Question 19 : A quelle tension (en Volt) correspond 10 dBV.

Question 20 : Compléter le tableau ci-dessous,

dBm	Tension équivalente pour une résistance de charge de 50 Ω
-10	
-5	
0	224 mV
+5	
+10	
+20	

Question 21 : On donne les valeurs efficaces des composantes spectrales d'un signal périodique dans le tableau ci-dessous. Compléter le tableau.

F (kHz)	n	Valeur efficace du pic s_n (mV)	Puissance en dBm dans 50Ω
5	1	224	
10	2	200	
15	3	10	
20	4	1	
25	5	0,1	

Question 22 : Tracer $|V_{\text{eff}}(f)|$ le spectre en mV de ce signal sur la figure 8.

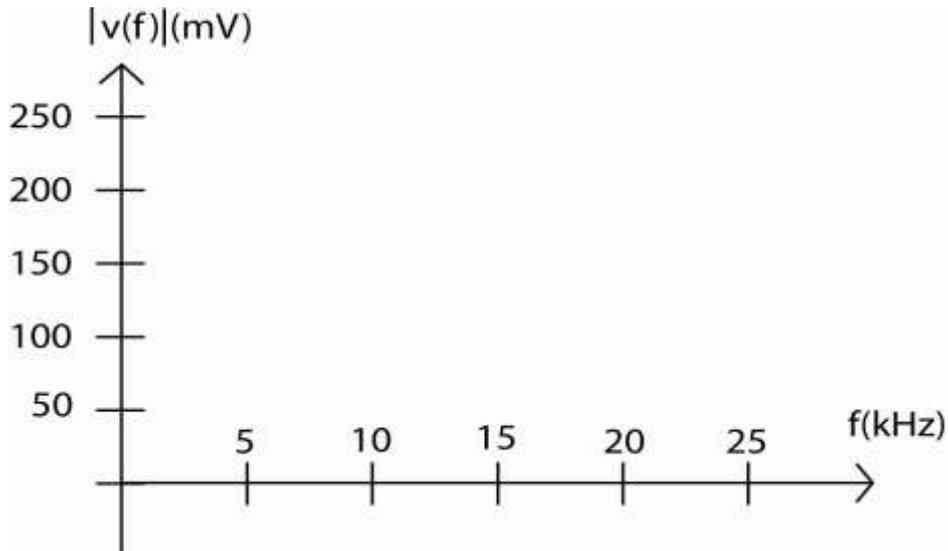


Figure 8

Lorsqu'on souhaite représenter le signal avec une échelle logarithmique, il est nécessaire de positionner un niveau repère appelé niveau de référence. C'est par définition le haut de la fenêtre d'affichage sur l'écran de l'analyseur de spectre. L'échelle est donnée par le nombre de dB par carreau de l'écran. Sur notre exemple, on peut lire « 10dB/ » qui correspond à une sensibilité de 10 décibels par carreaux.

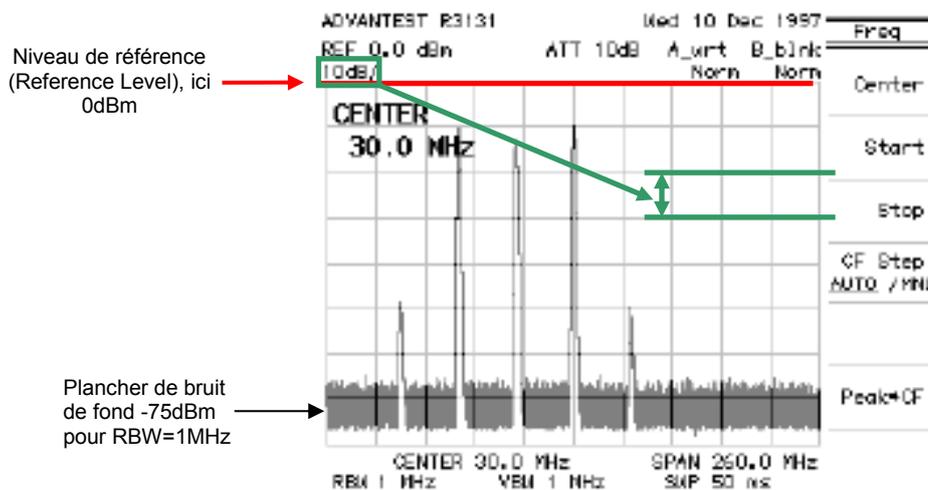


Figure 9 : Exemple d'acquisition d'un spectre et indications associées

Question 23 : En admettant que le niveau de référence est de 0 dBm, calculer le niveau en dBm et en μV correspondant à la ligne au bas de l'écran.

Question 24 : Sur le spectre de la figure 9, on observe un bruit de fond. Déterminer sa valeur « moyenne » en μV .

Question 25 : Sur la figure 10, indiquer la valeur du niveau de référence choisie ainsi que la sensibilité puis **tracer le spectre en dBm** du signal du tableau de la question 21 en supposant qu'un bruit de fond de $10 \mu\text{V}$ se superpose à ce signal.

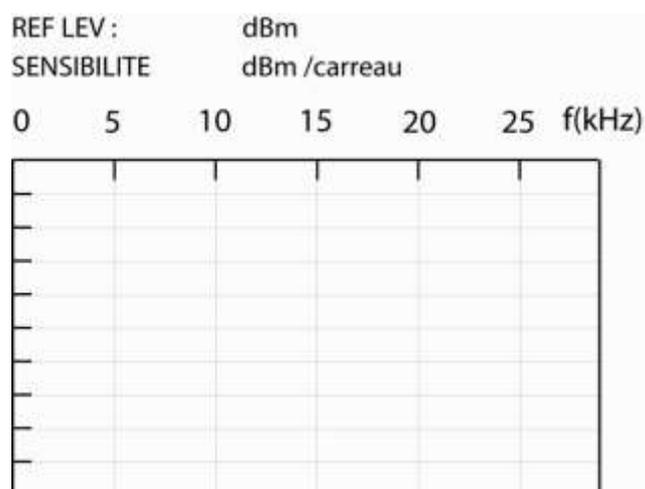


Figure 10

II-2 : Les réglages horizontaux

Pour les réglages horizontaux, deux modes de réglage sont possibles :

- soit on peut préciser les fréquences extrêmes (START FREQUENCY et STOP FREQUENCY),
- soit on entre directement la fréquence centrale et l'étendue en fréquence (CENTER FREQUENCY et SPAN) comme indiqué sur la figure 11.

Question 26 : On considère l'écran représenté en figure 12. Retrouver la valeur des différents réglages horizontaux START, STOP, CENTER FREQUENCY et SPAN. En déduire l'échelle en fréquence par carreau.

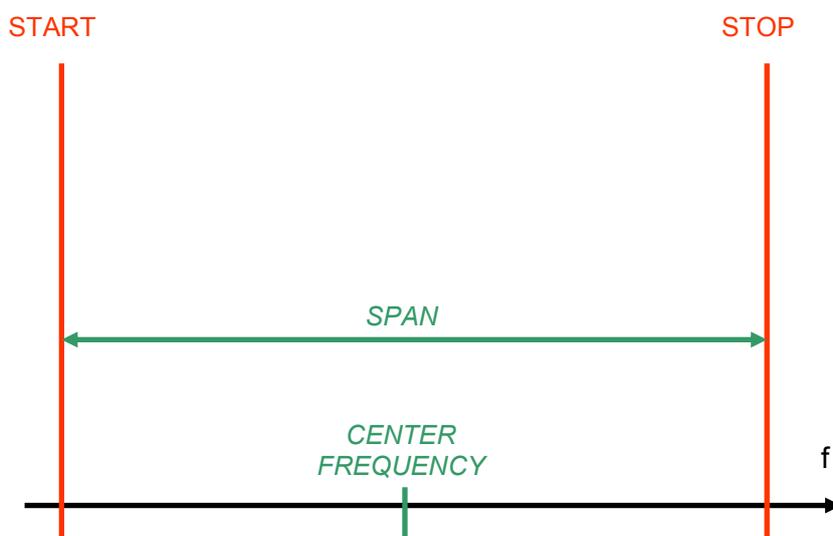


Figure 11

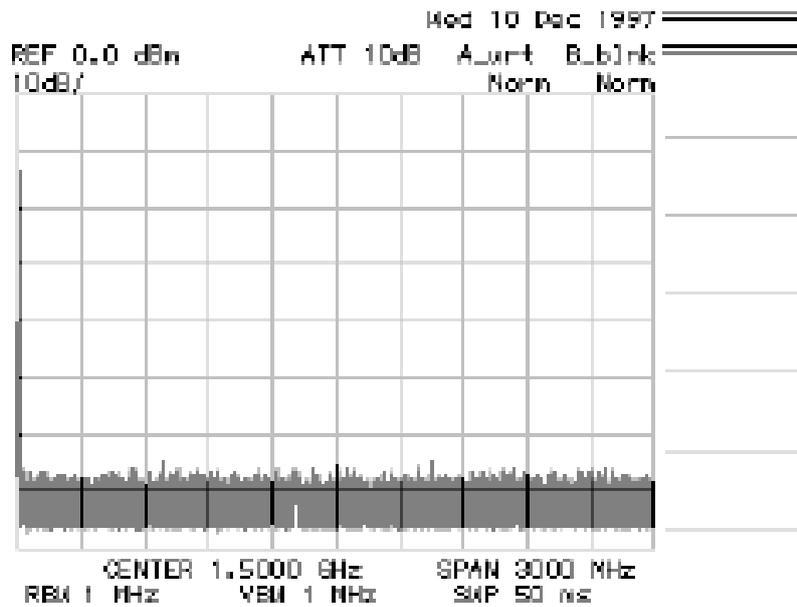


Figure 12

II-3 : Fonctionnement détaillé d'un analyseur et principaux réglages

a : Principe de l'hétérodynage

Si on observe l'écran de la figure 9, on constate que les pics, représentatifs des fréquences contenues dans le signal étudié, ont **une largeur non nulle**. Celle-ci découle des réglages choisis pour les deux paramètres que sont :

- la bande passante de résolution (RBW ou Resolution BandWidth),
- la vitesse de balayage (SWP ou Sweep Time).

Pour comprendre le rôle de ces autres réglages, il faut comprendre le fonctionnement interne de l'analyseur de spectre analogique notamment basé sur **le principe dit de l'hétérodynage**. Cette technique consiste à transposer, par multiplication, les fréquences du signal à observer dans la bande passante d'un filtre passe-bande de fréquence centrale fixe car il est difficile de réaliser un filtre passe-bande de fréquence centrale ajustable par une tension sur une large gamme de fréquences (de quelques kHz à quelques dizaines de GHz) comme le montre la figure 13. *Cette technique est particulièrement bien décrite dans l'ouvrage de Christoph Rauscher, « Fundamental of Spectrum Analysis » publié par Rohde & Schwarz.*

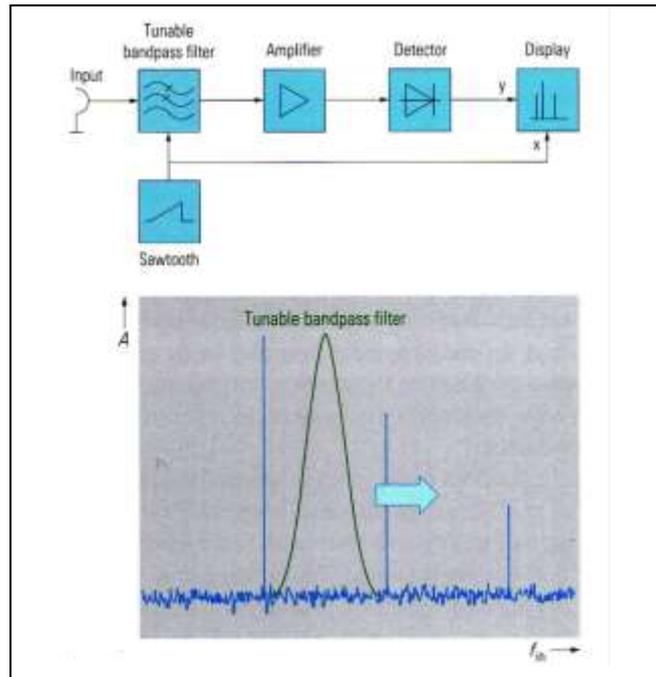


Figure 13 : *Filtre passe-bande ajustable en tension*

Le schéma de principe d'un analyseur de spectre commercialisé est donné en figure 14.

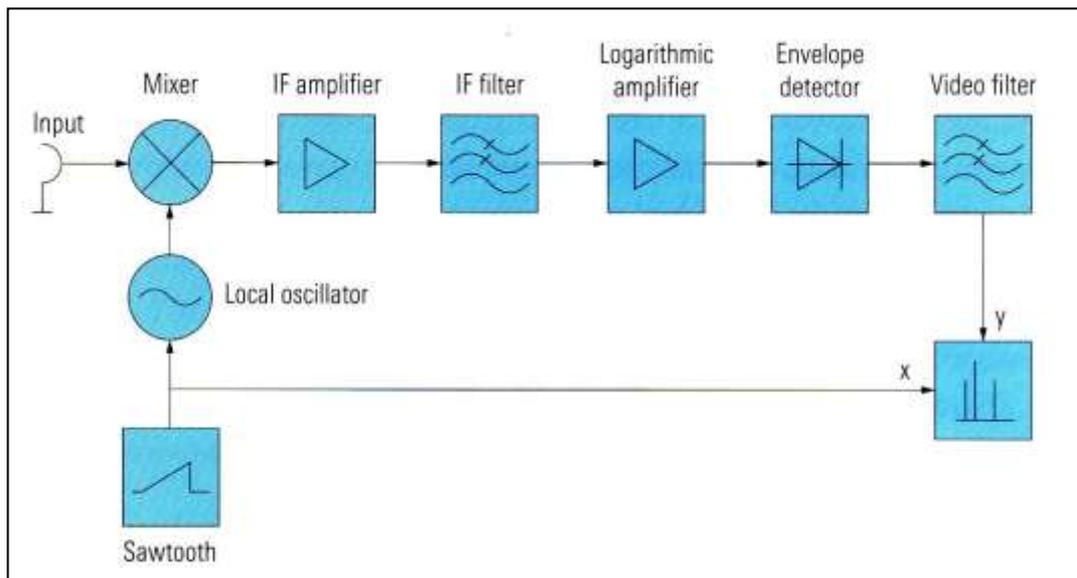


Figure 14 : *Synoptique général d'un analyseur de spectre commercialisé*

Pour des raisons pédagogiques, nous allons étudier une structure simplifiée qui est représentée en figure 15. Elle se base sur :

- un « mixer » dont le rôle est de transposer en fréquence le spectre du signal à analyser
- un oscillateur contrôlé en tension (VCO pour *Voltage Controlled Oscillator*)
- un générateur de dents de scie (encore appelé « Sawtooth »)
- un filtre passe bande
- un détecteur crête
- un oscilloscope utilisé en mode X-Y

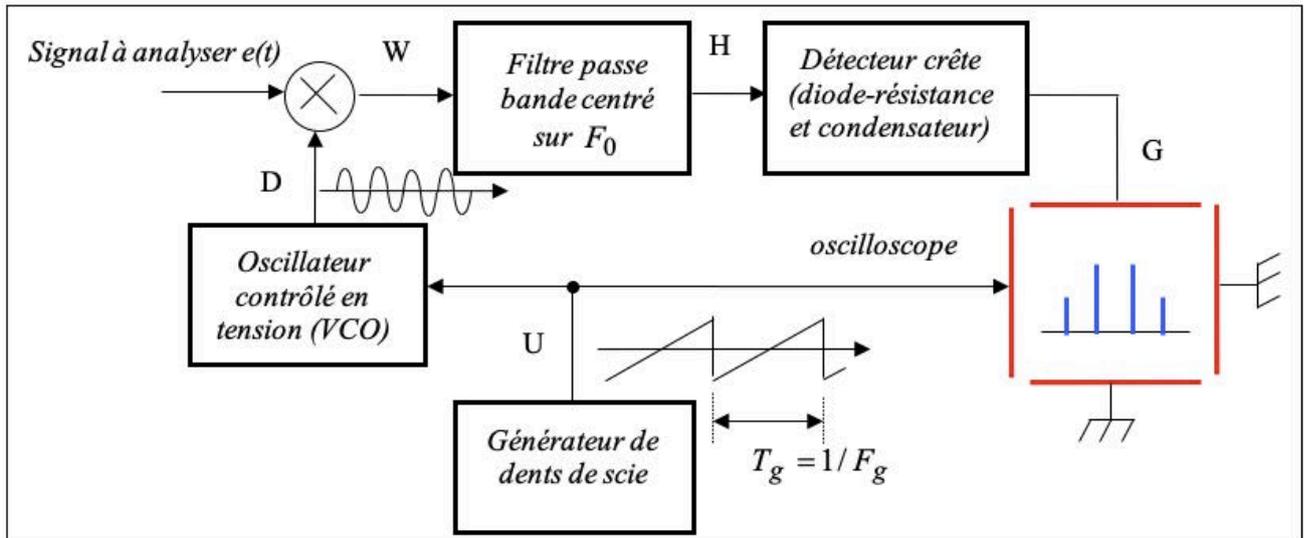


Figure 15 : Synoptique d'un analyseur de spectre

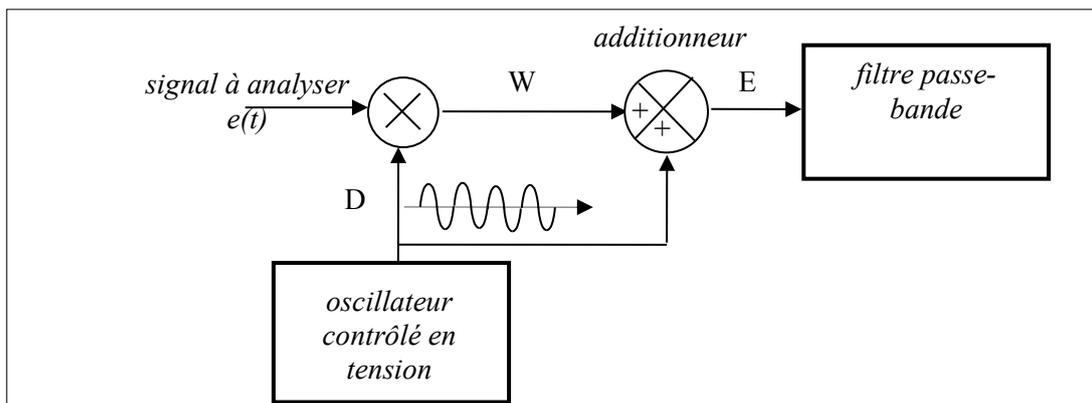


Figure 16 : modélisation du mixer

La caractéristique fréquence-tension du VCO est donnée en figure 12.

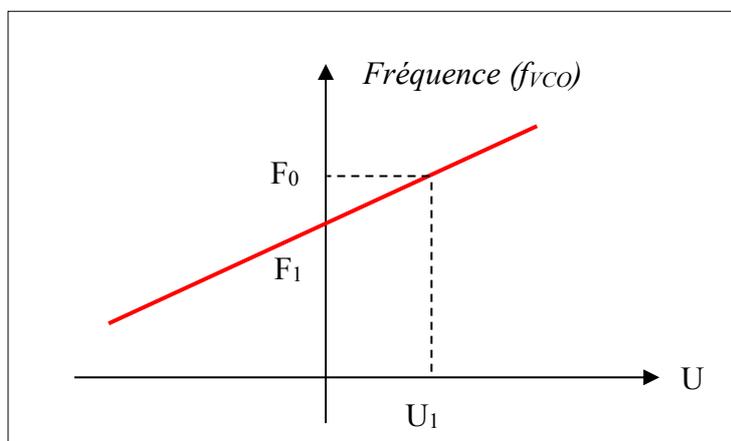


Figure 17 : Caractéristique fréquence-tension du VCO

- Signal à analyser :

Faisons l'hypothèse dans un premier temps que le signal $e(t)$ est de type cosinusoidal soit : $e(t) = A \cos(\omega_e t)$. La fréquence F_e du signal $e(t)$ est égale à 1MHz , son amplitude A est égale à $2V$.

- Générateur de dents de scie :

Pour une tension U_1 donnée du générateur de dents de scie, la fréquence du VCO est égal à F_1 . Les valeurs *max.* et *min.* de la dent de scie sont $+5V$ et $-5V$.

- VCO :

La caractéristiques fréquence – tension du VCO sont : $F_{VCO} = F_0 + aU$ avec $F_0 = 100\text{MHz}$ et $a = 1\text{MHz}/V$. La tension $D(t)$ en sortie du VCO s'écrit: $D(t) = B \cos(\omega_{VCO} t)$ avec $\omega_{VCO} = 2\pi F_{VCO}$. On donne $B = 4V$.

- Filtre passe-bande :

On suppose dans un premier temps un filtre passe bande avec une fonction de transfert idéal du type $\delta(f - F_0)$, c-à-d un filtre qui ne laisse passer que la fréquence $F_0 = 100\text{MHz}$ avec un gain unité.

- Détecteur de crête : On suppose un détecteur crête parfait.

L'écran de l'oscilloscope comprend 10 divisions horizontales et verticales. Le spot est en haut à droite de l'écran quand $U = G = 5V$ et il est en bas à gauche quand $U = G = -5V$.

Question 27 : Ecrire l'expression du signal $W(t)$ en sortie du multiplieur et tracer son spectre. Le circuit multiplieur a une fonction d'appareil $k = 1V^{-1}$.

Question 28 : En déduire l'expression du signal $E(t)$ en sortie du Mixer.

Question 29 : Remplir le tableau ci-dessous et identifier les valeurs U de commande du VCO pour lesquelles les fréquences F_{VCO} , $(F_{VCO}-F_e)$ et $(F_{VCO}+F_e)$ sont égales à 100MHz .

U (V)	Fvco (MHz)	Fvco-F _e (MHz)	Fvco+F _e (MHz)
-5			
-4			
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			
5			

Question 30 : Calculer l'amplitude des 3 composantes spectrales de E(t) à Fvco, (Fvco-F_e) et (Fvco+F_e)

Question 31 : Reporter le graphe observé après l'opération de filtrage et la détection de crête lorsque U varie de -5V à +5V sur l'écran de la figure 18.

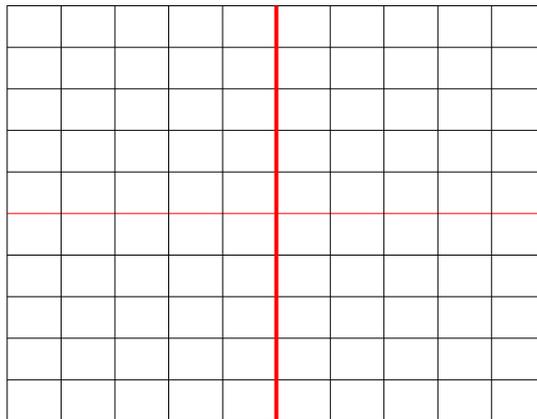


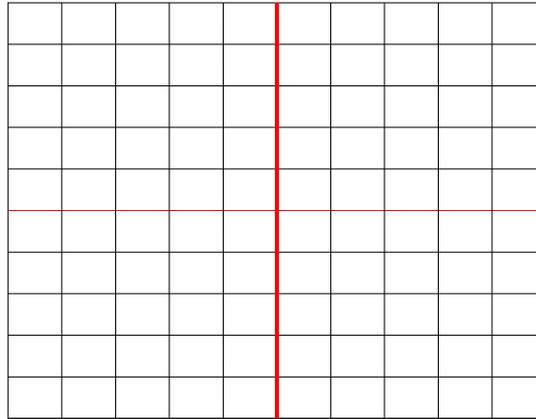
Figure 18 : *Ecran de l'oscilloscope*

b : Description des principaux réglages

- **Réglage « SPAN »**

La pente de la caractéristique fréquence – tension du VCO est maintenant modifiée : $F = F_0 + aU$ avec $F_0 = 100\text{MHz}$ et $a = 0,2\text{MHz/V}$. Les autres valeurs numériques sont inchangées.

Question 32 : Reporter le nouveau spectre obtenu sur l'écran ci-dessous.



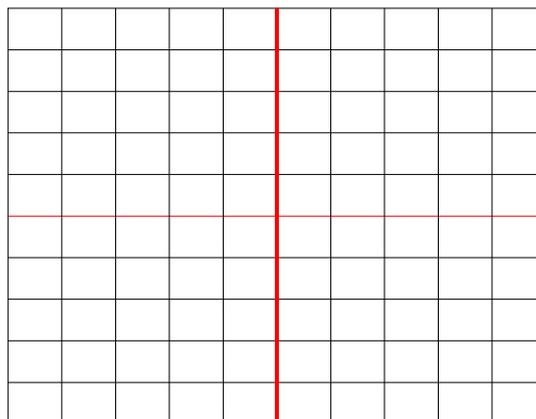
Ecran de l'oscilloscope

Le réglage du « SPAN » permet de gérer l'excursion en fréquence de l'analyse.

- **Réglage « CENTER FREQUENCY »**

L'ordonnée à l'origine de la caractéristique fréquence – tension du VCO est maintenant modifiée : $F = (F_0 + 1\text{MHz}) + aU$ avec $F_0 = 100\text{MHz}$ et $a = 1\text{MHz/V}$. Les autres valeurs numériques sont inchangées.

Question 33 : Reporter le nouveau spectre obtenu sur l'écran ci-dessous.



Ecran de l'oscilloscope

Le réglage du « CENTER FREQUENCY » permet de gérer la position des raies sur l'écran. Il est souvent intéressant d'amener une raie au milieu de l'écran pour pouvoir correctement mesurer son amplitude sur un « SPAN » plus réduit.

Pour information, la figure 19 montre l'influence de ce paramètre sur un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence 2 MHz et d'amplitude 500mV_{pp}.

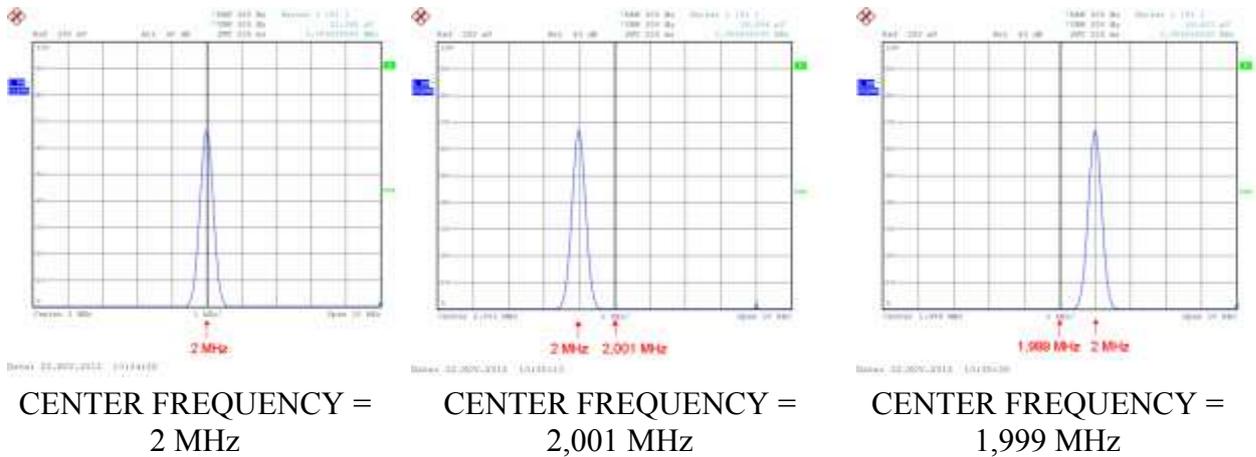


Figure 19 : Influence du réglage « CENTER FREQUENCY »

- Réglage « RBW »

Le filtre passe-bande est réalisé au moyen d'un **convertisseur tension - courant** suivi d'une cellule $L-C$ comme le montre la figure 20. La résistance R représente les pertes du circuit $L-C$ au voisinage de la fréquence $F_0 = 100\text{MHz}$.

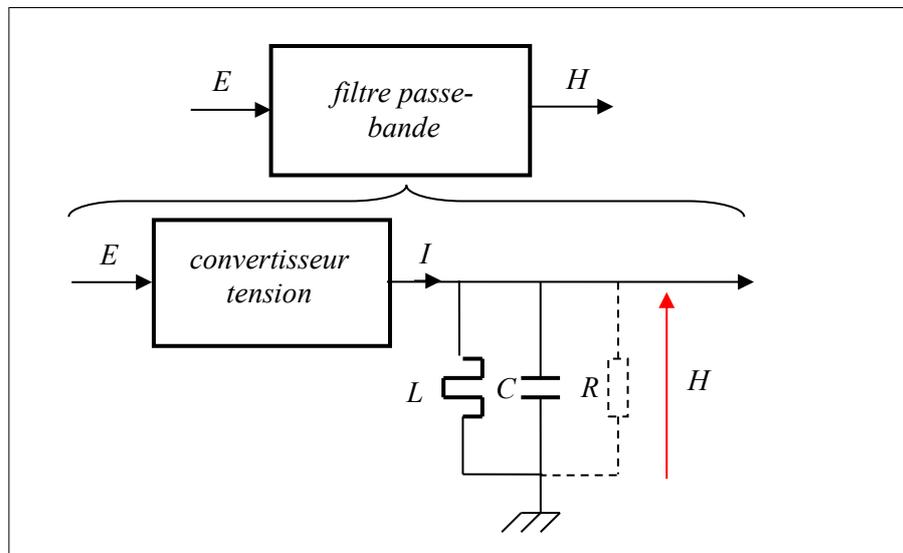


Figure 20 : Réalisation du filtre passe-bande

Question 34 : Pour simplifier, on assimile la courbe de réponse en fréquence du filtre passe-bande à une fonction « porte » comme le montre la figure 21.

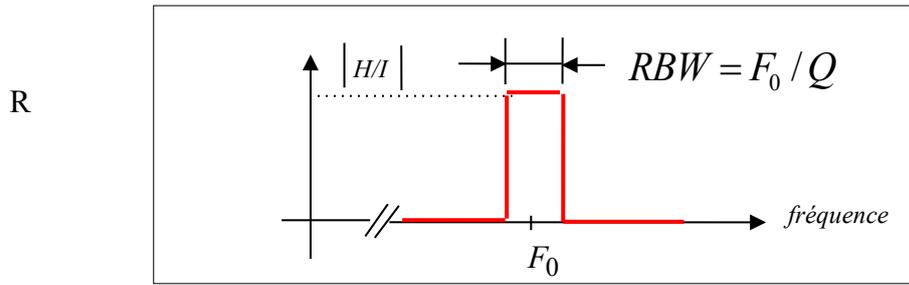
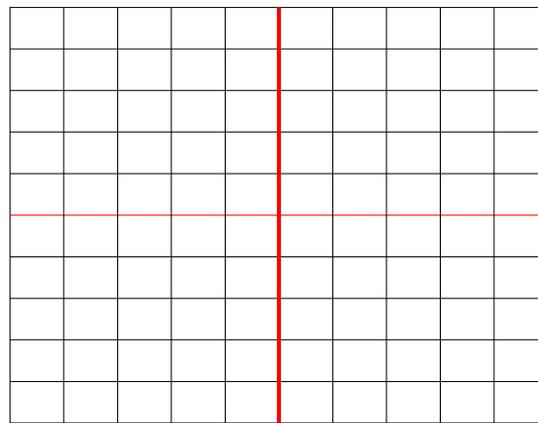


Figure 21 : Approximation de la réponse en fréquence du filtre par une fonction « porte »

Le convertisseur tension – courant à un gain $10^{-5} A/V$, on donne $Q = 500$, $R = 100k\Omega$, reporter le nouveau spectre obtenu sur l'écran ci-dessous. Faites un zoom sur les zones intéressantes.



Ecran de l'oscilloscope

Le réglage de largeur de bande à -3dB correspond à l'influence de la largeur du filtre sur la résolution de l'analyse. Elle est identifiée par la fonction RBW ou « Resolution Bandwidth ». **Pour être efficace, la valeur de RBW doit être inférieure à l'écart minimal entre deux fréquences à observer.**

Pour information, la figure 22 illustre l'influence de la largeur RBW sur la différenciation entre deux signaux sinusoïdaux de 10,001 MHz et 10,0005 MHz et de même amplitude ($\Delta f = 500\text{Hz}$). L'analyse est faite avec un SPAN constant de 10 kHz.

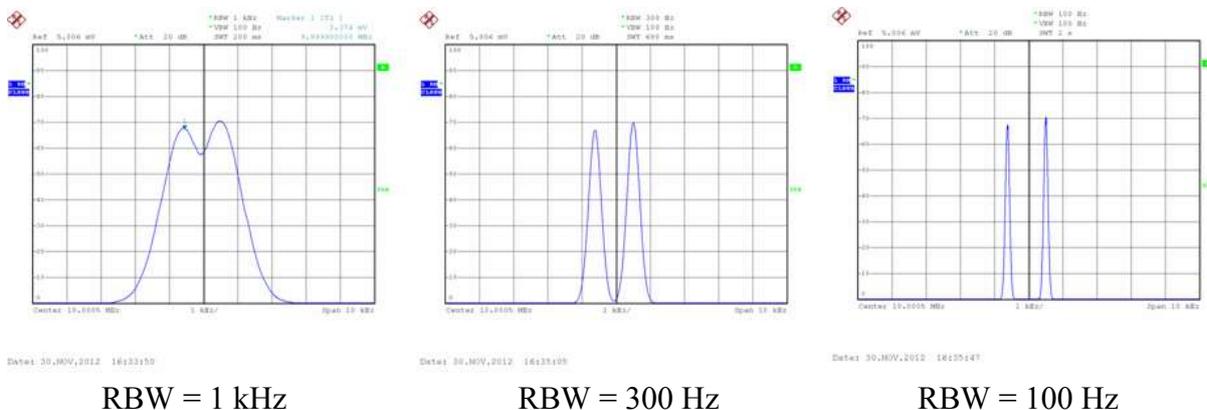


Figure 22 : Influence du réglage « RBW »

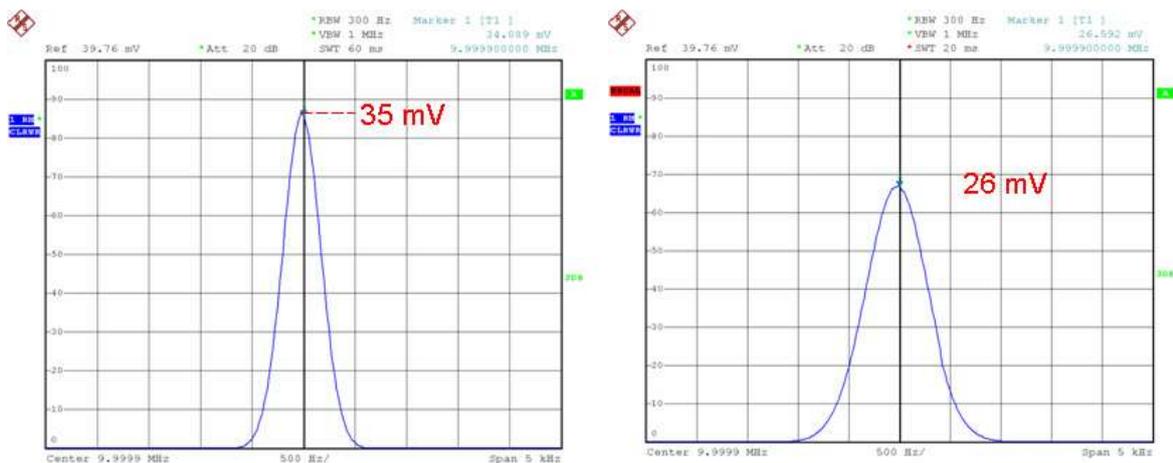
Il est bien évident que plus RBW est faible et meilleure sera la résolution mais plus important sera le temps de balayage. Ce compromis doit être réglé avec le paramètre « SWEEP TIME ».

- **Réglage « SWEEP TIME »**

La caractéristique du VCO est : $F = (F_0 + 1\text{MHz}) + aU$ avec $F_0 = 100\text{MHz}$ et $a = 0,2\text{MHz/V}$, la fréquence du signal $e(t)$ est inchangée.

Question 35 : Représenter l'allure des signaux E, H et G sur une période $T_g = 1/F_g$ du générateur de dents de scie. On a évidemment intérêt à disposer du spectre le plus rapidement possible, a priori il suffit donc de prendre T_g (SWEEP TIME) faible. En pratique T_g est d'autant plus grand que la bande passante F_0/Q du filtre passe bande (RBW) est étroite, chercher à expliquer pourquoi.

Pour information, la figure 23 présente l'influence du temps de balayage sur le spectre d'un signal sinusoïdal d'amplitude 100mVpp ($V_{\text{eff}} = 35\text{mV}$) et de fréquence 10 MHz.



Date: 29.NOV.2012 20:22:54

SWT = 60 ms
RBW = 300 Hz

On mesure la valeur attendue.

Date: 29.NOV.2012 20:23:56

SWT = 20 ms
RBW = 300 Hz

On ne mesure pas la valeur attendue.
L'appareil indique « UNCAL »

Figure 23 : Influence du réglage « SWEEP TIME »

On peut montrer que le temps de balayage et la résolution doivent respecter la relation ci-dessous où k est une constante qui dépend de la forme du filtre passe-bande. En général la valeur de k est de l'ordre de 1 à 3 suivant le type de filtre.

$$SWT \propto \frac{k \cdot SPAN}{RBW^2}$$

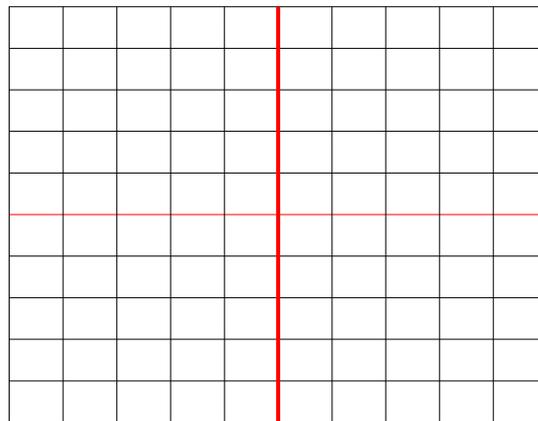
En pratique, l'analyseur de spectre définit automatiquement le SWT en fonction du RBW pour respecter la relation précédente.

II-4 : Pour aller plus loin sur l'hétérodyne

Pour approfondir l'étude du changement de fréquence fonction très importante en électronique nous allons nous intéresser à la transformation introduite par le « mixer » sur un signal plus complexe : le signal $e(t)$ appliqué au circuit de la figure 16 est maintenant de type dent de scie, sa fréquence fondamentale est de 50 kHz, son amplitude varie de -1V à +1 V.

Le signal du VCO est inchangé $D(t) = B \cos(\omega_{VCO} t)$ avec $\omega_{VCO} = 2\pi F_{VCO}$. On donne $B = 4V$ et $F_{VCO} = 100$ MHz.

Question 36 : En réutilisant les résultats de la question 9 tracer le spectre du signal en dent de scie sur la figure 24.

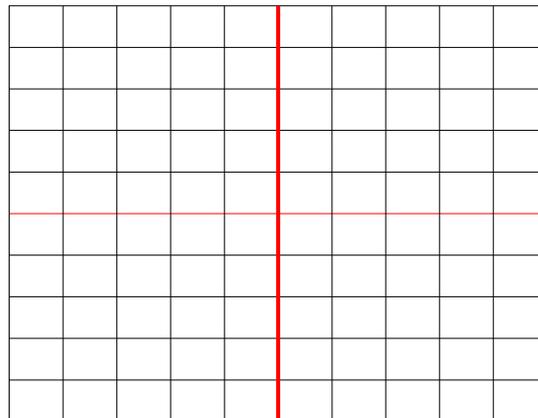


échelle horizontale de 0 à 250 kHz

échelle verticale de 0 à 1V

Figure 24 : spectre du signal en dent de scie $f_{\text{fondamentale}} = 50$ kHz

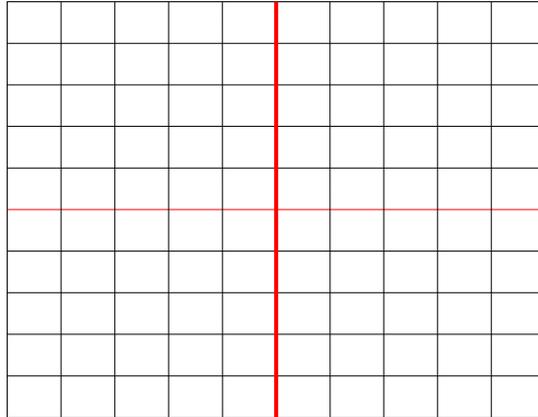
Question 37 : Tracer le spectre du signal $W(t)$ sur la figure 25 en précisant les échelles choisies



échelle horizontale : de à
 échelle verticale de à V

Figure 25 : spectre du signal $W(t)$

Question 37 : Tracer le spectre du signal $E(t)$ sur la figure 26 en précisant les échelles choisies



échelle horizontale : de à
échelle verticale de à V

Figure 26 : spectre du signal $E(t)$

Question 38 : Quelle résolution choisir pour le filtre passe bande pour bien séparer les différentes raies. Quelle valeur proposer pour SWT ?

Question 39 : Quelle transformation globale est opérée par le « mixer » ?

On enfonce le clou

Question 40 : Si on applique à l'entrée de notre « mixer » le signal dont le spectre compris entre F_{\min} et F_{\max} est représenté figure 27, tracer le spectre du signal à la sortie du « mixer » en précisant les fréquences limites.



Figure 27

A RETENIR : Il faut donc retenir :

- Que le spectre d'un signal périodique est une succession de raies à différentes fréquences : une raie à fréquence nulle qui correspond à la valeur moyenne du signal, une raie à la fréquence du signal (fréquence fondamentale), puis des raies aux fréquences multiples de la fréquence du signal appelées harmoniques.
- Qu'un signal sinusoïdal présente un spectre qui ne contient qu'une seule raie.
- Qu'un analyseur de spectre déterminant le spectre (représentation fréquentielle) de signaux analogiques fonctionne sur le principe de l'hétérodynage (technique qui consiste à transposer, par multiplication à un oscillateur contrôlé en tension (VCO), les fréquences du signal à observer dans la bande passante d'un filtre passe-bande de fréquence centrale fixe. Les principaux paramètres sont : les réglages verticaux d'amplitude (en tension ou en puissance) et les réglages horizontaux (SPAN, CENTER FREQUENCY, RBW, SWEEP TIME) qui doivent être assimilés pour effectuer une interprétation pertinente du spectre acquis.
- Le changement de fréquence permet de reproduire le spectre d'un signal de part et d'autre de la fréquence d'un oscillateur HF.

III- Exercice d'application (extrait d'un partiel de S3)

Q1- Quelle est la puissance contenue dans chaque raie du signal dont le spectre est tracé en figure 1 ?

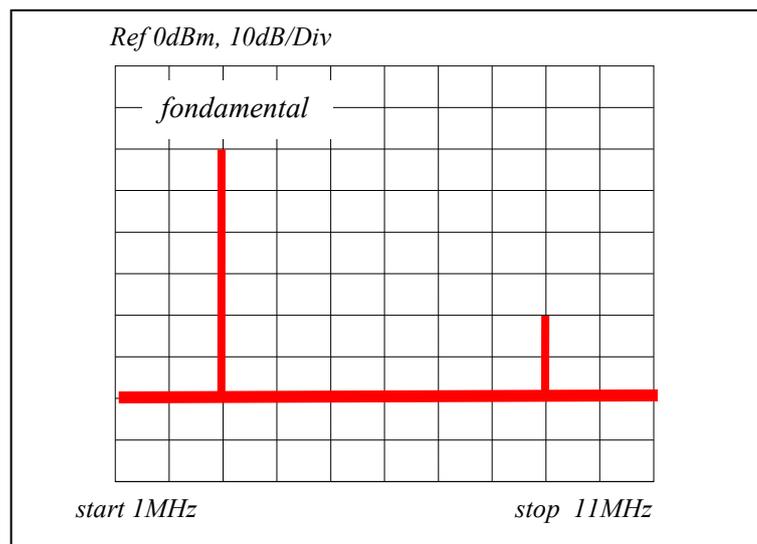


Figure 1 : Spectre du signal

Q2- En déduire les valeurs efficace U_{eff} et crête U_C du fondamental sachant que l'impédance d'entrée de l'analyseur de spectre est égale à 50Ω .

Q3- Calculer la valeur du taux de distorsion D du signal (en %).

Q4- Un analyseur de spectre est attaqué par le signal suivant :

$$e(t) = 2 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^4 t) + 3 \cdot \cos(2\pi \cdot 10,1 \cdot 10^3 t)$$

Q4-a) Rappeler ce que représente la fonction "RBW" d'un analyseur de spectre.

Q4-b) Donner la valeur, en la justifiant, du RBW pour observer deux pics distincts sur l'écran de l'analyseur de spectre.

TP d'électronique:
Analyseur de spectre hétérodyne

I- Prise en main de l'appareil

II- Spectre d'un signal sinusoïdal

III- Spectre d'impulsions périodiques

Annexe

Vu en TD : Un analyseur de spectre permet de déterminer le spectre (représentation fréquentielle) de signaux analogiques fonctionne sur le principe de l'hétérodynage (technique qui consiste à transposer, par multiplication à un oscillateur contrôlé en tension (VCO), les fréquences du signal à observer dans la bande passante d'un filtre passe-bande de fréquence centrale fixe. Les principaux paramètres sont :

- les réglages verticaux d'amplitude (en tension ou en puissance),
- les réglages horizontaux (SPAN, CENTER FREQUENCY, RBW, SWEEP TIME).

Ces paramètres doivent être assimilés pour effectuer une interprétation pertinente du spectre acquis.

I- Prise en main de l'équipement

L'analyseur de spectre utilisé est un équipement de Rohde & Schwarz (9kHz-6GHz) capable de mesurer le spectre d'un signal (représentation en fréquence) à partir de l'application d'une tension en entrée. Comme sur un oscilloscope, on peut effectuer des réglages verticaux et horizontaux :

- Sensibilité verticale (utilisant plusieurs unités : Volts ou dBm)
- Gamme de fréquence (SPAN)

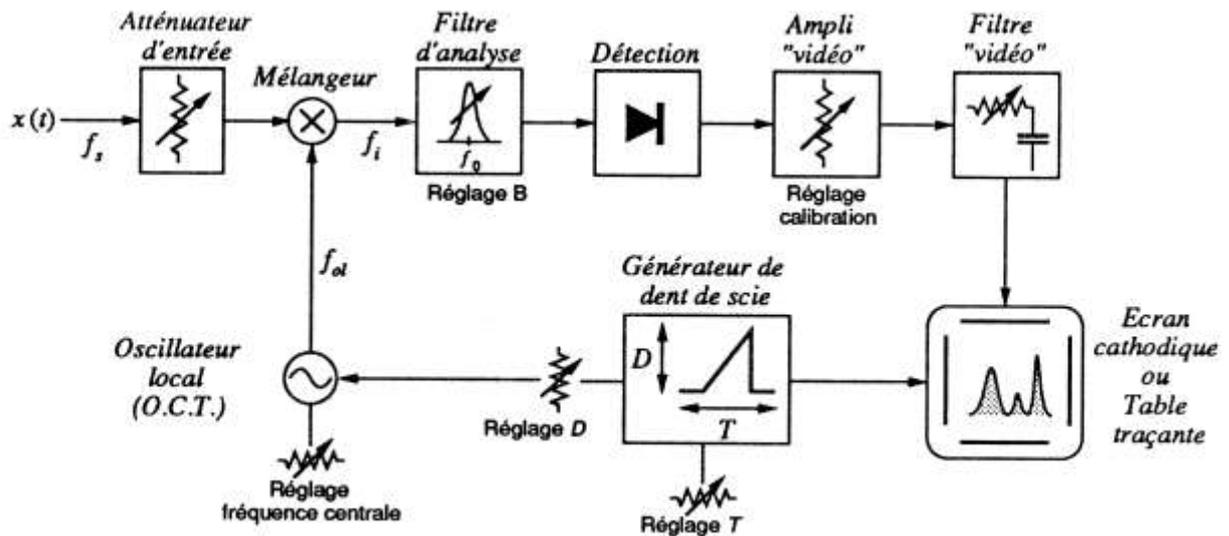
Mais ici, aussi d'autres paramètres :

- La position de la fréquence centrale (CENTER FREQUENCY)
- La résolution de l'analyse (RBW)
- La vitesse de balayage (SWEEP TIME)



Figure 1 : Face avant d'un analyseur de spectre

Le synoptique simplifié est le suivant :



Question préliminaire :

-Tracer le spectre d'un sinus de fréquence 2MHz d'amplitude 200mV crête-à-crête.
-Appliquer maintenant un signal de fréquence 2MHz d'amplitude 200mV crête-à-crête à l'entrée de l'analyseur (!! configurer l'impédance de sortie du générateur sur 50Ohm. Attention à régler le générateur AVANT de le raccorder à l'analyseur).

On réglera l'analyseur avec les paramètres suivants :

- Fréquence START FREQ égale à 0MHz (ou fréquence minimum de l'instrument, le cas échéant)
- STOP FREQ égale à 3 MHz
- LEVEL en linéaire, UNIT en Volt
- REF LEVEL à 100mV
- Résolution RBW en manuel (non automatique) à 100kHz
- Vitesse de balayage SWEEP en automatique

-Tracer le spectre mesuré sur le graphique précédent. Observez-vous une différence ? Pourquoi ? relevez le SWEEP TIME (SWT) utilisé par l'appareil

- Faire varier le RBW pour obtenir un spectre plus proche de la théorie. Quelle est maintenant le SWEEP TIME ? Conclure sur le compromis RBW-SWT.

Question 1 :

Débrancher le câble, on doit **observer** une moitié de pic centrée sur 0Hz en ajustant au mieux la sensibilité verticale. **Expliquer** la présence de ce pic en vous référant aux éléments explicités en cours et TD. Expliquer ce qui fixe la largeur de ce pic.

Question 2 : L'impédance d'entrée de l'analyseur est égale à 50Ω . Pour ne pas détruire l'étage d'entrée de l'analyseur, la puissance ne doit en général ne pas dépasser $+15dBm$ (cette valeur peut varier d'un instrument à l'autre), en déduire la **valeur efficace maximale** de la tension d'entrée.

II- Spectre d'un signal sinusoïdal

Pour se familiariser avec l'appareil on commencera par des mesures sur un signal sinusoïdal.

Question 3 : **Appliquer** maintenant une tension de 1V crête à crête et de fréquence 2 MHz **Ajuster** le SPAN et le LEVEL (échelle linéaire) pour observer correctement le pic et ses harmoniques.

Question 4 : **Amener**, en modifiant FREQ, la raie de fréquence 2 MHz au centre de l'écran, **diminuer** la valeur du RBW en passant en mode manuel et **diminuer** le SPAN pour obtenir un « joli » pic, vous devez observer que la largeur du pic est du même ordre de grandeur que le RBW. **Choisir** le RBW le plus faible possible et **mesurer** l'amplitude du pic à 2 MHz (**fondamental**), **comparer** cette valeur à la valeur crête de 1 V du générateur, conclusion sur la quantité mesurée.

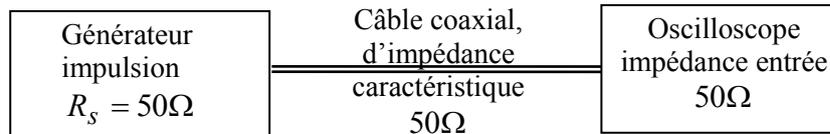
Question 5 : **Garder** le RBW le plus faible possible et le SPAN adapté, **amener** FREQ successivement à 4 MHz, 6 MHz et 8 MHz pour **mesurer** les amplitudes des différents **harmoniques**, il faut bien sur adapter la sensibilité (LEVEL) à chaque fréquence. En **déduire** le **taux de distorsion** du générateur (cf. le cours pour la définition du taux de distorsion).

Question 6 : **Faire** le même travail en choisissant l'échelle **logarithmique**. **Retrouver** la valeur du taux de distorsion, faites bien attention à la manipulation des dB et dBm.

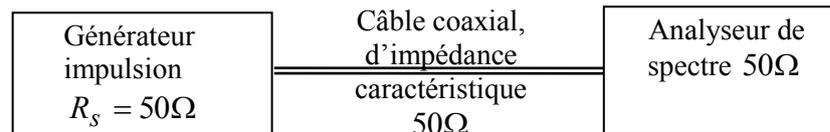
III- Spectre d'impulsions périodiques

III-1/ Régler le générateur pour obtenir des impulsions E1 d'amplitude 1V (positive), de période $T = 1\mu s$ et de largeur $0,2\mu s$. **Observer** les impulsions avec un oscilloscope d'impédance d'entrée 50Ω ; si l'oscilloscope a une impédance d'entrée de $1M\Omega$, **utiliser** une charge by-pass de 50Ω .

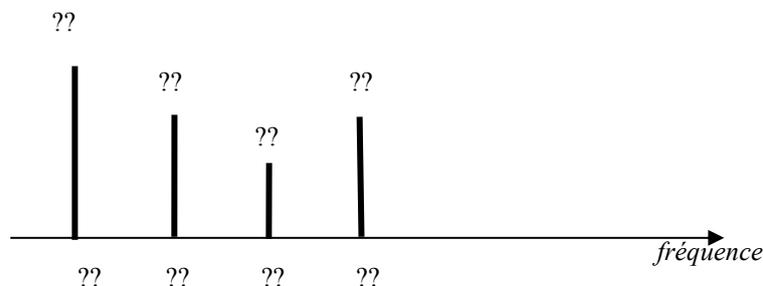
Question 7 : **Calculer** la **valeur efficace** du signal et la **puissance** dissipée, en W et en dBm, dans la résistance de 50Ω de l'oscilloscope.



Question 8 : **Observer** le spectre obtenu et **mesurer** les amplitudes en Volts du **fondamental** et des **harmoniques de rang 2, 3, 4, 5 et 6**.



Question 9 : **Faire** un graphe du spectre où vous ne reporterez que les raies comme ci-dessous :



En vous aidant de l'annexe, ou du cours, **calculer** la valeur théorique du rapport $\frac{\text{amplitude fondamentale}}{\text{amplitude harmonique 3}}$ et **comparer** à la valeur expérimentale.

Question 10 : **Calculer** la valeur analytique de la puissance, en W et en dBm, dissipée par le fondamental, **comparer** cette valeur à celle donnée par l'analyseur de spectre. **Déterminer**, en %, le rapport :

$$\frac{\text{Puissance fondamentale}}{\text{puissance totale}}$$

III-2/ Régler maintenant le générateur pour obtenir des impulsions E2 d'amplitude 1V (positive), de période $T = 1 \mu s$ et de largeur $0.5 \mu s$. **[BONUS]**

Question 11 : **Observer** le spectre obtenu et **mesurer** les amplitudes en Volts du **fondamental** et des **harmoniques de rang 2, 3, 4, 5 et 6**.

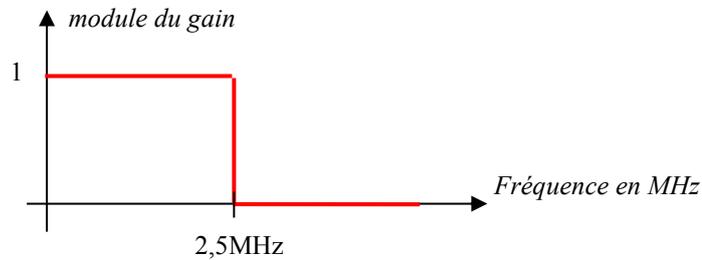
Faire le graphe comme précédemment en utilisant les mêmes échelles.

Question 12 : **Calculer** la puissance dissipée, en W et en dBm, dans la résistance de 50Ω de l'oscilloscope ou de l'analyseur de spectre.

Question 13 : Calculer la valeur analytique de la puissance, en W et en dBm, dissipée par le fondamental, comparer cette valeur à celle donnée par l'analyseur de spectre. Déterminer, en %, le rapport :

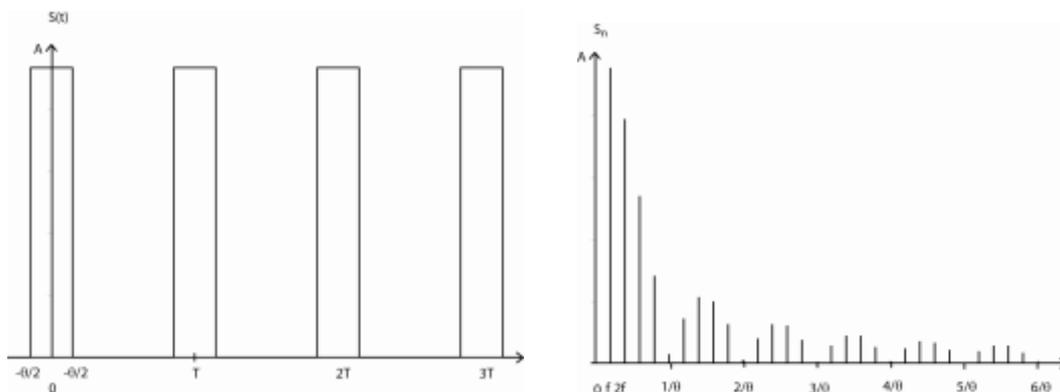
$$\frac{\text{Puissance fondamentale}}{\text{puissance totale}}$$

Les signaux E1 et E2 sont passés dans un filtre « théorique » dont le module du gain en fonction de la fréquence est donné ci-dessous :



Question 14 : Ecrire, pour les signaux E1 et E2, les expressions mathématiques des signaux S1 et S2 en sortie du filtre (on laissera « tomber » les termes de phase) ; lequel des deux signaux S1 ou S2 est le plus près d'une sinusoïde ? Justifier votre réponse.

-----Annexe-----



Chronogramme et Spectre d'impulsions périodiques

Séries de Fourier

Toute fonction périodique peut s'écrire comme une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences $f, 2f, 3f, \dots$ où f est l'inverse de la période de la fonction

Première écriture :

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \cos(n\omega t) + a_n \sin(n\omega t)]$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

Seconde écriture :

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_n) = a_n/b_n \text{ et } s_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

Taux de distorsion

Le taux de distorsion d'un signal est défini par la relation suivante :

$$D = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} s_n^2}}{s_1}$$

Spectre d'impulsions périodiques

Le développement en série de Fourier donne :

$$v(t) = Af\theta + 2Af\theta \left[\frac{\sin(\pi f\theta)}{\pi f\theta} \times \cos(\omega t) + \frac{\sin(2\pi f\theta)}{2\pi f\theta} \times \cos(2\omega t) + \frac{\sin(3\pi f\theta)}{3\pi f\theta} \times \cos(3\omega t) + \dots \right]$$

Le chronogramme et le spectre de ces impulsions sont donnés page suivante.