FFT et applications

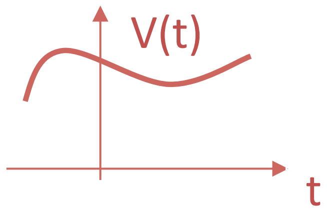
On peut mesurer à l'analyseur de spectre une représentation en fréquence mais on peut également la calculer à partir d'échantillons du signal…

transformation Analogique Numérique

On code chaque valeur $v(kT_e)$ sur n bits

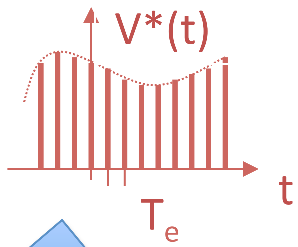
CAN

Signal analogique continu



ECHANTILLONNAGE

Signal analogique discret

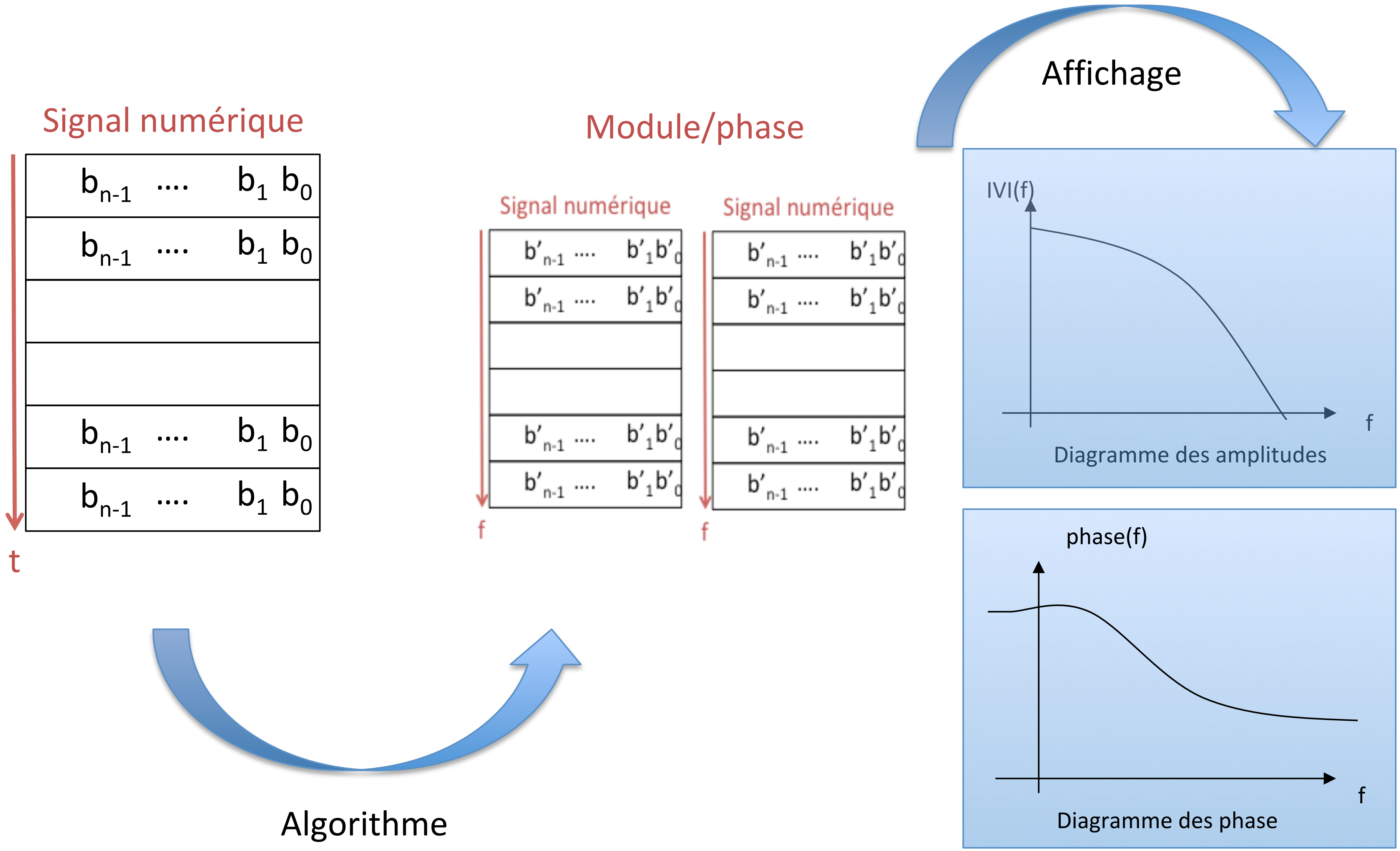


Signal numérique

b_{n-1}	....	b_1	b_0
b_{n-1}	....	b_1	b_0
b_{n-1}	....	b_1	b_0
b_{n-1}	....	b_1	b_0

t

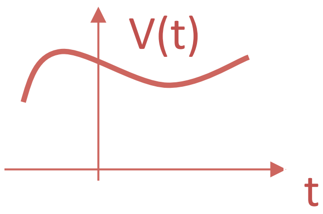
Calcul numérique de la TF

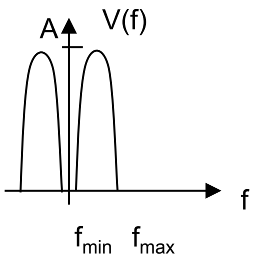


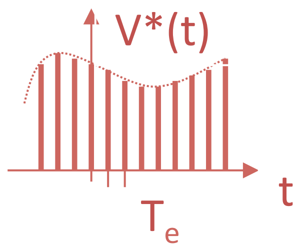
- Comment effectuer ce calcul ?
- Obtient-on vraiment la TF de Fourier du signal initial ?
- Commençons par détailler le calcul à réaliser :

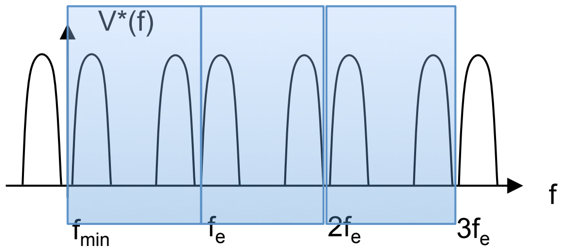
remarques préalables au calcul numérique d'une TF

1. Le signal numérique est issu d'un signal échantillonné (période $T_e = 1/F_e$) dont le spectre est périodique en fréquence (F_e)





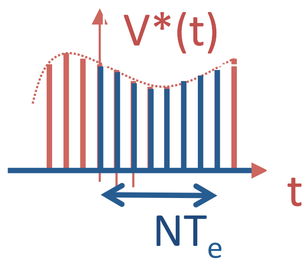




Donc on ne fera le calcul que sur l'intervalle de fréquence 0, F_e

remarques préalables au calcul numérique d'une TF

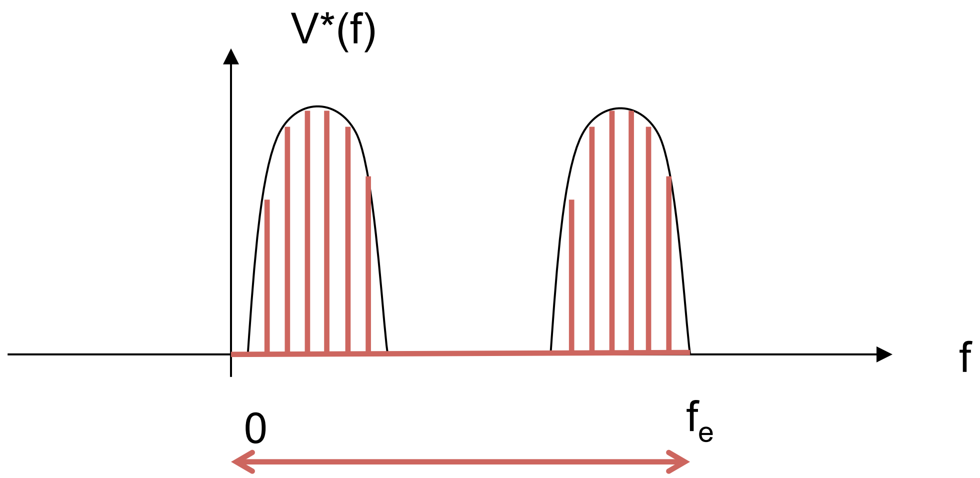
2. La mémoire dont on dispose n'est jamais infinie, donc le nombre d'échantillons est fini (k varie de 0 à $(N-1)xT_e$ où N est le nombre d'échantillons



On parle de fenêtrage temporel

remarques préalables au calcul numérique d'une TF

3. De la même manière on ne peut peut pas calculer la TF pour une infinité de valeurs de f. On choisit de calculer la TF pour le même nombre de valeurs de f que d'échantillons dans le temps



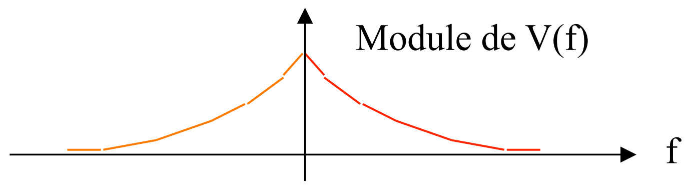
N échantillons en fréquence calculés pour $f= n\, f_e/N$

On parle de transformée de Fourier Discrète

- Comment effectuer ce calcul ? Quelle formule appliquer ?

V(f) TF d'une fonction v(t) continue dans le temps

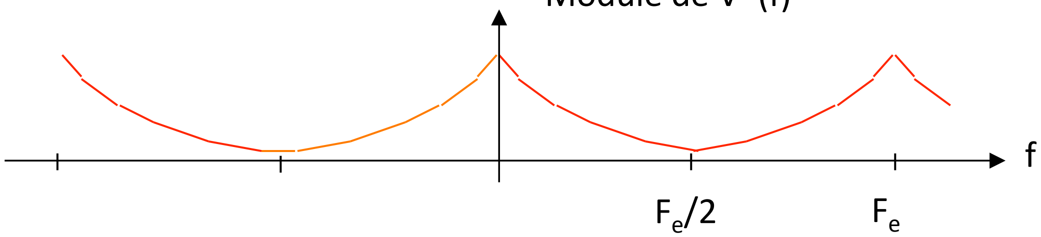
$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft} dt$$



V(f) transformée de <u>Fourier numérique</u> d'un signal v(t) échantillonné avec une période T_e*

$$V^*(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(kT_e) e^{-j2\pi fkTe}$$

$$V^*(f) = F_e \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(f - kF_e)$$



NB: V*(f) est devenue une fonction périodique de la fréquence. La période est égale à F_e : la fréquence d'échantillonnage.

Condition 1 : Pour le calcul des transformées de Fourier numériques on ne s'intéresse qu'à l'intervalle 0 - F_e

Zn(f) transformée de Fourier discrète d'une fonction v*(t) échantillonnée avec une période Te

On ne peut pas avec un ordinateur calculer une somme infinie !
En pratique on ne dispose que d'un nombre fini d'échantillons N

$$V^*(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(kT_e) e^{-j2\pi fkTe} \quad \Longrightarrow \quad Z(f) = \sum_{k=0}^{N-1} v(kT_e)\ e^{-j2\pi fkT_e}$$

De la même façon , en fréquence on ne calcule pas Z(f) pour toutes les fréquences mais uniquement en un nombre fini de points et en général on choisit le même nombre d'échantillons en fréquence que dans le temps : N (on divise l'intervalle 0- f_e en N morceaux)

$$Z_n = Z(n\frac{f_e}{N}) = \sum_{k=0}^{N-1} v(kT_e)\ e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$

Conditions 2 et 3 : On calcule une somme finie pour un nombre fini de fréquences 0, f_e/N, $2f_e/N$, …, nf_e/N, ….., $(N-1)f_e/N$

Calcul numérique d'une TF: résumé

1. On part d'un signal échantillonné (période $T_e = 1/F_e$) dont le spectre est périodique en fréquence (F_e)

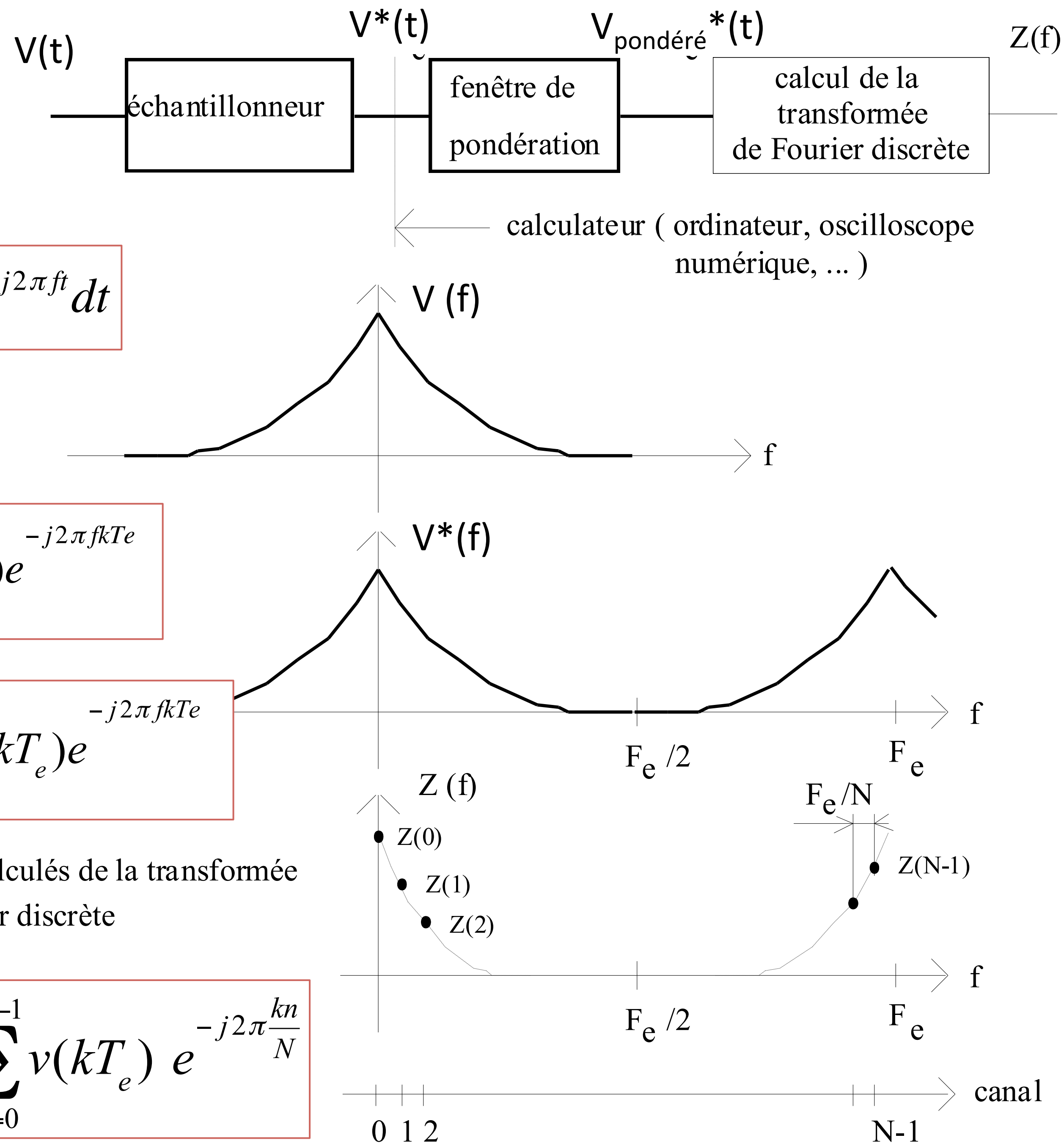
Donc on ne fera le calcul que sur l'intervalle de fréquence 0, F_e

2. Le nombre d'échantillons est fini (k varie de 0 à $(N-1)xT_e$ où N est le nombre d'échantillons

On parle de fenêtrage temporel

3. De la même manière on ne peut peut pas calculer la TF pour une infinité de valeurs de f. On choisit de calculer la TF pour le même nombre de valeurs de f que d'échantillons dans le temps

On parle de transformée de Fourier Discrète



$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$V^*(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(kT_e) e^{-j2\pi f k Te}$$

$$V^*_{pondéré}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} v(kT_e) e^{-j2\pi f k Te}$$

• points calculés de la transformée de Fourier discrète

$$Z_n = Z(n\frac{f_e}{N}) = \sum_{k=0}^{N-1} v(kT_e)\ e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Transformée de Fourier Rapide
Fast Fourier Transform : FFT

Pourquoi FFT (Fast Fourier Transform) ?

D'après la relation : $Z(n) = \sum_{k=0}^{k=N-1} z(k) e^{-j2\pi nk/N}$

il faut réaliser N^2 multiplications complexes et N(N-1) additions complexes pour obtenir les N composantes Z(n). Les multiplications complexes ont une durée d'exécution bien supérieure à celle des additions complexes. Si N est quelconque, on utilise un algorithme de DFT (*Direct Fourier Transform*) pour calculer les Z(n).

En 1965, J. W. Cooley et J. W. Tukey ont montré que, si N était une puissance de deux, le nombre de multiplications complexes pouvait être ramené à $(N/2)\log_2 N$. Si $N=2^n$, alors on peut utiliser un algorithme de FFT.

Avantage de la FFT

Nbre de points	Nbre de multiplications complexes en DFT	Nbre de multiplications complexes en FFT
1024	1 048 576	5120
4096	16 777 216	24 576

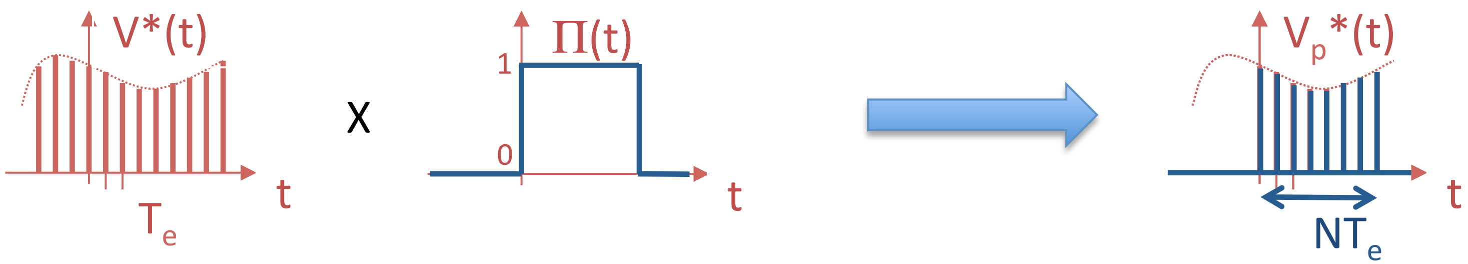
Comparaison du nombre de multiplications complexes en DFT et FFT

Ecart entre FFT et la transformée de Fourier d'un signal analogique

Influence du fenêtrage temporel

L'erreur principale vient du fenêtrage temporel … en effet on ne travaille pas sur v(t) mais sur le produit de v(t) par la fenêtre temporelle.

$$V^*_{pondéré}(t) = V^*(t) \times \Pi\ (t)$$



Mais que se passe-t-il dans le domaine des fréquences ?

Influence du fenêtrage temporel

On en a déjà parlé lors du cours sur l'échantillonnage, la transformée de Fourier d'un produit simple est un produit de convolution.

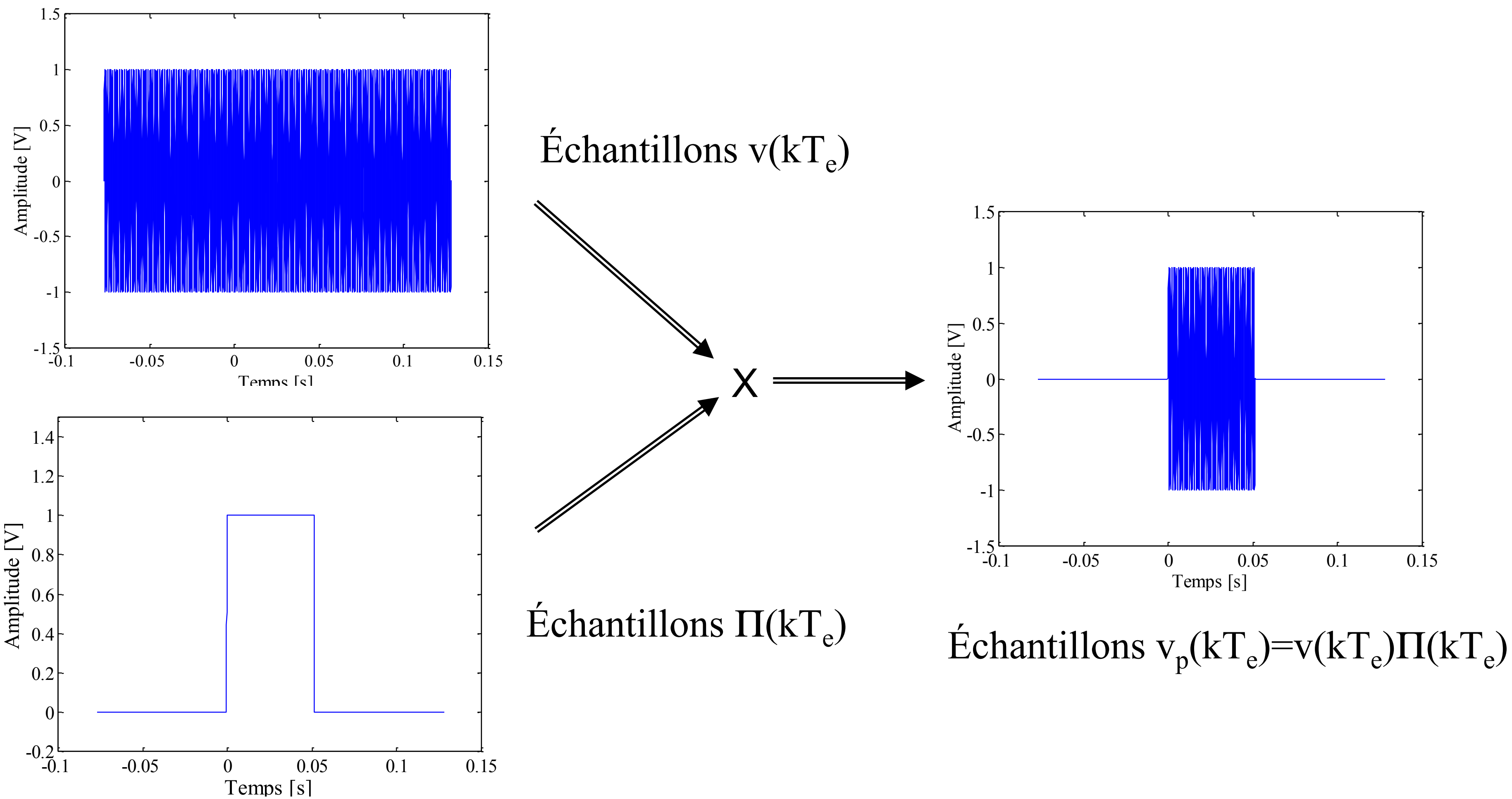
$$V^*_{pondéré}(t) = V^*(t) \times \Pi\,(t) \quad \Longrightarrow \quad V^*_{pondéré}(f) = V^*(f) \otimes \Pi\,(f)$$

Pour comprendre prenons un exemple…

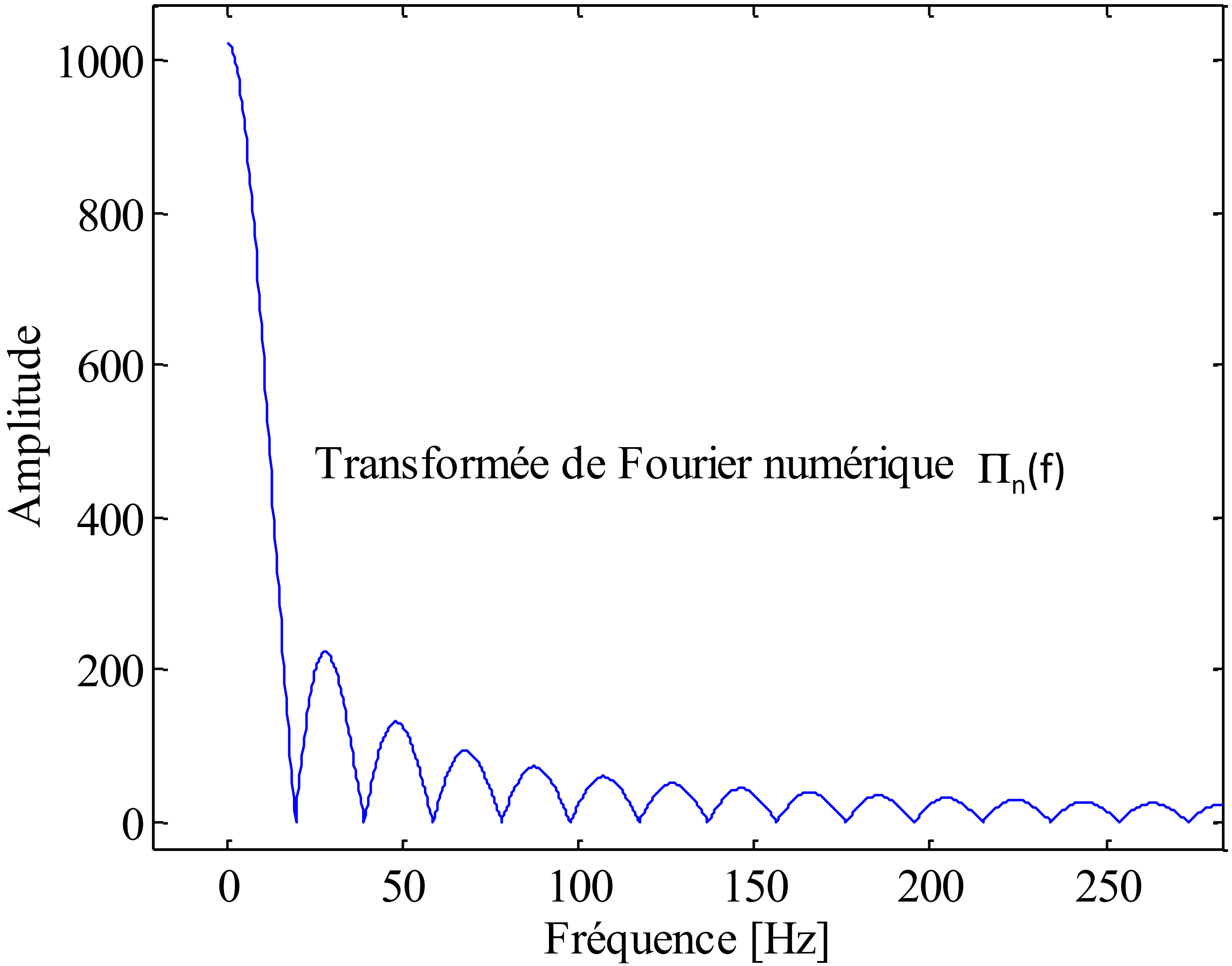
Soit un signal sinusoïdal de fréquence f_0=1015.625Hz , échantillonné à la fréquence F_e=20kHz, dont on ne considère que 1024 échantillons.

Signal échantillonné pondéré par une fenêtre

Aspect temporel : signal sinusoïdal de fréquence f_0=1015.625Hz et échantillonné à la fréquence F_e=20kHz, dont on ne garde que 1024 échantillons.



Spectre d'une fenêtre rectangulaire

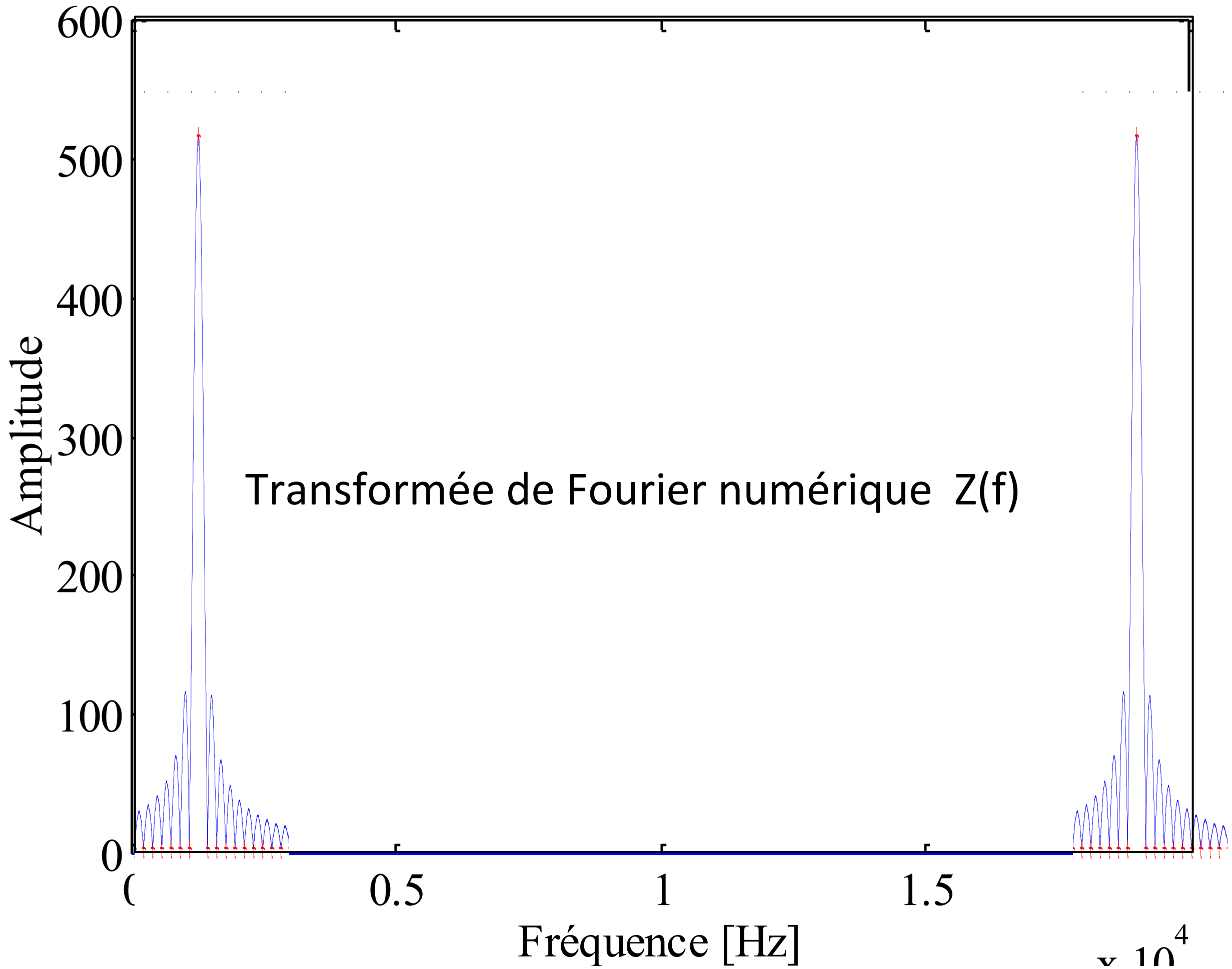


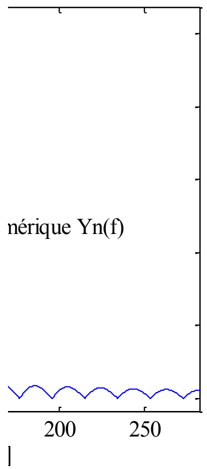
En fréquence : sinus cardinal, avec annulations pour k/NxTe

$1/NT_e$ = 19,53 Hz,
$2/NT_e$ = 39,06 Hz,
$3/NT_e$ = 58,59 Hz,
$4/NT_e$ = 78,13 Hz,
…

Signal échantillonné pondéré par une fenêtre

Aspect fréquentiel : signal sinusoïdal de fréquence f_0=1015,625Hz et échantillonné à la fréq





'accrocher' le

our de $V_n(f)$

porte

On remplace les deux raies à f_0 et F_e-f_0 par le sinus cardinal de la porte

Transformée de Fourier numérique discrète

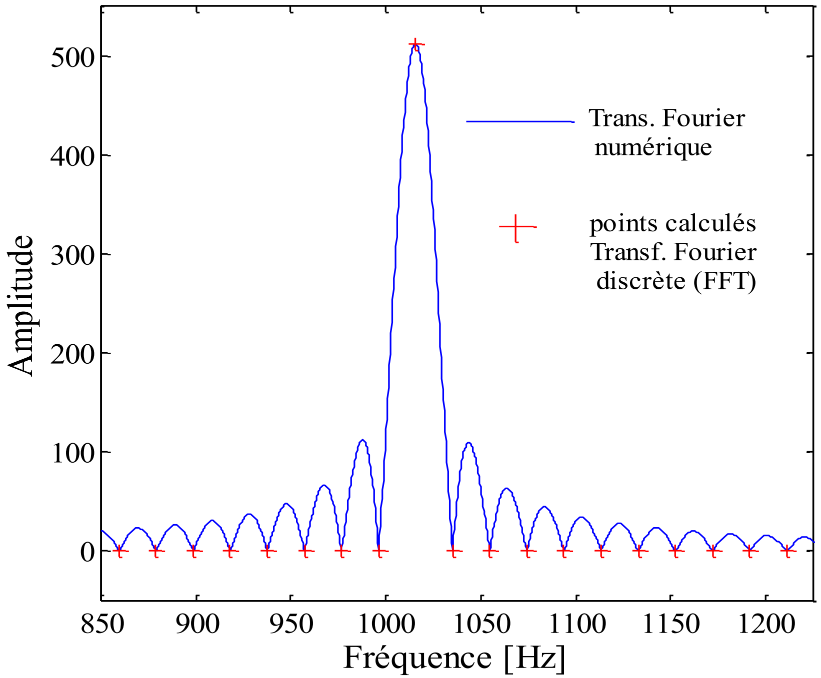
- Faisons un zoom sur la « raie » obtenue :

On calcule $Z(f)$ uniquement pour $f = nF_e/N$

Transformée de Fourier numérique discrète: cas idéal

On calcule Z(f) pour les fréquences 0, f_e/N, $2f_e/N$, …, nf_e/N, …..,
$(N-1)f_e/N$

$$f_0 = \frac{52 \times F_e}{1024}$$



On observe une seule raie à la fréquence de 1015.625Hz qui correspond au canal 52 (52=1024*1015.625/20000)

Pourquoi ? Parce que la fréquence f_0 est un multiple de F_e/N et que la transformée de Fourier numérique $\Pi_n(f)$ est nulle pour les multiples de F_e/N.

Transformée de Fourier numérique discrète: cas idéal

Dans le cas très particulier où il existe un entier n, tel que $f_0 = \frac{n \times F_e}{N}$ on obtient le « bon » spectre.

Mais ce n'est jamais le cas …

Que se passe-t-il alors ?

Transformée de Fourier numérique discrète: cas réel

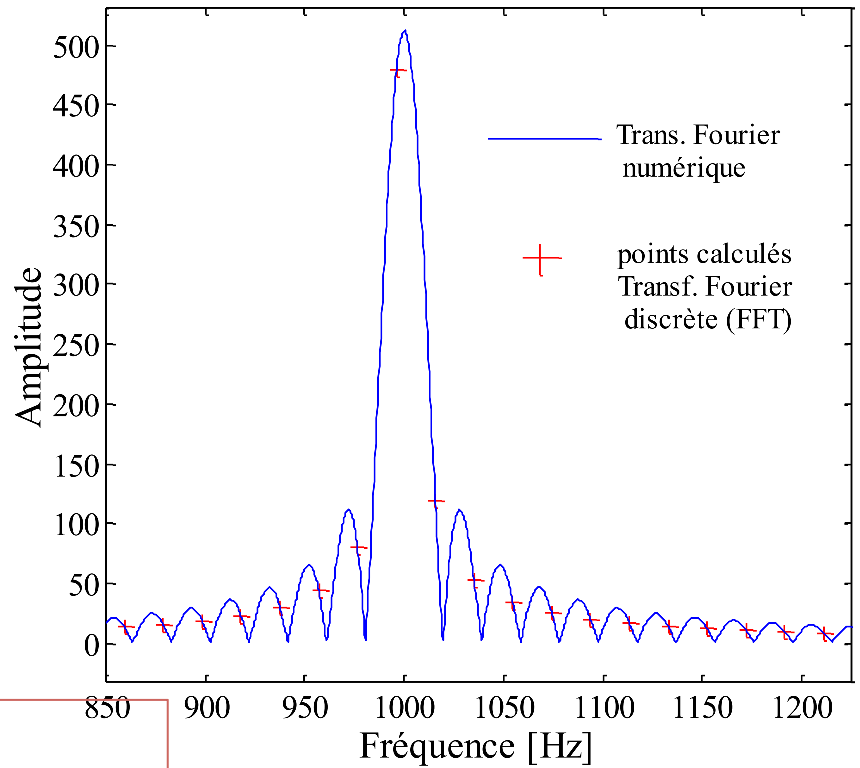
<u>Exemple n°2</u> : FFT d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0=1000Hz et échantillonné à la fréquence F_e=20kHz, dont on ne garde que 1024 échantillons.

$$\boxed{Z_n = Z(n\frac{f_e}{N}) = \sum_{k=0}^{N-1} v(kT_e)\ e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}}$$

On observe une raie principale et d'autres raies …

Pourquoi ?

Parce que la fréquence f_0 n'est pas un multiple de F_e/N, il y a apparition de <u>fuites spectrales</u> dues aux lobes secondaires de la fenêtre, …



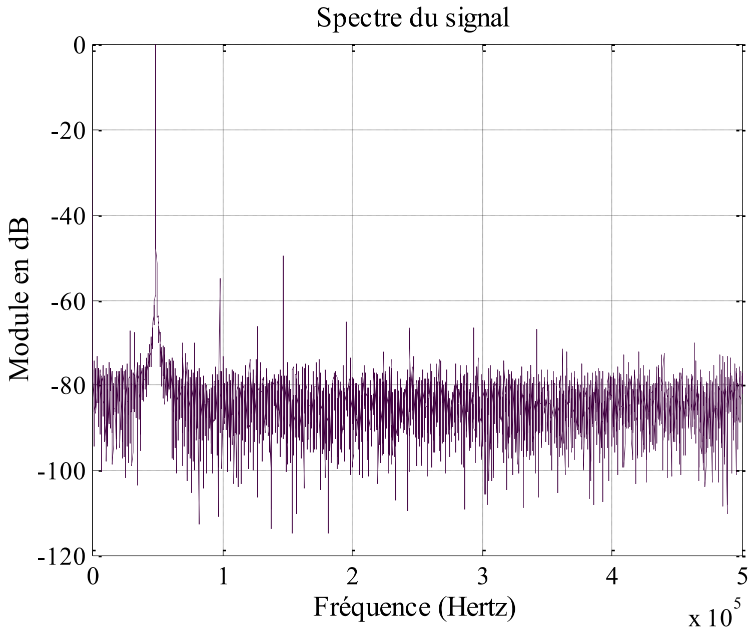
$$f_0 \neq \frac{n \times F_e}{N} \Longrightarrow \text{Fuites spectrales}$$

Expérience de mise en évidence des fuites spectrales

L'expérience

Générateur sinusoïdal $\rightarrow$ Oscilloscope + FFT

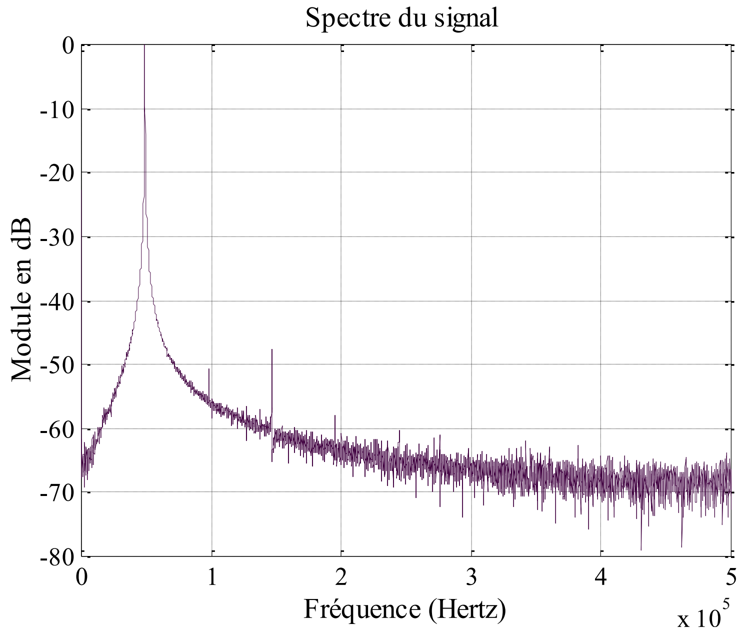
Résultat



Durée d 'enregistrement

= multiple de la période

plancher de bruit = bruit de quantification



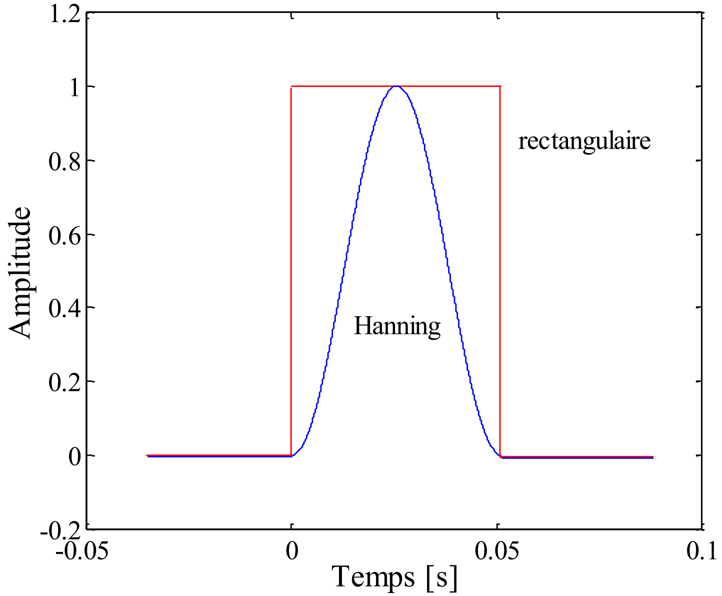
Durée d 'enregistrement

≠ multiple de la période

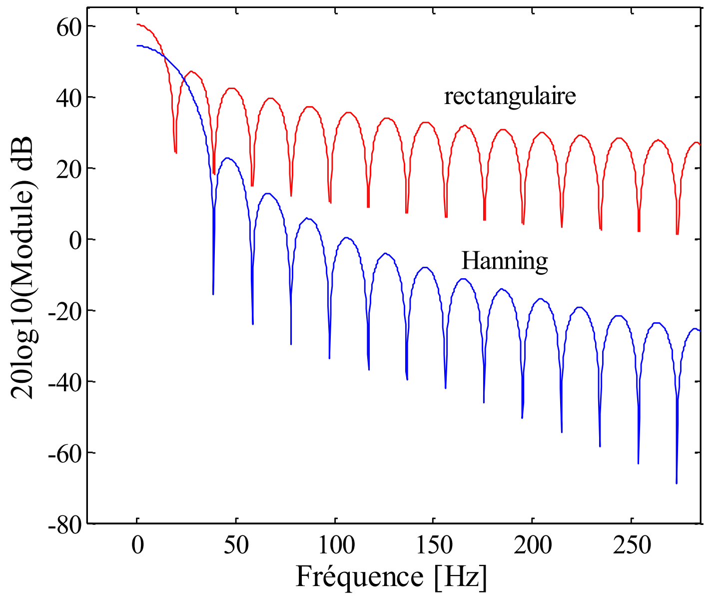
observation des lobes secondaires

Fuites spectrales

Pour diminuer les fuites spectrales, il faut chercher des fenêtres avec des lobes secondaires de très faibles amplitudes … C'est ainsi que l'on construit les fenêtres de Hanning, Hamming, …



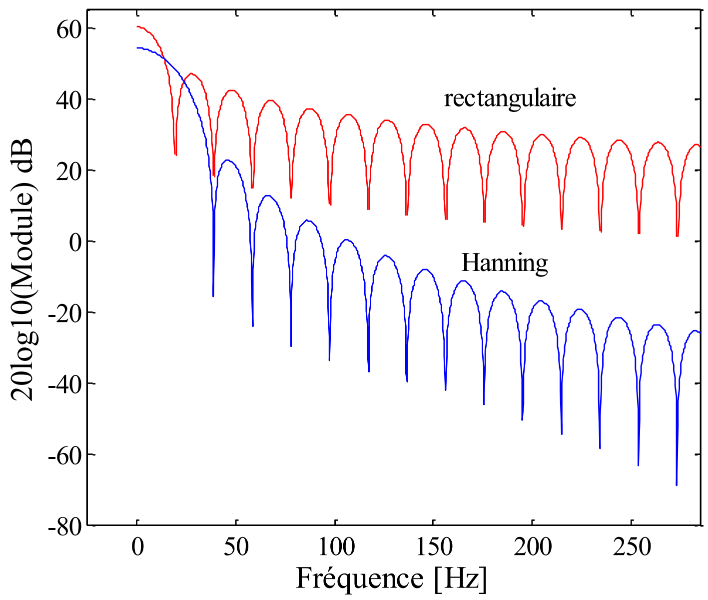
Échantillons $\Pi(kT_e)$ des fenêtres rectangulaire et Hanning



Transformées de Fourier numériques $\Pi_n(f)$ des fenêtres rectangulaires et Hanning

Fuites spectrales

Les lobes secondaires de la fenêtre de Hanning ont des amplitudes beaucoup plus faibles que celles de la fenêtre rectangulaire mais la largeur du lobe principal est deux fois plus grande

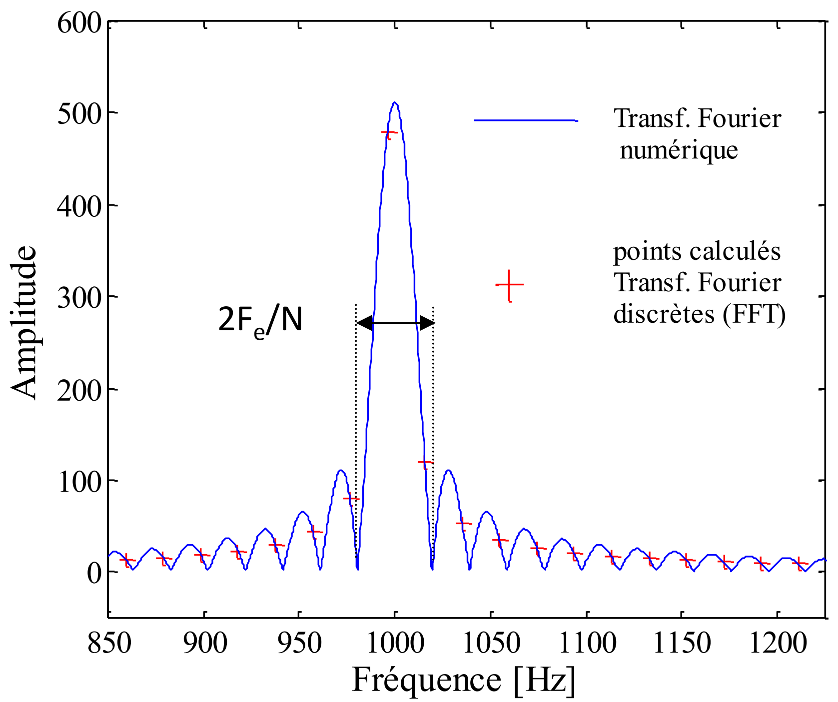


Une fenêtre est donc caractérisée par :

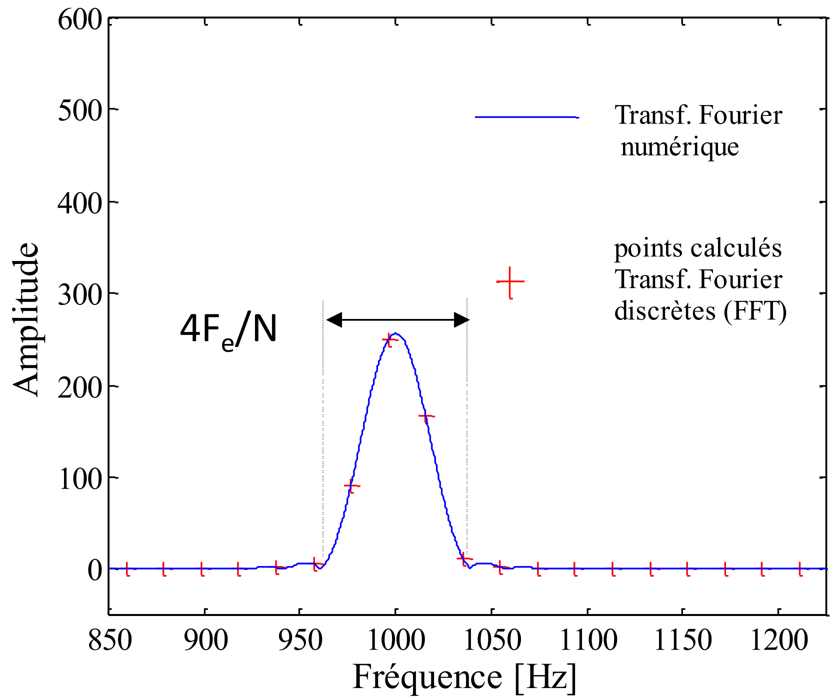
- la largeur du lobe principal : la largeur fixe la résolution de l'analyse, c-à-d l'aptitude à séparer deux fréquences proches
- l'amplitude des lobes secondaires : l'amplitude fixe la dynamique, c-à-d l'aptitude à discerner deux composantes de fréquences relativement éloignées mais d'amplitudes très différentes

Exemple : FFT d'un signal sinusoïdal de fréquence F=1000Hz et échantillonné à la fréquence F_e=20kHz. Les échantillons $v(kT_e)$ sont tronqués successivement par les échantillons $\Pi(kT_e)$ des fenêtres rectangulaire et de Hanning de 1024 points.

Fenêtre rectangulaire



Fenêtre de Hanning



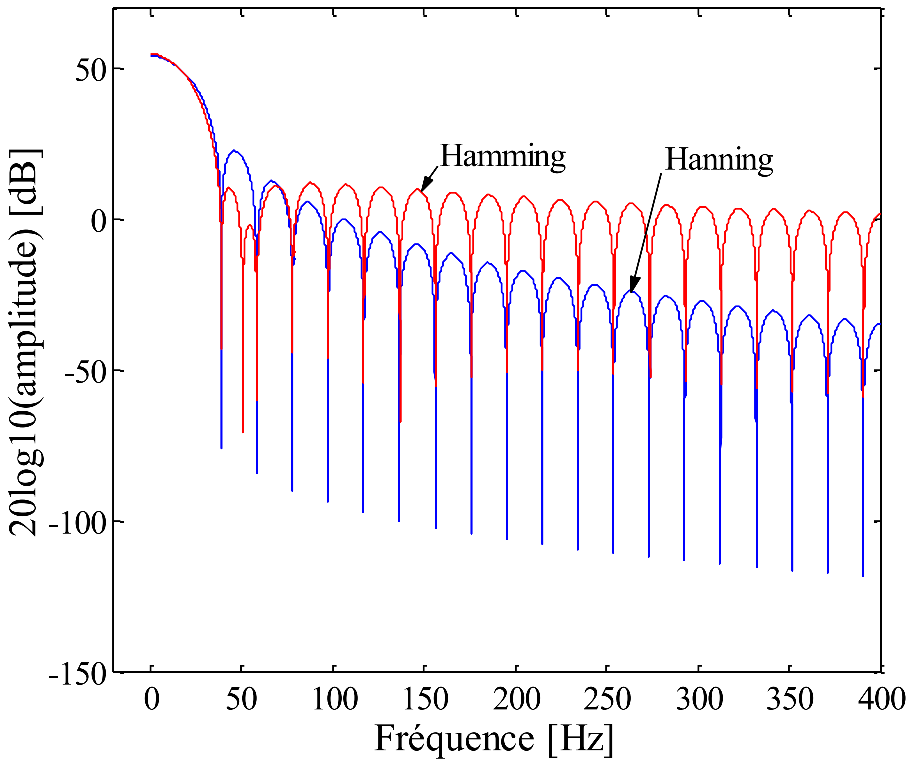
Et pourquoi toutes ces fenêtres, Hamming, Hanning, Blackman, …
réponse : tout dépend de la dynamique recherchée, voyons cela sur un exemple …
et finalement si vous vous mettiez au travail ….

Question : Quelle est la fenêtre la mieux adaptée entre Hanning et Hamming pour faire apparaître les deux fréquences F_1 et F_2 du signal échantillonné $v(kT_e)$ suivant :

$$v(kT_e)=A_1\sin(2pF_1kT_e)+A_2\sin(2pF_2kT_e)$$

F_e=20kHz, F_1=1025Hz, F_2=1250Hz, $A_2/A_1=10^{-3}$, N^{bre} de points de calcul de la FFT : N=1024

Pour vous aider dans votre choix, les transformées de Fourier numériques des fenêtres de Hanning et de Hamming sont données à droite. Elles sont calculées pour une fréquence d'échantillonnage F_e=20kHz



Choix 1 : Hamming

Choix 2 : Hanning

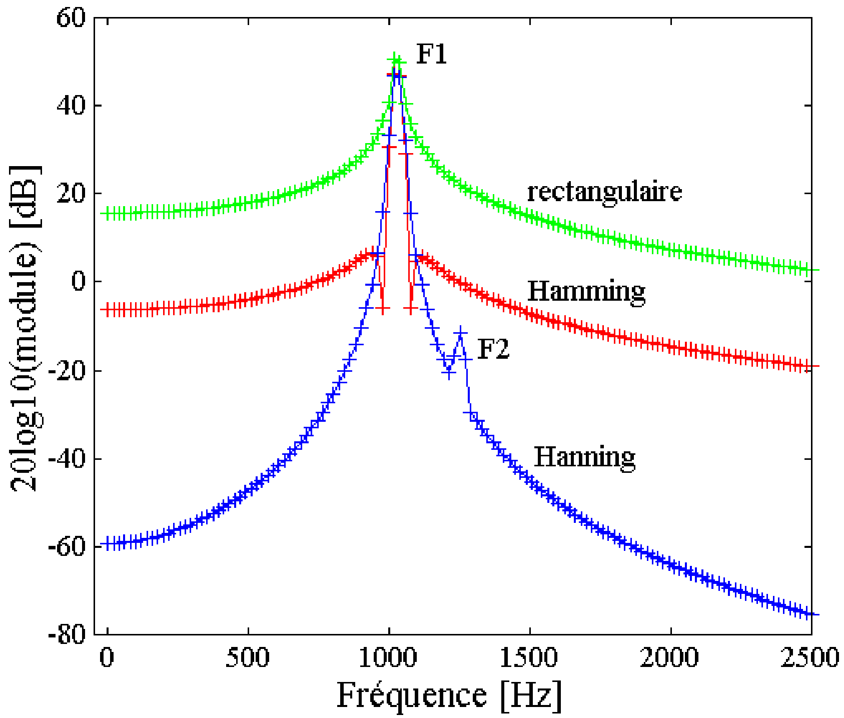
Et non, vous avez fait le mauvais choix, [retournez à la diapositive précédente](#)

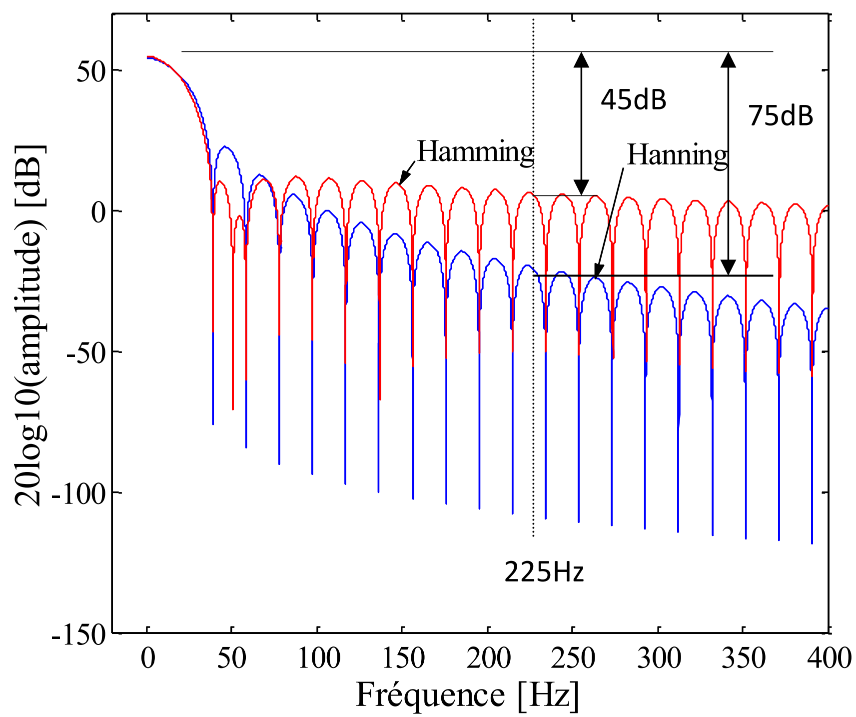
Explications :

1) le rapport des amplitudes $A_2/A_1=10^{-3}$ soit 60 dB

2) l'écart de fréquences $(F_2-F_1)=225Hz$

En conséquence, il faut choisir une fenêtre telle que l'amplitude du lobe secondaire à 225Hz $=F_2-F_1$ soit inférieure de 60 dB à celle du lobe principal.

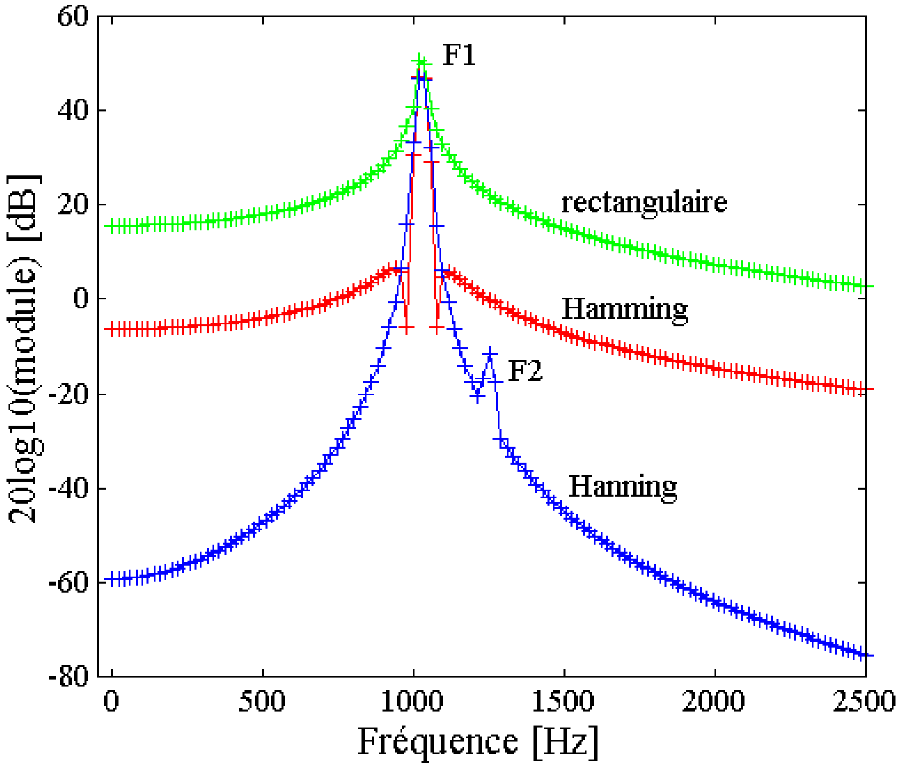


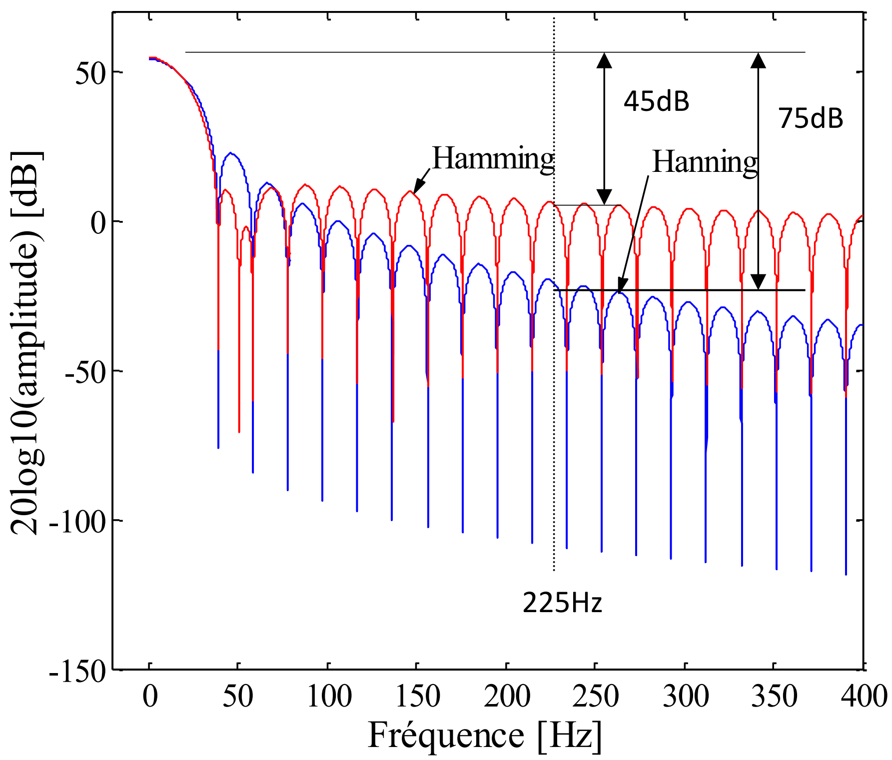


vous avez fait le bon choix

Explications :

L'amplitude du lobe secondaire à 225Hz de la fenêtre de Hanning est à –75dB de l'amplitude du lobe principal, en conséquence la fréquence F_2 est observable car le rapport $A_2/A_1=10^{-3}$ soit 60dB donc inférieur à 75dB.





retour

- Précautions à prendre lorsqu’on utilise une FFT :

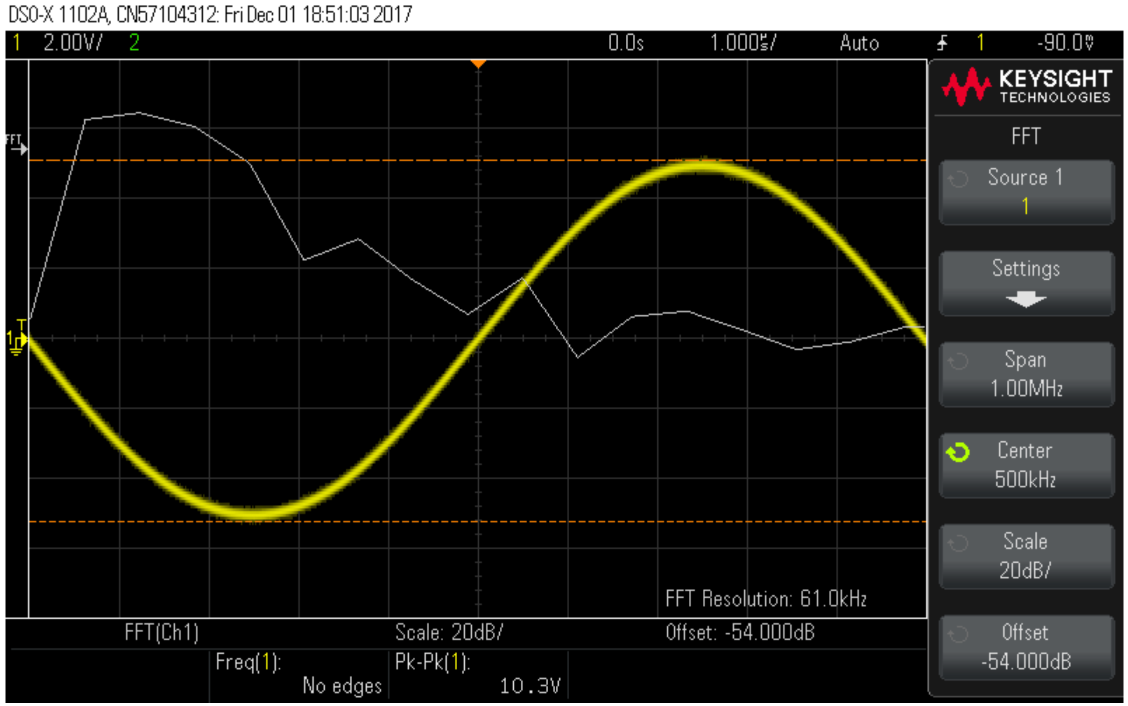
  – Choisir la taille de la fenêtre
  – Choix du type de fenêtre

Influence de la largeur de la fenêtre temporelle

Signal sinusoïdal, f_0 = 100 kHz, Fe = 2 GHz, NT_e=T_0

Si on choisit une largeur trop faible par rapport à la période du signal dont on veut calculer la TF, on obtient un résultat très éloigné de la TF.

Sur l'exemple ci-contre la largeur de la fenêtre est égal à la période du signal. D'une manière général quand on utilise un oscilloscope, la fenêtre temporelle correspond à ce qui est affiché sur l'écran



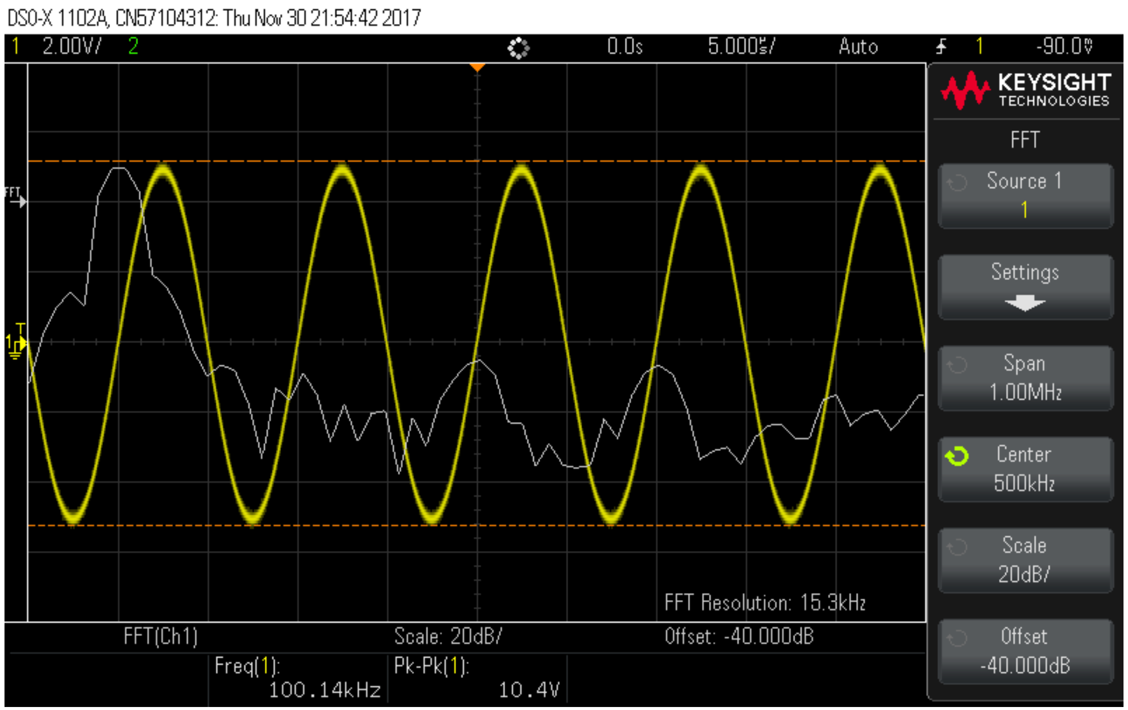
$$N = \frac{F_e}{f_0} = 20\ 000 \quad \Rightarrow \quad N_{calcul} = 32\ 768 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_e}{N_{calcul}} = 61\ 035{,}15 Hz$$

Influence de la largeur de la fenêtre temporelle

Signal sinusoïdal, f_0 = 100 kHz, Fe = 2 GHz, $NT_e=5T_0$

Si on choisit une largeur trop faible par rapport à la période du signal dont on veut calculer la TF, on obtient un résultat très éloigné de la TF.

Si on élargit la fenêtre on commence à distinguer le spectre.



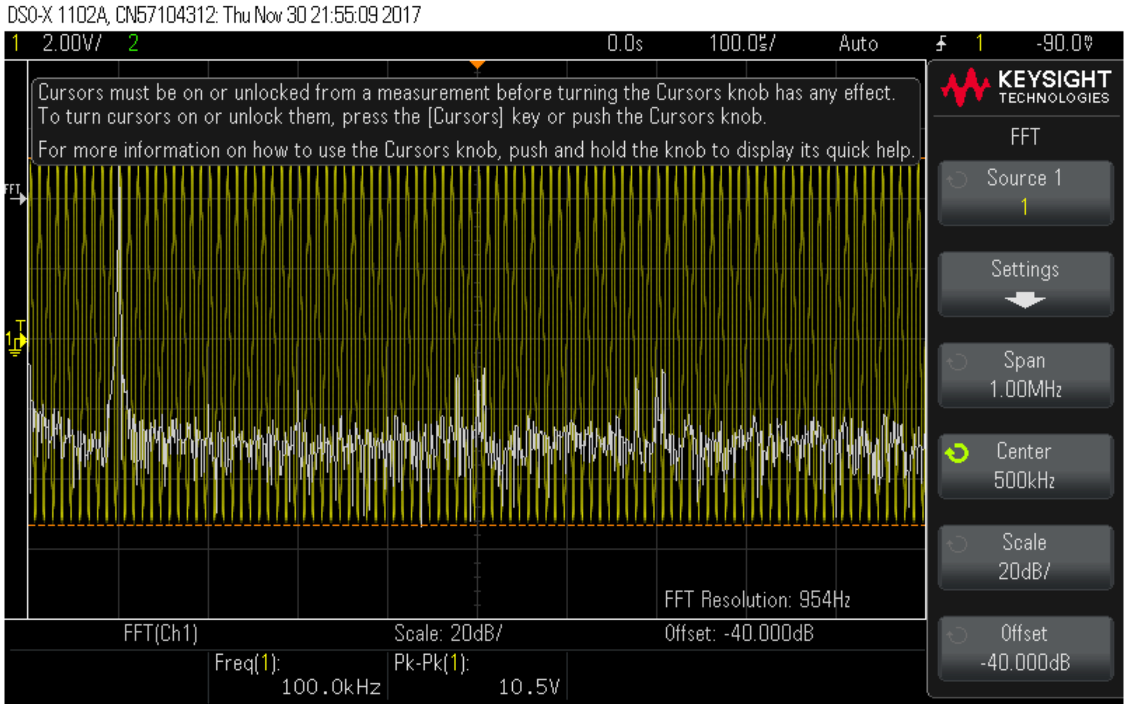
$$N = 5\frac{F_e}{f_0} = 100\ 000 \quad \Rightarrow \quad N_{calcul} = 131\ 072 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_e}{N_{calcul}} = 15\ 258{,}79\, Hz$$

Influence de la largeur de la fenêtre temporelle

Signal sinusoïdal, f_0 = 100 kHz, Fe = 2 GHz, $NT_e=100T_0$

i on choisit une largeur trop faible par rapport à la période du signal dont on veut calculer la TF, on obtient un résultat très éloigné de la TF.

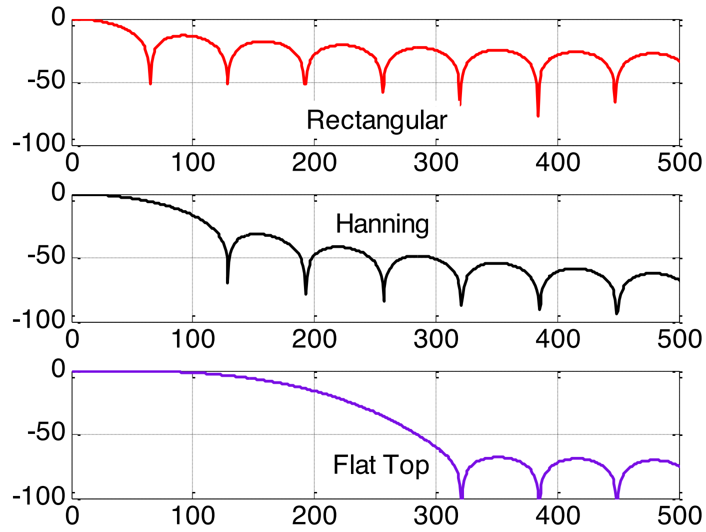
Si on affiche de très nombreuses périodes dans la fenêtre temporelle le spectre calculé finit de s'affiner et correspond à la TF du signal.



$$N = 100\frac{F_e}{f_0} = 2\ 000\ 000 \Rightarrow N_{calcul} = 2\ 097\ 152 \Rightarrow \frac{F_e}{N_{calcul}} = 953{,}67\,Hz$$

Influence du type de fenêtre temporelle

Choisir un type de fenêtre c'est faire un compromis entre résolution et fuites spectrales



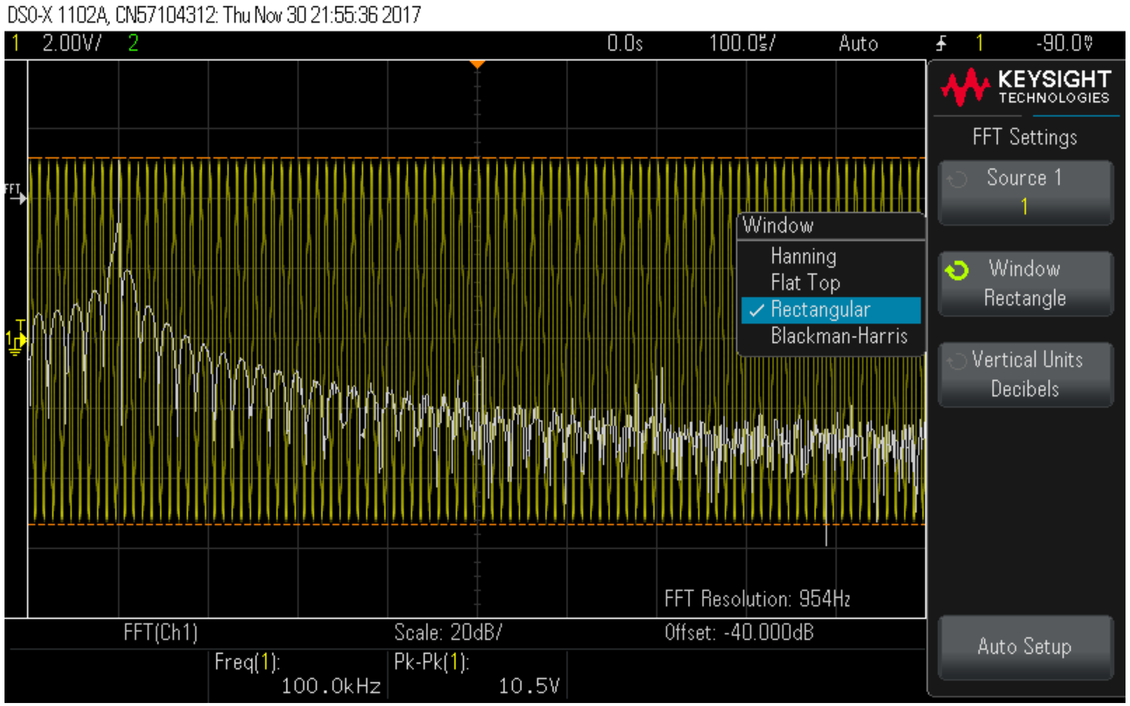
Une fenêtre est donc caractérisée par :

- la largeur du lobe principal : la largeur fixe la résolution de l'analyse, c-à-d l'aptitude à séparer deux fréquences proches
- l'amplitude des lobes secondaires : l'amplitude fixe la dynamique, c-à-d l'aptitude à discerner deux composantes de fréquences relativement éloignées mais d'amplitudes très différentes

Influence du type de fenêtre temporelle

L'allure du spectre calculé varie avec le type de fenêtre.

Avec une fenêtre rectangulaire on a de fortes fuites spectrales.

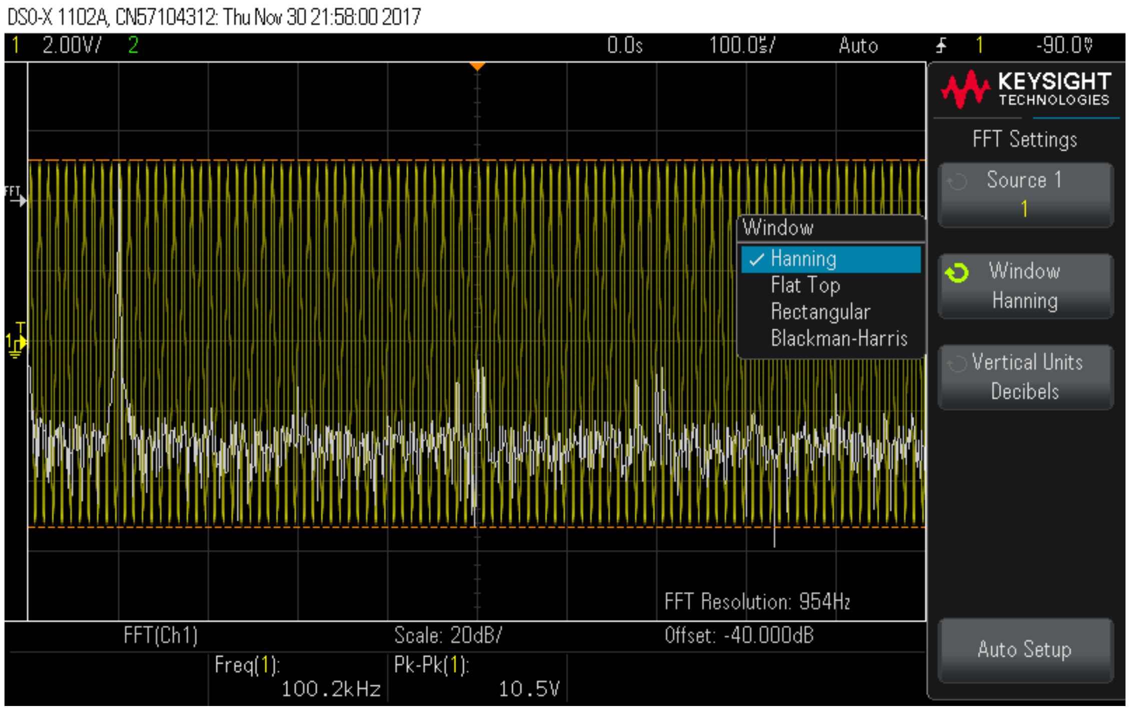


Signal sinusoïdal, f_0 = 100 kHz, Fe = 2 GHz, NT_e=$100T_0$

Influence du type de fenêtre temporelle

L'allure du spectre calculé varie avec le type de fenêtre.

Avec une fenêtre de Hanning on a des pics étroits et de faibles fuites spectrales.

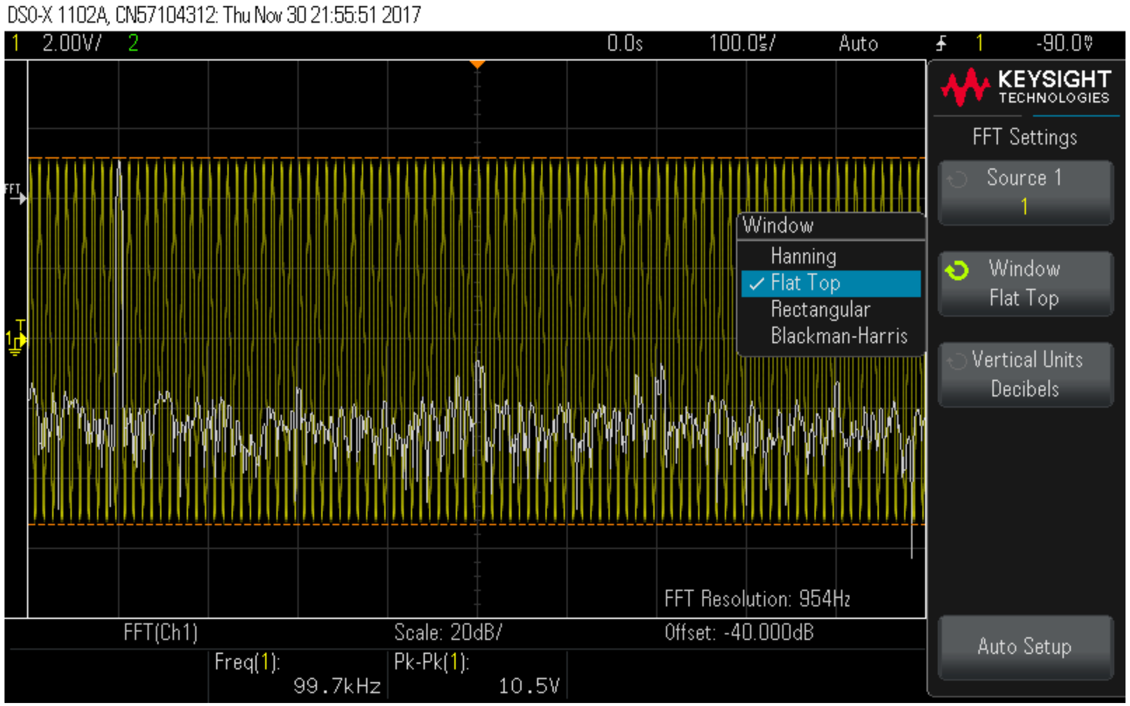


Signal sinusoïdal, f_0 = 100 kHz, Fe = 2 GHz, $NT_e=100T_0$

Influence du type de fenêtre temporelle

L'allure du spectre calculé varie avec le type de fenêtre.

Avec une fenêtre flat Top.



Signal sinusoïdal, f_0 = 100 kHz, Fe = 2 GHz, $NT_e = 100T_0$

Conclusion

- Précautions à prendre lorsqu'on utilise une FFT sur un oscilloscope:

  - Choix de la taille de la fenêtre:

    Plus la fenêtre choisie aura une grande durée temporelle, plus elle sera étroite dans le domaine fréquentiel.

    En tout état de cause il faut afficher plusieurs périodes du signal à l'écran

  - Choix du type de fenêtre:

    Compromis entre résolution et fuites spectrales