Filtrage numérique

algorithme, fonction de transfert, …

Claude Pellet, François Augereau

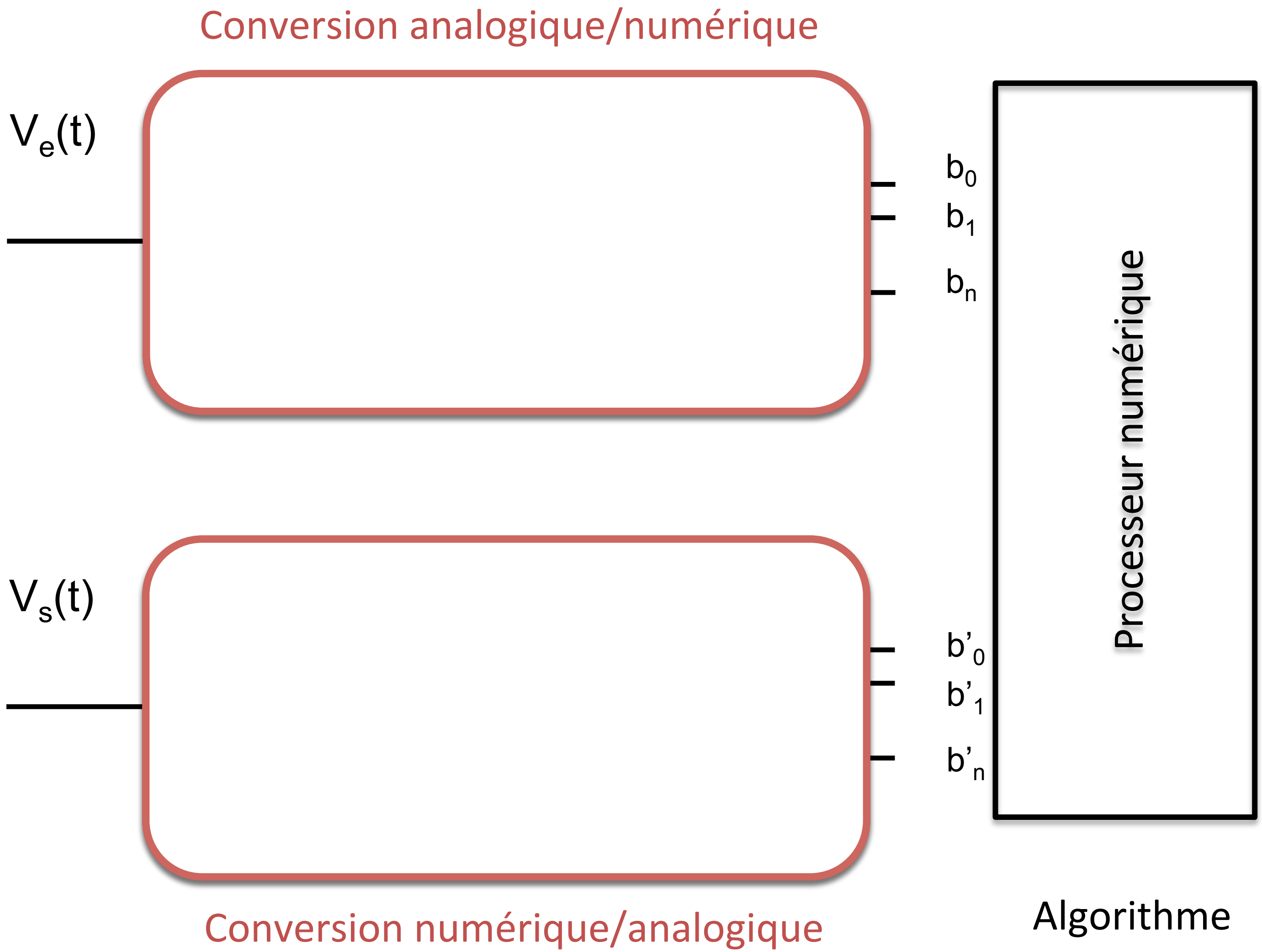
2016-2017

Le filtrage numérique

Le filtrage numérique, comme tout traitement numérique, est un calcul réalisé à l'aide d'un algorithme sur des échantillons d'un signal analogique.

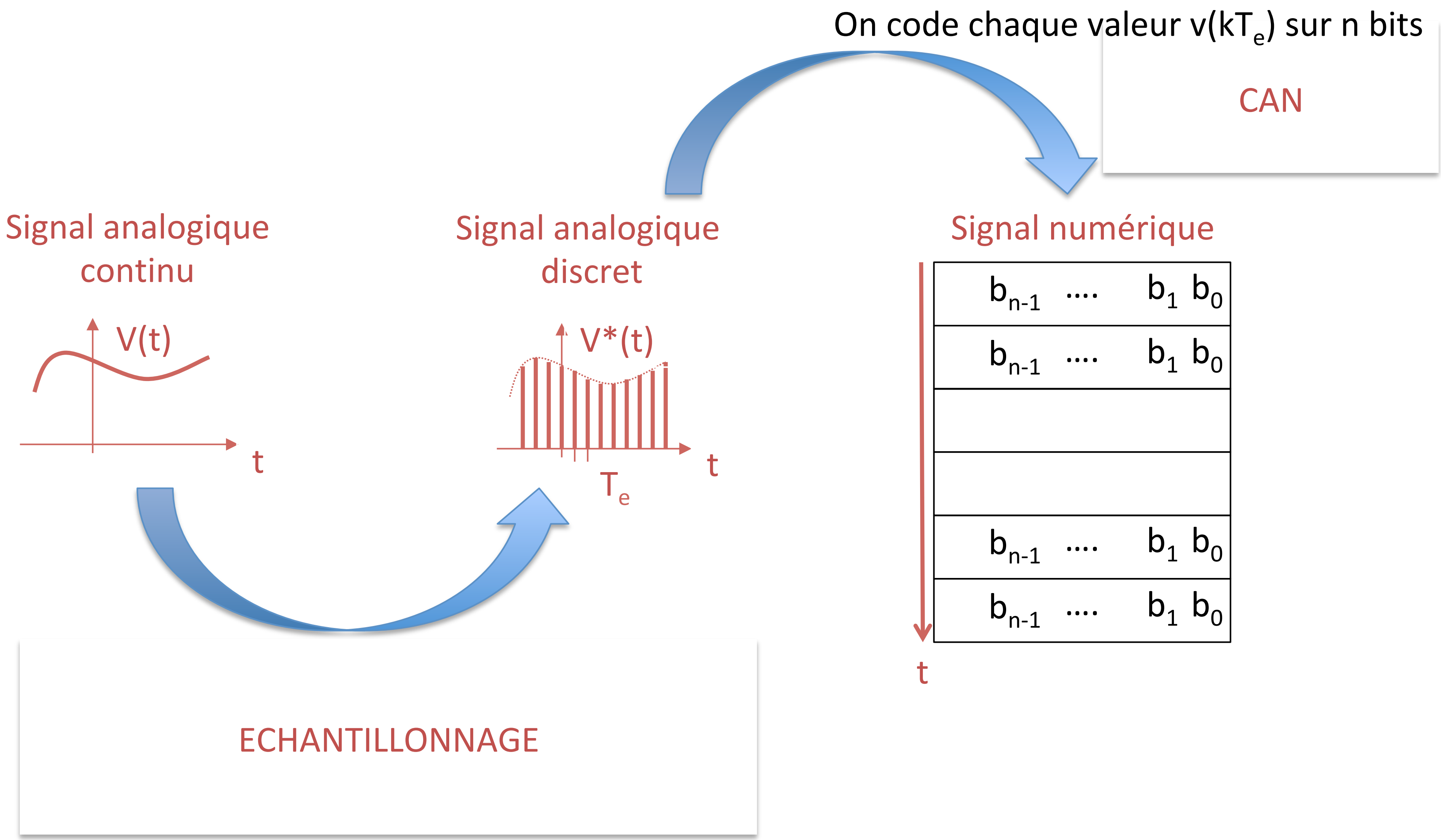
Cela suppose donc un échantillonnage, une conversion analogique numérique, le traitement proprement dit, la conversion numérique analogique…

Chaine traitement de l’information

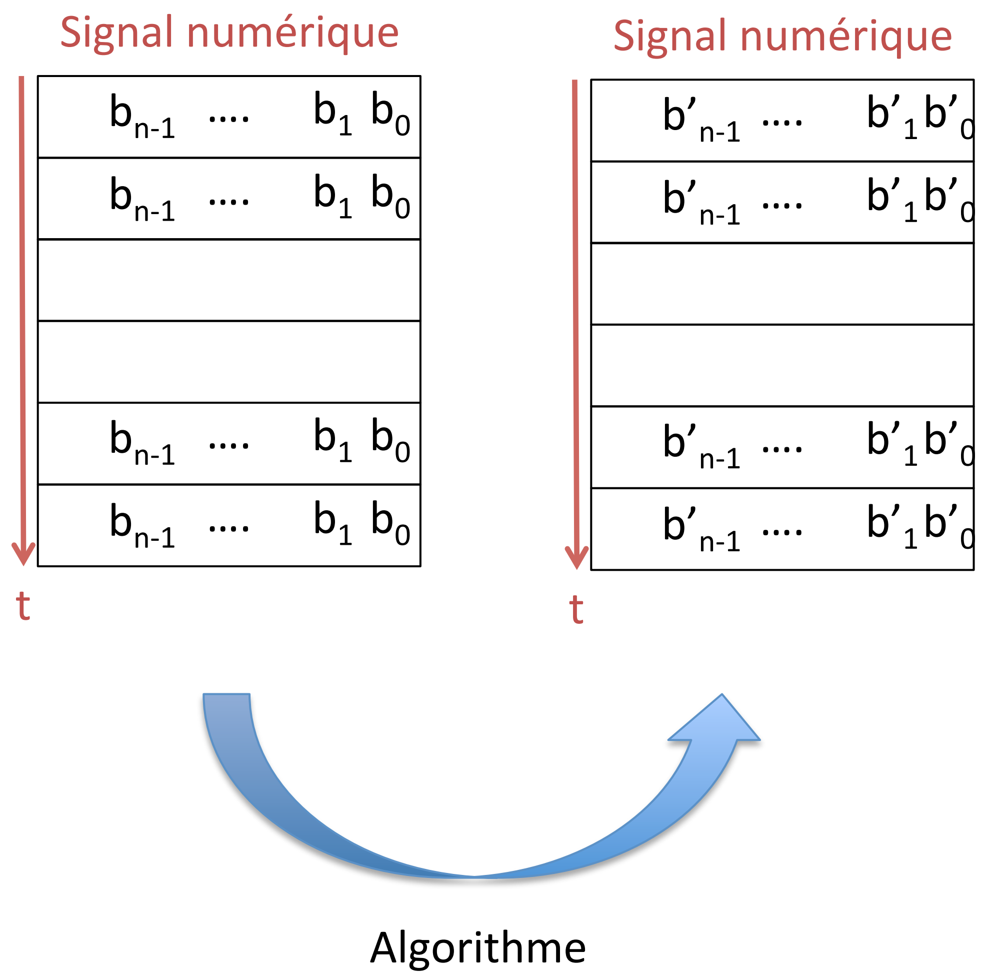


Le filtrage numérique est un effectué par l’exécution d’un algorithme

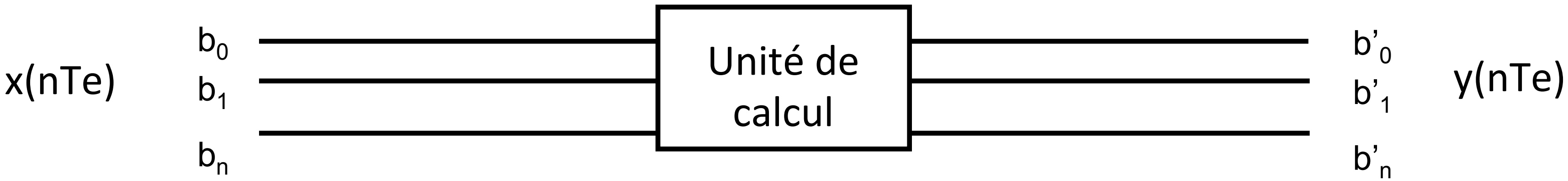
transformation Analogique Numérique

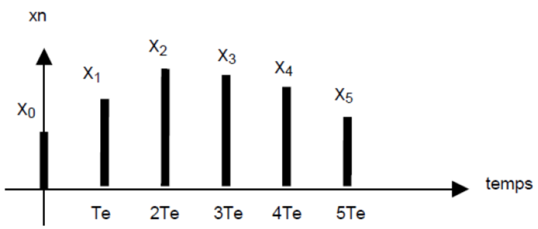


Filtrage numérique



L'algorithme

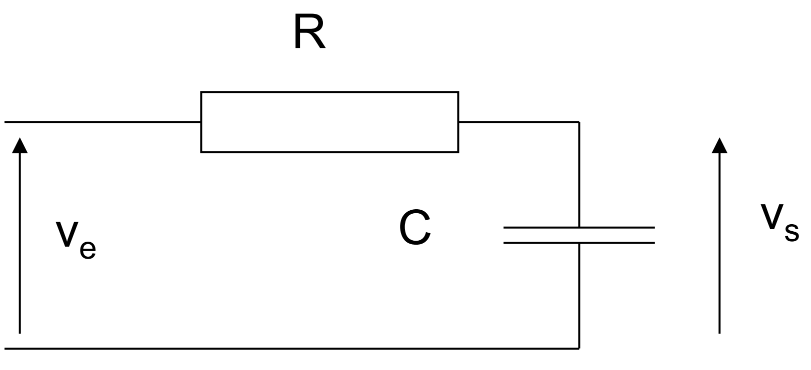




$$y_n = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x_{n-i} + \sum_{j=0}^{j=N} a_j y_{n-j}$$

Le filtrage numérique

Il y a des similitudes avec le filtrage analogique bien sûr …



(temps) $$RC\frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$$

Transformée de Fourier

(fréquence) $$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

Le filtrage numérique

Il y a des similitudes avec le filtrage analogique bien sûr …

(temps)

$$y_n = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x_{n-i} + \sum_{j=0}^{j=N} a_j y_{n-j}$$

Transformée en z

(fréquence)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{i=M} b_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^{j=N} a_j z^{-j}}$$

Le filtrage numérique

Il y a des similitudes avec le filtrage analogique bien sûr …

(temps)

$$y_n = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x_{n-i} + \sum_{j=0}^{j=N} a_j y_{n-j}$$

Transformée en z

(fréquence)

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{i=M} b_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^{j=N} a_j z^{-j}}$$

Quelques exemples…

(temps) $$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

Transformée en z

Les y_n ne dépendent que des x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, … : on appelle ce type de filtre des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF ou FIR en anglais)

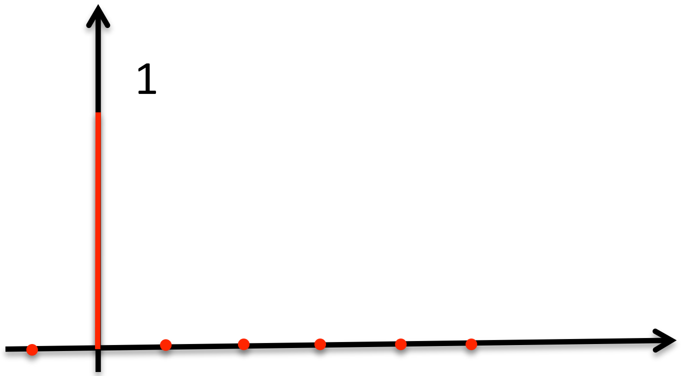
(fréquence) $$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2}$$

Quelques exemples…

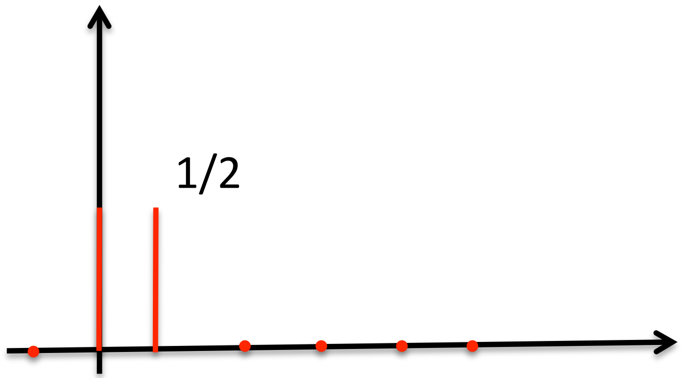
Réponse impulsionnelle

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

$$\{x_n\} = \{1,0,0,0,0,\ldots\}$$



$$\{y_n\} = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0,\ldots\right\}$$

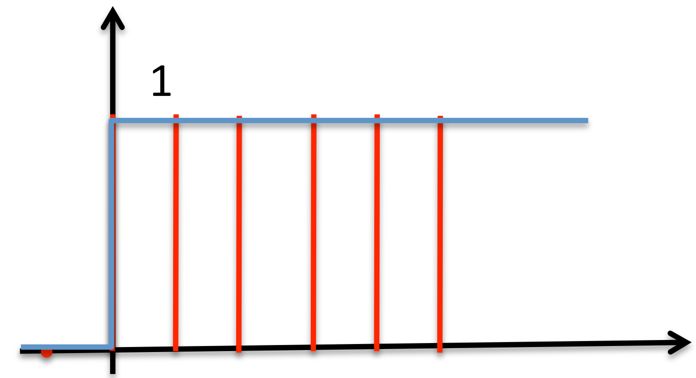


Quelques exemples…

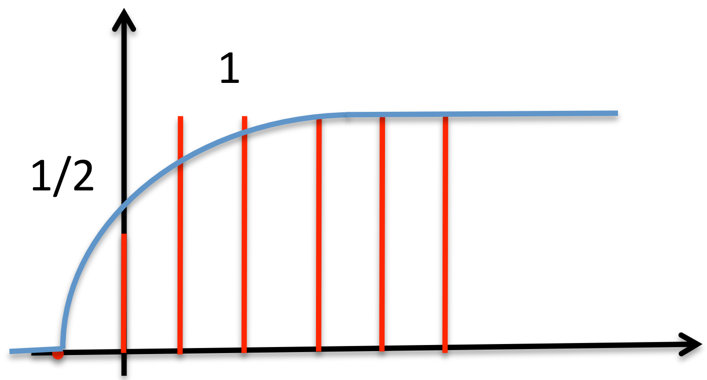
Réponse indicielle

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

$$\{x_n\} = \{1,1,1,1,1,\ldots\}$$



$$\{y_n\} = \left\{\frac{1}{2},1,1,1,1,\ldots\right\}$$



Réponse indicielle
similaire au passe-bas
du 1er ordre

Quelques exemples…

(temps)

$$y_n = \frac{x_n + y_{n-1}}{2}$$

Transformée en z

y_n dépend des x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, …
et des y_{n-i} : on appelle ce type de filtre des filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII ou IIR en anglais)

(fréquence)

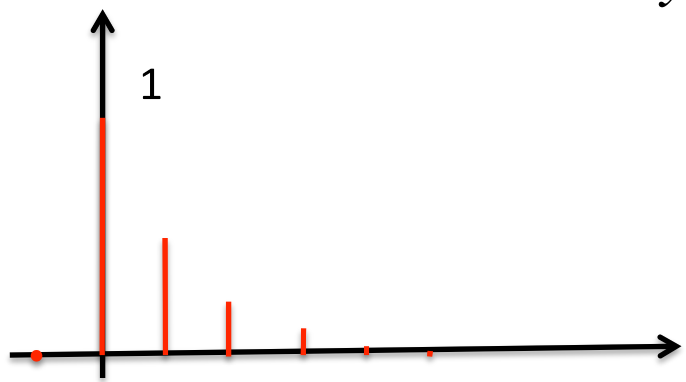
$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Quelques exemples…

Réponse impulsionnelle

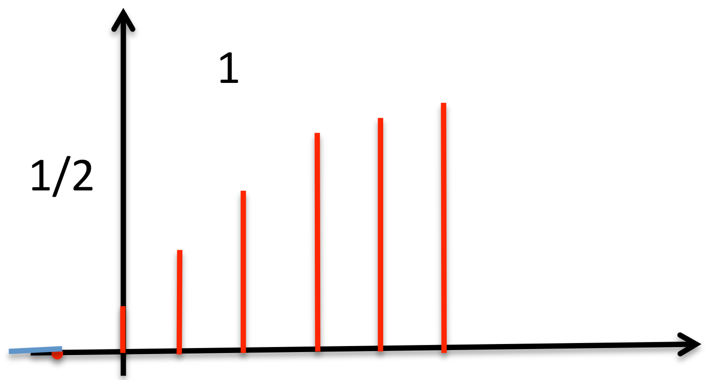
$$y_n = \frac{x_n + y_{n-1}}{2}$$

$$\{y_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right\}$$



Réponse indicielle

$$\{y_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \ldots\right\}$$



Relation entre filtre analogique et numérique

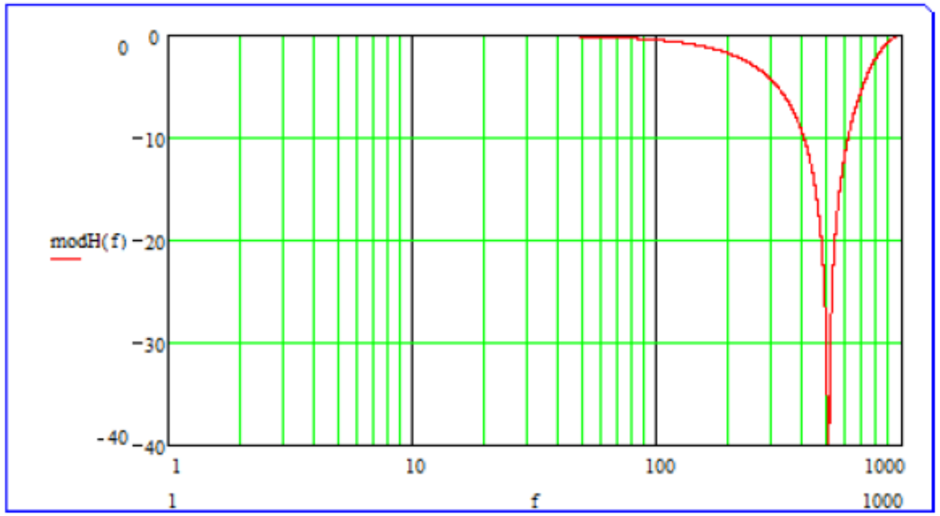
Si on veut « comparer » les filtres numériques et les filtres analogiques, il faut savoir passer de z à f . La relation de passage est donnée par :

$$z = e^{j\omega T_e}$$

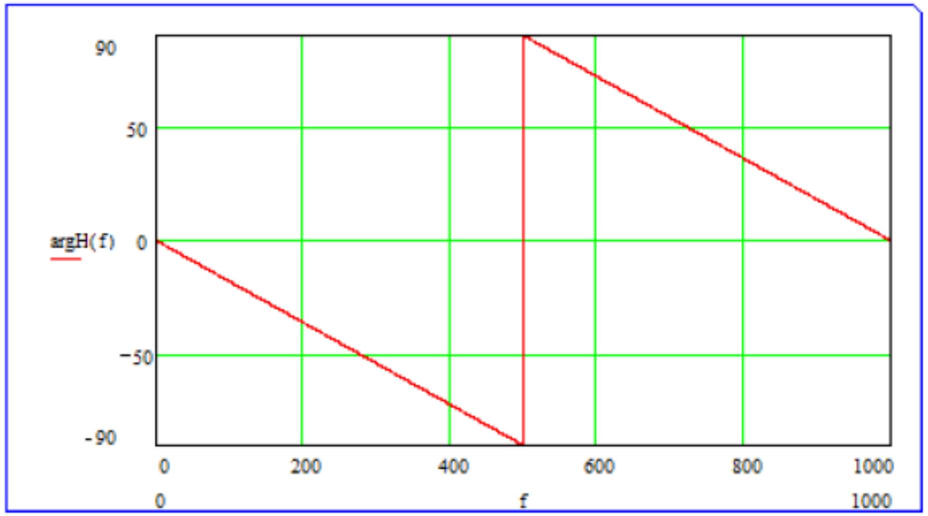
Relation entre filtre analogique et numérique

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \qquad\qquad H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1+e^{-j\omega T_e}}{2}$$

Filtre moyenneur , avec F_e = 1kHz soit T_e = 1 ms



Gain de H(jω)



Phase de H(jω)

Relation entre filtre analogique et numérique

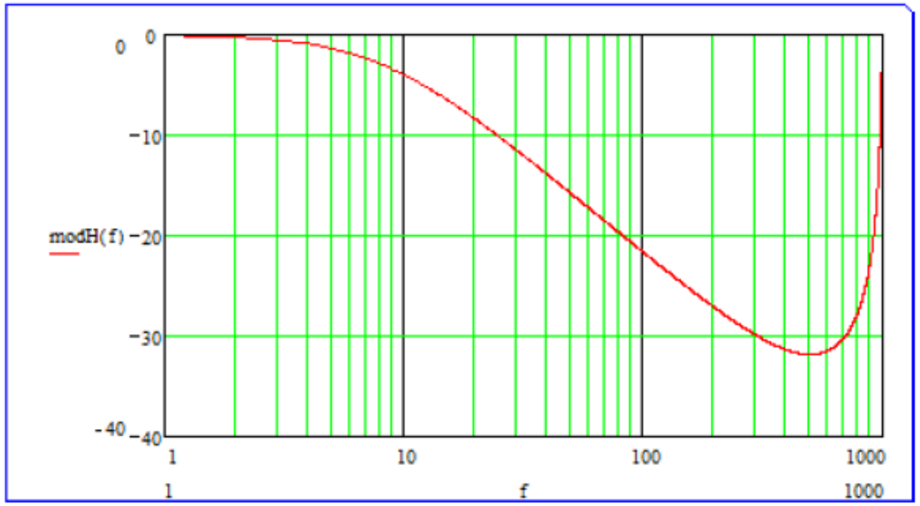
Exemple de filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) : le passe-bas récursif

$$y_n = 0,95.y_{n-1} + 0,05.x_n$$

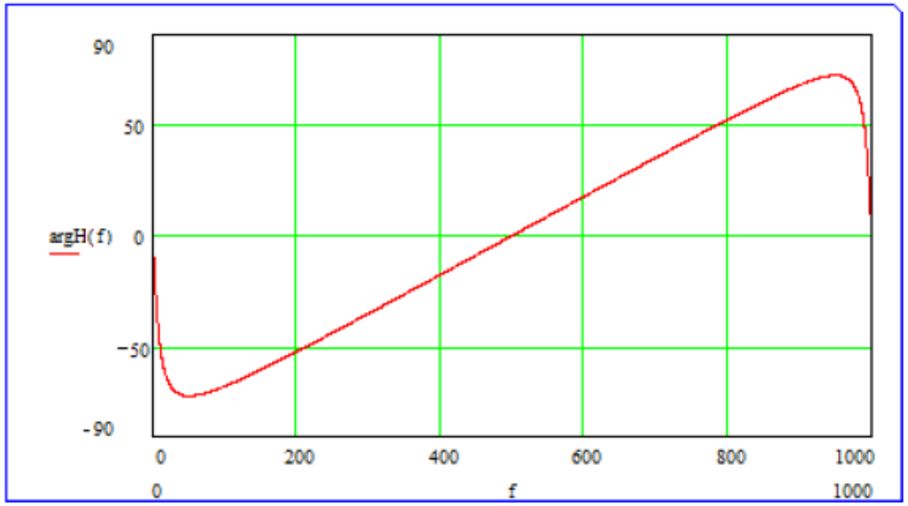
$$H(z) = \frac{0,05}{1 - 0,95.z^{-1}}$$

$$H(j\omega) = \frac{0,05}{1 - 0,95.e^{-j.\frac{\omega}{1000}}}$$

avec F_e=1kHz



Gain de H(jω)



Phase de H(jω)

Propriétés des différents filtres numériques

Filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR) :

avantages →
- stabilité
- phase linéaire
- intuitif
- simple à concevoir

inconvénients →
- nombreux coefficients
- implémentation lourde, couteuse ou peu performante en fréquence

Filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) :

avantages →
- peu de coefficients
- implémentation simple et performante en fréquence

inconvénients →
- stabilité à étudier en raison de la présence de pôles dans H(z)
- complexe à concevoir
- utilisation de nombres à virgules

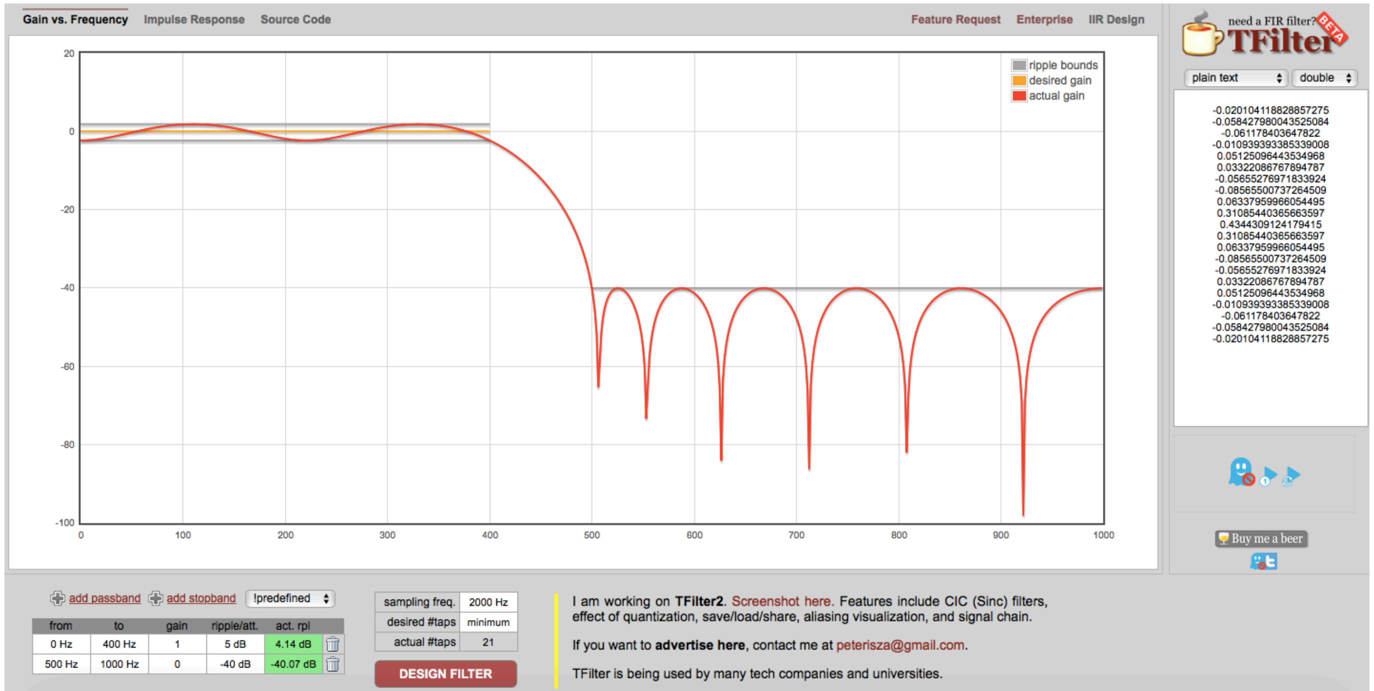
Synthèse des filtres numériques

Il existe plusieurs techniques de synthèse qui font toutes appel à des outils mathématiques plus ou moins complexes suivant le type de filtre RIF ou RII (transformation bilinéaire, optimisation sous contraintes, méthode de la fenêtre, invariance impulsionnelle,…)

Comme pour les filtres analogiques il existe des logiciels…

Synthèse des filtres numériques

- Quelques sites :
- http://t-filter.engineerjs.com



Synthèse des filtres numériques

- Quelques sites :
- http://www.micromodeler.com/dsp/