

# Filtrage analogique

Fonctions de transfert, familles,  
synthèse, ...

L'objectif de ce cours est la présentation de techniques de synthèse des filtres analogiques actifs :

Fonction de transfert d'un système linéaire

Ordre d'un filtre

Filtre passif/actif

Familles de filtres

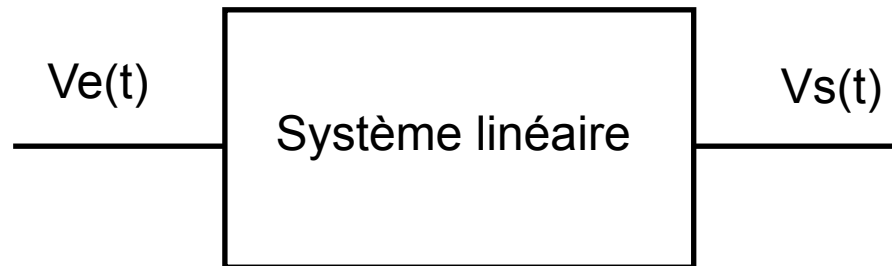
Cellules de base

Méthode de synthèse

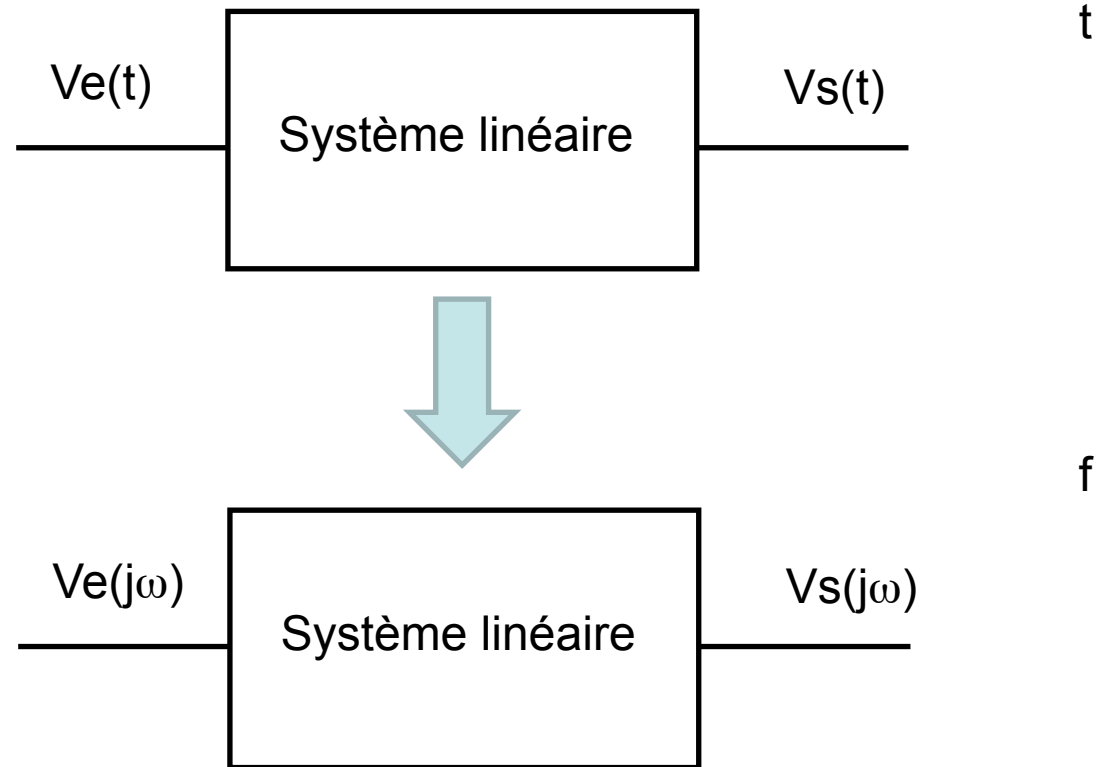
# Filtrage : définition

Le filtrage est une opération linéaire qui consiste à sélectionner certaines parties du spectre d'un signal.

Comme tout système linéaire les filtres sont caractérisés par leur fonction de transfert.



# Fonction de transfert



$$H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$$

# Fonction de transfert

En Laplace

$$H(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j \times p^j}{\sum_{i=0}^n a_i \times p^i}, \text{ avec } m \leq n$$

*H(jω) est obtenue en remplaçant p par jω*

On appelle ordre du filtre n, l'ordre du polynôme du dénominateur

Dans la bande de coupure la pente de l'asymptote est de ± nx20 dB par décade

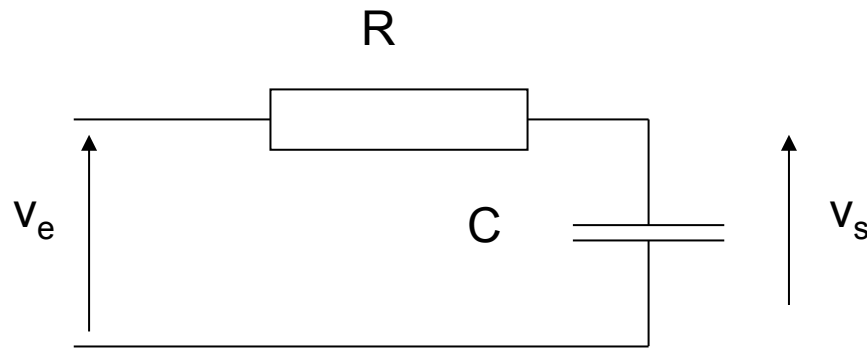
# Filtrage : type de filtres

On distingue 4 catégories de filtres :

- Filtre passe bas
- Filtre passe haut
- Filtre passe bande
- Filtre réjecteur

On montre que l'on peut, par des transformations mathématiques, passer d'un type de filtre aux autres. Aussi la plupart du temps on ne présente que les filtres passe-bas.

# Passé bas du premier ordre

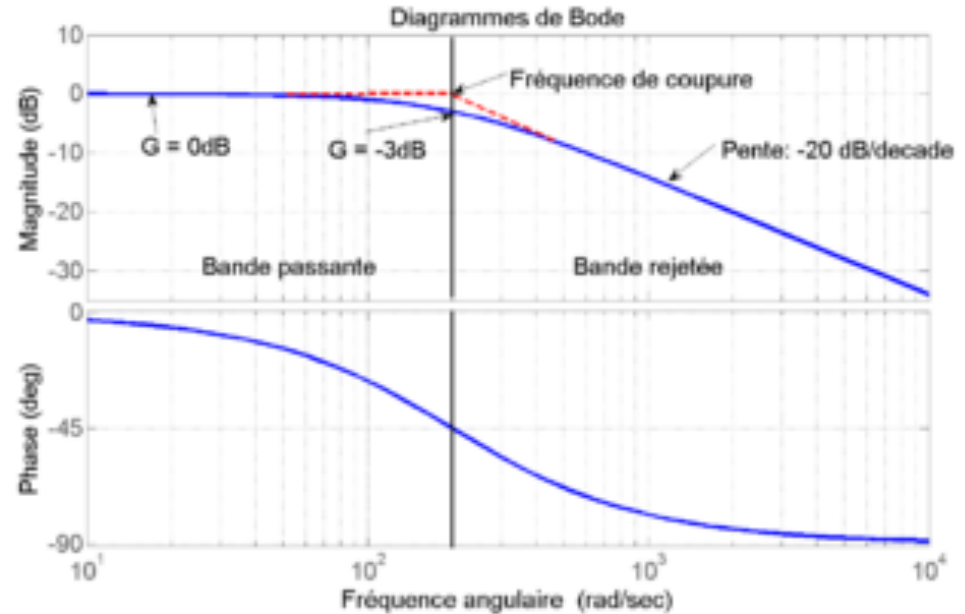


$$RC \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$$

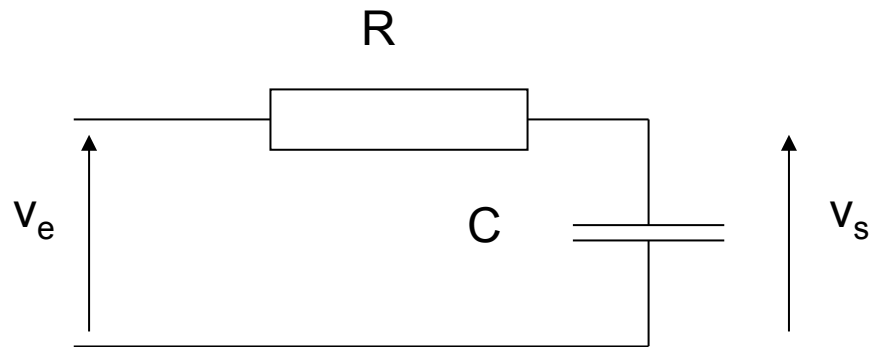
$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = RC$$



# Passé bas du premier ordre



AVANTAGES :

Simplicité

Que des éléments passifs

INCONVENIENTS:

La fonction de transfert dépend de la charge

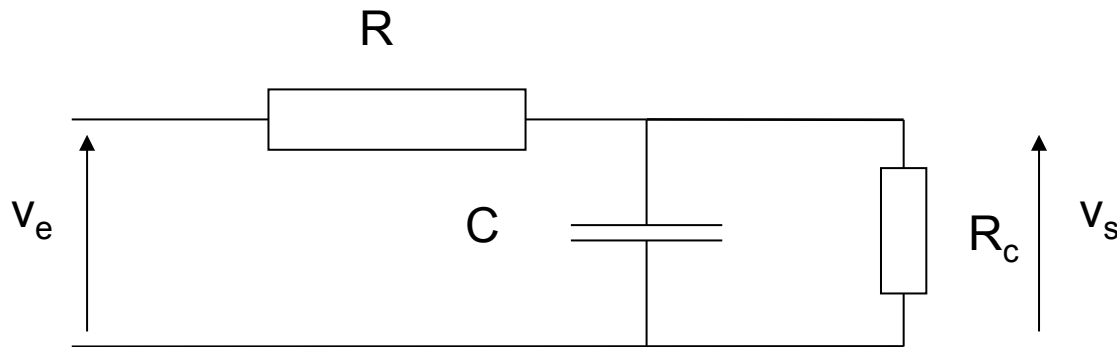
$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = RC$$



# Passe bas du premier ordre

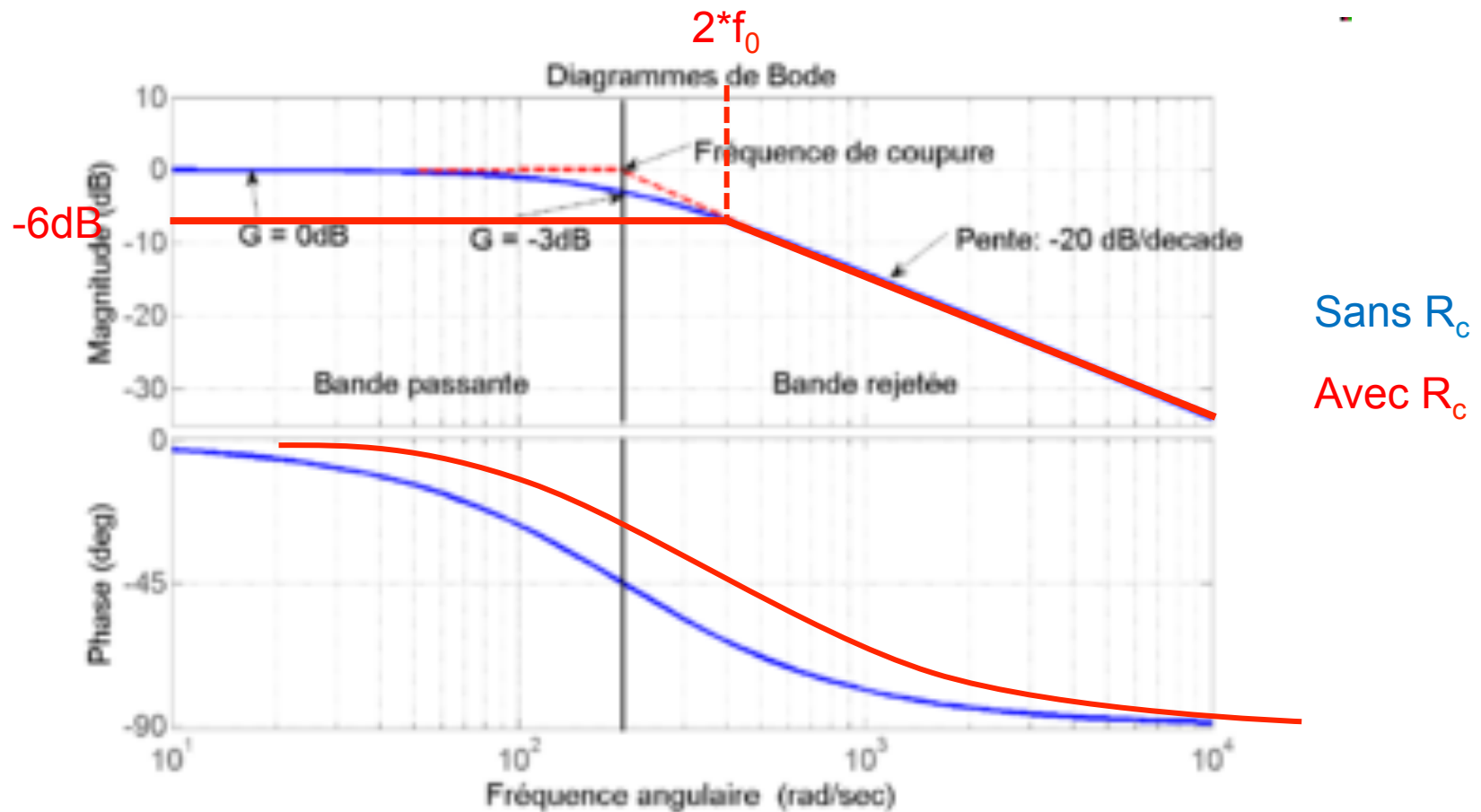


$$H_c(j\omega) = \frac{Z}{Z + R} \quad \text{avec } Z = \frac{R_c}{1 + R_c \times jC\omega}$$

$$H_c(j\omega) = \frac{R_c}{R_c + R + R_c \times R \times jC\omega}$$

$$H_c(j\omega) = \frac{R_c}{R_c + R} \times \frac{1}{1 + \frac{R \times R_c}{R + R_c} \times jC\omega}$$

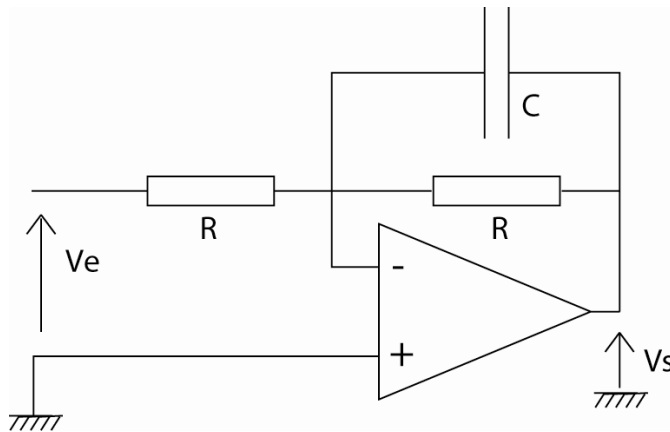
# Passé bas du premier ordre



# Filtres actifs

Le filtre précédent est un filtre passif (composé d'éléments passifs). Son principal inconvénient est que sa fonction de transfert dépend de la charge branchée à sa sortie. C'est pourquoi on lui préférera en général un filtre actif.

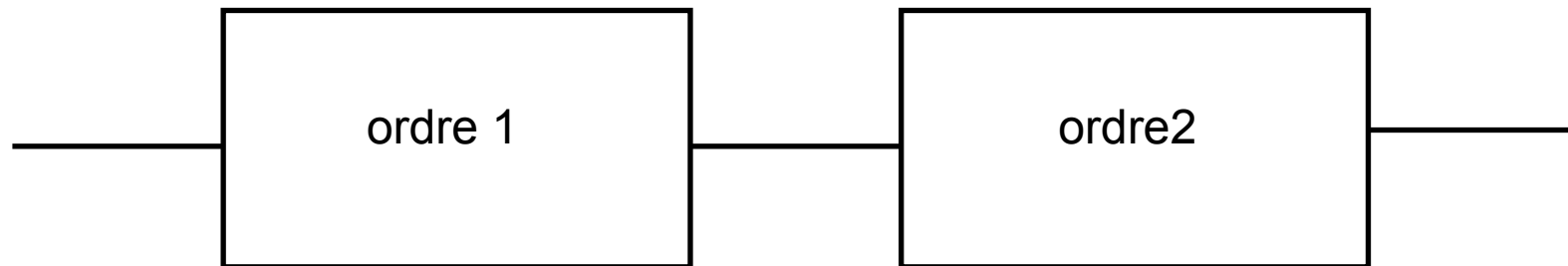
Un filtre actif contient systématiquement au moins un élément actif (amplificateur opérationnel). Le schéma ci-dessous est un filtre actif du premier ordre



$$H(p) = \frac{-1}{1 + RCp}$$

# Filtres actifs ordre élevé

On montre que l'on peut décomposer tout filtre d'ordre supérieur à 2 en filtres élémentaires d'ordre 1 et 2. Par exemple un ordre 3 se construit en associant un ordre 1 à un ordre 2



C'est pourquoi dans ce cours on ne parlera que de ces deux ordres

# Filtre passe bas d'ordre 2

$$H(p) = \frac{A_0}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$A_0$  : gain dans la bande passante

$\omega_0 = 2\pi f_0$  : pulsation caractéristique

$Q$  : coefficient de surtension

$$H(j\omega) = \frac{A_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$H(s) = \frac{A_0}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1}$$

Écriture réduite en posant  $s = p/\omega_0$

# Filtre passe bas d'ordre 2

Pour  $A_0 = 1$

$$\omega = \omega_0$$

$$|H(j\omega_0)| = Q$$

$$H_{dB} = 20 \log(Q)$$

$$\omega \ll \omega_0$$

$$|H(j\omega_0)| = 1$$

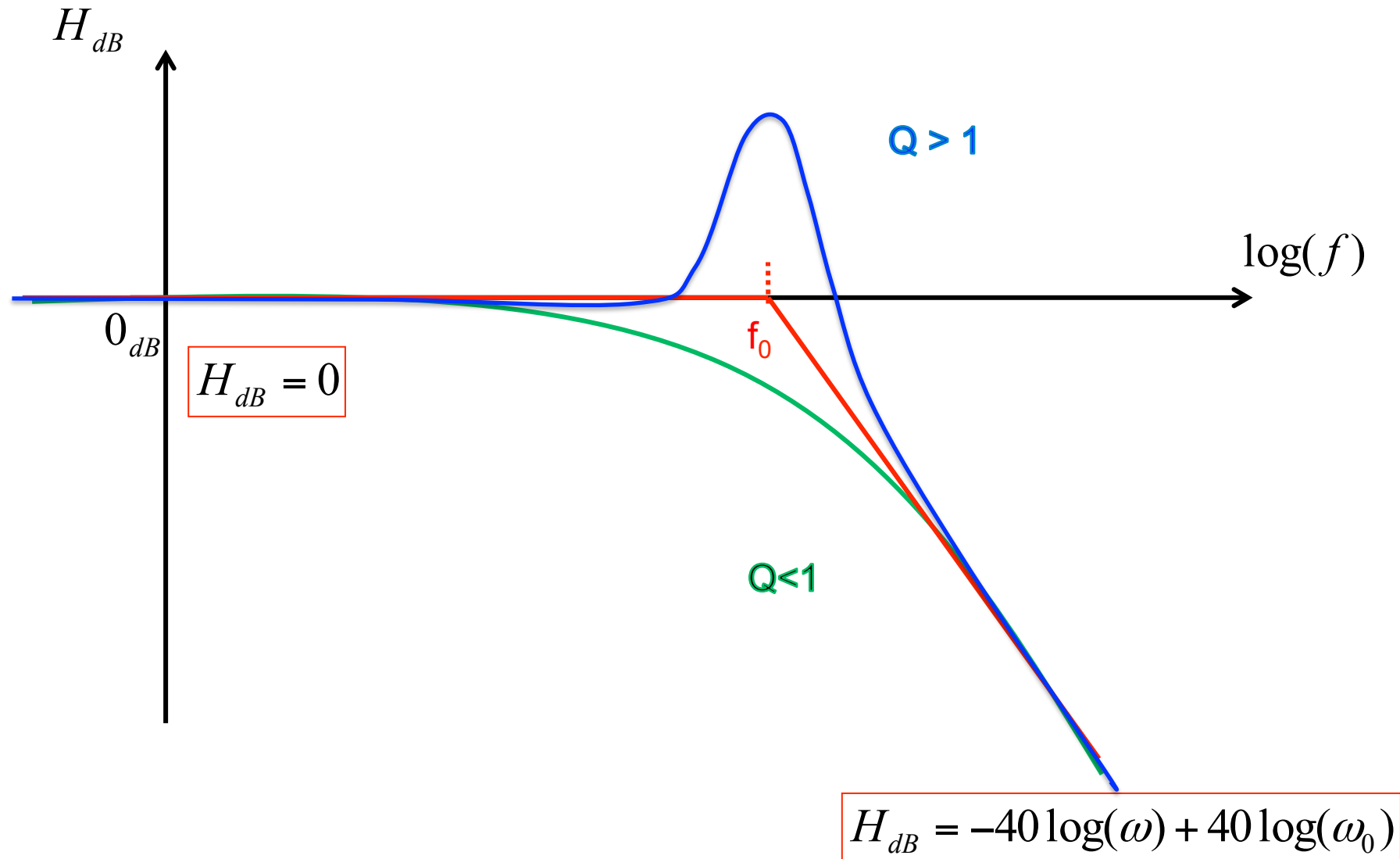
$$H_{dB} = 0$$

$$\omega \gg \omega_0$$

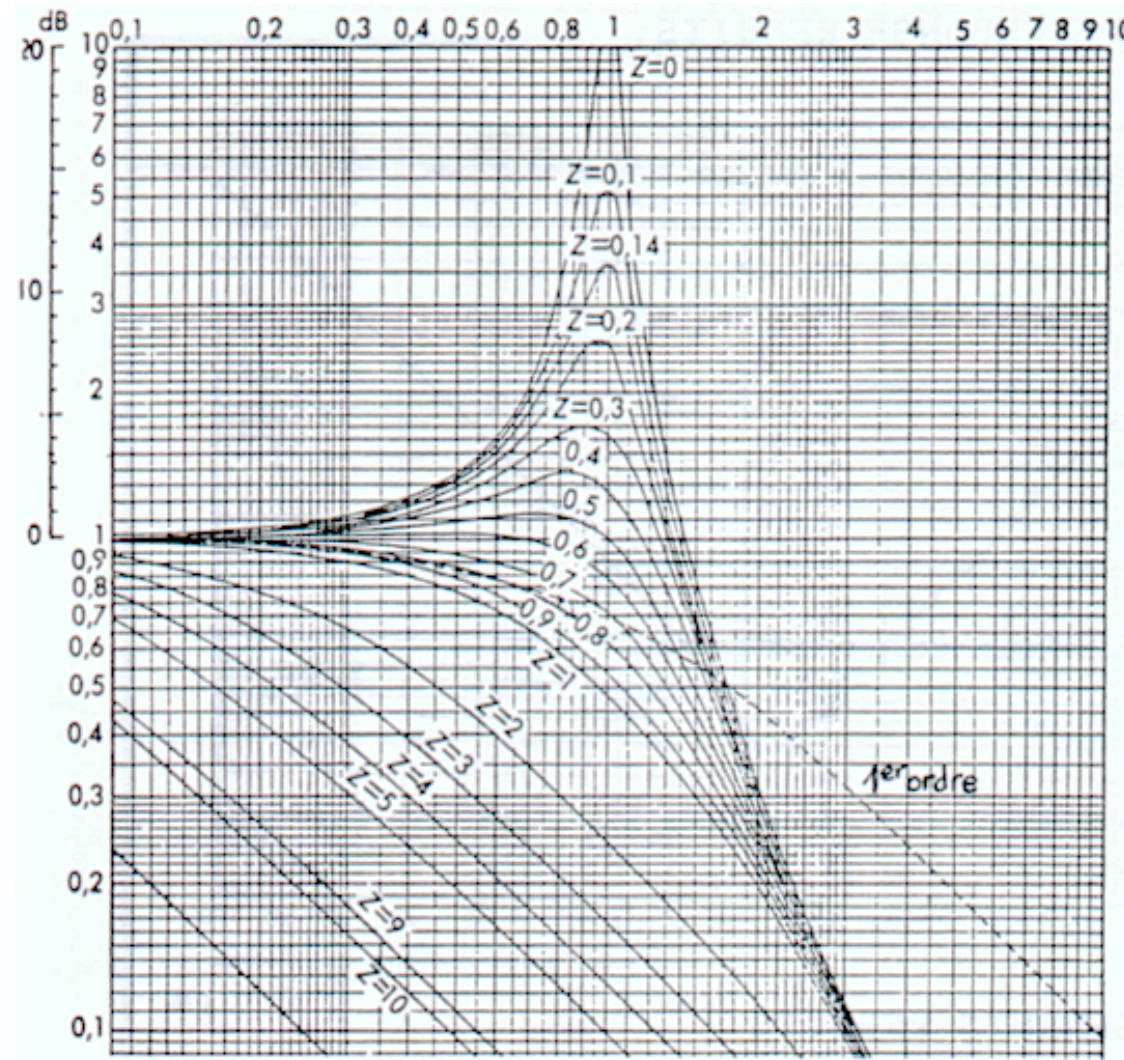
$$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$H_{dB} = -40 \log(\omega) + 40 \log(\omega_0)$$

# Filtre passe bas d'ordre 2



# Diagramme de Bode (module)



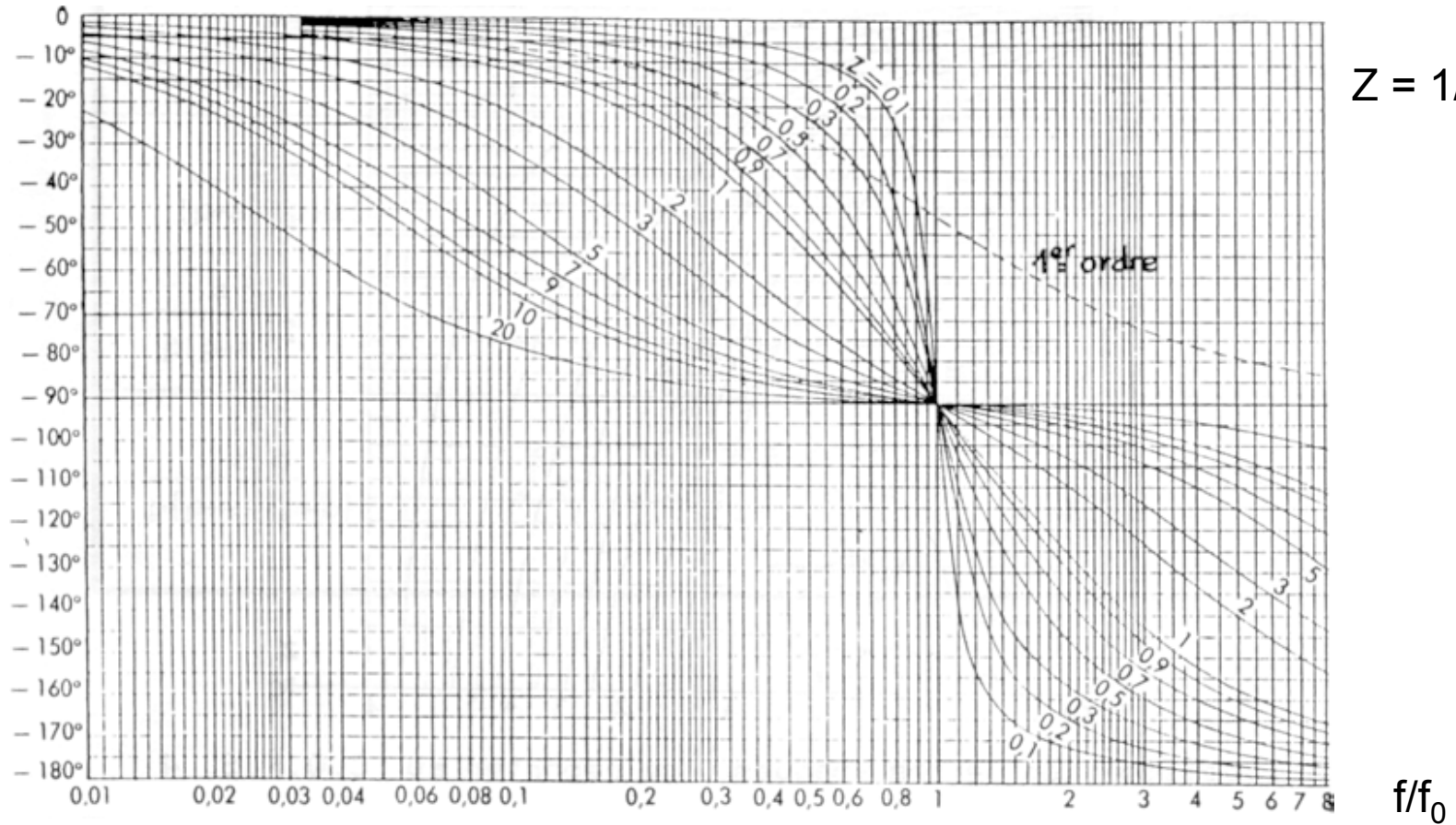
$f/f_0$

$Z = 1/2Q$

$A_0 = 1$



# Diagramme de Bode (phase)



Maintenant que l'on connaît les fonctions de transfert des filtres de base le 1<sup>er</sup> ordre et le 2<sup>ème</sup> ordre , on va présenter les principales familles de filtre

# Familles de filtre

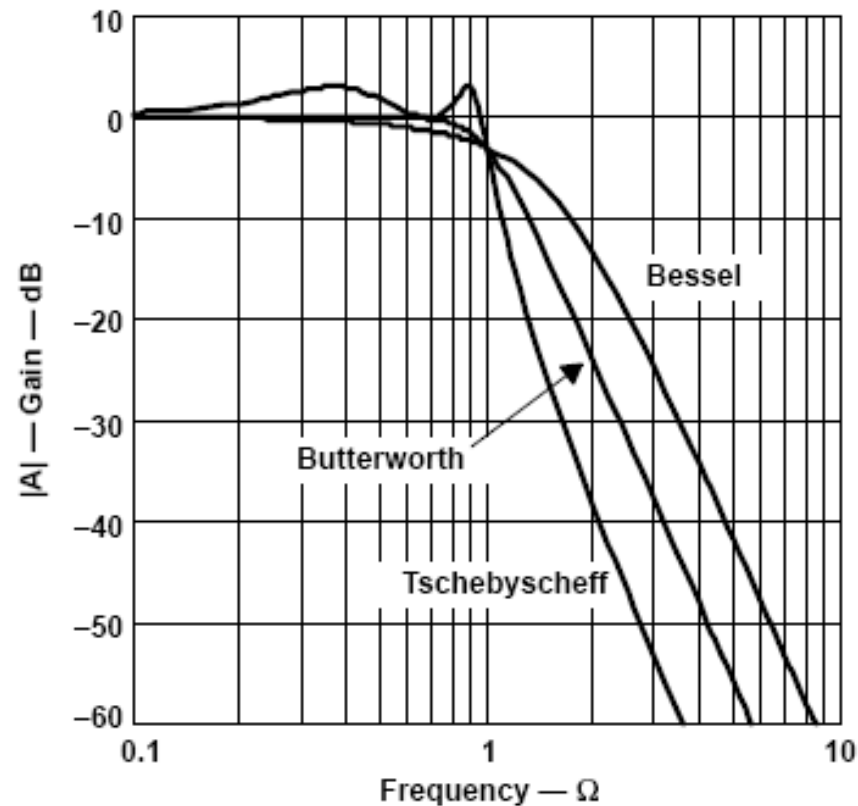
Ces familles correspondent à des écritures particulières de la fonction de transfert et à des propriétés particulières qui en découlent.

Les principales familles sont les suivantes :

- Fonctions de Bessel
- Fonctions de Butterworth
- Fonctions de Chebychev

Chaque famille a ses avantages

Courbes de réponses comparées  
Pour un passe bas d'ordre 4



# Bessel

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{F_n(j\frac{\omega}{\omega_0})}$$

Les fonctions  $F_n$  sont des polynômes de Bessel définis par récurrence

$$F_0(j\frac{\omega}{\omega_0}) = 1, F_1(j\frac{\omega}{\omega_0}) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}, \dots$$

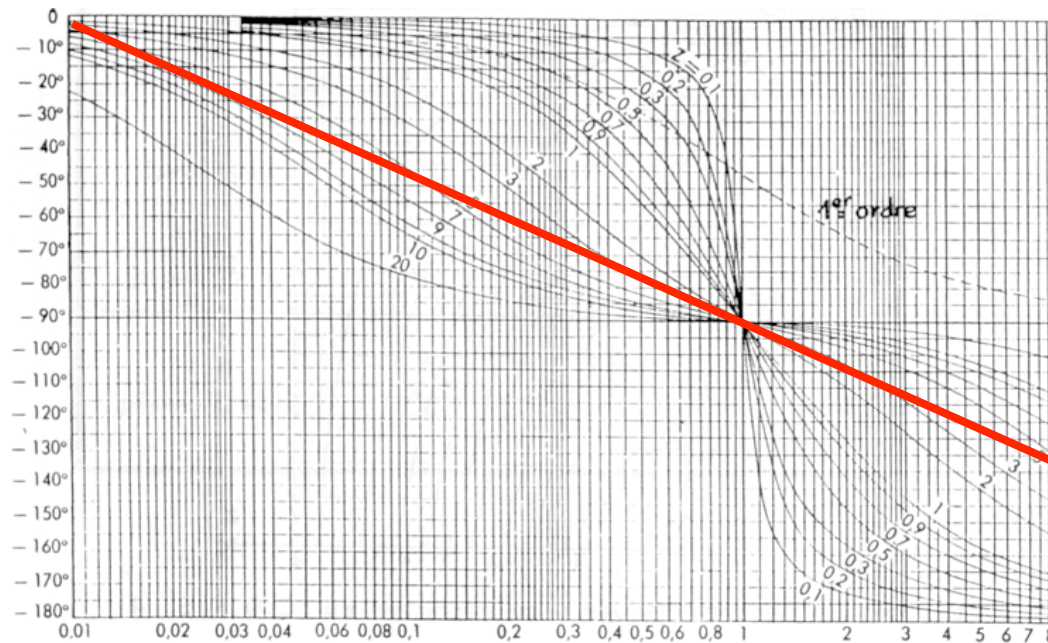
$$F_n(j\frac{\omega}{\omega_0}) = (2n-1) \times F_{n-1}(j\frac{\omega}{\omega_0}) - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \times F_{n-2}(j\frac{\omega}{\omega_0})$$

# Bessel

Ces filtres sont ceux qui optimisent la régularité du retard de groupe.  
Pour cette raison ils sont aussi appelés filtres à phase linéaire

$$\varphi \approx -\tau_g \omega$$

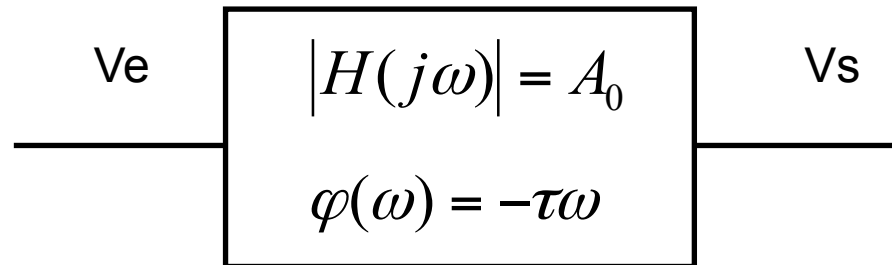
$$\tau_g = \left| \frac{\varphi}{\omega} \right|$$



Si les composantes du signal sont toutes dans la bande passante du filtre,  
on le retrouvera simplement retardées à la sortie du filtre.

# Bessel

Exemple :  $v_e(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t)$  avec  $\omega_0 \gg \omega_{1,2,3}$



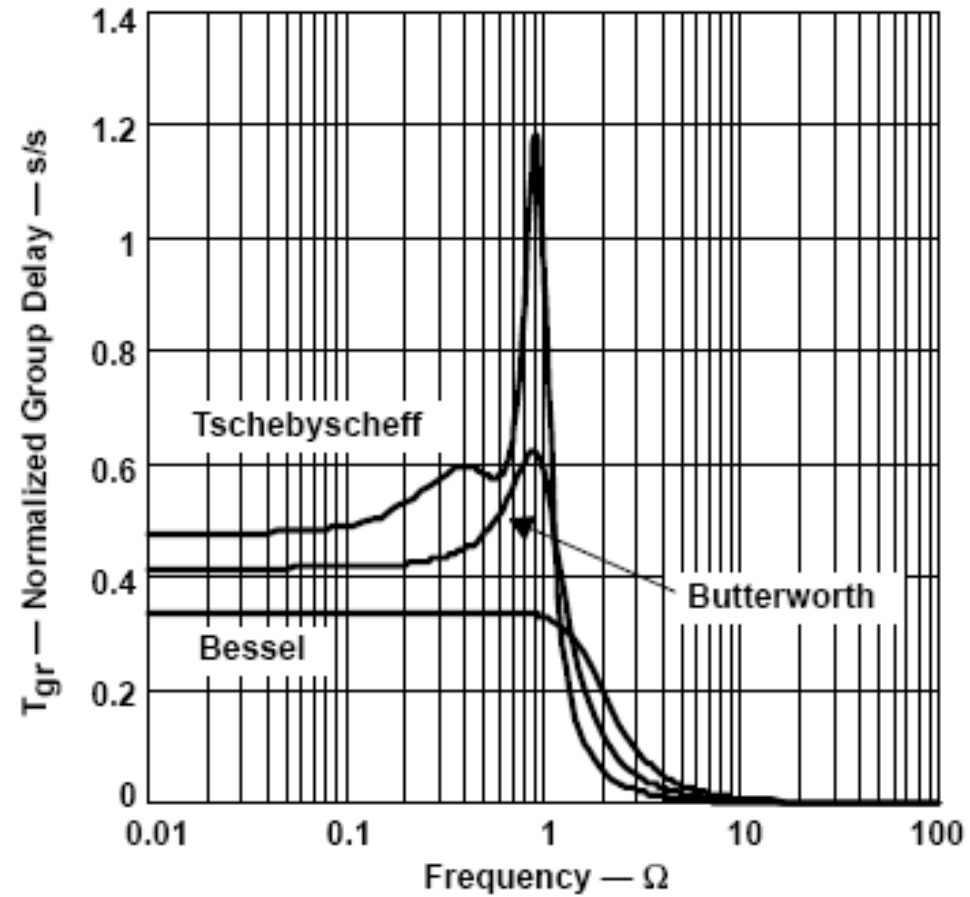
$$v_s(t) = A_0 [A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)]$$

$$v_s(t) = A_0 [A_1 \cos(\omega_1 t - \tau\omega_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \tau\omega_2) + A_3 \cos(\omega_3 t - \tau\omega_3)]$$

$$v_s(t) = A_0 [A_1 \cos(\omega_1 (t - \tau)) + A_2 \cos(\omega_2 (t - \tau)) + A_3 \cos(\omega_3 (t - \tau))] ]$$

$$v_s(t) = A_0 v_e(t - \tau)$$

# Bessel



Retard de groupe pour les différentes familles de filtres

# Butterworth

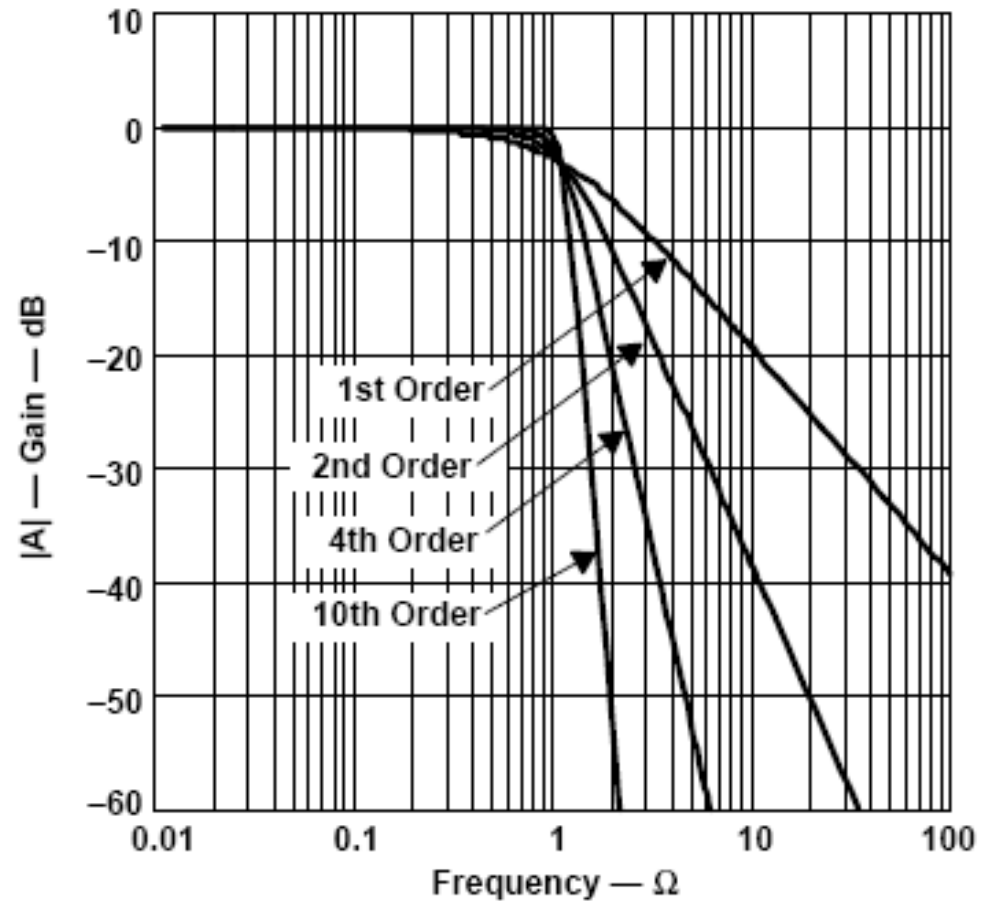
Les filtres de Butterworth présentent le gain le plus constant dans la bande passante. Le module est toujours décrit par la fonction ci-dessous :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}$$

Où  $n$  est l'ordre du filtre. Il en découle que la fréquence caractéristique  $f_0$  est aussi dans ce cas la fréquence de coupure à -3dB



# Butterworth



# Chebyshev

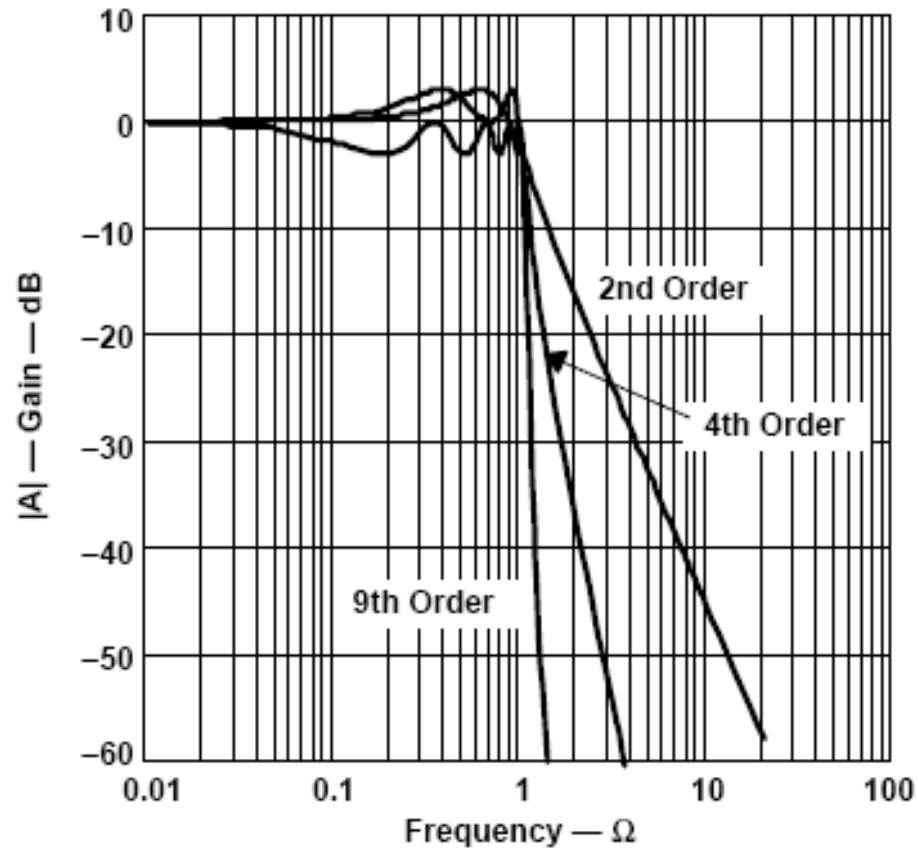
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \times C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

$$\text{où : } C_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1, C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\omega}{\omega_0}, \dots, C_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 2 \times C_{n-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - C_{n-2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

sont les polynômes de Chebyshev

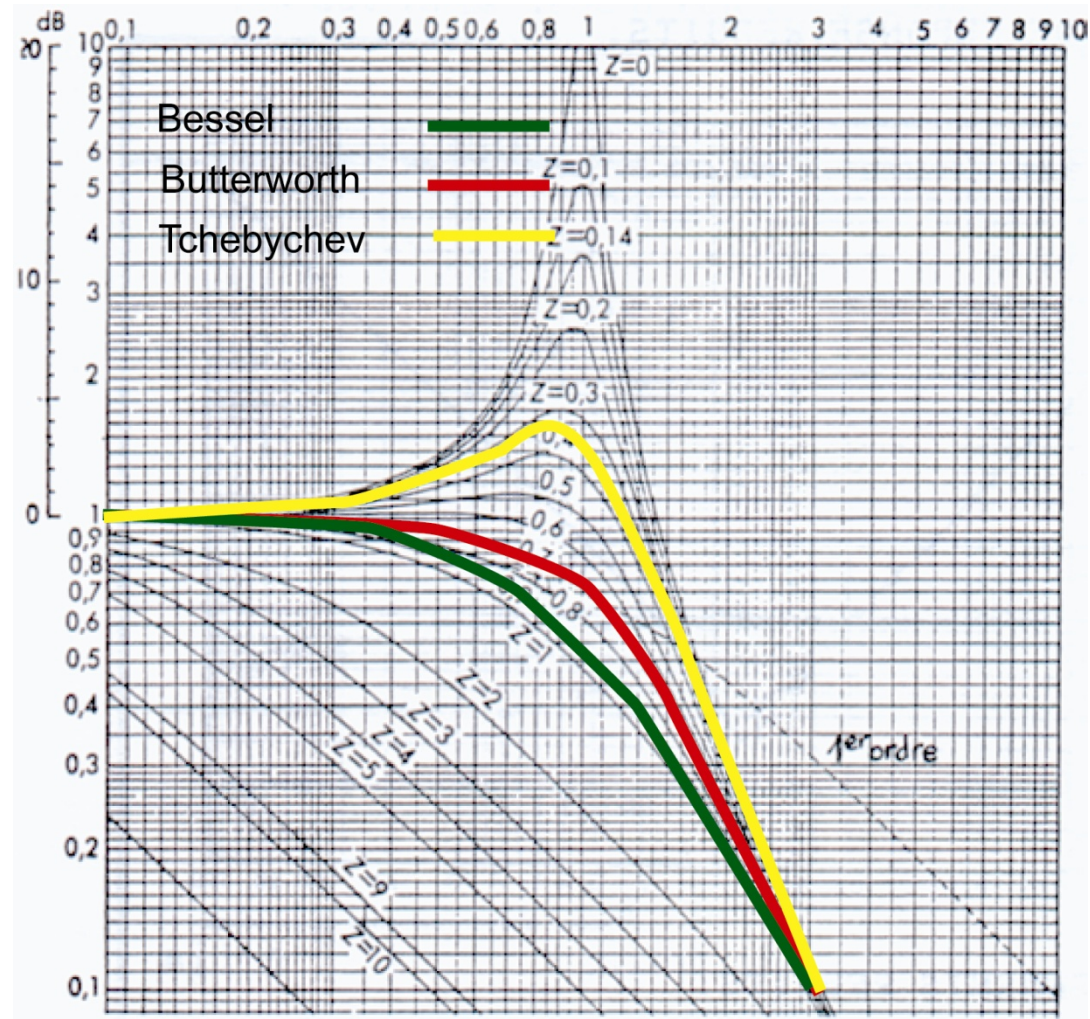
# Chebyshev

Contrairement à la famille Butterworth, les filtres de la famille Chebyshev présentent de l'ondulation dans la bande passante. Ceci permet d'obtenir un passage plus rapide entre la bande passante et la bande d'arrêt.

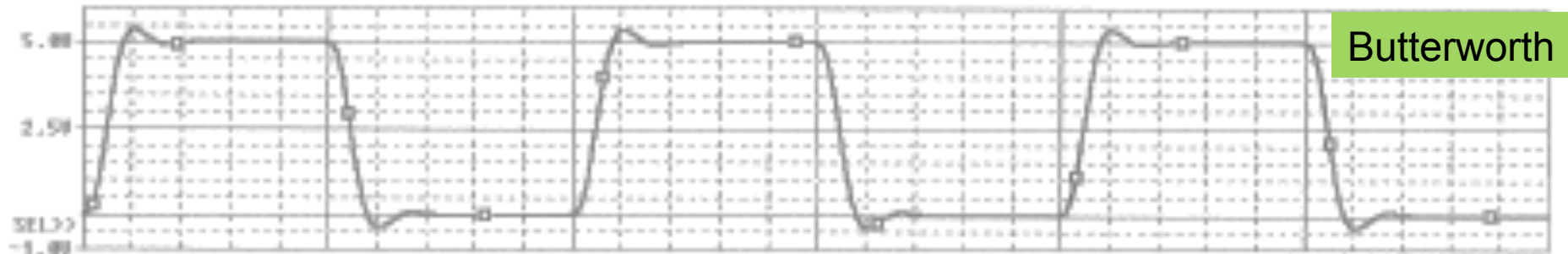


# Application au passe bas d'ordre 2

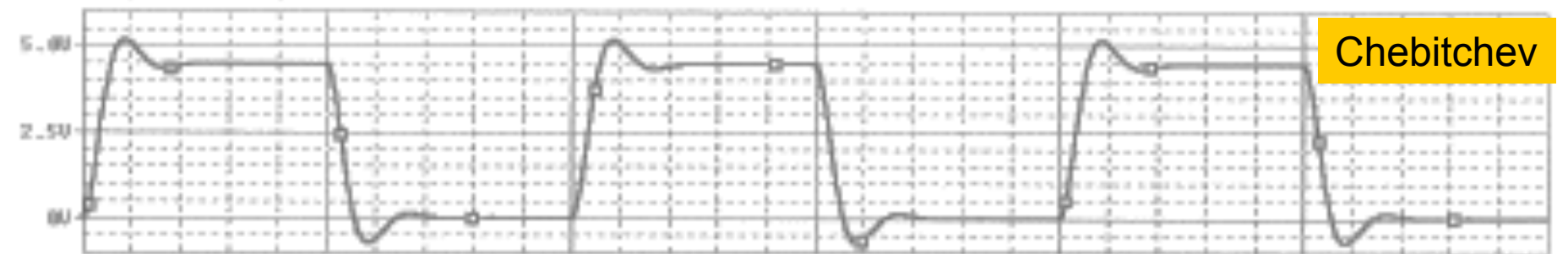
- a)  $Q=1.128$  Chebyshev (ripple band = 2dB)
- b)  $Q=0.707$  Butterworth
- c)  $Q=0.577$  Bessel



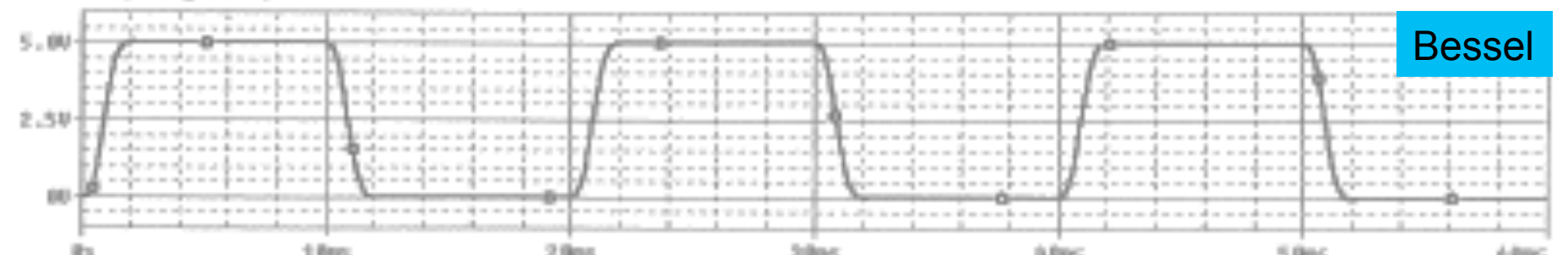
# Réponse à un signal TTL



U(butterworth)



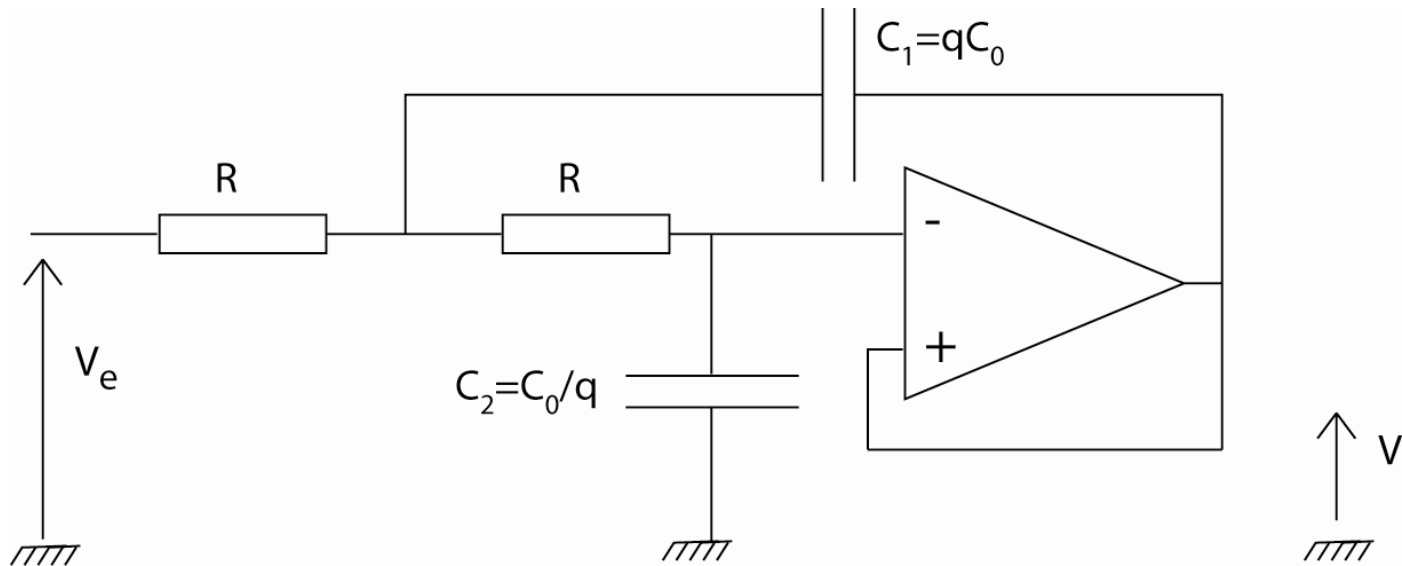
V(chebitchev)



W(bessel)

# Exemple de réalisation

Il y a plusieurs circuits permettant de réaliser un filtre donné. Une des solutions est l'utilisation de cellules de Sallen-Key. Ici pour un passe-bas du 2<sup>ème</sup> ordre



$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{RC_0} \\ Q = \frac{q}{2} \end{array} \right.$$

# Exemple de réalisation

Si on veut réaliser un filtre passe bas du 2<sup>ème</sup> ordre de la famille Bessel, on utilise le tableau ci-dessous.

$$Q = 0,577$$

$$f_n = f_{-3dB}/f_0$$

Supposons que l'on veuille que

$f_{-3dB} = 1$  kHz, alors

$$f_0 = (f_{-3dB}/1,2742)$$

$$f_0 = 784,8 \text{ Hz}$$

NUMBER OF POLES	BUTTERWORTH		BESSEL		CHEBYSCHEV			
					0.5dB RIPPLE		2dB RIPPLE	
	$f_n(1)$	Q	$f_n(1)$	Q	$f_n(2)$	Q	$f_n(2)$	Q
2	1.0	0.70711	1.2742	0.57735	1.23134	0.86372	0.907227	1.1286
3	1.0	---	1.32475	---	0.626456	---	0.368911	---
	1.0	1.0	1.44993	0.69104	1.068853	1.7062	0.941326	2.5516
4	1.0	0.54118	1.43241	0.52193	0.597002	0.70511	0.470711	0.9294
	1.0	1.3065	1.60594	0.80554	1.031270	2.9406	0.963678	4.59388
5	1.0	---	1.50470	---	0.362320	---	0.218308	---
	1.0	0.61805	1.55876	0.56354	0.690483	1.1778	0.627017	1.77509
	1.0	1.61812	1.75812	0.91652	1.017735	4.5450	0.97579	7.23228
6	1.0	0.51763	1.60653	0.51032	0.396229	0.68364	0.31611	0.9016
	1.0	0.70711	1.69186	0.61120	0.768121	1.8104	0.730027	2.84426
	1.0	1.93349	1.90782	1.0233	1.011446	6.5128	0.982628	10.4616
7	1.0	---	1.68713	---	0.256170	---	0.155410	---
	1.0	0.55497	1.71911	0.53235	0.503863	1.0916	0.460853	1.64642
	1.0	0.80192	1.82539	0.66083	0.822729	2.5755	0.797114	4.11507
	1.0	2.2472	2.05279	1.1263	1.008022	8.8418	0.987226	14.2802
8	1.0	0.50980	1.78143	0.50599	0.296736	0.67657	0.237699	0.89236
	1.0	0.60134	1.83514	0.55961	0.598874	1.6107	0.571925	2.5327
	1.0	0.89998	1.95645	0.71085	0.861007	3.4657	0.842486	5.58354
	1.0	2.5629	2.19237	1.2257	1.005984	11.5305	0.990142	18.6873

# Exemple de réalisation

Si on veut réaliser un filtre de la famille Bessel :  $Q = 0,577$   
Si on se fixe une fréquence de coupure à -3dB :  $f_{-3dB} = 1 \text{ kHz}$

$$Q = 0,577$$



$$q = 1,154$$

$$f_{-3dB} = 1 \text{ kHz}$$



$$f_0 = 785 \text{ Hz}$$

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

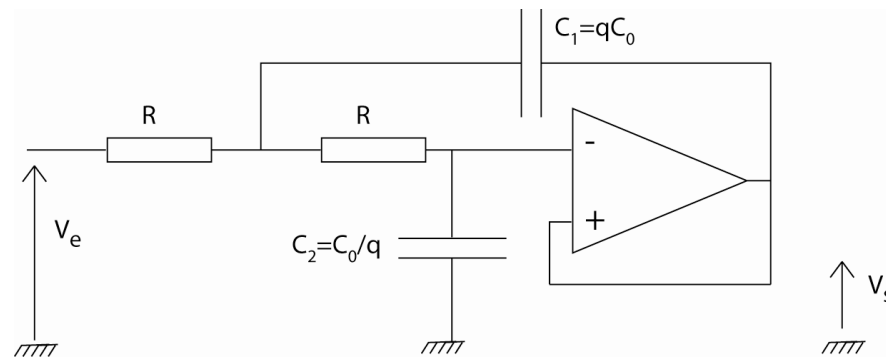


$$C_0 = 203 \text{ nF}$$

$$C_1 = 234 \text{ nF}$$



$$C_2 = 176 \text{ nF}$$





# Autres types

Comment passer du passe bas au passe-haut ?

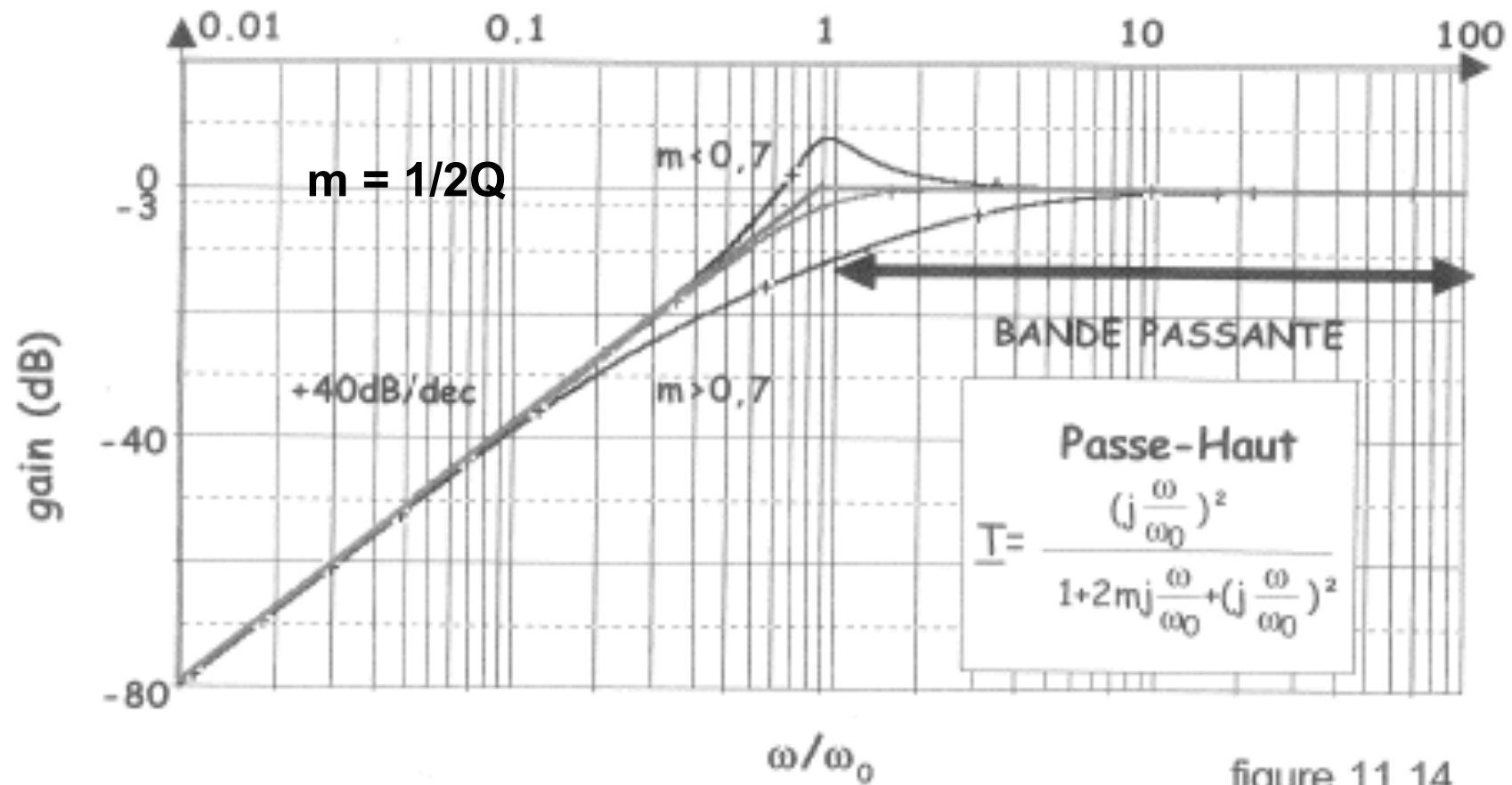
Écriture réduite en posant  $s = p/\omega_0$

En effectuant le changement de variable  $s \rightarrow (1/s)$

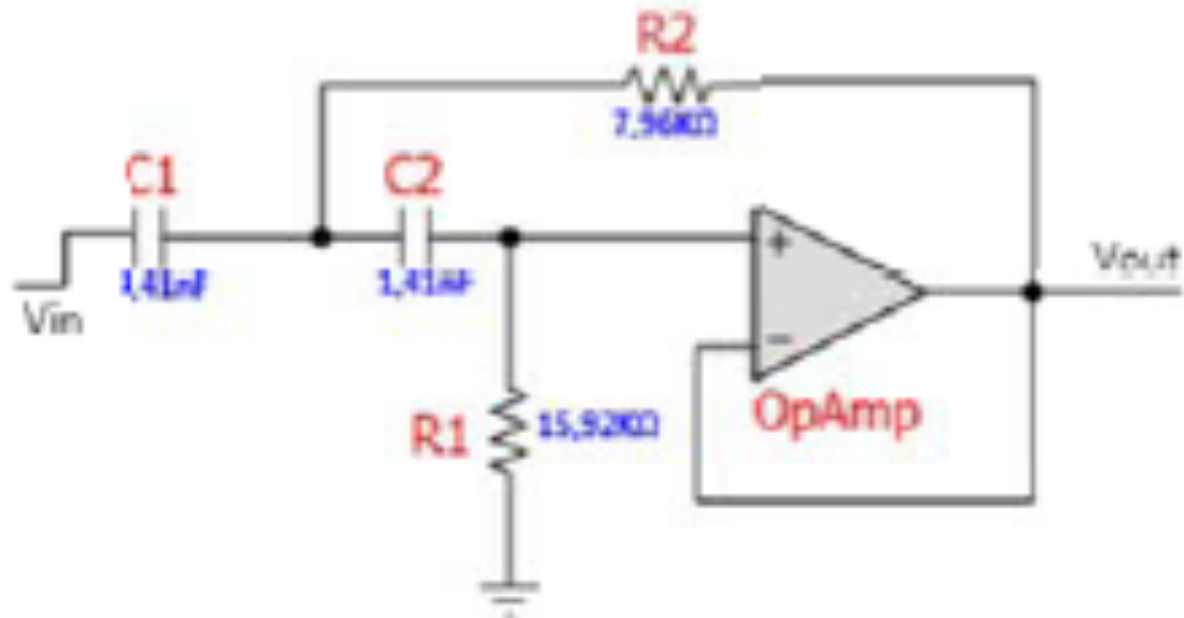
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1} \rightarrow H(s) = \frac{1}{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{Q} \frac{1}{s} + 1} = \frac{s^2}{1 + \frac{1}{Q}s + s^2}$$

$$H(p) = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

# Passe-haut 2<sup>ème</sup> ordre



# Cellule Sallen-Key



# Autres types

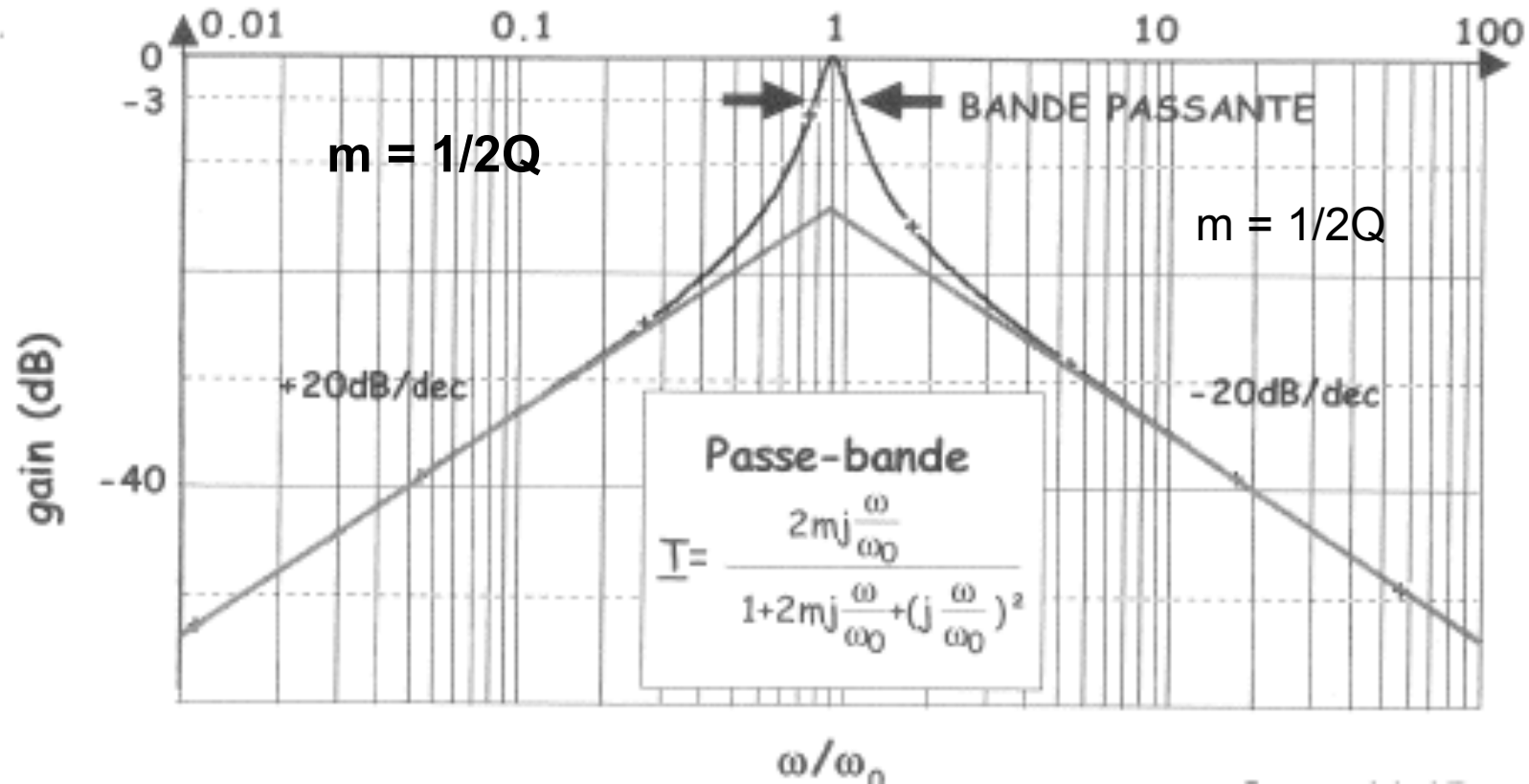
Comment passer du passe bas au passe-bande ?

Écriture réduite en posant  $s = p/\omega_0$

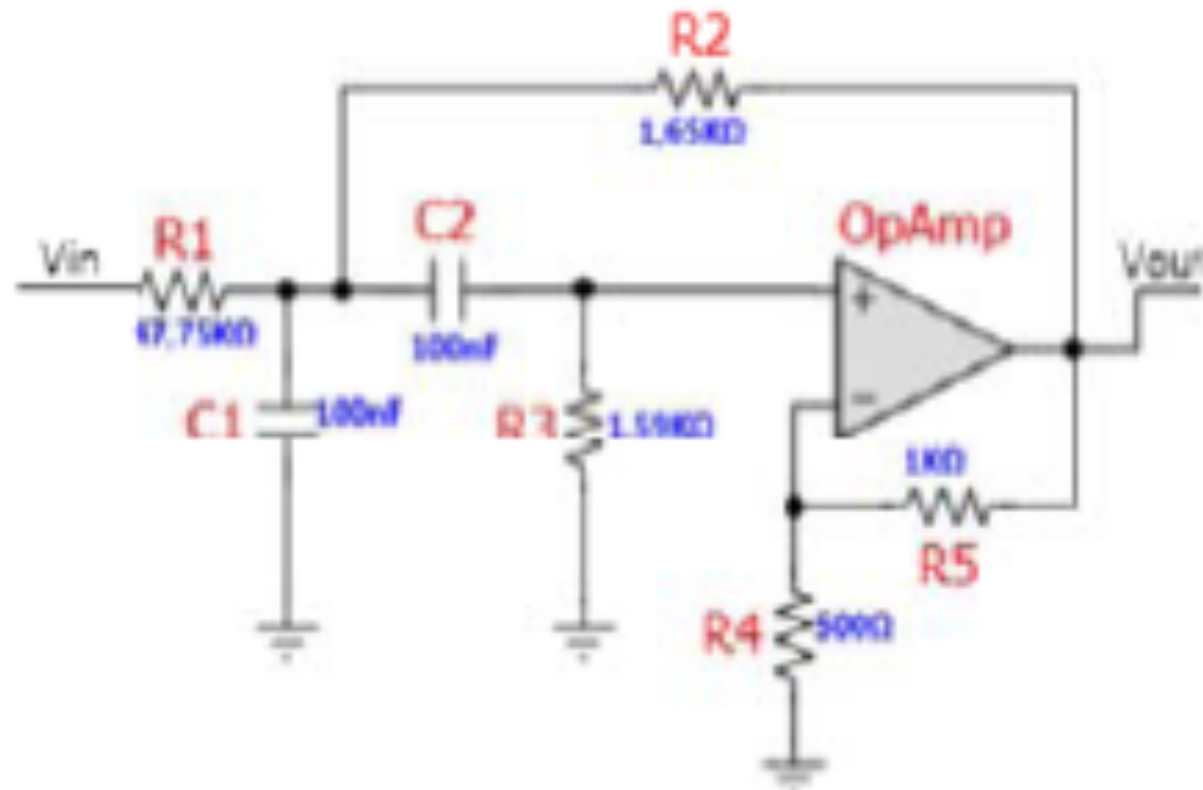
En effectuant le changement de variable  $s \rightarrow Q(s + 1/s)$

$$H(p) = \frac{\frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

# Passe-bande 2<sup>ème</sup> ordre



# Passe-bande 2<sup>ème</sup> ordre



# Synthèse de filtres

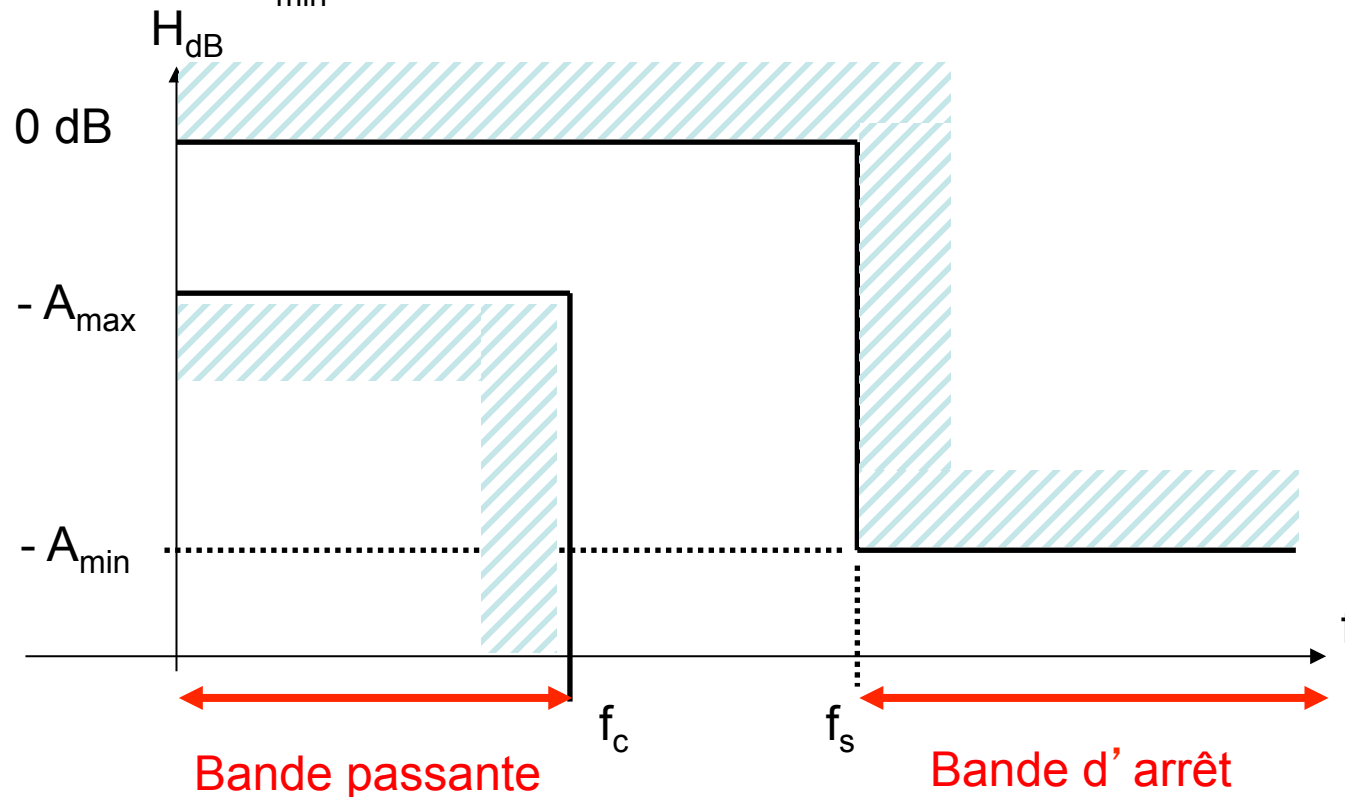
Lorsque l'on a à choisir un filtre, on commence par définir le gabarit de ce filtre.

$f_c$  : fréquence de coupure

$f_s$  : fréquence d'arrêt

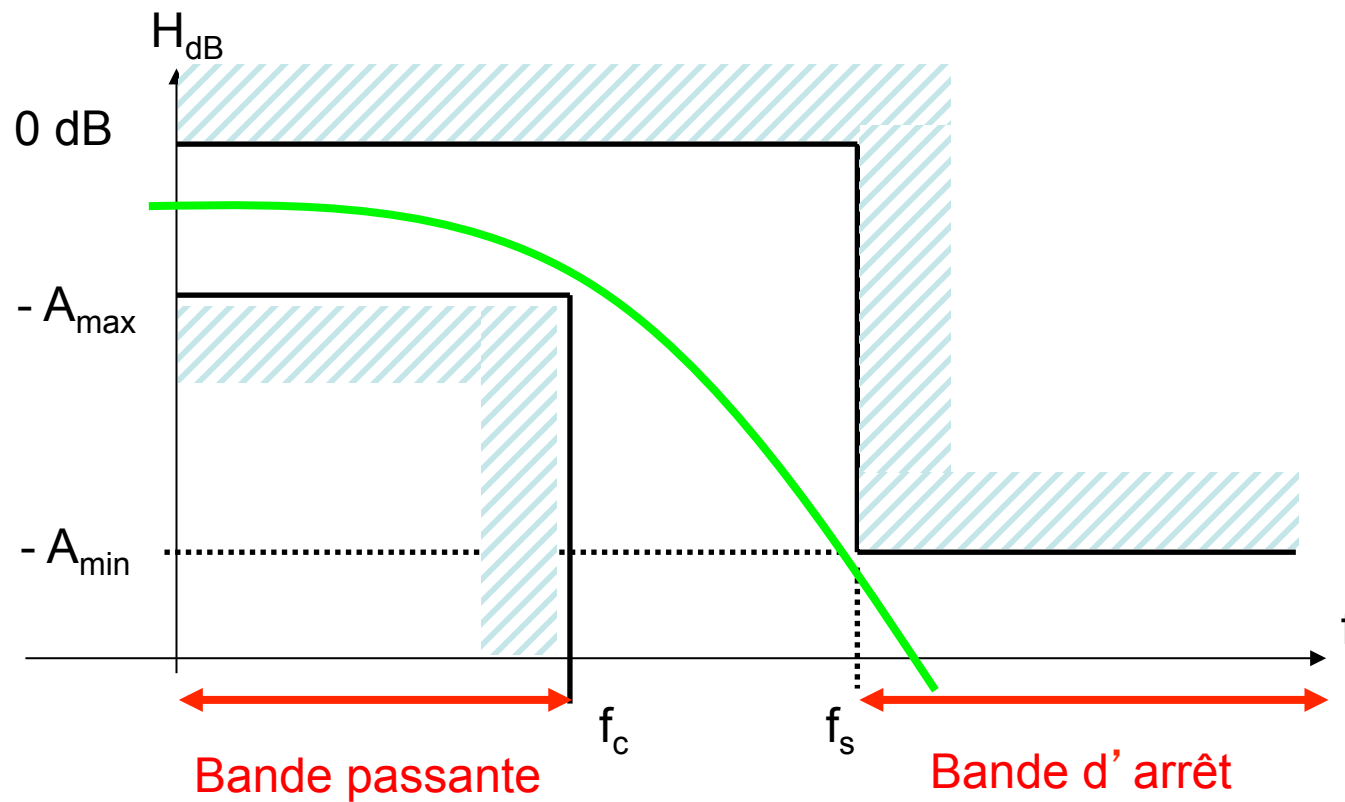
$A_{\max}$  : atténuation max dans la bande passante

$A_{\min}$  : atténuation min dans la bande d'arrêt



# Synthèse de filtres

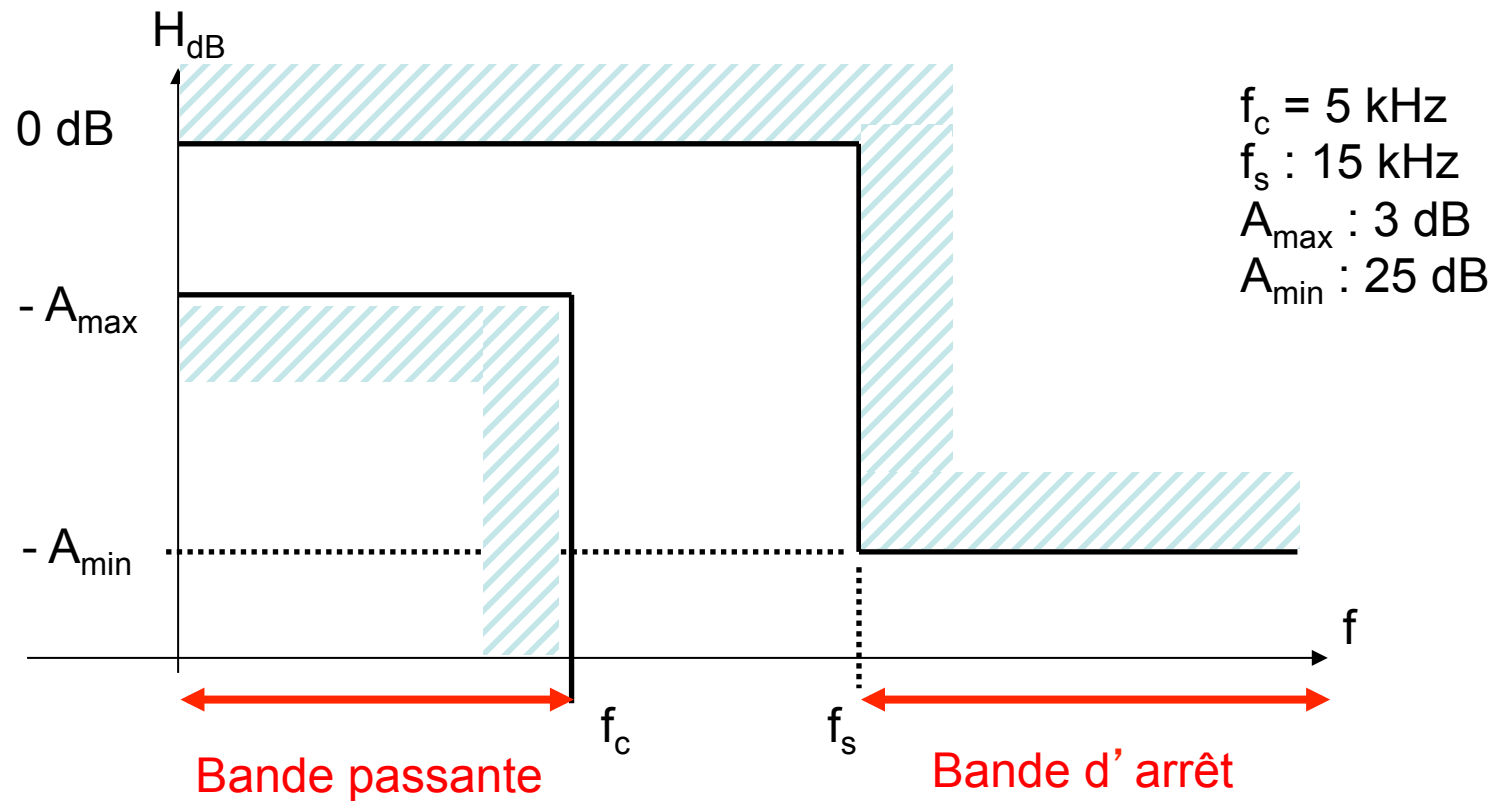
L'objectif est alors de trouver la fonction de transfert qui passe dans le gabarit





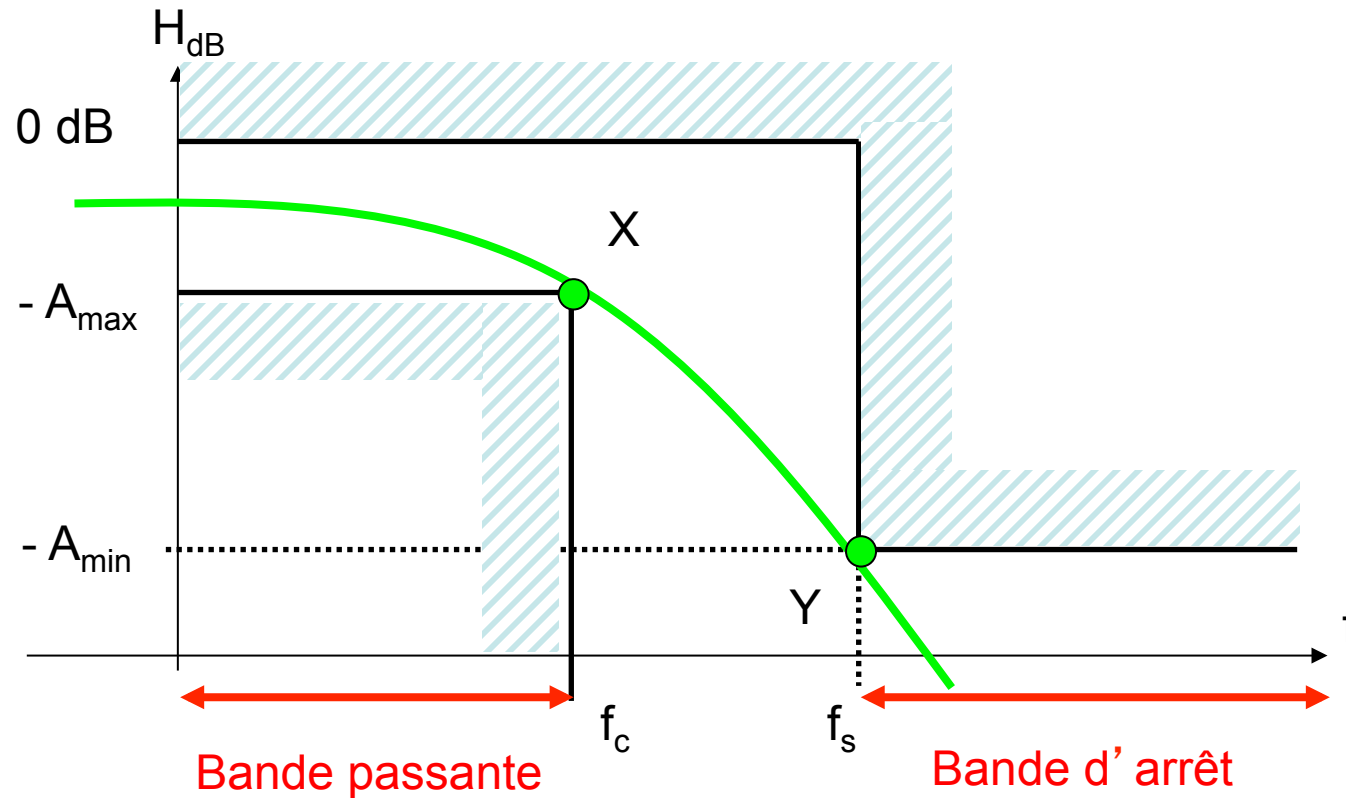
# Exemple de synthèse

Supposons que l'on souhaite réaliser un filtre passe bas de type Butterworth, correspondant au gabarit ci-dessous.



# Exemple de synthèse

Pour obtenir  $n$ , l'ordre du filtre et  $f_0$ , on écrit que la fonction de transfert doit au pire passer par les deux points X et Y



# Exemple de synthèse

On a choisi un type Butterworth, donc :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}$$

En X on a :

$$|H(f_c)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_c^{2n}}{f_0^{2n}}}} = 10^{\frac{-A_{\max}}{20}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En Y on a :

$$|H(f_s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_s^{2n}}{f_0^{2n}}}} = 10^{\frac{-A_{\min}}{20}}$$

# Exemple de synthèse

Ce qui permet d'obtenir  $n$  et  $f_0$

Rq : il existe aussi des abaques,

Et bien sûr des programmes téléchargeables sur internet.

$$\begin{aligned}f_c &= 5 \text{ kHz} \\f_s &: 15 \text{ kHz} \\A_{\max} &: 3 \text{ dB} \\A_{\min} &: 25 \text{ dB}\end{aligned}$$

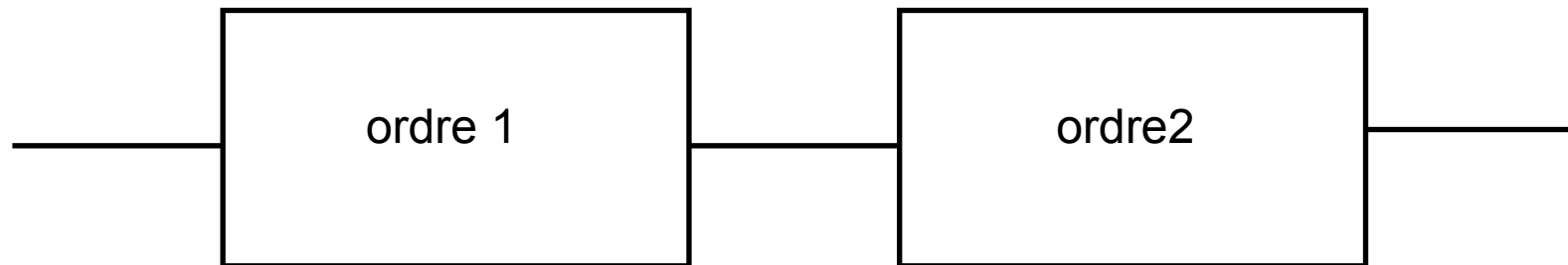
$$n = \frac{\log \left[ \frac{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1} \right]}{2 \times \log \left[ \frac{f_c}{f_s} \right]}$$

$$f_0 = \frac{f_c}{\left[ 10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1 \right]^{\frac{1}{2n}}}$$

# Exemple de synthèse

Avec les valeurs numériques données , on trouve :  $n = 2,62$  et  $f_0 = 5\text{kHz}$

On choisira donc un ordre 3



# Exemple de synthèse

On va lire dans le tableau les valeurs des coefficients de chacun des ordres

NUMBER OF POLES	BUTTERWORTH		BESSEL		CHEBYSCHEV			
					0.5dB RIPPLE		2dB RIPPLE	
	$f_n(1)$	Q	$f_n(1)$	Q	$f_n(2)$	Q	$f_n(2)$	Q
2	1.0	0.70711	1.2742	0.57735	1.23134	0.86372	0.907227	1.1286
3	1.0	-----	1.32475	-----	0.626456	-----	0.368911	-----
	1.0	1.0	1.44993	0.69104	1.068853	1.7062	0.941326	2.5516
4	1.0	0.54118	1.43241	0.52193	0.597002	0.70511	0.470711	0.9294
	1.0	1.3065	1.60594	0.80554	1.031270	2.9406	0.963678	4.59388
5	1.0	-----	1.50470	-----	0.362320	-----	0.218308	-----
	1.0	0.61805	1.55876	0.56354	0.690483	1.1778	0.627017	1.77509
	1.0	1.61812	1.75812	0.91652	1.017735	4.5450	0.97579	7.23228
6	1.0	0.51763	1.60653	0.51032	0.396229	0.68364	0.31611	0.9016
	1.0	0.70711	1.69186	0.61120	0.768121	1.8104	0.730027	2.84426
	1.0	1.93349	1.90782	1.0235	1.011446	6.5128	0.982828	10.4616
7	1.0	-----	1.68713	-----	0.256170	-----	0.155410	-----
	1.0	0.55497	1.71911	0.53235	0.503863	1.0916	0.460855	1.64642
	1.0	0.80192	1.82539	0.66083	0.822729	2.5755	0.797114	4.11507
	1.0	2.2472	2.05279	1.1263	1.008022	8.8418	0.987226	14.2802
8	1.0	0.50980	1.78143	0.50599	0.296736	0.67657	0.237699	0.89236
	1.0	0.60134	1.83514	0.55961	0.598874	1.6107	0.571925	2.5327
	1.0	0.89998	1.95645	0.71085	0.861007	3.4657	0.842486	5.58354
	1.0	2.5629	2.19237	1.2257	1.005984	11.5305	0.990142	18.6873

NUMBER OF POLES	BUTTERWORTH		BESSEL		CHEBYSCHEV			
	fn(1)	Q	fn(1)	Q	0.5dB RIPPLE		2dB RIPPLE	
					fn(1)	Q	fn(1)	Q
2	1.0	0.70711	1.2742	0.57735	1.23134	0.86372	0.907227	1.1286
3	1.0	-----	1.32475	-----	0.626456	-----	0.368911	-----
	1.0	1.0	1.44993	0.69104	1.068853	1.7062	0.941326	2.5516
4	1.0	0.54118	1.43241	0.52193	0.597002	0.70511	0.470711	0.9294
	1.0	1.3065	1.60594	0.80554	1.031270	2.9406	0.963678	4.59388
5	1.0	-----	1.50470	-----	0.362220	-----	-----	-----
	1.0	0.61805	1.55876	0.56130	0.762229	1.1011	0.500000	0.70711
	1.0	1.61812	1.75812	0.91652	1.017735	4.5450	0.97579	7.23228
6	1.0	0.51763	1.60653	0.51032	0.396229	0.68364	0.31611	0.9016
	1.0	0.70711	1.69186	0.61120	0.768121	1.8104	0.730027	2.84426
	1.0	1.93349	1.90782	1.0233	1.011446	6.5128	0.982828	10.4616
7	1.0	-----	1.68713	-----	0.256170	-----	0.153410	-----
	1.0	0.55497	1.71911	0.53235	0.503863	1.0916	0.460853	1.64642
	1.0	0.80192	1.82539	0.66083	0.822729	2.5755	0.797114	4.11507
	1.0	2.2472	2.05279	1.1263	1.008022	8.8418	0.987226	14.2802
8	1.0	0.50980	1.78143	0.50599	0.296736	0.67657	0.237699	0.89236
	1.0	0.60134	1.83514	0.55961	0.598874	1.6107	0.571925	2.5327
	1.0	0.89998	1.95645	0.71085	0.861007	3.4657	0.842486	5.58354
	1.0	2.5629	2.19237	1.2257	1.005984	11.5305	0.990142	18.6873

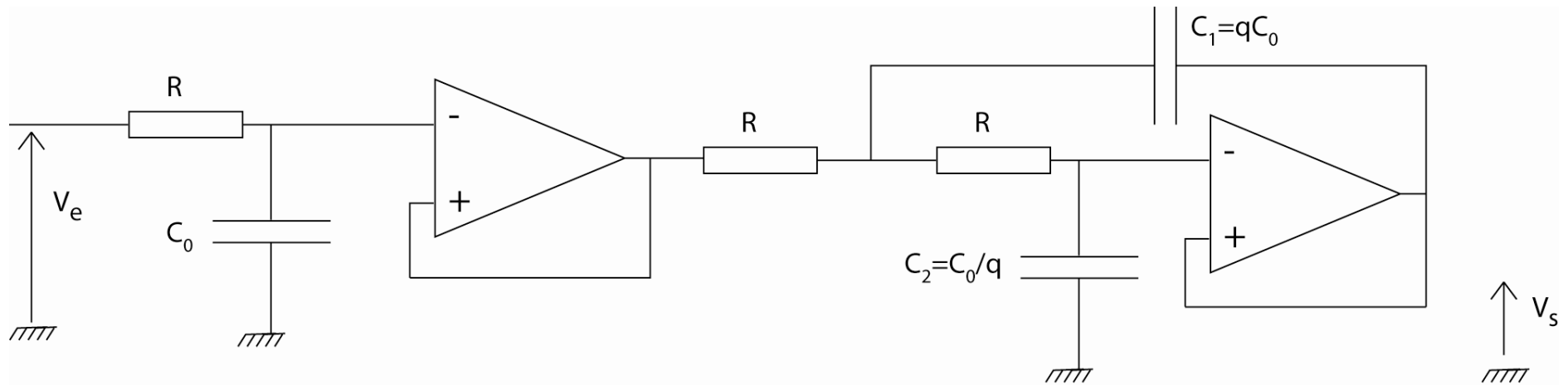
Premier ordre avec  $f_0 = f_{-3dB}$

3

1.0  
-----  
1.0

Deuxième ordre avec  $f_0 = f_{-3dB}$  et  $Q = 1$

# Exemple de synthèse



$Q=1$   $\longrightarrow$   $q=2$  et  $(f_{-3dB}/f_0) = 1$   $\longrightarrow$   $f_0 = 5 \text{ kHz}$

$R = 1,59 \text{ k}\Omega$   
 $f_0 = 5 \text{ kHz}$   $\longrightarrow$   $C_0 = \frac{1}{2\pi R f_0} = 20 \text{ nF}$   $\longrightarrow$   $C_1 = 40 \text{ nF}$  et  $C_2 = 10 \text{ nF}$



# Exemple de synthèse

Il existe des programmes téléchargeables gratuitement sur internet.

On va en voir un réalisé par Texas Instrument : Filter Pro que vous utiliserez en TD et en TP

En français

[http://sylvain.larribe.free.fr/CNAM/2004-2005/CNAM\\_2005\\_Filtrage.pdf](http://sylvain.larribe.free.fr/CNAM/2004-2005/CNAM_2005_Filtrage.pdf)

<http://alteralpha.free.fr/DOC/L3/S2/FILTRAGE/COURS.pdf>

<http://sitelec.free.fr/cours/filtrage.pdf>

En anglais

<http://www.newwaveinstruments.com/resources/>

[rf\\_microwave\\_resources/](http://www.newwaveinstruments.com/resources/)

[digital\\_wireless\\_communication\\_directory.htm#Directory](http://www.newwaveinstruments.com/resources/)

<http://www-s.ti.com/sc/psheets/sloa088/sloa088.pdf>

<http://www.beis.de/Elektronik/Filter/ActiveLPFilter.html>