Génie électrique et informatique industrielle

IUT de BORDEAUX

Représentations temporelle et fréquentielle des systèmes électroniques

Claude Pellet

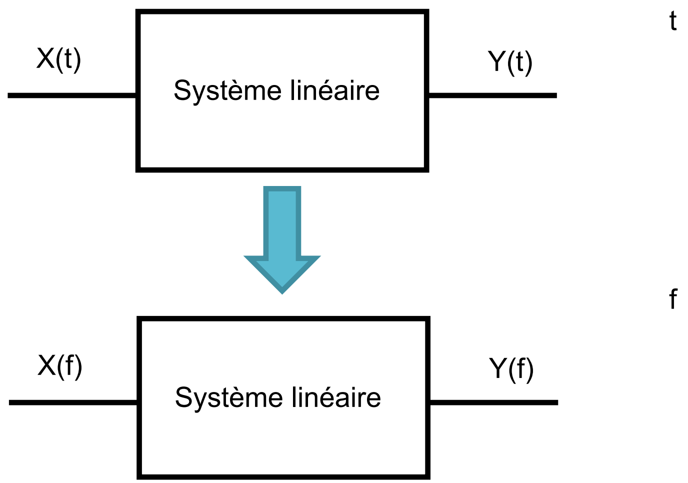
2017-2018

Questionnement

- On a vu comment représenter des signaux dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel, quid des systèmes ?
- En fait vous utilisez déjà sans le savoir des outils de représentation temporelle ou fréquentielle pour l'étude des systèmes linéaires.. Et notamment la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$, introduite pour les signaux sinusoïdaux.
- Mais que se passe-t-il pour des signaux quelconques ?

Systèmes linéaires et invariants dans le temps

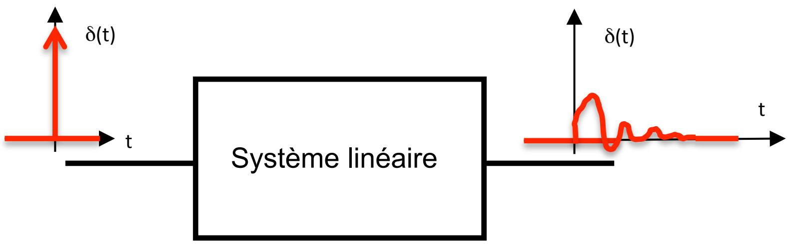
Comment caractériser un système linéaire aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel ?



On pressent bien que la sortie dépend de l'entrée et du système mais quelles relations relient Y(t) à X(t) et Y(f) à X(f), existe-t-il une fonction caractéristique d'un système ?

« Spoiler » …

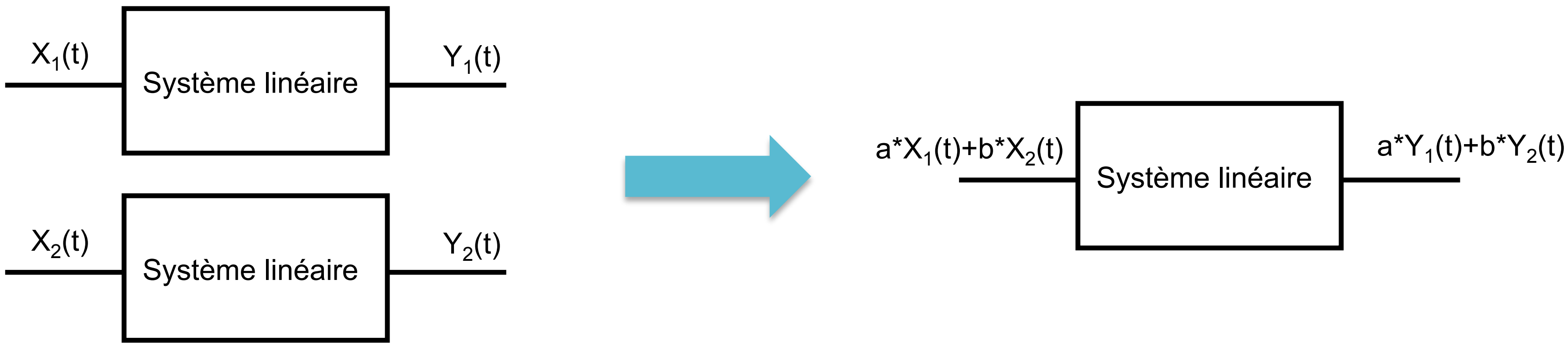
Oui il existe bien une fonction qui va nous permettre de caractériser un système linéaire et invariant dans le temps : sa réponse impulsionnelle…



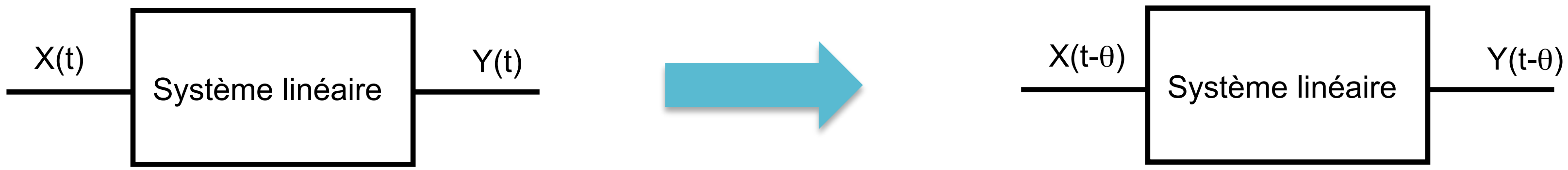
Système linéaire et invariant dans le temps ?
Réponse impulsionnelle ?
Quèsaco ?

Système linéaire et invariant dans le temps

- Linéarité



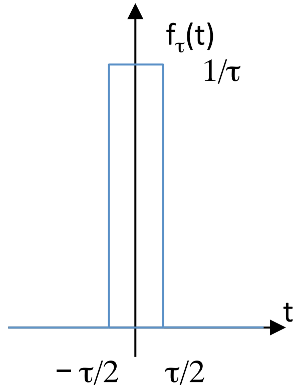
- Invariance temporelle



Fonction impulsion de Dirac

Fonction porte $f_\tau(t)$

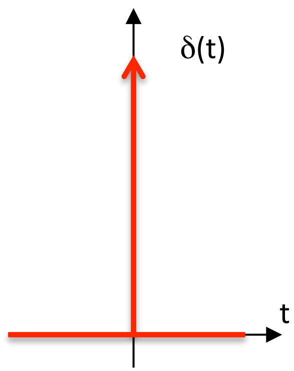
$$f_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \;\; si \;\; -\frac{\tau}{2} \le t \le \frac{\tau}{2}; \;\; f_\tau(t) = 0 \;\; ailleurs$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\tau(t)\,dt = 1$$

Impulsion de Dirac $\delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} f_\tau(t)$$

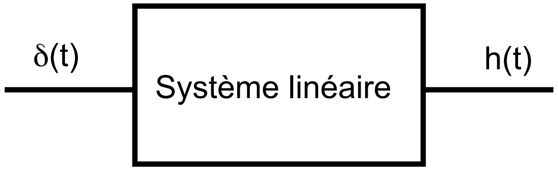


$$\delta(t) = 0 \;\; si \; t \neq 0, \;\; \delta(0) = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

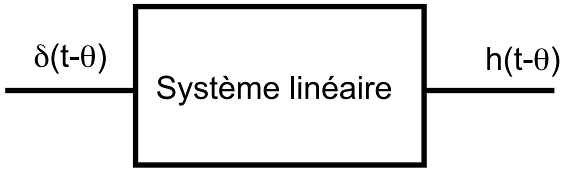
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \times \delta(t)\,dt = x(o) \;\; et \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \times \delta(t-\theta)\,dt = x(\theta)}$$

Réponse impulsionnelle d'un système linéaire et invariant dans le temps

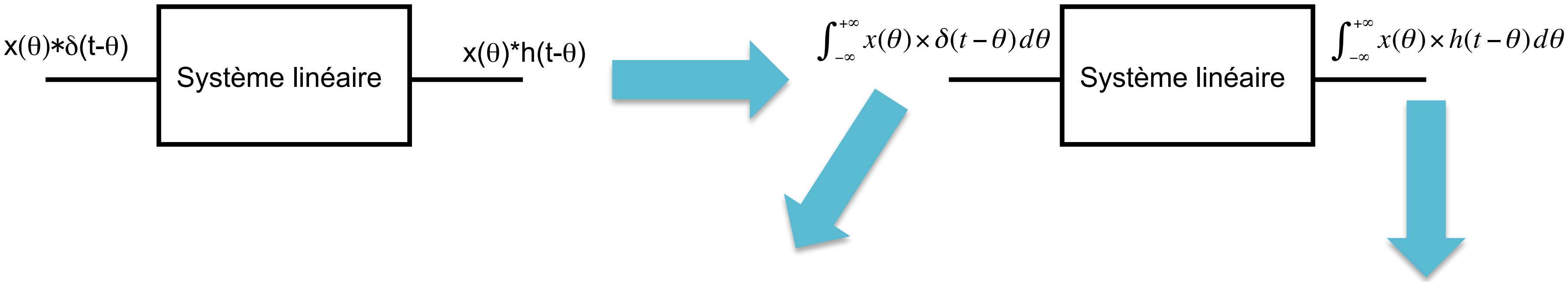


On note h(t) la réponse du système lorsqu'on applique une impulsion idéale à son entrée

1) Puisque le système est invariant dans le temps



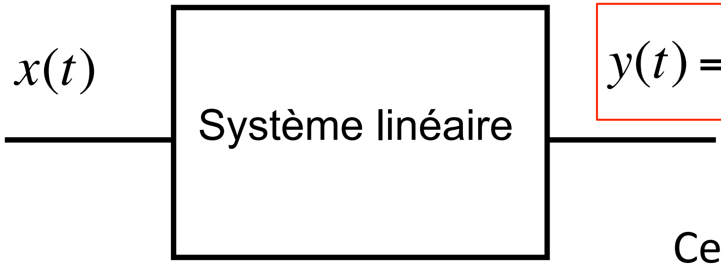
2) et linéaire



$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\times\delta(t-\theta)\,d\theta = x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\times h(t-\theta)\,d\theta$$

Réponse temporelle d'un système linéaire et invariant dans le temps



$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \times h(t-\theta)\, d\theta \;\; = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-z) \times h(z)\, dz}$$

Ces intégrales correspondent à ce que l'on appelle un produit de convolution

On a obtenu la réponse à une des questions posées :

Dans le domaine temporel, la réponse d'un système linéaire et invariant dans le temps est le produit de convolution entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du système.

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \times h(t-\theta)\, d\theta \;\; = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-z) \times h(z)\, dz \;\; = x(t) \otimes h(t)}$$

Cas particulier des signaux sinusoïdaux

Que se passe-t-il pour $x(t) = A \times \cos(2\pi f t)$

En utilisant la notation complexe on peut écrire $\underline{x}(t) = A \times e^{j2\pi f t}$

$$\underline{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t - z) \times h(z)\, dz$$

$$\underline{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \times e^{j2\pi f(t-z)} \times h(z)\, dz$$

$$\underline{y}(t) = A \times e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f z} \times h(z)\, dz$$

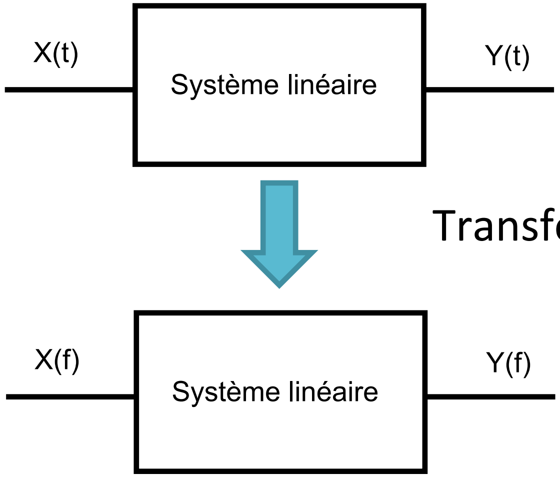
$$\underline{y}(t) = A \times e^{j2\pi f t} \times \underline{H}(f)$$

Où $\underline{H}$(f) est la TF de la réponse impulsionnelle

$$\boxed{y(t) = A \times \left|\underline{H}(f)\right| \times \cos(2\pi f t + \arg(\underline{H}(f)))}$$

La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle n'est autres que la fonction de transfert H(jω) !

Réponse en fréquence d’un système linéaire et invariant dans le temps



$$\boxed{y(t) = x(t) \otimes h(t)}$$

Transformée de Fourier

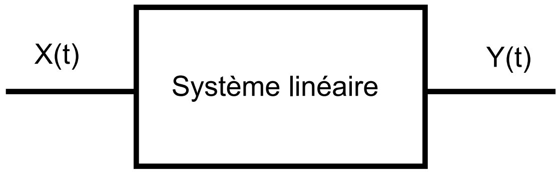
$$\boxed{\underline{Y}(f) = \underline{X}(f) \times \underline{H}(f)}$$

On montre assez facilement que le produit de convolution dans le temps se transforme en produit simple

> La réponse dans le domaine fréquentiel d’un système linéaire et invariant dans le temps est le produit des transformées de Fourier de l’entrée et de la réponse impulsionnelle du système.

Conclusion

temps

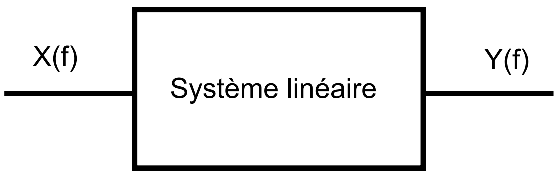


$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

Produit de convolution

Transformée de Fourier

fréquence



$$\underline{Y}(f) = \underline{X}(f) \times \underline{H}(f)$$

Produit simple

h(t) est la réponse du système à une impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle)

$\underline{H}$(f) sa transformée de Fourier est la fonction de transfert du système $\underline{H}(j\omega)$

Calcul de $\underline{Y}(f)$

$$\underline{Y}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\times e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$\underline{Y}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)h(t-\theta)\,d\theta\right)\times e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$\underline{Y}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\times\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\theta)\times e^{-j2\pi ft}\,dt\right)d\theta$$

On fait un changement de variable : z = t-θ, soit t = z+θ et dt = dz

$$\underline{Y}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\times\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(z)\times e^{-j2\pi fz}\,dz\right)\times e^{-j2\pi f\theta}\,d\theta$$

$$\underline{Y}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\times e^{-j2\pi f\theta}\,d\theta\times\int_{-\infty}^{+\infty} h(z)\times e^{-j2\pi fz}\,dz$$

$$\boxed{\underline{Y}(f)=\underline{X}(f)\times\underline{H}(f)}$$

CQFD