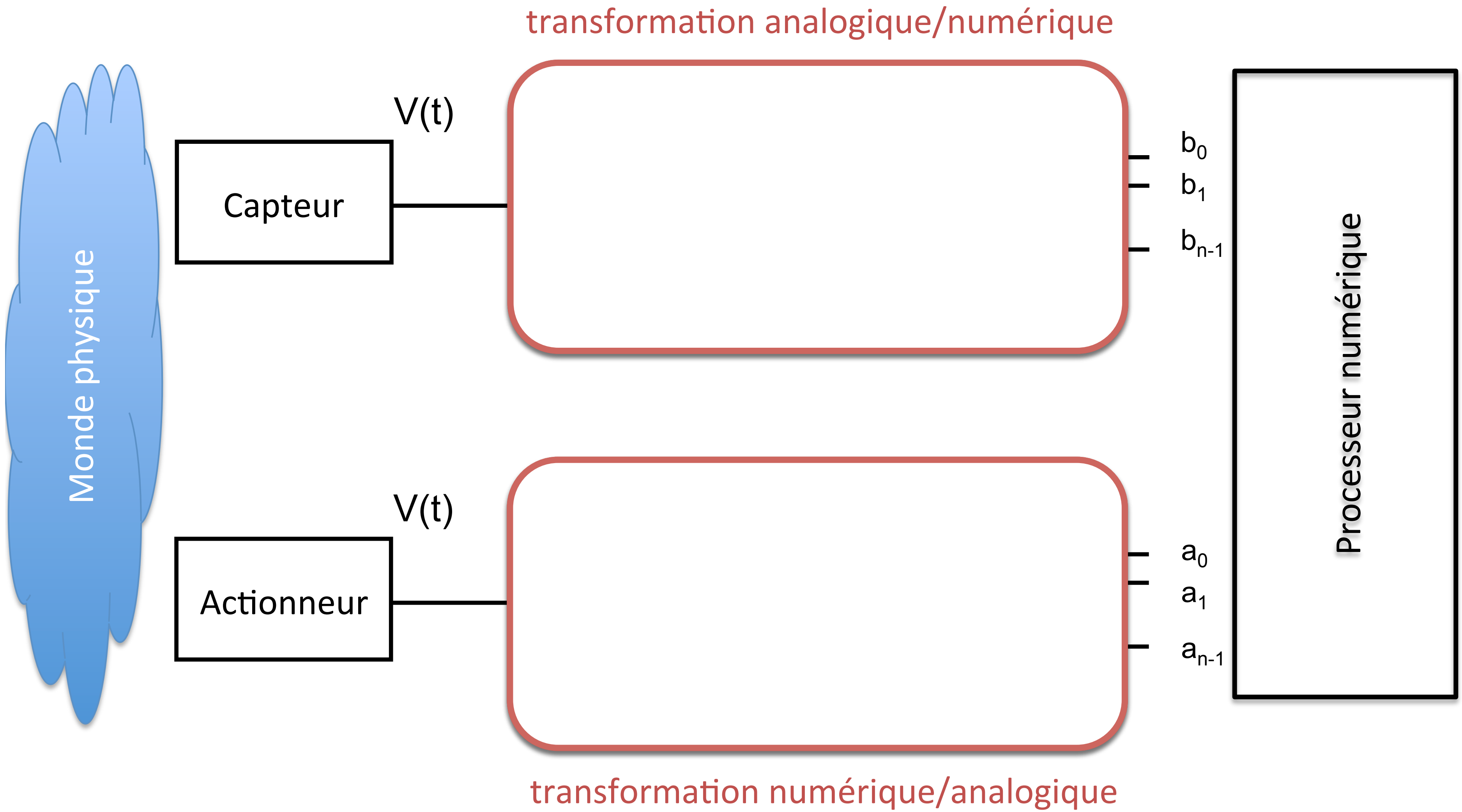
geii Génie électrique et informatique industrielle / iut de BORDEAUX

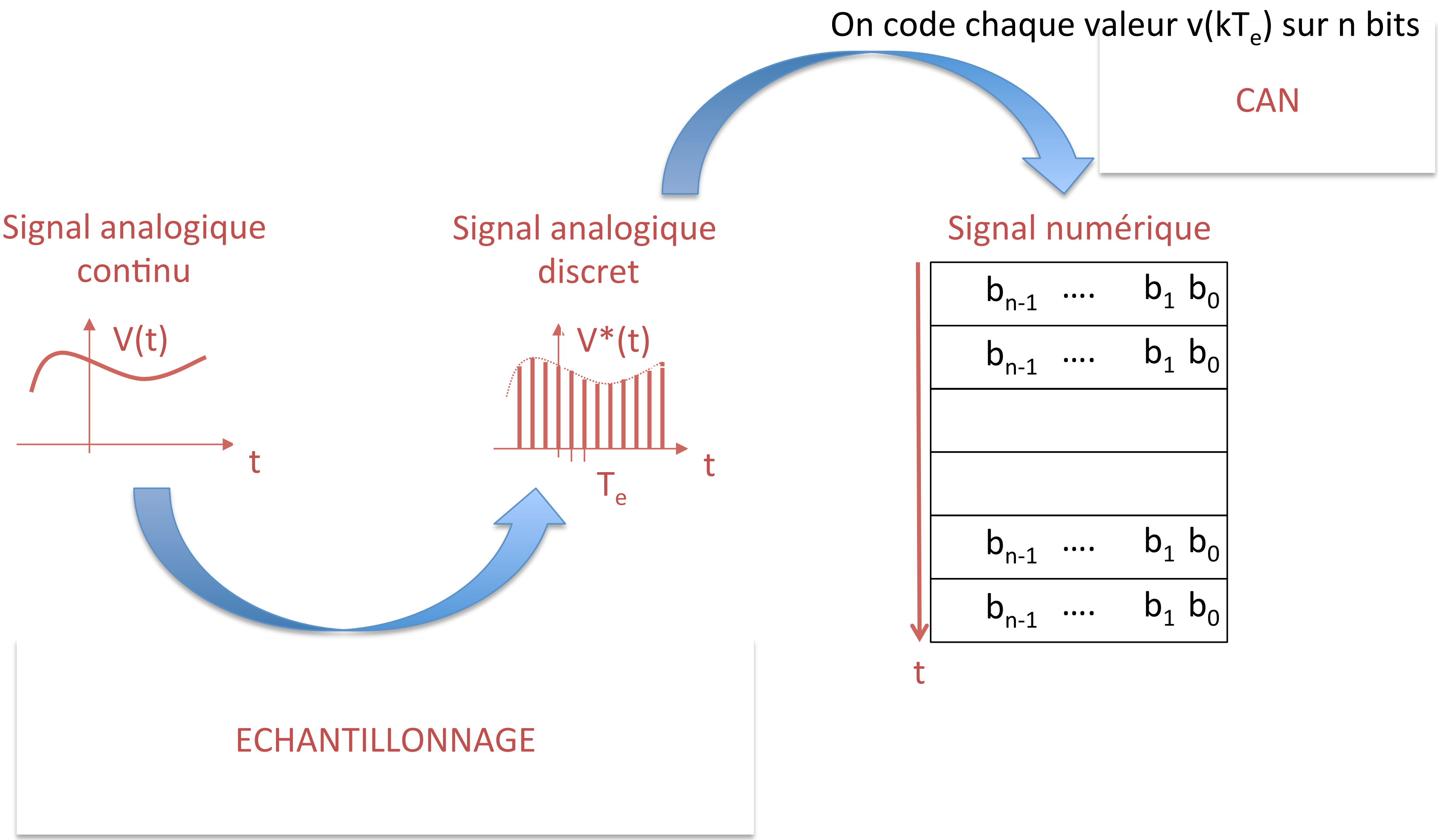
# Echantillonnage

L'électronique moderne est très majoritairement numérique mais le monde réel reste analogique…

# Chaine mesure / action

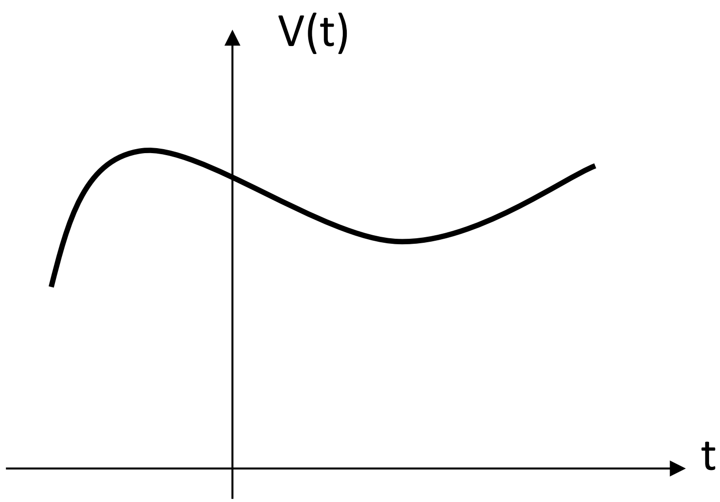


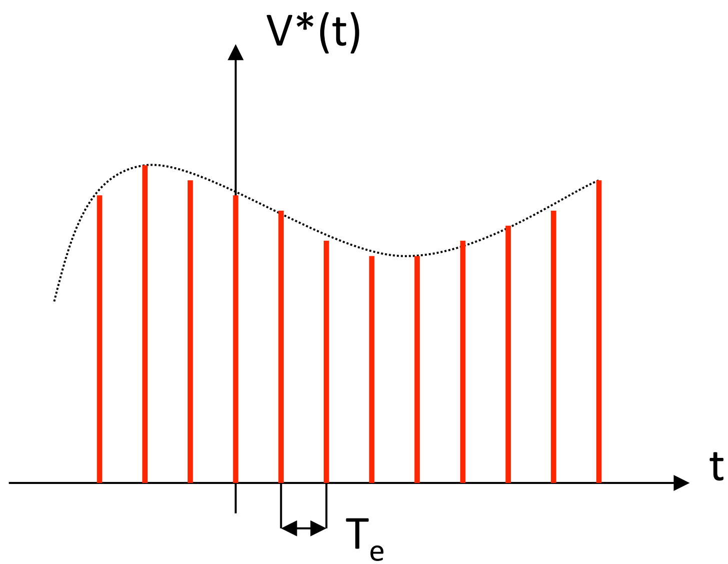
# transformation Analogique Numérique



# Echantillonnage idéal

Cette opération consiste à prendre la valeur instantanée du signal à des instants séparés par un temps constant Te.




$V^*(t) = 0$ si $t \neq kT_e$ et $V^*(t) = v(t)$ si $t = kT_e$

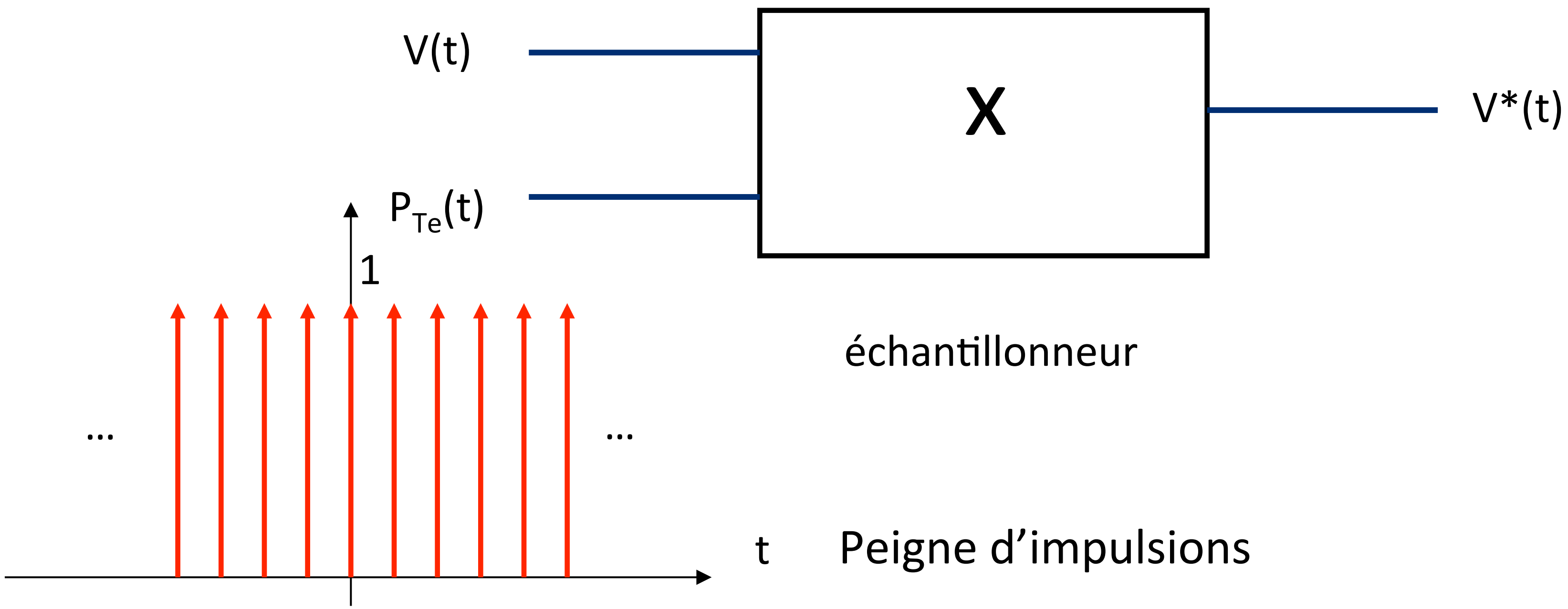
# Echantillonnage idéal

$T_e$ est appelée période d' échantillonnage

$F_e = 1/T_e$ est la fréquence d' échantillonnage

# Echantillonnage idéal

D'un point de vue mathématique l'échantillonnage idéal correspond à une simple multiplication entre v(t) et une fonction $P_{Te}(t)$ .



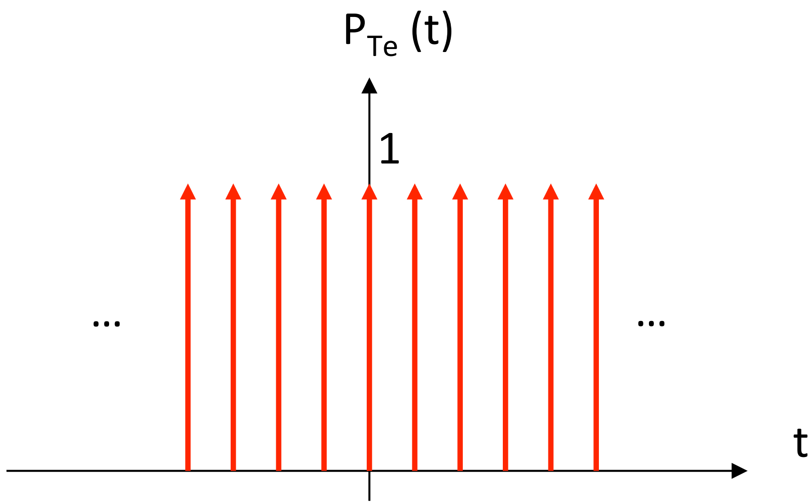
# Echantillonnage: notation mathématique

$$v^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} v(t) \times \delta(t - kT_e) = v(t) \times \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$avec\ \delta(x) = 1\ si\ x = 0,\ \delta(x) = 0\ si\ x \neq 0$$

$$\boxed{v^*(t) = v(t) \times P_{T_e}(t)}$$

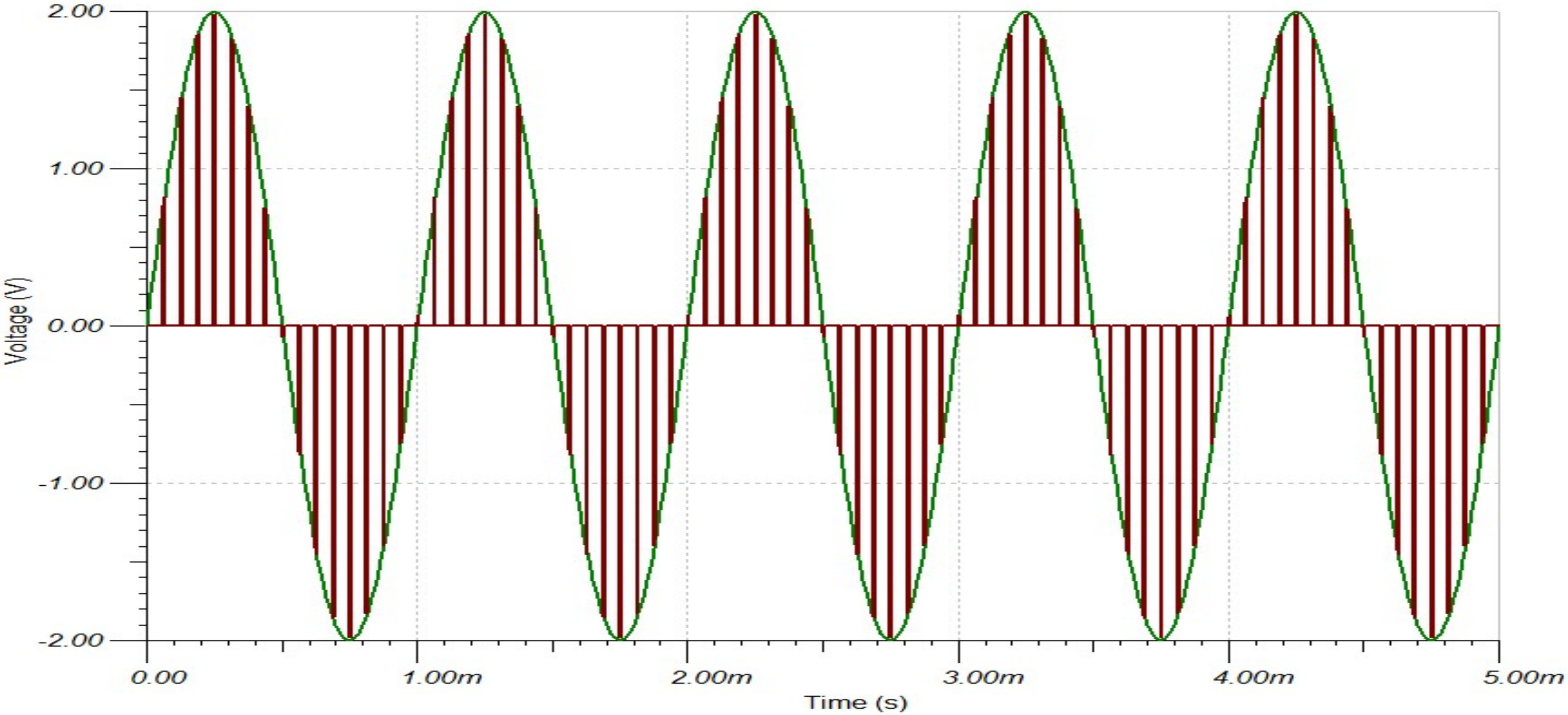
Un signal échantillonné est le produit du signal de départ par une suite périodique d'impulsion (peigne)



# Echantillonnage idéal

Un exemple : signal sinusoïdal (f = 1 kHz, $F_e$ = 16 kHz)

Représentation temporelle



# Echantillonnage idéal

Un exemple : signal sinusoïdal ($f = 1$ kHz, $F_e = 16$ kHz)

Représentation fréquentielle

?

# Echantillonnage idéal: notation mathématique

Transformée de Fourier

$$v^*(t) = v(t) \times P_{T_e}(t)$$

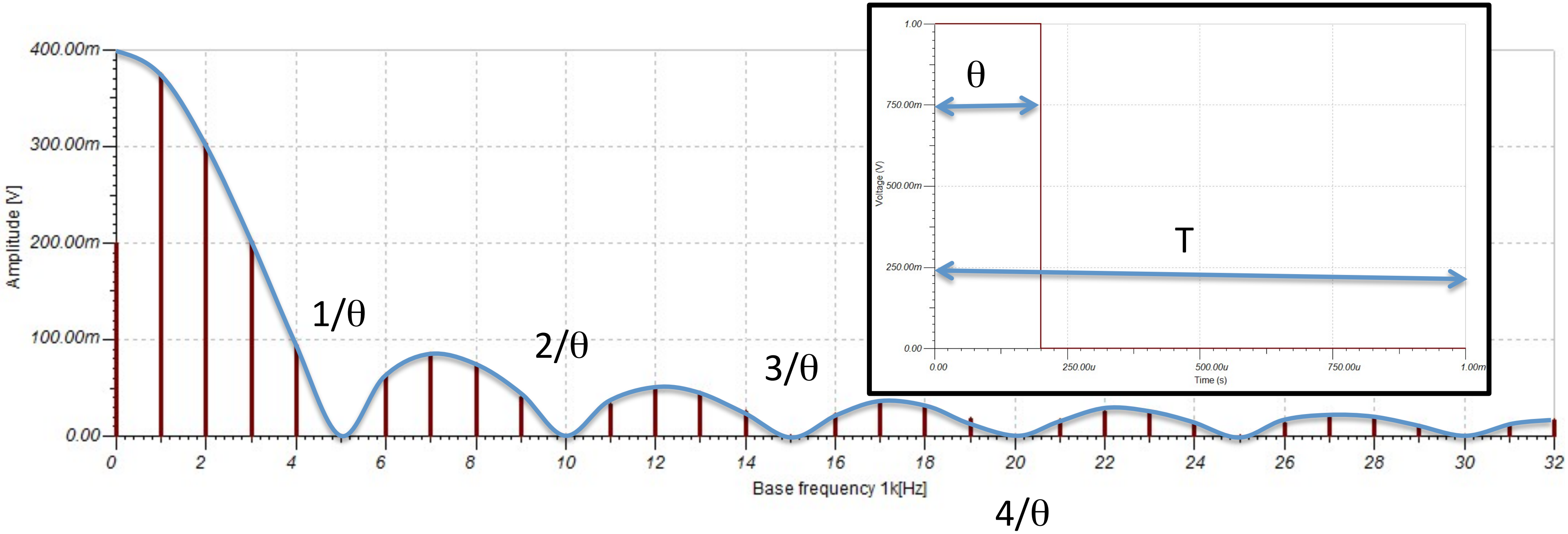
Un signal échantillonné est le produit du signal de départ par une suite périodique d'impulsion (peigne)

On a vu qu'un produit simple se transforme en produit de convolution :

$$v^*(f) = v(f) \otimes P_{T_e}(f)$$

# Spectre d'une impulsion périodique

Impulsion périodique 1 kHz, largeur 200$\mu$s

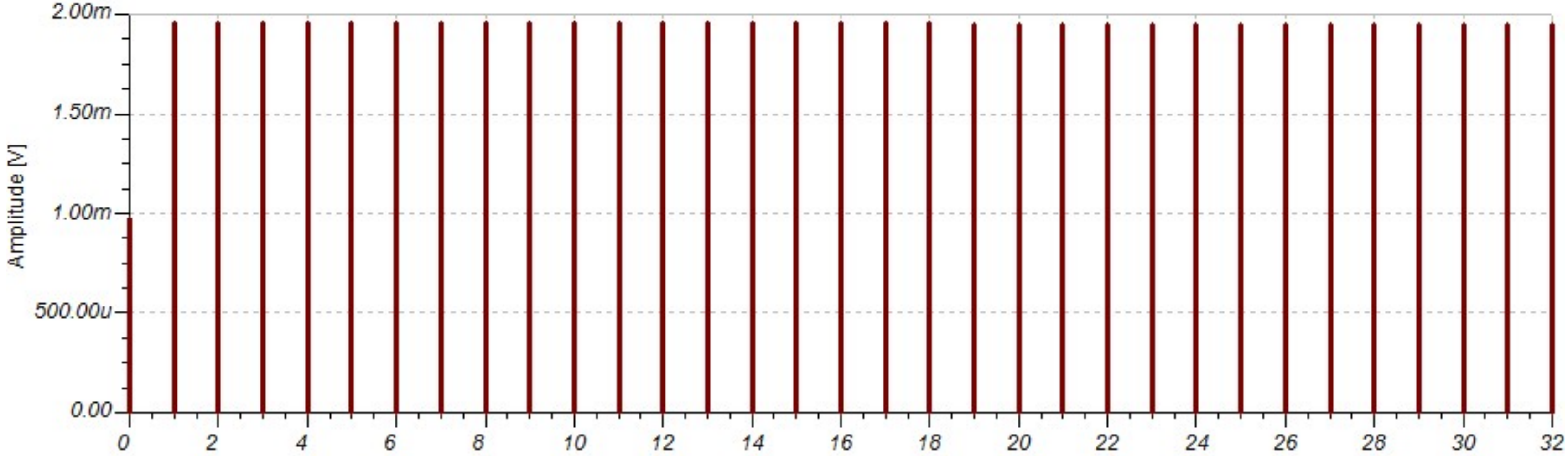



Que se passe-t-il si $\theta$ tend vers 0 ?

# Spectre d'un peigne d'impulsions

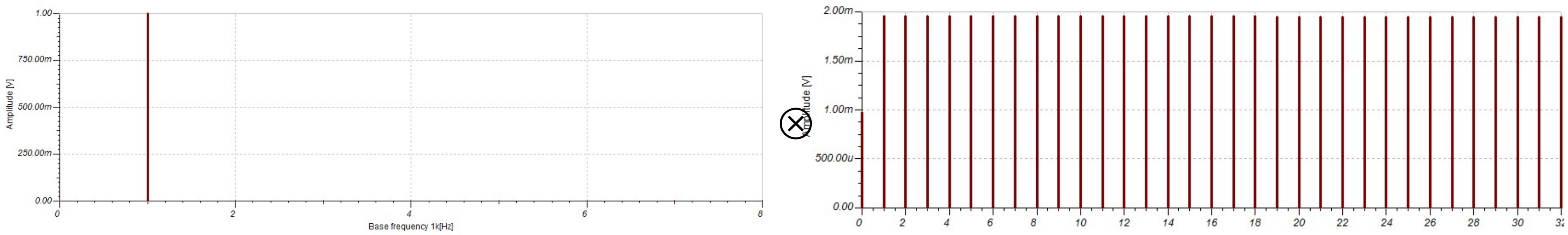
Impulsion périodique 1 kHz, largeur 1 ns

$\left|P_{T_e}(f)\right|$




$1/\theta$ est rejeté à l'infini quand $\theta = 0$, le spectre d'un peigne d'impulsions est encore un peigne d'impulsion…

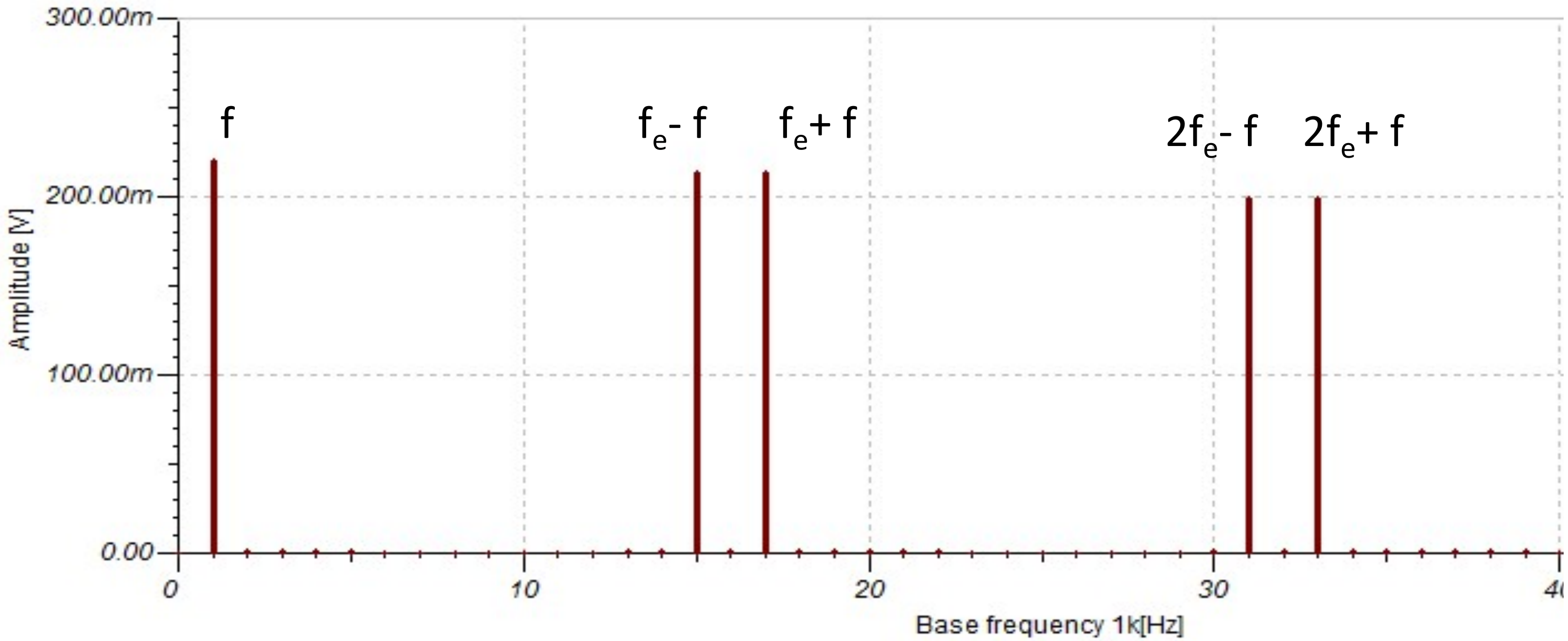
# Cas particulier signal sinusoïdal




Que donne le produit de convolution entre une raie à f et un peigne de raies à $kf_e$ ?

# Echantillonnage idéal, signal sinus

Un exemple :signal sinusoïdal f = 1 kHz échantillonné à $f_e$ = 16 kHz




On obtient un spectre avec des raies à f, ($f_e$-f), ($f_e$+f), ($2f_e$-f), ($2f_e$+f), …, ($kf_e$-f), ($kf_e$+f)

# Echantillonnage idéal: notation mathématique

$$v_r^*(t) = v(t) \times \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT_e)$$

TF

TF$^{-1}$

$$v_r^*(f) = f_e \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v(f - nf_e)$$

# Représentation fréquentielle
# cas général

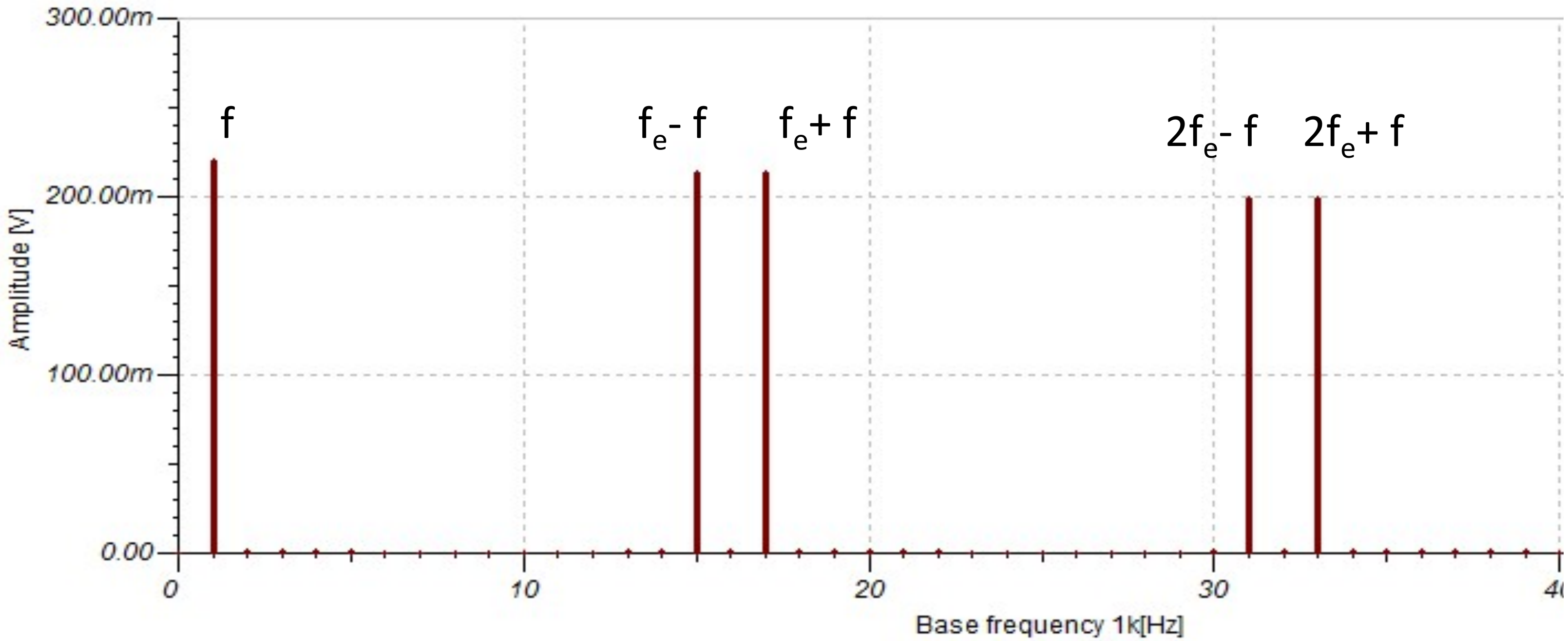
Le calcul montre que la représentation en fréquence du signal échantillonné est donnée par :

$$v^*(f) = f_e \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v(f - nf_e)$$

Le spectre du signal échantillonné est la reproduction périodique du spectre du signal de départ avec une « période » $f_e$

# Echantillonnage idéal, signal sinus

Un exemple :signal sinusoïdal f = 1 kHz échantillonné à $f_e$ = 16 kHz




On obtient un spectre avec des raies à f, ($f_e$-f), ($f_e$+f), ($2f_e$-f), ($2f_e$+f), …, ($kf_e$-f), ($kf_e$+f)

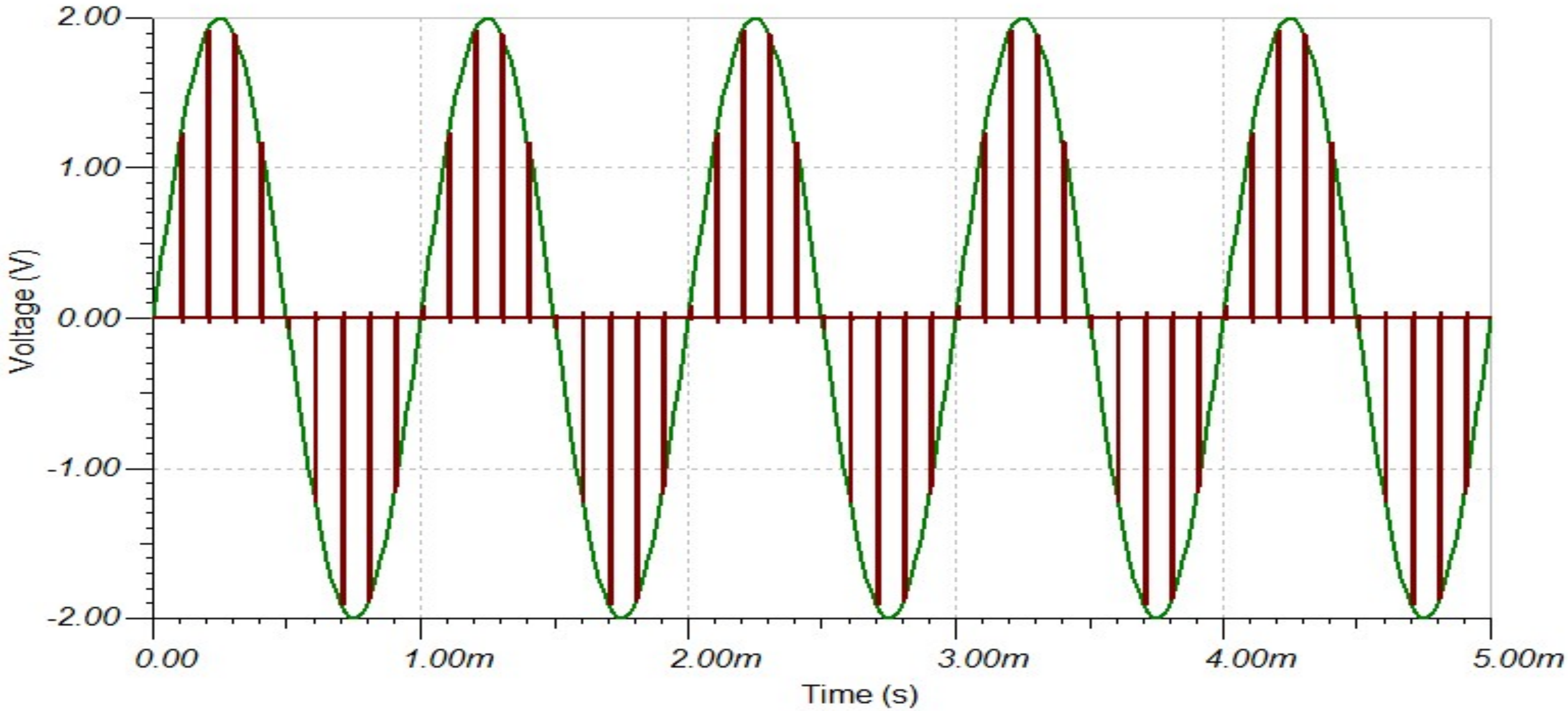
# Choix de la fréquence d'échantillonnage

Que se passe-t-il si la fréquence d'échantillonnage diminue et se rapproche de f ?

# Echantillonnage idéal

Un exemple : signal sinusoïdal (f = 1 kHz, $f_e$ = 10 kHz)

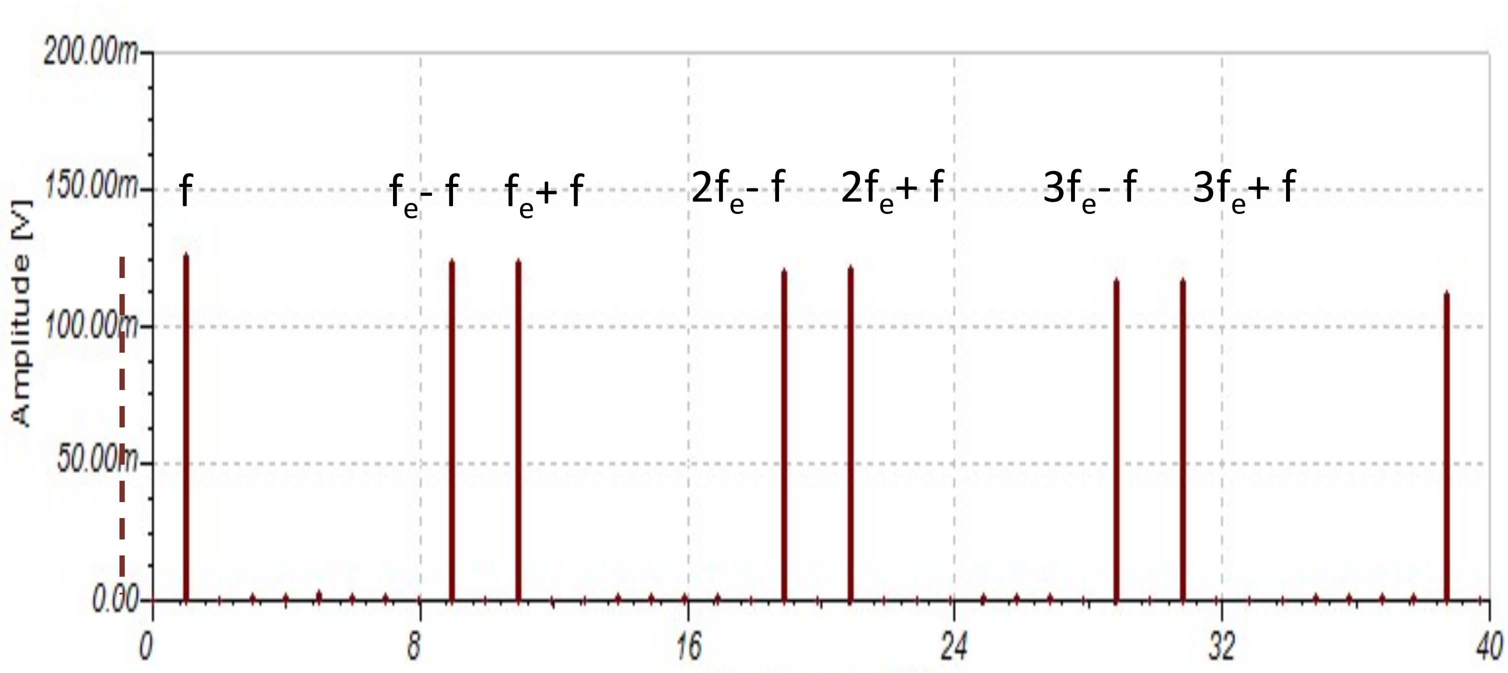
Représentation temporelle



# Echantillonnage idéal

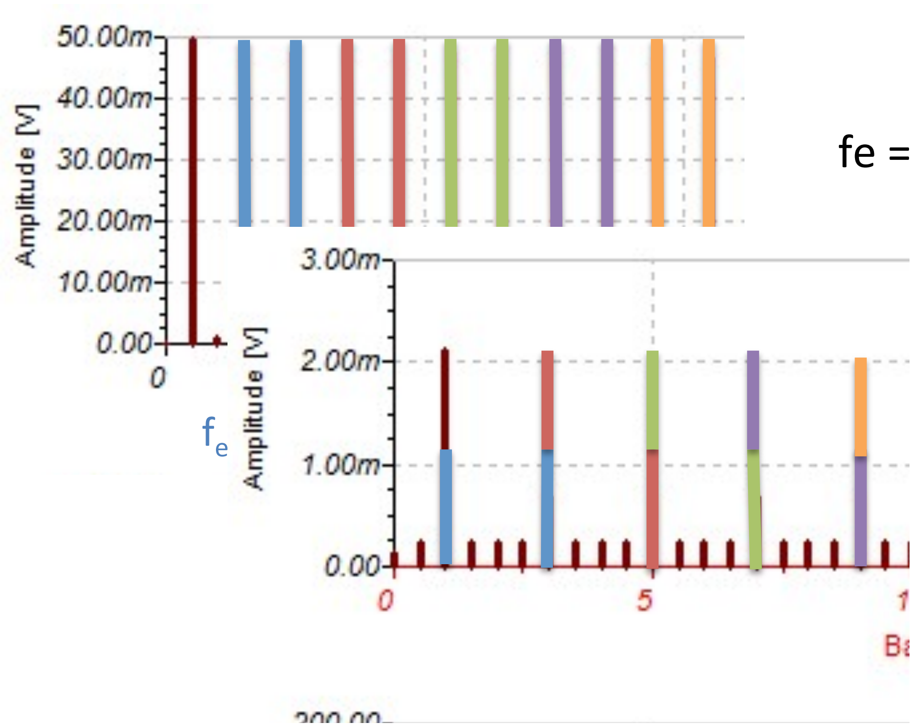
Un exemple : signal sinusoïdal ($f$ = 1 kHz, $f_e$ = 10 kHz)

Représentation fréquentielle



# Choix de la fréquence d'échantillonnage

Si on descend encore ?



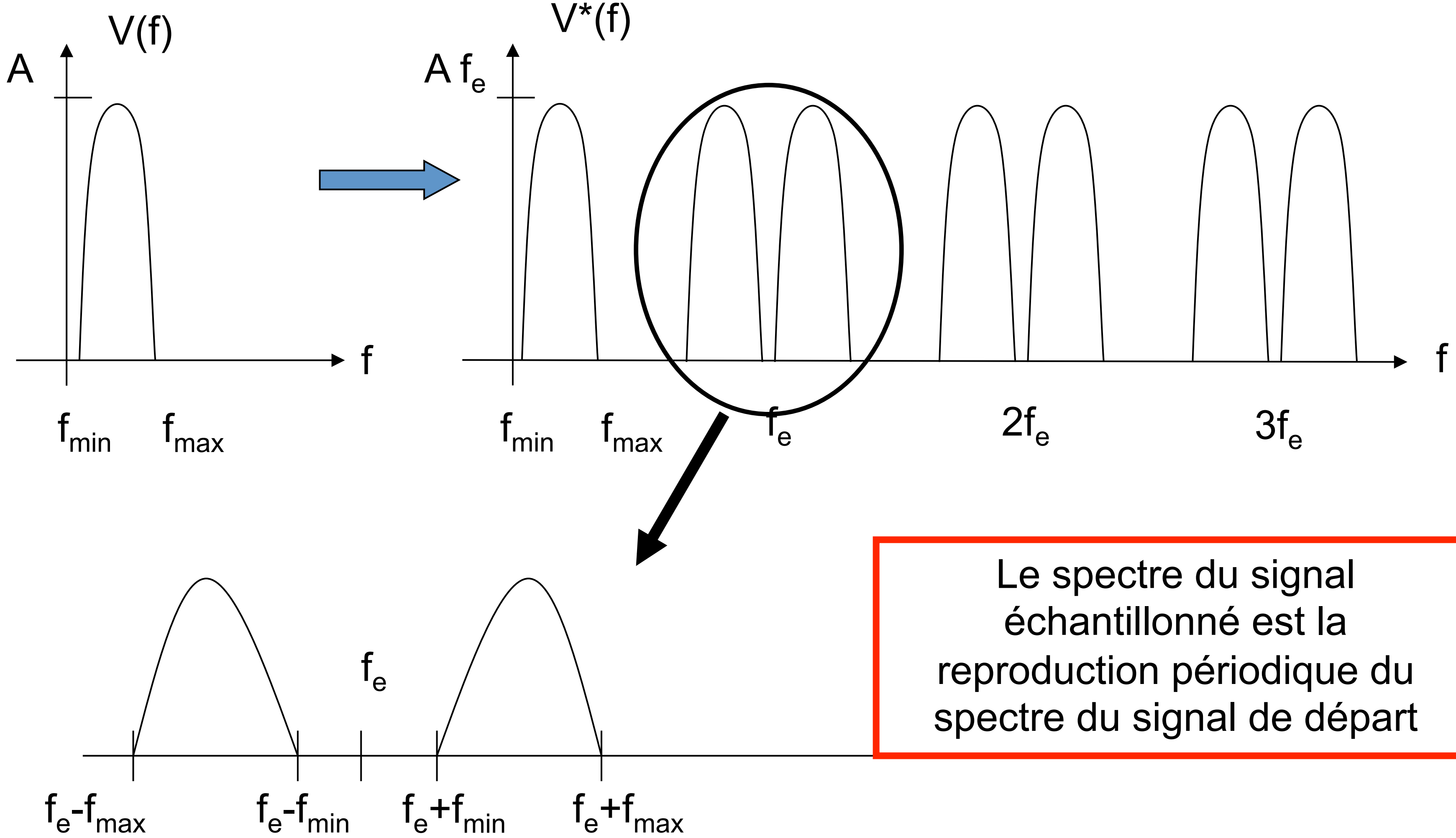

fe = 4 kHz

fe = 2 f = 2kHz

On voit apparaître le phénomène de repliement (aliasing en anglais)

# Représentation fréquentielle : cas général

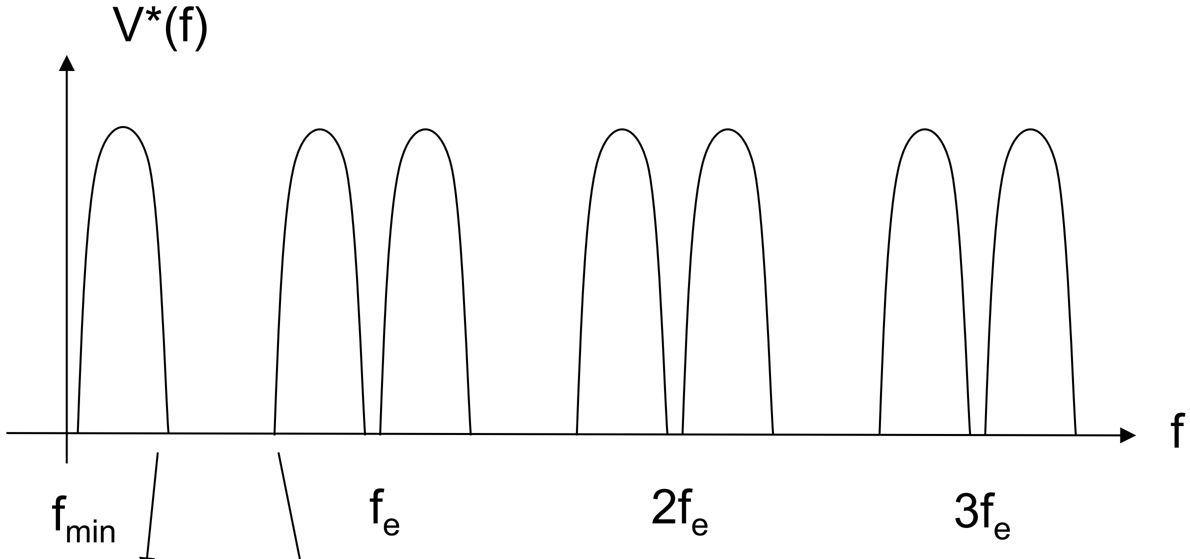
$$v^*(f) = f_e \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v(f - nf_e)$$




Le spectre du signal échantillonné est la reproduction périodique du spectre du signal de départ

# Théorème de Shannon

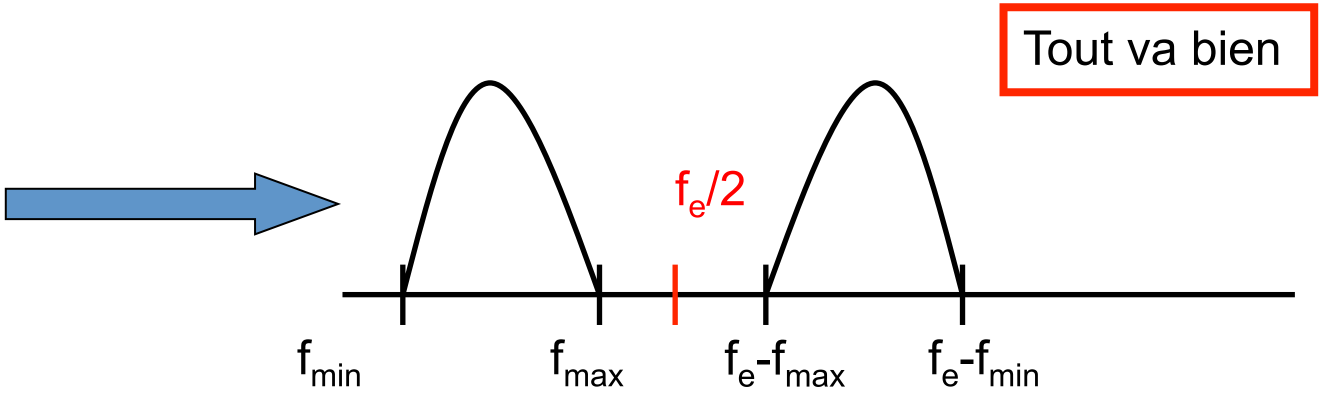
Le spectre du signal ne reproduit périodiquement le spectre du signal de départ si et seulement si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal de départ.



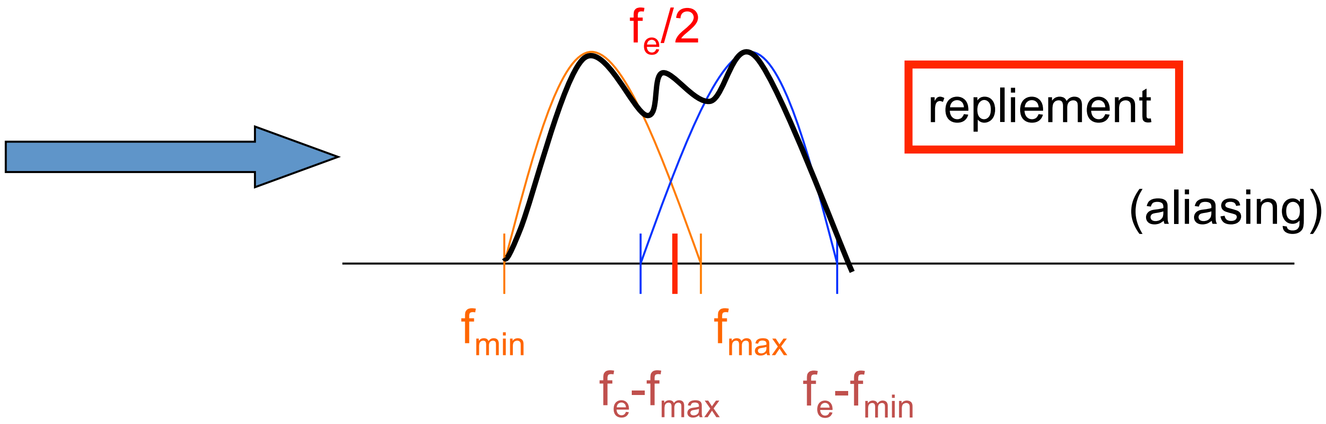

$f_{max} < f_e - f_{max}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f_e > 2 f_{max}}$

# Phénomène de repliement

$f_e /2 > f_{max}$




$f_e /2 < f_{max}$

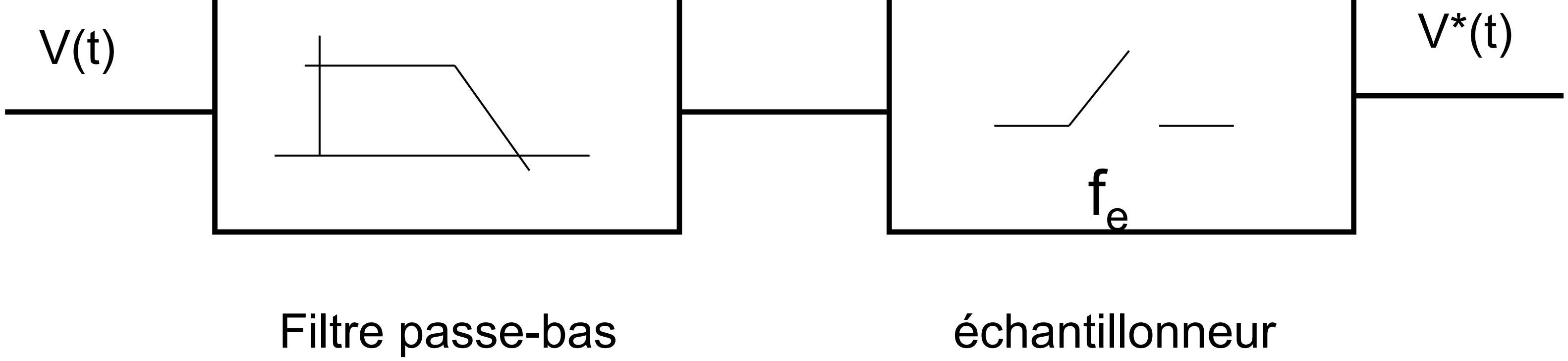


# Filtre anti-repliement

Comment se prémunir du repliement ?

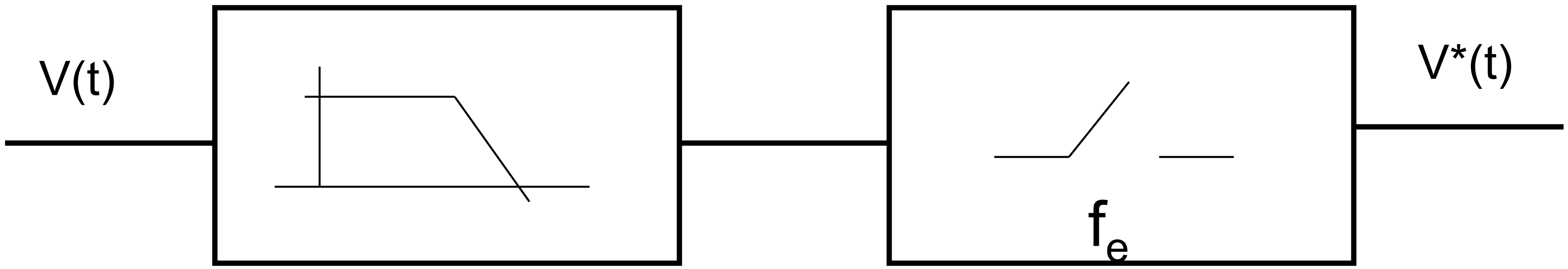
On peut choisir Fe mais on ne connaît pas toujours la fréquence max du spectre du signal que l'on veut échantillonner….

Pour éviter les mauvaises surprises on limite volontairement le spectre du signal en rajoutant avant l'échantillonneur un filtre passe bas appelé filtre anti-repliement



# Filtre anti-repliement

Choix de la fréquence de coupure ? :




Filtre passe-bas　　　　　　échantillonneur

$$\boxed{f_c < f_e / 2}$$

Pour être efficace le filtre anti-repliement doit avoir une fréquence de coupure inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage

# Téléphonie numérique

fe = 8 khZ, alors que la voix couvre la gamme 20 Hz – 20 kHz

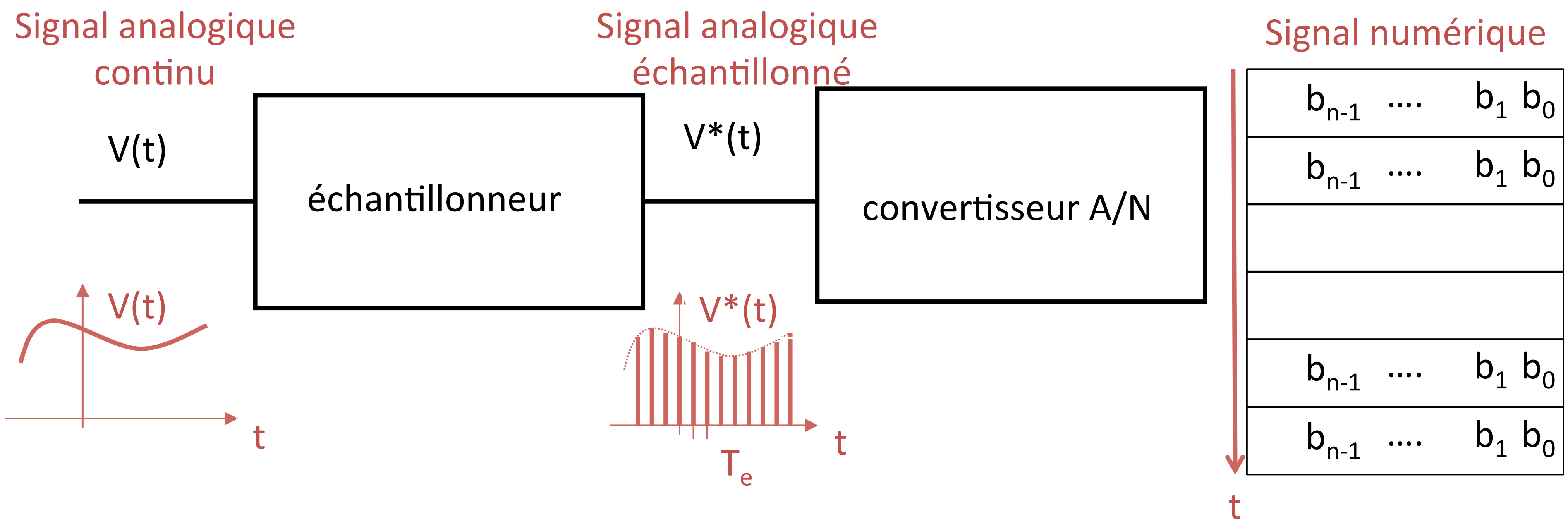
$\Rightarrow$ fmax = 20 kHz

Pour que le système fonctionne on a rajouté un filtre anti-repliement dont la fréquence de coupure est réglée à 3,4 kHz.

# Echantillonnage réel

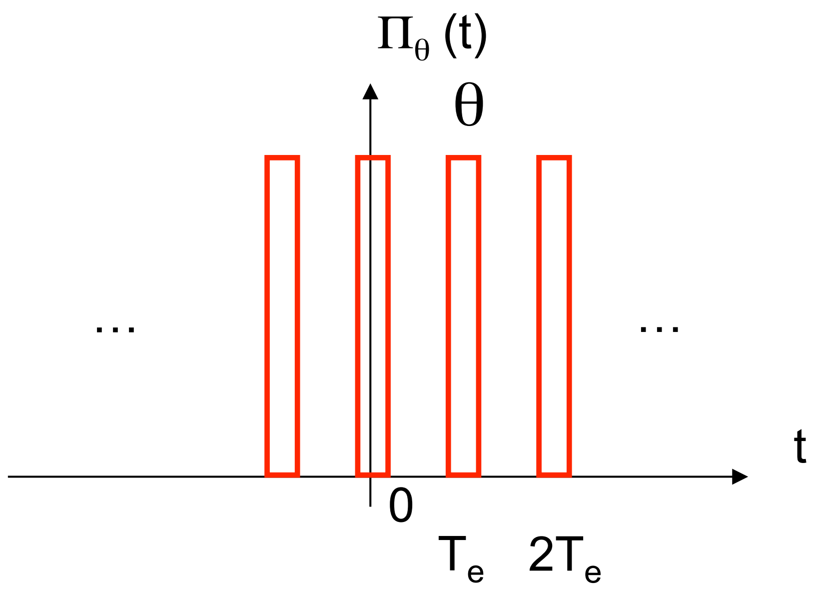
En pratique on ne sait pas réaliser de Dirac !! Et de toute façon les CAN ont besoin de temps pour réaliser une conversion, lors de chaque prise d'échantillon le signal v*(t) doit être égal à v(t) pendant une durée non nulle.

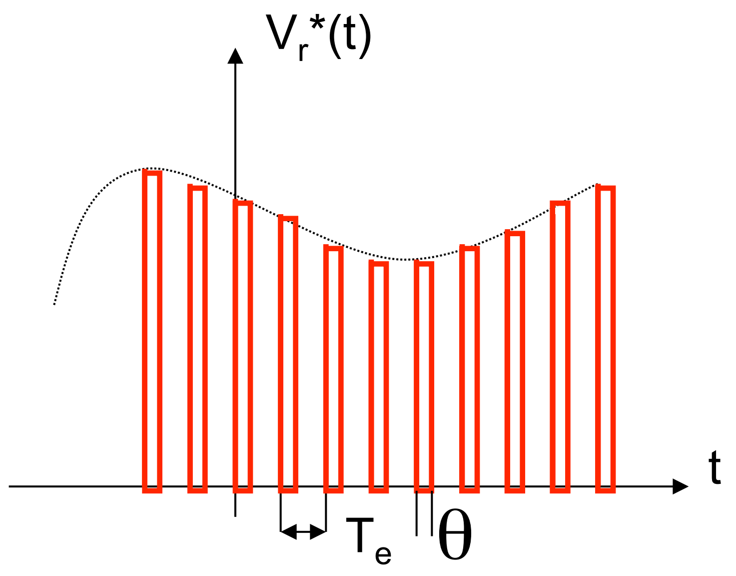
Les impulsions d'échantillonnage ont donc une durée notée $\theta \neq 0$



# Echantillonnage réel

Les impulsions d'échantillonnage ont une durée notée $\theta$



# Echantillonnage idéal: notation mathématique

$$v_r^*(t) = v(t) \times \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT_e)$$

TF

TF$^{-1}$

$$v_r^*(f) = f_e \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v(f - nf_e)$$

# Echantillonnage réel: notation mathématique

$$v_r^*(t) = v(t) \times \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \Pi_\theta(t - kT_e)$$

TF

TF$^{-1}$

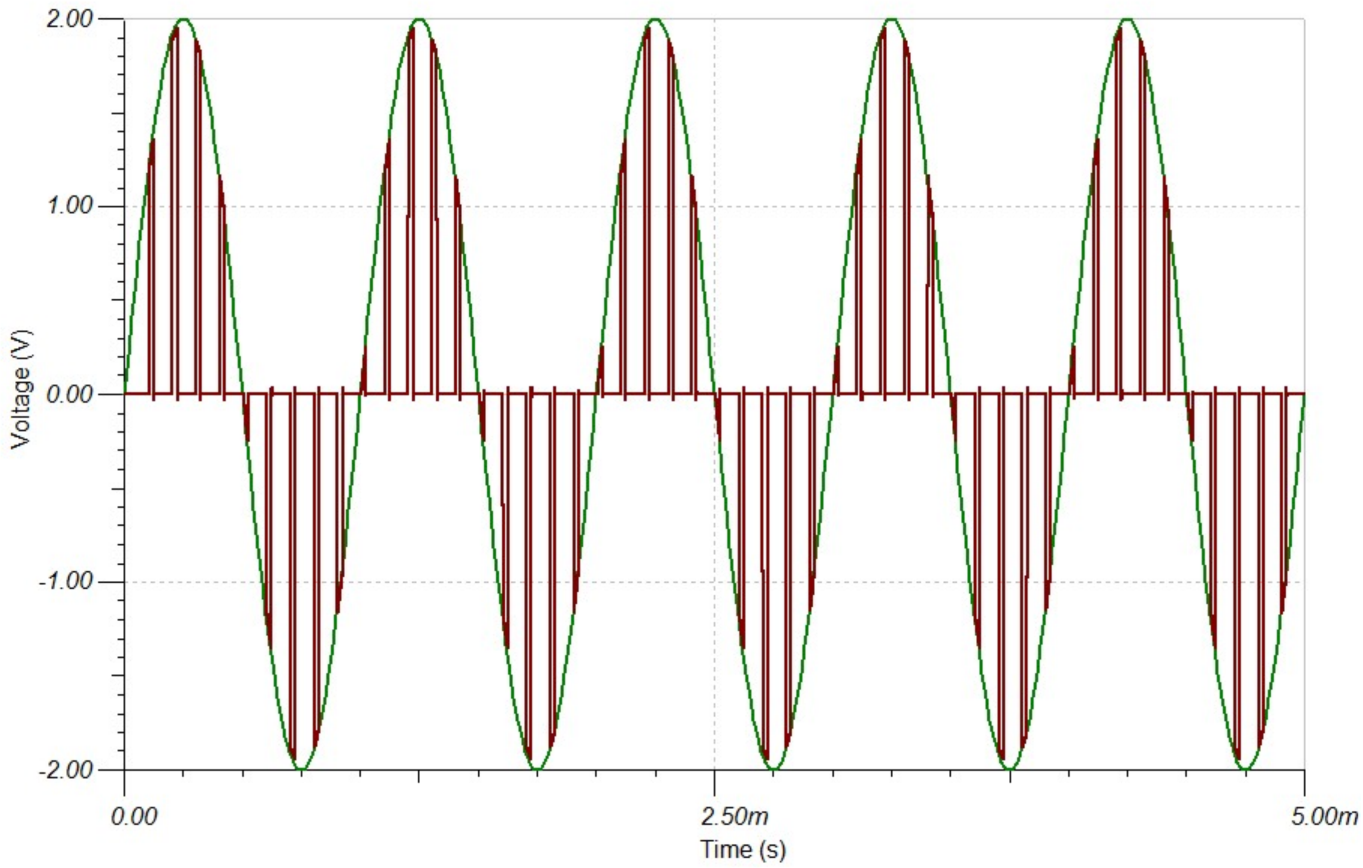
$$v_r^*(f) = f_e \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \theta \times \frac{\sin(\pi\theta n f_e)}{\pi\theta n f_e} \times v(f - n f_e)$$

Terme supplémentaire

# Echantillonnage réel

Un exemple : signal sinusoïdal ($f$ = 1 kHz, $f_e$ = 10 kHz, $\theta$ = 20$\mu$s)

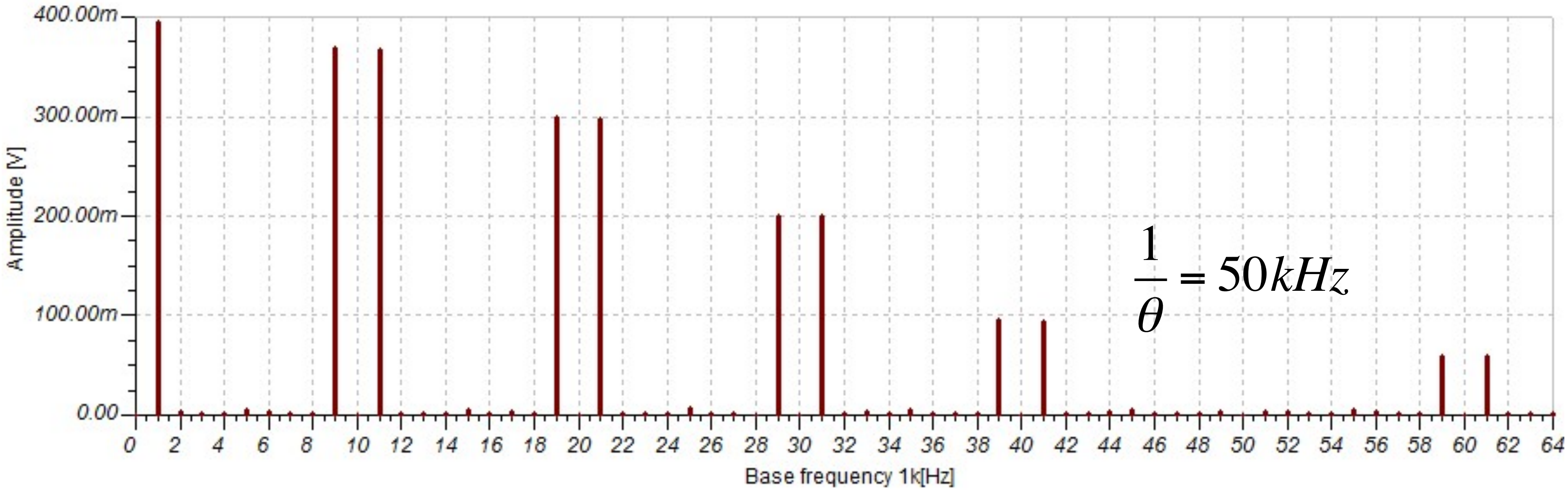
Représentation temporelle



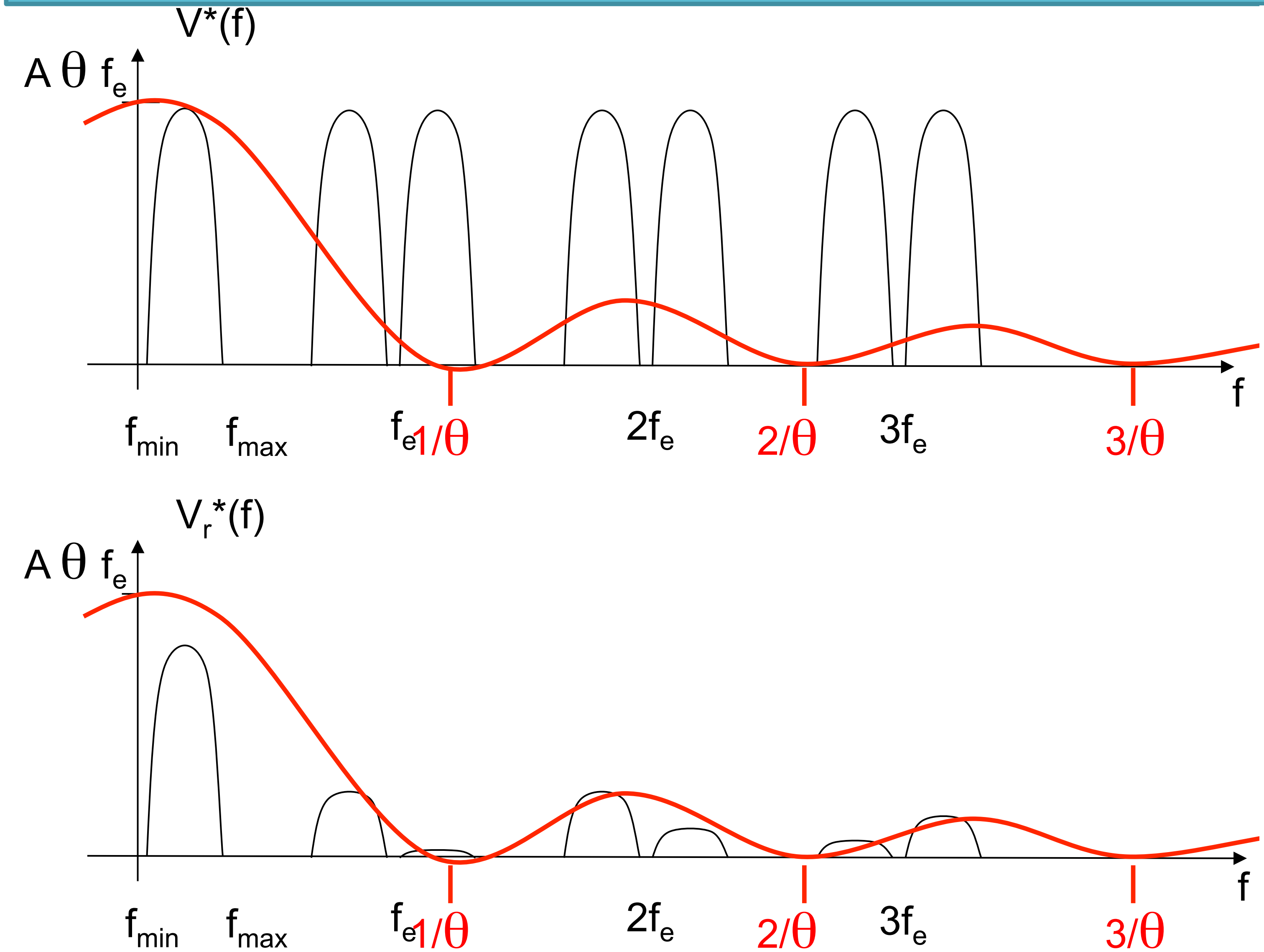
# Echantillonnage réel

Un exemple : signal sinusoïdal ($f$ = 1 kHz, $f_e$ = 10 kHz, $\theta$ = 20µs)

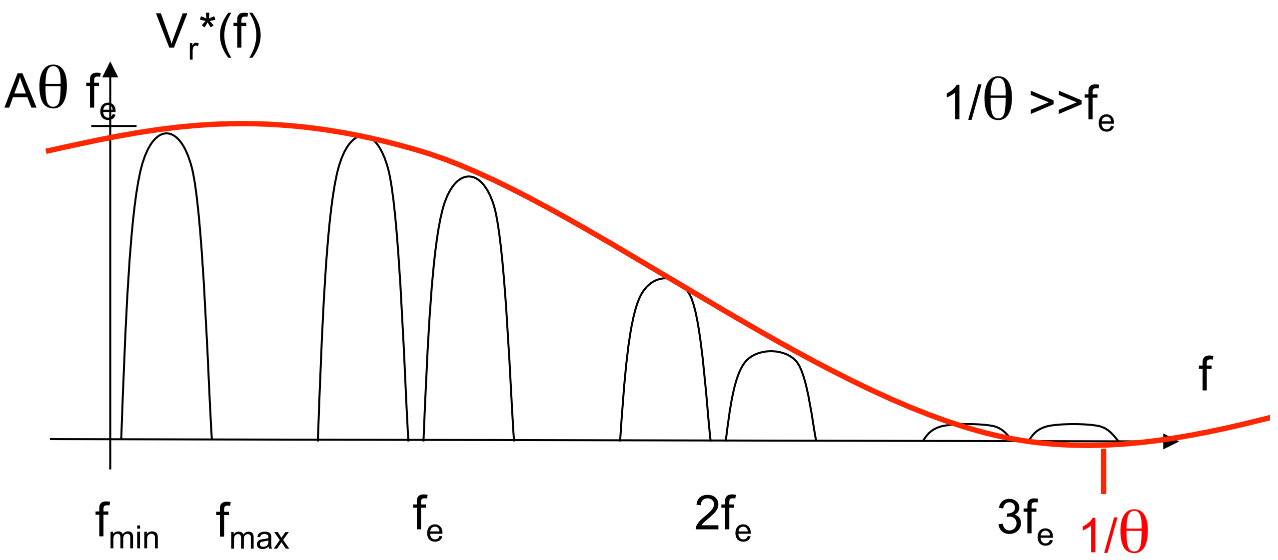
Spectre



# Spectre du signal échantillonné réel

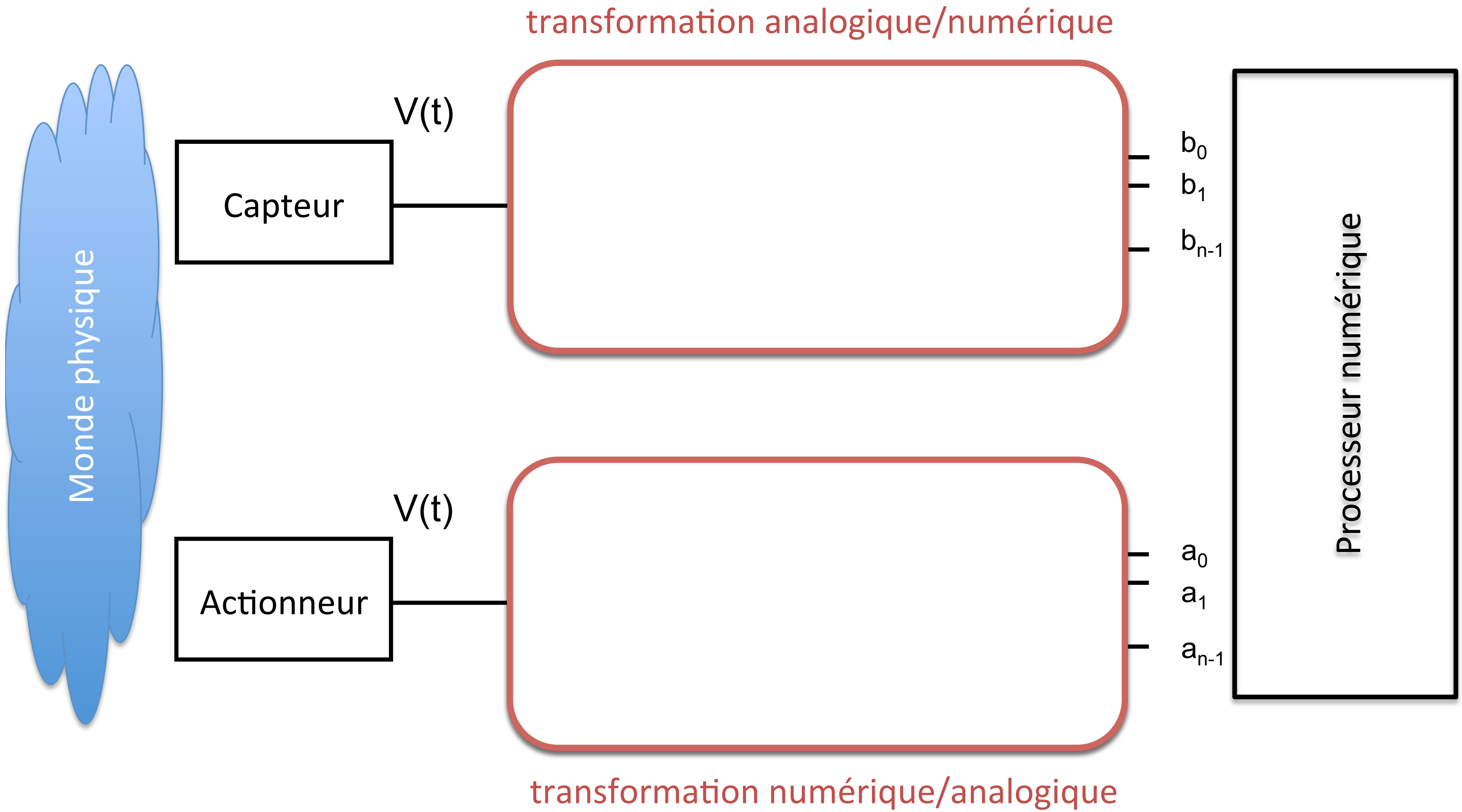


# Spectre du signal échantillonné réel

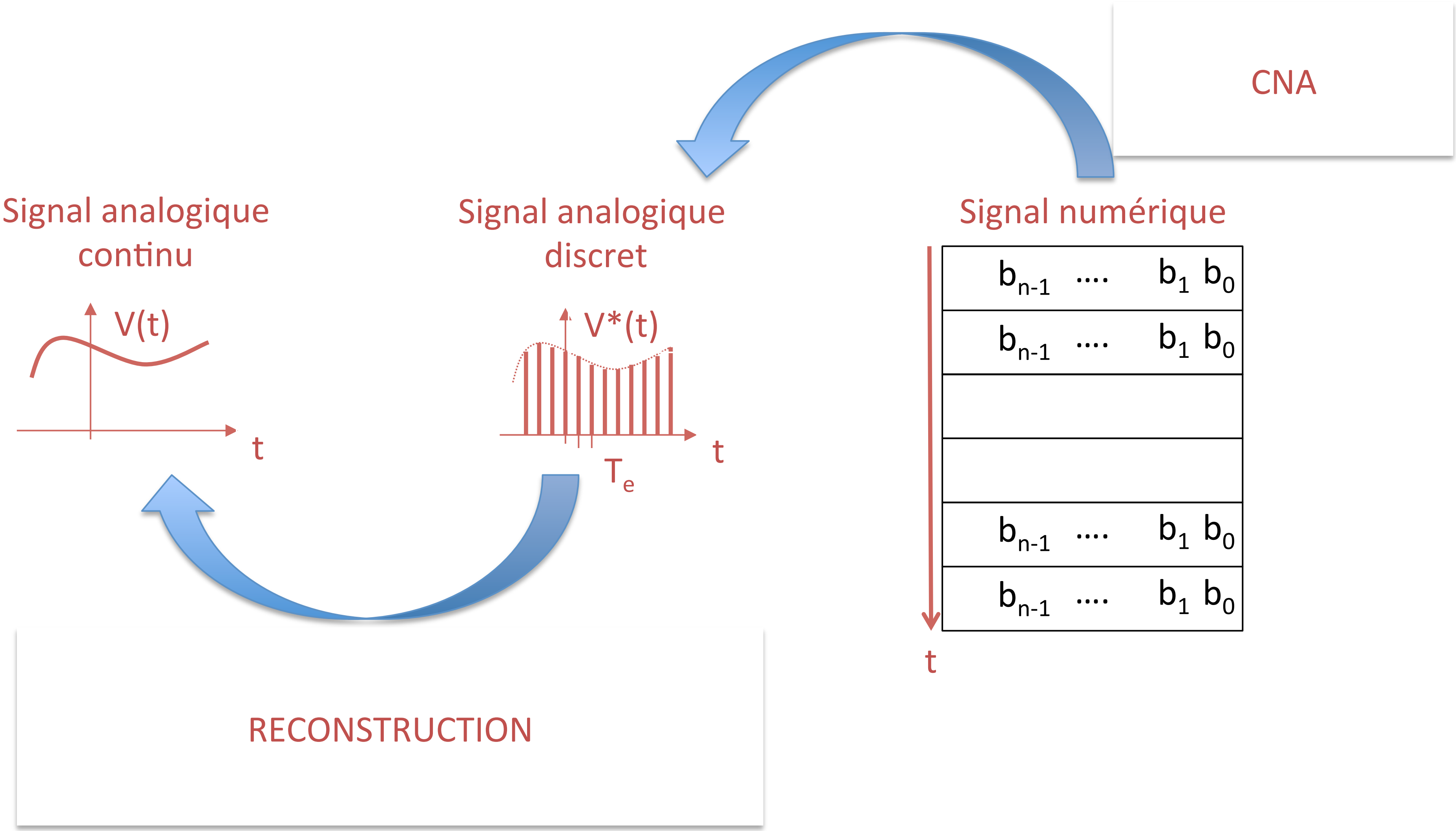



Il faut s'arranger pour avoir $1/\theta >> f_e$

# transformation Numérique - Analogique

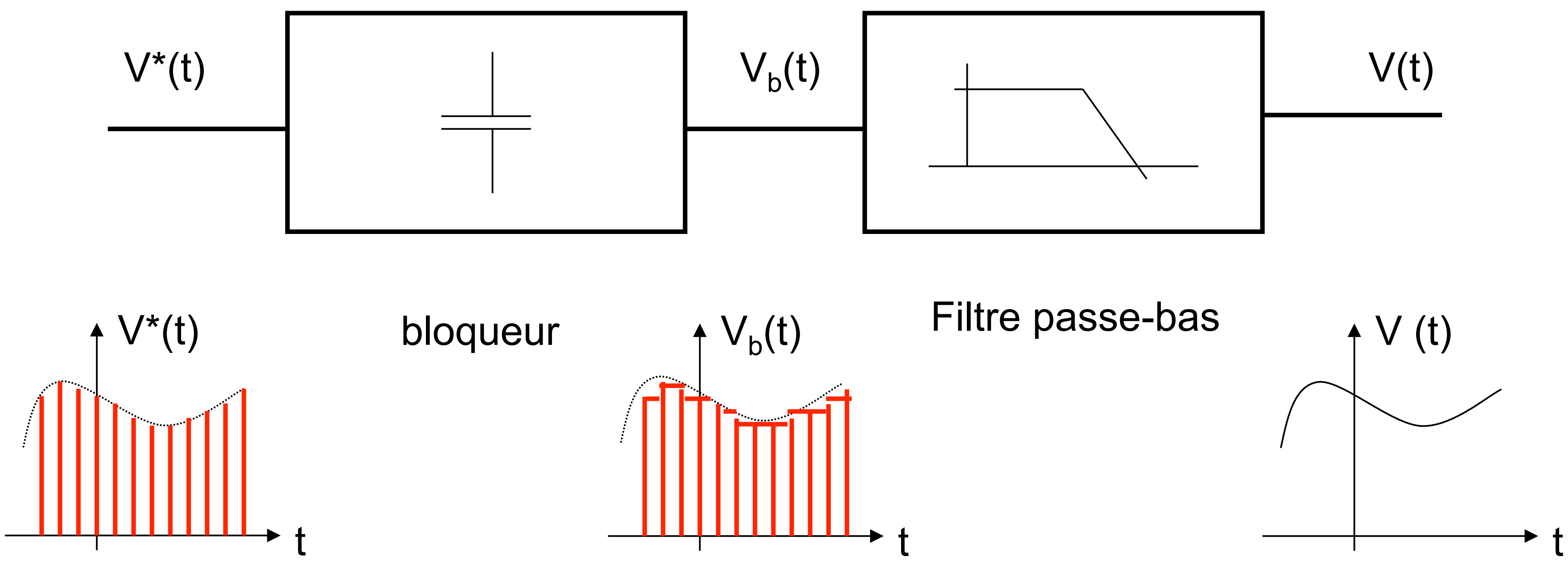


# transformation Numérique Analogique



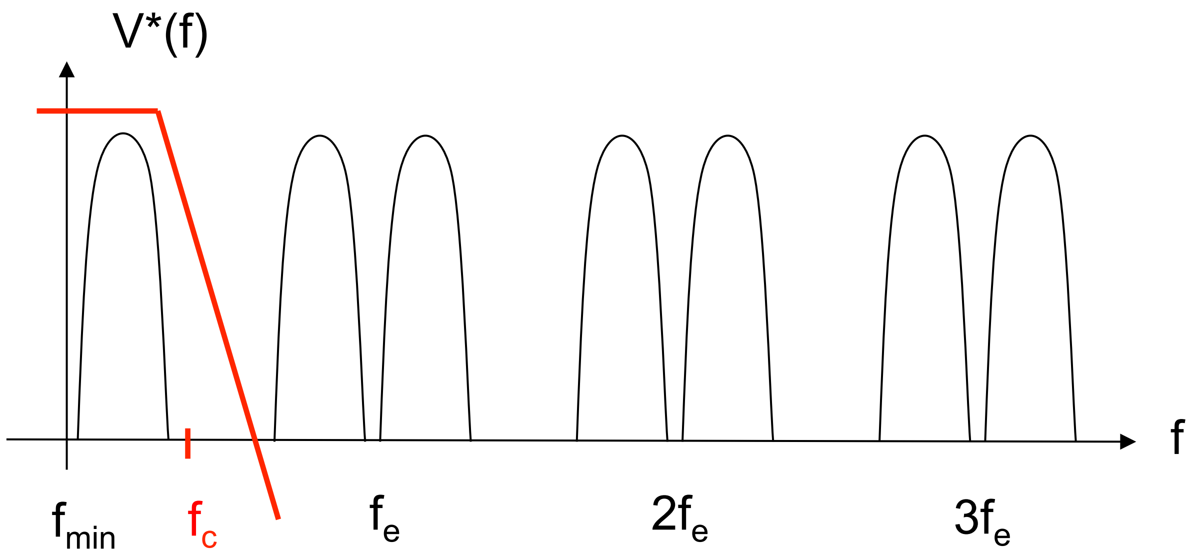
# Reconstruction

La plupart du temps on reconstruit le signal à l'aide d'un bloqueur suivi d'un filtrage passe-bas



# Reconstruction

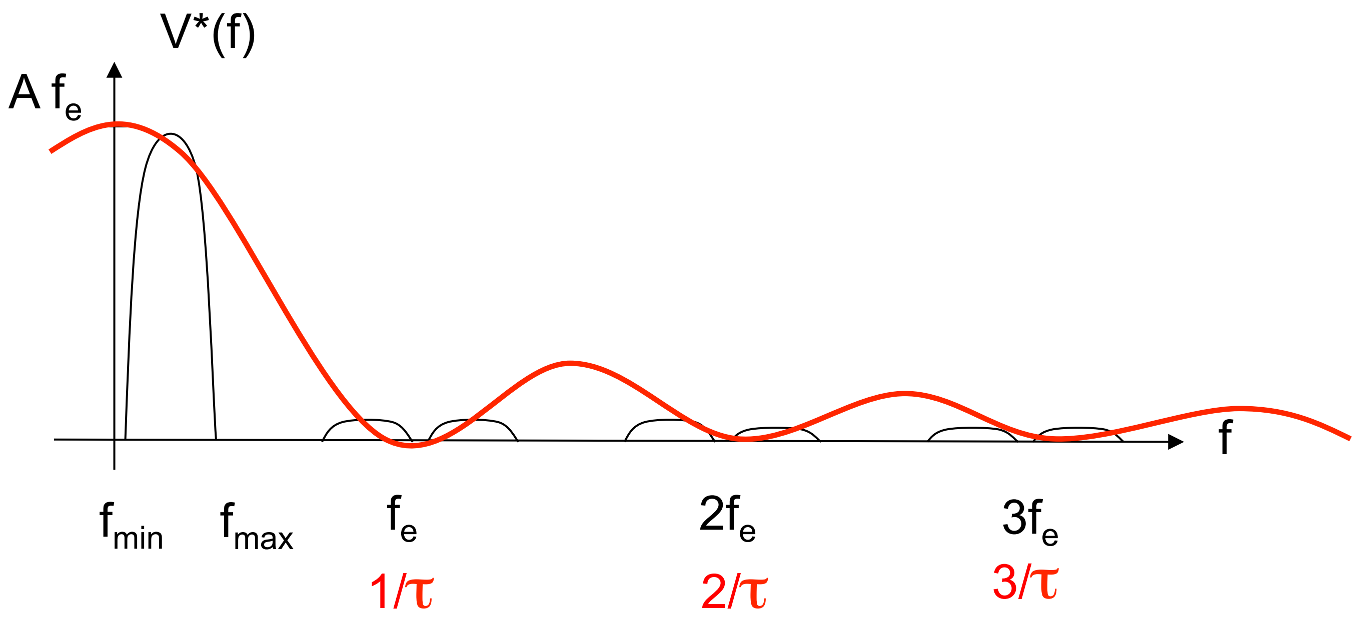
En principe si on respecte Shannon ($f_e > 2\ f_{max}$), alors un simple filtrage passe bas permet de récupérer le signal de départ.




On choisit une fréquence de coupure telle que : $f_c < f_e/2$
Et on s'impose généralement une atténuation minimum pour ($f_e$-$f_{max}$)

# Reconstruction

Le bloqueur maintient la valeur de l'échantillon entre deux valeurs de $T_e$, on a donc le même effet qu'un échantillonnage avec des impulsions de durée $\theta = T_e$ . D'un point de vue spectral, on atténue très fortement les fréquence aux environs de $f_e$, 2 $f_e$, 3 $f_e$, 4 $f_e$,…

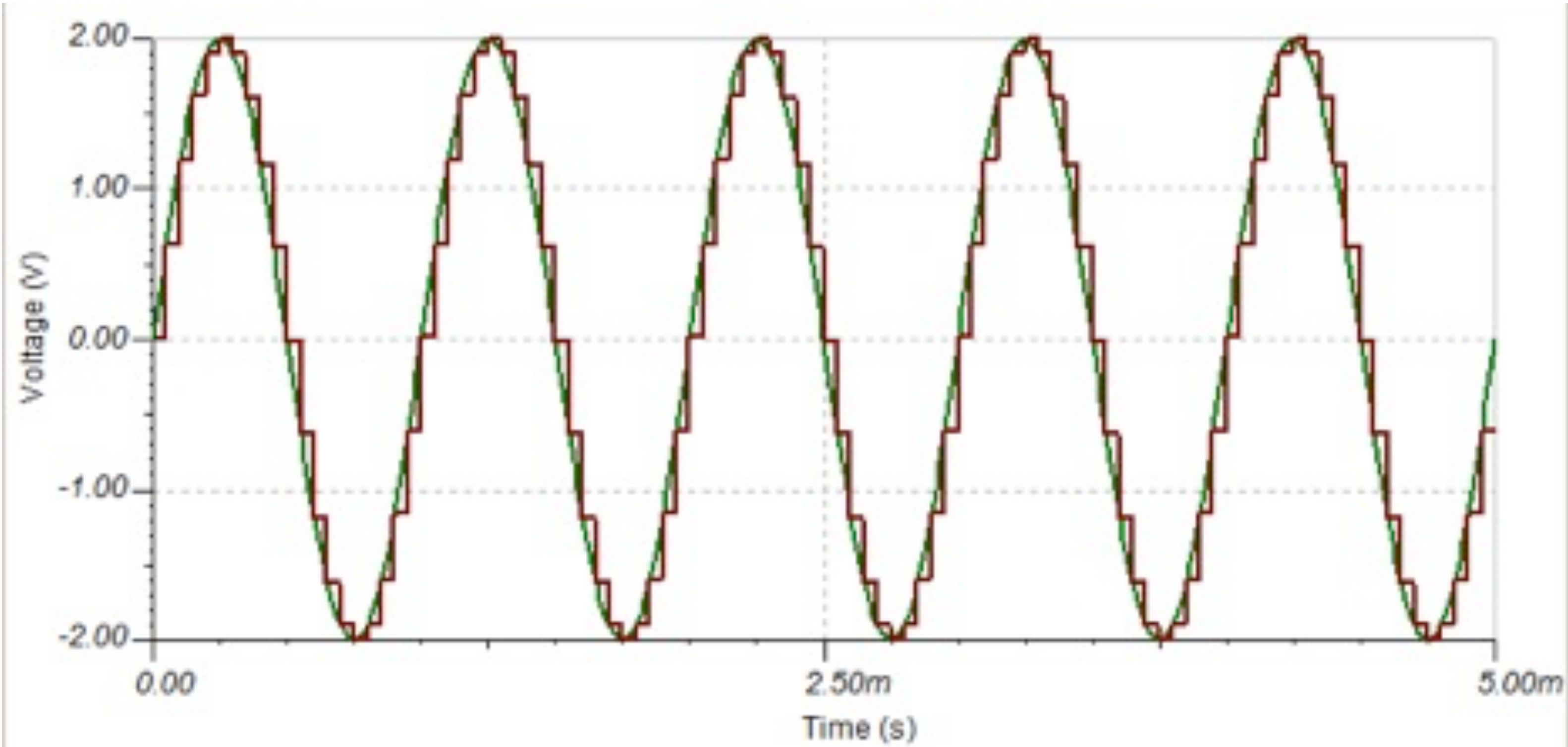



Le filtrage sera en conséquence plus efficace

# Reconstruction : exemple

signal sinusoïdal ($f$ = 1 kHz) échantillonné-bloqué ($f_e$ = 20 kHz)

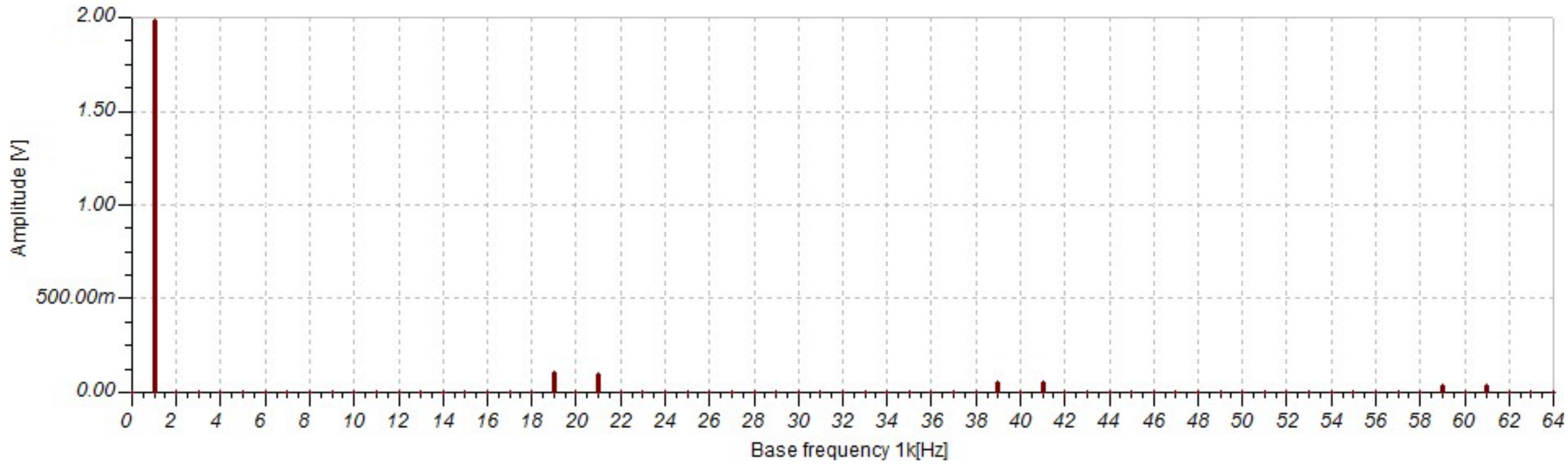
Représentation temporelle



# Reconstruction: exemple

signal sinusoïdal (f = 1 kHz) échantillonné-bloqué ($f_e$ = 20 kHz)

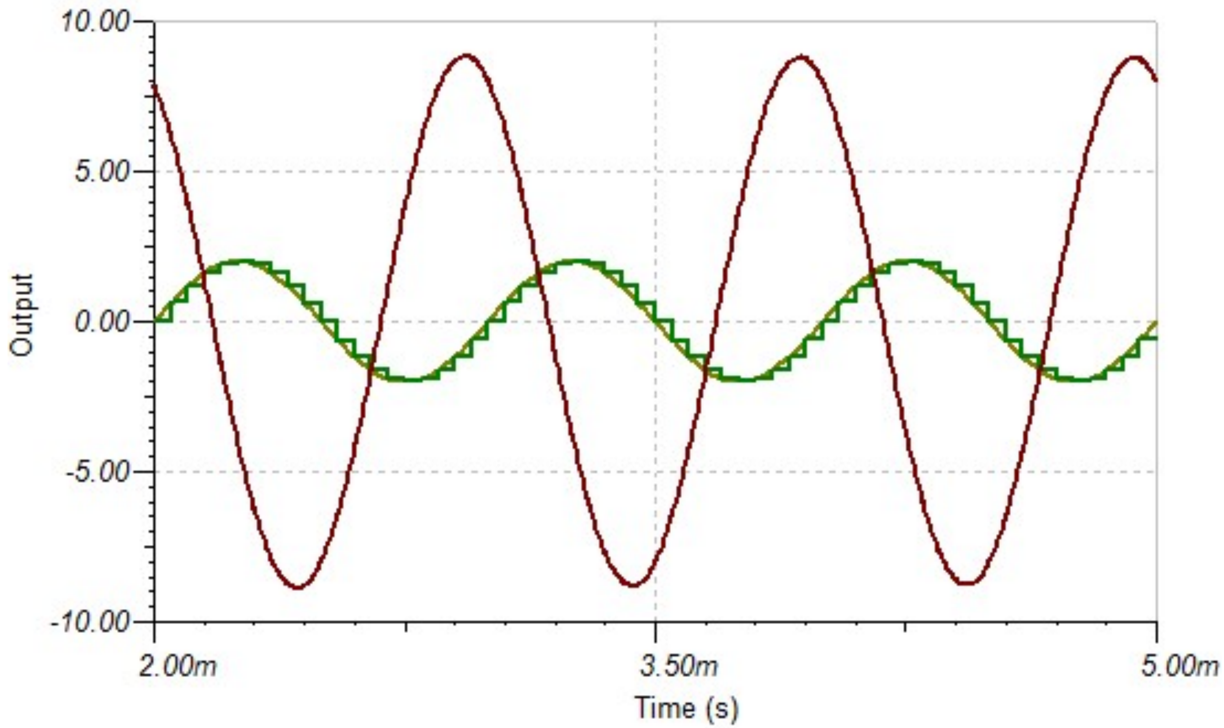
Spectre



# Reconstruction : exemple

signal sinusoïdal (f = 1 kHz) échantillonné-bloqué ($f_e$ = 20 kHz)
filtré (fc = 100 Hz)

Représentation temporelle

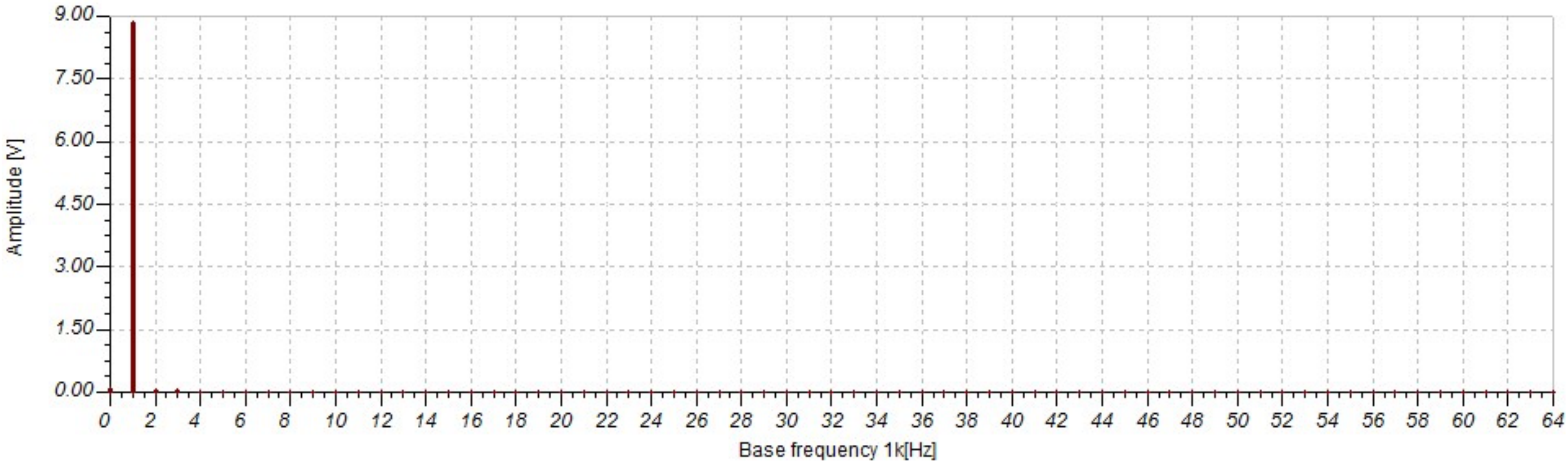


# Reconstruction: exemple

signal sinusoïdal (f = 1 kHz) échantillonné-bloqué ($f_e$ = 20 kHz)

filtré (fc = 100 Hz)

Spectre



# Résumé

1. Signal échantillonné dans le domaine temporel : Produit du signal de départ par un peigne d'impulsion

2. Signal échantillonné dans le domaine fréquentiel : reproduction périodique du spectre du signal de départ (période Fe) si $F_e > 2\ f_{max}$ , sinon phénomène de repliement.

3. Le filtrage passe-bas du signal échantillonné permet de récupérer le signal de départ si le théorème de Shannon est respecté

http://www.ostralo.net/3_animations/swf/echantillonnage.swf

http://www.ostralo.net/3_animations/animations_phys_signauxnumeriques.htm