ANNÉE 2015-2016

Représentation des Phénomènes Physiques

Fascicule de Travaux Dirigés

Université de Bordeaux
Département Licence

Calcul Différentiel

Exercice n° 1

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\cos y + y\exp(x) \\ f(x,y) &= x^2\exp(xy) \\ f(x,y) &= \ln(x-y)\cos(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Exercice n° 2 *Balistique*

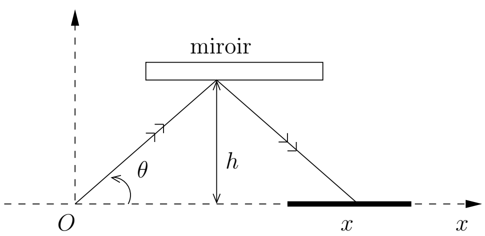
On lance une balle à la vitesse $\vec{v}_0$ dans une direction faisant un angle de 45° avec l'horizontale, avec $v_0 = 10$ ms^{-1}. Dans un plan vertical, la position de la balle est repérée par ses deux coordonnées cartésiennes (x, y). On note (x_0, y_0) les coordonnées du point de lancement. Si on néglige les frottements de l'air, l'équation de la trajectoire est donnée par :

$$y - y_0 = -g\,\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2} + (x - x_0)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, qu'on prendra égale à 10 ms^{-1}.

Ecrire la différentielle de y au point (x_0, y_0). En déduire une estimation de la variation de y lorsque x passe de x_0 à $x_0 + \Delta x$. On fera le calcul pour $\Delta x = 10$ cm, $\Delta x = 1$ m, $\Delta x = 5$ m et on comparera au résultat exact.

Exercice n° 3 *Réflexion*



Un rayon lumineux issu d'une source au point O est réflechi sur un miroir plan situé à une hauteur h de O. Il est détecté sur un écran aligné avec la source. La position x sur l'écran est repérée par rapport à O, comme illustré sur la figure ci-contre.

1. On considère la fonction $f(\theta) = \frac{1}{\tan\theta}$. Calculer df.
2. Montrer que :

$$x(\theta) = \frac{2h}{\tan\theta}$$

3. Si un rayon lumineux est émis à un angle $\theta = \theta_0 + d\theta$, de combien sera décalée la position du point d'impact sur l'écran ?

Exercice n° 4 *Optique géométrique*

Un rayon lumineux éclaire un dioptre plan avec un angle d'incidence $i_1 = 45°$. Le dioptre sépare deux milieux transparents d'indices respectifs $n_1 = 1.33$ et $n_2 = 1.54$ pour la longueur d'onde du rayon considéré. On rappelle la relation de Snell-Descartes entre les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 du rayon réfracté :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

On éclaire maintenant le dioptre, avec le même angle d'incidence $i_1 = 45°$, mais avec une nouvelle radiation pour laquelle n_1 a varié de $\Delta n_1 = -0.01$ et n_2 de $\Delta n_2 = -0.03$.

Par un calcul différentiel, estimer la variation Δi_2 de l'angle de réfraction i_2.

N.B. : il est plus simple de calculer en différentiant directement la relation de Snell

Exercice n° 5 *Thermodynamique*

On considère un gaz réel de pression P, de volume V et de température T, satisfaisant à l'équation d'état de Dieterici :

$$P = \frac{rT}{V-b}\, e^{-\dfrac{a}{rTV}}$$

où a, b, et r sont des constantes.

1. Ecrire la différentielle de P. Calculer $\dfrac{\partial P}{\partial V}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial T}$.
2. En déduire le coefficient d'augmentation de pression à volume constant $\beta = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial T}$.
3. Calculer le coefficient de dilatation à pression constante $\alpha = \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial T}$. Pour cela, il sera indispensable d'écrire la différentielle de V et de montrer que :

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\dfrac{\partial P}{\partial T}}{\dfrac{\partial P}{\partial V}}$$

Exercice n° 6 *Le prisme*

La déviation D subie par un rayon lumineux qui traverse un prisme d'angle au sommet A est donnée par :

$$D = i + i' - A$$

où i est l'angle d'incidence et i' l'angle d'émergence. On rappelle également que les angles d'émergence et d'incidence à l'intérieur du prisme, r et r' satisfont à la relation :

$$A = r + r'$$

et que, pour un prisme d'indice n, on a les relations :

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r \\ \sin i' &= n \sin r' \end{aligned}$$

Pour un prisme d'angle A fixé, D est donc une fonction de i et de n. Dans cet exercice, on se propose d'étudier la variation de D en fonction de n, donc de calculer $\dfrac{\partial D}{\partial n}$.

1. Ecrire la différentielle de D en fonction de celles de i et i'.
2. Ecrire la différentielle de $\sin i'$. En déduire di' en fonction de dn et dr.
3. Ecrire la différentielle de $\sin i$. En déduire dr en fonction de dn et di.
4. En déduire di' en fonction de dn et di, puis en déduire que : $\dfrac{\partial D}{\partial n} = \dfrac{\sin A}{\cos i' \cos r}$.
5. Discuter le signe de $\dfrac{\partial D}{\partial n}$ et en déduire que la radiation rouge est moins déviée que la radiation bleue. On rappelle que l'indice est relié à la longueur d'onde par la relation empirique de Cauchy :

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

   où a et b sont des constantes positives.

Exercice n° 7 *Formes différentielles*

Parmi les formes différentielles suivantes, trouver celles qui sont des différentielles totales et déterminer la fonction dont elles dérivent.

1. $\omega = xy\ dx + 2xy^2\ dy$
2. $\omega = y^2\ dx + x^2\ dy$
3. $\omega = 3x^2y^2z\ dx + 2x^3yz\ dy + x^3y^2\ dz$
4. $\omega = 2xy\ dx + (x^2 + 3y^2)\ dy$
5. $\omega = (\cos x + 3x^2y)\ dx + (x^3 - y^2)\ dy$
6. $\omega = \frac{x}{y^2}\ dx + x^2z^3\ dy + 3x^2yz^2\ dz$

Exercice n° 8 *Gaz parfait*

Une mole d'un gaz parfait à la température T est enfermée dans une enceinte de volume V. Lorsque sa température varie de dT et son volume de dV, la quantité de chaleur qu'il reçoit de l'extérieur vaut :

$$\delta Q = C_V\ dT + RT\ \frac{dV}{V}$$

où C_V et R sont des constantes.

Cette quantité de chaleur est-elle une différentielle totale ? Même question pour la quantité $\frac{\delta Q}{T}$. Si c'est le cas, calculer de quelle fonction $S(T, V)$ cette quantité est la différentielle.

Exercice n° 9 *Le ressort*

Un ressort, de raideur k et de longueur au repos l_0, est posé sur une table horizontale parfaitement lisse et une de ses extrémités est attachée en un point de la table. La position de l'autre extrémité est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan de la table, l'origine étant choisie au point d'attache du ressort. Si on déplace très légèrerement l'extrémité libre du ressort, ses coordonnées passent de (x, y) à $(x + dx, y + dy)$, et le travail de la force de rappel s'écrit :

$$\delta W = -k\ \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)(x\ dx + y\ dy)$$

Ce travail est-il une différentielle totale ? Si c'est le cas, quelle est l'expression de l'énergie potentielle E_p correspondante, sachant que E_p est définie par $dE_p = -\delta W$?

Exercice n° 10 *Dipôle électrostatique*

On considère la forme différentielle suivante :

$$\delta W = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2\cos\theta}{r^3}\ dr + \frac{\sin\theta}{r^2}\ d\theta\right]$$

où p est une constante appelée le "moment dipolaire", et ϵ_0 est également une constante appelée la "permittivité du vide".

1. Montrer que δW est une différentielle exacte.
2. En déduire le potentiel électrostatique dipolaire V défini par $\delta W = -dV$.

Exercice n° 11 *Le pendule*

La période des oscillations de faible amplitude d'un pendule simple s'exprime en fonction de sa longueur L et de l'accélération de la pesanteur g par la relation :

$$T = 2\pi\ \sqrt{\frac{L}{g}}$$

La mesure de L, effectuée avec une précision de 1% a donné pour résultat : $L = 25$ cm. D'autre part, $g = (9,80 \pm 0,01)$ m/s^2.

1. Calculer la précision ΔT sur la mesure de T.
2. Donner le résultat final en secondes.

Exercice n° 12 *Électricité*

Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension continue E, on le décharge dans une résistance R. La variation de la charge du condensateur au cours du temps suit la relation :

$$Q(t) = CE\ e^{-\dfrac{t}{RC}}$$

On mesure Q à un instant t donné.

1. Calculer la précision sur la mesure de Q : $\Delta Q/Q$
2. En déduire Q et ΔQ en coulombs.

Données numériques :

$C = (1000 \pm 100) \times 10^{-6}$ F ; $t = (12,0 \pm 0,5)$ s ; $E = (12,0 \pm 0,1)$ V ; $R = (12000 \pm 1200)\ \Omega$

Exercice n° 13 *Prisme*

On considère un prisme d'angle au sommet A, le minimum de déviation D de ce prisme est relié à l'indice du matériau du prisme par la relation :

$$n = \frac{\sin \frac{A+D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Calculer Δn.

Application numérique : $A = (60,0 \pm 0,3)^\circ$; $D = (37 \pm 1)^\circ$.

Exercice n° 14 *Résistance équivalente*

On associe en parallèle 2 résistances $R_1 = 2200\ \Omega$ et $R_2 = 120\ \Omega$, déterminées à 10%.

1. Quelle est la valeur de le résistance équivalente $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$? Quelle est l'incertitude associée ?
2. Montrer que l'on surestime l'incertitude relative si on ne tient pas compte des erreurs liées.

Exercice n° 15 *Constante de torsion*

La constante de torsion C d'un fil métallique, déterminée par la méthode des petites oscillations d'un pendule de torsion, est donnée par la relation :

$$C = 8\pi^2 m \left[\frac{a_2^2 - a_1^2}{T_2^2 - T_1^2}\right]$$

où m est la masse de chacune des 2 masses identiques situées sur une tige horizontale à la distance a de l'axe de rotation du pendule de torsion. T_1 et T_2 sont les valeurs mesurées pour la période quand a prend les valeurs a_1 et a_2. Pour un fil d'acier les mesures ont donné avec $m = (354,0 \pm 0,5)$ g :

$$a_1 = (17,3 \pm 0,2) \text{ cm} \qquad T_1 = (14,3 \pm 0,1) \text{ s}$$
$$a_2 = (37,3 \pm 0,2) \text{ cm} \qquad T_2 = (17,6 \pm 0,1) \text{ s}$$

1. Calculer la précision sur C, en déduire C et son incertitude.
2. La constante de torsion C d'un fil métallique de section circulaire s'exprime, en fonction de sa longueur l et de son rayon R, par la relation :

   $$C = \gamma\ \frac{\pi}{2}\ \frac{R^4}{l}$$

   où γ est le coefficient de Coulomb caractéristique de la nature du fil. Pour le fil étudié, on a $l = (1,600 \pm 0,001)$ m et $R = (0,75 \pm 0,01)$ mm. Calculer γ et son incertitude.

Exercice n° 16 *Van der Waals*

Une mole de gaz carbonique de pression P et de température T est enfermée dans une enceinte de volume V. Ce gaz satisfait à l'équation d'état de Van der Waals :

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

où a, b, et R sont des constantes : $a = 3.6 \times 10^{-3}$ Nm^4, $b = 4.2 \times 10^{-5}$ m^3 et $R = 8.31$ NmK^{-1}

1. La température est $T_0 = 300$ K et le volume $V_0 = 30.00 \times 10^{-3}$ m^3. Calculer la pression P_0.
2. Calculer $\dfrac{\partial P}{\partial V}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial T}$.
3. Ecrire la différentielle de P en $T = T_0$ et $V = V_0$.
4. La température augmente de 10 K et le volume de 10^{-4} m^3. A partir du résultat de la question précédente, donner une estimation de la variation de la pression.
5. L'incertitude sur T_0 est de 1 K et celle sur V_0 de 10^{-5} m^3. Calculer l'incertitude sur P_0.
6. Déterminer les expressions du coefficient d'augmentation de pression à volume constant $\beta = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial T}$, du coefficient de dilatation à pression constante $\alpha = \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial T}$, et du coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial P}$ en fonction de V, T, a, b, et R.

Exercice n° 17 *Effet Hall*

L'effet Hall, découvert par Edwin Hall en 1879, permet par exemple de mesurer un champ magnétique par une mesure de tension avec un voltmètre. Dans sa description classique, une tension V_H, dite *tension de Hall*, apparaît aux extrémités d'un barreau conducteur d'épaisseur L lorsqu'il est parcouru par un courant I et convenablement placé dans un champ magnétique B. Le champ magnétique s'exprime alors en fonction de la tension de Hall mesurée par la relation :

$$B = \frac{n_e q_e L V_H}{I}$$

où n_e et q_e sont des constantes. L'unité du système international pour B est le Tesla (T).

1. Calculer le champ magnétique pour une tension mesurée $V_H = 2.6$ μV, si le courant appliqué au barreau vaut $I_0 = 3.0$ A et que l'épaisseur du barreau est $L_0 = 18.0$ μm.
2. Donner l'expression littérale de la différentielle de B au point (V_H, I_0, L_0).
3. On considère que la longueur L_0 est fixée. Estimer la variation de B correspondant à une augmentation de 0.6 A sur I et de 0.5 μV sur V_H. Comparer à la variation exacte.
4. En utilisant la différentielle logarithmique, estimer l'incertitude relative sur la mesure de B sachant que V_H et I sont mesurés à 5 % près et que $L = 18.0 \pm 0.5$ μm.

Applications numériques : $n_e = 8.0\ 10^{28}$ m^{-3} ; $q_e = 1.6\ 10^{-19}$ C

Calcul Vectoriel

Exercice n° 18

Démontrer en utilisant le calcul vectoriel, que dans un triangle quelconque ABC, on a les relations :

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos\hat{B} \\ \frac{\sin\hat{A}}{(BC)} &= \frac{\sin\hat{B}}{(AC)} = \frac{\sin\hat{C}}{(AB)} = \frac{2S}{(AB)(AC)(BC)}\end{aligned}$$

où $\hat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,$\hat{B} = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$,$\hat{C} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, et S est la surface du tirangle.

Exercice n° 19 *Mécanique du point*

Soit un repère orthonormé $\mathcal{R}$: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Une particule se déplace dans $\mathcal{R}$ d'un point $A(20, 15, 0)$ à un point $B(0, 0, 7)$. Les distances sont exprimées en mètre. Durant son trajet, la particule est soumise à deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ définies par :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{F}_2 &= 4\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}\end{aligned}$$

Les forces sont exprimées en Newton.

1. Les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont-elles constantes ?
2. Quelle est la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées sur la particule ? Calculer la norme de $\vec{F}$.
3. Le travail d'une force est l'énergie fournie par cette force lorsque sont point d'application se déplace. Une force constante $\vec{F}$ qui s'applique sur un objet parcourant un trajet rectiligne $\vec{r}$ fournit un travail $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$ sur l'objet.
   Quel est le travail (en Joule) fourni à la particule durant son trajet entre A et B ? Si les mêmes forces agissent lors du déplacement de B vers A, quel est le travail fourni à la particule dans ce cas ?

Exercice n° 20 *Repérage de points dans l'espace*

Soit un repère orthonormé $\mathcal{R}$: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Trois projectiles ont été lancés depuis le point O dans trois directions différentes. A un instant donné, les projectiles sont situés en :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{r}_2 &= 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{r}_3 &= 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}\end{aligned}$$

1. Quel est le projectile le plus éloigné de O ?
2. Calculer l'angle entre les directions des projectiles 1 et 2.
3. Calculer le produit vectoriel $\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2$ et le produit mixte $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$. Les vecteurs $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ sont-ils coplanaires ?
4. Soient les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ définis dans $\mathcal{R}$ par :
   $$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 \\ \vec{B} &= \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3\end{aligned}$$
   Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{a}$ et $\vec{b}$ portés respectivement par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Exercice n° 21 *Calcul vectoriel*

Soit un repère orthonormé $\mathcal{R}$: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(3, 2, 0)$; $B(1, -1, 2)$; $C(1, 3, 1)$ et $D(-3, -1, 2)$. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Le trièdre $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est-il direct ou inverse ?
3. Calculer le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point C : $\vec{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{AB}/C} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB}$.
4. Calculer le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la droite CD orientée de C vers D :
   $$\mathcal{M}_{\overrightarrow{AB}/CD} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}, \vec{u}) = (\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u}$$
   où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par la droite CD.
5. Démontrer que le vecteur $\vec{V} = (a, b, c)$ est perpendiculaire au plan d'équation : $ax + by + cz = d$.

Exercice n° 22 *Réseau cristallin*

Dans un réseau cristallin cubique, on repère la position de cinq atomes dans la base orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $O(0,0,0)$, $A(a,0,a)$, $B(a,a,a)$, $C(0,0,a)$ et $D(a,a,0)$ où a est le paramètre de la maille.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, et $\overrightarrow{CD}$, ainsi que leurs normes.
2. En déduire la valeur (en degrés) de l'angle θ entre les vecteurs ?$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ puis celle de l'angle ϕ entre les vecteurs ?$\overrightarrow{OB}$, et $\overrightarrow{CD}$.
3. Représenter les trois vecteurs et les deux angles sur un dessin.

Exercice n° 23 *Tente canadienne*

On considère une tente canadienne, construite à partir des points :

$$A\begin{pmatrix} l/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} l/2 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} -l/2 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D\begin{pmatrix} -l/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S'\begin{pmatrix} 0 \\ L \\ h \end{pmatrix}$$

repérés dans le système de coordonnées cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, avec $\vec{k}$ définissant l'axe vertical. On se propose de calculer les caractéristiques géométriques de cette tente.

1. Représenter la tente sur un dessin.
2. Exprimer les coordonnées et les normes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AS}$, et $\overrightarrow{AD}$ en fonction de l, L et h.
3. À l'aide du produit vectoriel, exprimer la surface totale de toile formant le toit de la tente, en fonction de l, L et h.
4. À l'aide du produit mixte, exprimer le volume disponible à l'intérieur de la tente, en fonction de l, L et h.
5. Combien de sacs de randonnée de 30 litres peut-on protéger de la pluie dans une tente de dimensions $L = 2$m, $l = 1$m50 et $h = 1$m ? Quelle est la valeur numérique de la surface du toit de cette tente ?

Systèmes de Coordonnées

Exercice n° 24 *Cinématique*

On considère un point M se déplaçant dans l'espace au cours du temps. Ses coordonnées (x, y, z) sont des fonctions du temps : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

1. Exprimer $\overrightarrow{OM}(t)$ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
2. Rappeler les expressions des vecteurs de base des repères locaux cylindrique et sphérique dans la base cartésienne. Calculer les dérivées par rapport au temps des vecteurs de base des repères locaux cylindrique et sphérique, et les exprimer dans leur repère local respectif.
   On notera $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ et $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$.
3. En déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ puis celle du vecteur accélération
   $$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)$$
   dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.
   On notera $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ et $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$.

Exercice n° 25 *Loxodromie*

Les coordonnées sphériques sont bien adaptées à la description des trajectoires de points sur des sphères, et peuvent donc être utilisées pour l'étude des trajectoires des bateaux à la surface de la Terre. On considère une bateau naviguant à cap constant : la norme de sa vitesse est constante, notée v_0, et l'angle entre sa vitesse $\vec{v}$ et le méridien [1] au point M est également constant, noté α.

1. On considère que le bateau est repéré par ses coordonnées sphériques $r(t)$, $\theta(t)$ et $\phi(t)$ qui dépendent du temps. En vous appuyant sur l'exercice précédent, calculer les dérivées par rapport au temps des vecteurs de base du repère local sphérique $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\phi$, en les exprimant dans ce même repère.
   N.B. : on notera $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ et $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$
2. En déduire l'expression de la vitesse du bateau $\vec{v}(t)$ dans la base locale sphérique.
3. Sachant que la trajectoire à cap constant correspond à une vitesse de la forme :
   $$\vec{v} = v_0 \cos\alpha \ \vec{e}_\theta + v_0 \sin\alpha \ \vec{e}_\phi$$
   exprimer $\dot{\phi}$ et θ, en fonction du rayon de la Terre, noté R, de v_0, de α et du temps t.
4. Sachant que $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$ trouver l'expression de ϕ en fonction de θ. Cette trajectoire particulière s'appelle une loxodromie.

   N.B. : on donne $\int \frac{1}{\sin\theta} \, d\theta = \ln(\tan\frac{\theta}{2})$ pour $\theta \in [0; \pi]$.

Exercice n° 26 *Coordonnées paraboliques*

Les coordonnées paraboliques (σ, τ, ϕ), utilisées en mécanique quantique par exemple, sont définies à partir des coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \sigma\tau\cos\phi \\ y & = & \sigma\tau\sin\phi \\ z & = & \dfrac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \end{array} \right. \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in [0; +\infty[\\ \tau \in [0; +\infty[\\ \phi \in [0; 2\pi[\end{array} \right.$$

1. Écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à l'aide des coordonnées paraboliques dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
2. On rappelle qu'un vecteur de base local $\vec{e}_u$ associé à une coordonnée quelconque u est défini par :
   $$\vec{e}_u = \frac{\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}\right|}$$
   Calculer les vecteurs de base locaux $\vec{e}_\sigma$, $\vec{e}_\tau$ et $\vec{e}_\phi$.

1. Un méridien est un demi-cercle qui relie les deux pôles du globe terrestre.

3. À l'aide des questions précédentes, montrer que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit sur la base locale parabolique de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\,\sigma\sqrt{\tau^2+\sigma^2}\;\vec{e}_\sigma + \frac{1}{2}\,\tau\sqrt{\tau^2+\sigma^2}\;\vec{e}_\tau$$

Exercice n° 27 *Trajectoire hélicoïdale*

Une particule chargée, placée dans une région où règne un champ magnétique uniforme, suit une trajectoire hélicoïdale lorsque sa vitesse n'est pas exactement perpendiculaire à la direction du champ.

Le mouvement hélicoïdal uniforme est la composition d'un mouvement de rotation uniforme de rayon R et de translation uniforme dans la direction de l'axe de rotation. Les coordonnées cylindriques qui ont pour axe de symétrie l'axe de rotation s'imposent donc pour l'étudier.

1. Rappeler la définition des coordonnées cylindriques ρ, φ et z, et représenter les clairement sur un schéma.
2. Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y et z en fonction de ρ, φ et z.
3. Rappeler la définition des vecteurs de base du repère local cylindrique au point M. Dessiner le repère local sur le schéma précédent. Exprimer les coordonnées des vecteurs du repère local cylindrique dans le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, en fonction de ρ, φ et z.
4. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base locale cylindrique.
5. La trajectoire décrite par la particule correspond aux variations suivantes des coordonnées ρ, φ et z en fonction du temps t :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho(t) & = & R \\ \varphi(t) & = & \omega t \\ z(t) & = & \lambda\varphi(t) \end{array}\right.$$

avec R, ω, et λ considérées comme des constantes.

a. Déterminer la vitesse de la particule $\vec{v}(M)$ dans la base locale cylindrique.

b. Déterminer l'accélération de la particule $\vec{a}(M)$ dans la base locale cylindrique.

c. L'angle α de l'hélice est l'angle entre la direction de la vitesse au point M et la projection de $\vec{v}(M)$ sur le plan parallèle à (xOy) à la cote z, plan dans lequel se trouve M. Déterminer α en fonction de λ et R.

Calcul Intégral

Intégrales simples

Exercice n° 28 *Thermodynamique*

On chauffe une mole gazeuse d'ammoniac NH_3 de 273 K à 298 K. Sachant que la capacité calorifique de l'ammoniac gazeux à pression constante est donnée en fonction de la température T par :

$$C_{Pmol} = \frac{dQ}{dT} = 34.5 + 4.2 \times 10^{-3}\ T \qquad \mathrm{Jmol^{-1}K^{-1}}$$

Calculer l'énergie Q dépensée.

Exercice n° 29

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$
   on rappelle : $[\arctan u]' = \frac{u'}{1+u^2}$
2. $I = \displaystyle\int_0^\pi x\cos x\ dx$
3. $I = \displaystyle\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$ avec $a > 0$
   on effectuera le changement de variable : $x = a\cos t$

Intégrales doubles

Exercice n° 30

Calculer :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} xy\ dxdy \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{D} = \{(x,y); x>0, y>0, x+y<1\}$$

Exercice n° 31 *Aire*

Calculer l'aire de l'ellipse dont l'équation par rapport à ses axes principaux s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Exercice n° 32 *Centre d'inertie*

Déterminer la position du centre d'inertie G d'une plaque demi-circulaire homogène (O,R) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S}\iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{OM}\ ds$$

Retrouver le résultat en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.

Exercice n° 33 *Moment d'inertie*

Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre O, d'une plaque circulaire homogène de masse surfacique μ et de rayon R :

$$I_0 = \iint_{\mathcal{D}} \mu(x^2+y^2)\ dxdy$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires.

Exercice n° 34

Une plaque plane et homogène en forme de croissant, de masse surfacique constante, est limitée par les deux courbes d'équations : $y - x^2$ et $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ entre les points d'abscisse $x = -1.62$ et $x = 1.62$, x et y étant exprimés en mètres.

1. Calculer la surface S de la plaque.
2. Déterminer la position du centre de gravité (ou centre d'inertie) G de la plaque :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \iint_{plaque} \overrightarrow{OM}\ dxdy$$

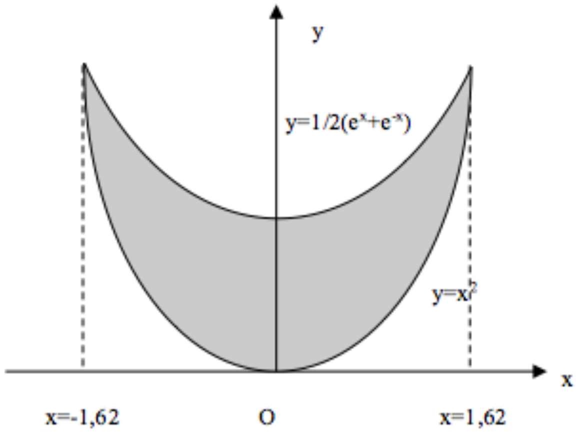


Figure 1

Intégrales triples

Exercice n° 35 *Volume*

Calculer le volume d'une sphère de rayon R en utilisant les coordonnées cartésiennes. Retrouver le résultat avec les coordonnées sphériques.

Exercice n° 36 *Centre d'inertie*

Déterminer la position du centre d'inertie G d'une demi-sphère homogène de rayon R en utilisant les coordonnées cartésiennes puis les coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{R}} \overrightarrow{OM}\ d\tau$$

Exercice n° 37 *Moment d'inertie*

Calculer, en utilisant les coordonnées appropriées, le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) d'un cylindre de révolution autour de (Oz), homogène, de rayon R et de hauteur h :

$$I_0 = \iiint_{\mathcal{D}} \mu(x^2 + y^2)\ dxdydz$$

avec μ la masse volumique

Exercice n° 38 *Distribution volumique de charges*

On considère une distribution de charges en volume, en équilibre, contenue dans la sphère $S(O, r_0)$. La densité de charge par unité de volume ρ varie linéairement en fonction de r (pour $0 < r < r_0$) suivant la loi :

$$\rho(r) = a(r_0 - r)$$

Quelle est la dimension de la constante positive "a" ? Calculer la charge totale Q contenue dans S.

Exercice n° 39 *Cône*

Soit un cône droit à base circulaire de rayon R et de hauteur h construit dans un matériau homogène, de masse volumique μ.

1. Calculer son volume.
2. Calculer son moment d'inertie par rapport à son axe (Oz).
3. Retrouver les résultats précédents en utilisant le passage en coordonnées cylindriques.

Exercice n° 40 *Ellipsoïde*

Calculer le volume d'un ellipsoïde dont l'équation par rapport à ses axes principaux s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Exercice n° 41 *Tronc conique*

Soit un tronc de cône droit, de bases circulaires de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 > R_2$ et de hauteur h, construit dans un matériau homogène.

1. Calculer son volume.
2. Calculer les coordonnées du centre d'inertie de ce solide.
3. Retrouver les résultats précédents en utilisant le passage en coordonnées cylindriques.

Exercice n° 42 *Coquille*

Soit un solide homogène qui a la forme d'une coquille demi-sphérique.La demi-sphère interne a pour rayon R_1, la demi-sphère externe a pour rayon R_2. Calculer le moment d'inertie I_{Oz} de ce solide par rapport à l'axe de révolution $z'Oz$.

Exercice n° 43 *Atome d'hydrogène*

La position la plus probable d'un électron dans un atome d'hydrogène est décrite par une fonction d'onde dite "de l'orbitale $1s$" de l'atome. Cette fonction d'onde s'écrit en coordonnées sphériques sous la forme :

$$\Psi(r,\theta,\phi)=C\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$$

où a_0 est une constante appelée rayon de Bohr et C une constante de normalisation. Dans ce qui suit, on se propose de déterminer C pour que la fonction d'onde soit normalisée à 1.

1. En vous basant sur un schéma, montrer que l'élément de volume $d\tau$ en coordonnées sphériques s'écrit :
$$d\tau = r^2\sin\theta \; drd\theta d\phi$$
2. Calculer l'intégrale suivante en fonction de C :
$$I=\iiint_{\mathcal{D}}\Psi^2 \; d\tau$$
sachant que le domaine $\mathcal{D}$ représente tout l'espace à 3 dimensions.
3. Sachant que $I=1$, déduire C.

Intégrales curvilignes

Exercice n° 44

1. Calculer l'intégrale curviligne de $f(M)=\frac{1}{x-y}$ quand le point M se déplace dans le plan xOy le long du segment de droite d'équation $y=\frac{x}{2}-2$ entre les points $A(0,-2)$ et $B(4,0)$.
2. Calculer la longueur de la spire d'hélice circulaire :
$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \qquad 0\le t\le 2\pi \\ z &= ht \end{aligned}$$

3. On considère la courbe plane $\mathcal{C}$ dont l'équation en coordonnées polaires est :

$$\rho(\theta) = a\ e^{-\theta}$$

avec a un paramètre constant et positif. Calculer la longueur de l'arc de $\mathcal{C}$ pour une variation de θ de $\theta_1 = 0$ à $\theta_2 = 2\pi$.

Exercice n° 45 *Cardioïde*

L'équation, en coordonnées polaires, de la cardioïde est :

$$\rho(\varphi) = a(1 + \cos\varphi) \qquad \text{avec } \varphi \in [0, 2\pi]$$

1. Représenter cette courbe, à partir de quelques valeurs particulières.
2. Calculer la longueur $\mathcal{L}$ de cette courbe.
   On rappelle que : $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$
3. Calculer l'aire de l'intérieur de la cardioïde, S_D, en utilisant la formule de Green-Riemann :

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma^+} x\ dy - y\ dx$$

Exercice n° 46 *Chainette*

Une chaînette est pendue entre deux points. Deux axes orthogonaux (Ox) et (Oy) ayant été choisis dans le plan de la chaînette, celle-ci a pour équation paramétrique :

$$\begin{array}{rcl} x & = & at \\ y & = & \dfrac{a}{2}(e^t + e^{-t}) \qquad -\ln 2 \leq t \leq \ln 2 \end{array}$$

et $a = 10$ cm.

1. Montrer que $1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2$
2. Calculer la longueur de la chaînette.

Exercice n° 47 *Corde*

Une corde est attachée entre 2 points. Deux axes orthogonaux (Ox) et (Oy) ayant été choisis dans le plan de la corde, celle-ci a pour équation :

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$$

entre les 2 points d'attache d'abscisses $x = 1$ et $x = e = 2,7183$. Calculer la longueur de cette corde.

Champs Scalaires et Vectoriels

Exercice n° 48

Soit un repère orthonormé $\mathcal{R}$: $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère un point M de coordonnées (x,y,z). Soit $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ le vecteur de norme $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1. Démontrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}\,(G+K) &= \overrightarrow{\text{grad}}\,G+\overrightarrow{\text{grad}}\,K\\ \overrightarrow{\text{grad}}\,(GK) &= G\overrightarrow{\text{grad}}\,K+K\overrightarrow{\text{grad}}\,G\end{aligned}$$

2. Calculer, en utilisant l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,r$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\tfrac{1}{r})$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\ln r)$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(r\ln r)$$

3. Généralisation : calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f(r))$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\,r^n$

Exercice n° 49

On considère un champ scalaire :

$$f(M)=\frac{z^2}{r}+C$$

avec C une constante et $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Déterminer le champ de vecteurs $A(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,f(M)$ en coordonnées cartésiennes.

Exercice n° 50

Soit un champ scalaire $V(x,y)$, et un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ dans le plan.

1. Montrer que la différentielle de V peut s'écrire $dV=\overrightarrow{\text{grad}}\,V\cdot\vec{dl}$ où $\vec{dl}$ est le déplacement élémentaire qui s'écrit $\vec{dl}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$.
2. On se propose de calculer les composantes du gradient en coordonnées polaires (ρ,φ). Pour ceci exprimer dV et $\vec{dl}$ en fonction des variables ρ et φ. En déduire les composantes du gradient.

Exercice n° 51 *Relations entre les opérateurs vectoriels*

Démontrer les relations suivantes :

1. $\text{div}(\vec{A}+\vec{B})=\text{div}\vec{A}+\text{div}\vec{B}$
2. $\text{div}(G\vec{A})=\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,G+G\text{div}\vec{A}$
3. $\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}-\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$
4. $\overrightarrow{\text{rot}}(G\vec{A})=\overrightarrow{\text{grad}}\,G\wedge\vec{A}+G\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$
5. $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})=0$
6. $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,G)=\vec{0}$
7. $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,G)=\triangle G$

Exercice n° 52 *Circulation le long d'un cercle*

Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{B}(M)$:

$$M(x,y,z)\mapsto\vec{B}(M)=\begin{bmatrix}B_1&=&2x-y+z\\B_2&=&x+y-z^2\\B_3&=&3x-2y+4z\end{bmatrix}$$

le long d'un tour du cercle de centre O et de rayon 3 situé dans le plan xOy.

Exercice n° 53 *Circulation le long d'une courbe*

Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{A}(M)$:

$$M(x,y,z) \mapsto \vec{A}(M) = \left[\begin{array}{lcl} A_x & = & 3xy \\ A_y & = & -5z \\ A_z & = & 10x \end{array} \right]$$

le long de la courbe définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{array}{lcl} x(t) & = & 1+t^2 \\ y(t) & = & 2t^2 \qquad\qquad 0 \leq t \leq 1 \\ z(t) & = & t^3 \end{array}$$

Exercice n° 54 *Travail d'une force*

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}$: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En M de coordonnées (x, y, z) un point matériel de masse m est soumis à la force :

$$\vec{F}(M) = a(xy\vec{i} - z^2\vec{j} - x^2\vec{k})$$

1. Calculer le travail effectué par cette force lorsque le point matériel passe de O en P en suivant les contours suivants :
   – $OABP$: $O(0,0,0); A(x_0,0,0); B(x_0,y_0,0); P(x_0,y_0,z_0)$
   – $OCDP$: $C(0,y_0,0); D(0,y_0,z_0)$
   – OCBP
   Remarque : Le contour $BCDP$ est dans un plan parallèle au plan xOz.
2. Cette force dérive-t-elle d'une énergie potentielle ? Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}F$.

Exercice n° 55

On considère le champ de vecteurs $\vec{A}(M)$ défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{array}{lcl} A_x & = & (x^2+y^2)(x-y) \\ A_y & = & (x^2+y^2)(x+y) \\ A_z & = & z^2 \end{array}$$

Le champ $\vec{A}(M)$ dérive-t-il d'un champ scalaire $f(M)$? Si oui le déterminer.

Exercice n° 56

On considère le champ de vecteurs $\vec{C}(M)$ défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{array}{lcl} C_x & = & 2xz \\ C_y & = & yz \\ C_z & = & H(x,y) \end{array}$$

1. Quelle est la condition pour que ce champ dérive d'un champ scalaire $f(M)$?
2. En déduire la fonction particulière $H(x,y)$ qui remplit cette condition et pour laquelle $\vec{C}(O) = 0$.
3. Déterminer $f(M)$ sachant que $f(M)$ est nul dans le plan xOy.

Exercice n° 57 *Modèle élastique*

Un atome qui s'écarte de sa position d'équilibre dans un cristal subit une force de rappel qui peut s'écrire en première approximation :

$$\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} = -k(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

où M est la position de l'atome, k une constante, et O la position d'équilibre.

1. Dans un repère cartésien centré en O, l'atome se déplace du point $O(0,0,0)$ au point $A(a,a,0)$ suivant deux chemins possibles (a est une constante positive quelconque) :
   – chemin 1, noté Γ_1 : l'atome passe par le point $B(a,0,0)$, en parcourant OB puis BA ;

– chemin 2, noté Γ_2 : l'atome rejoint directement le point A en parcourant le segment OA de la droite $y = x$;

a. Faire un schéma sur lequel apparaissent le repère cartésien, les points A, B et les chemins Γ_1 et Γ_2.

b. Calculer la circulation de $\vec{F}$ (c'est à dire le travail fourni) le long de ces deux chemins.

2. Calculer le rotationnel de $\vec{F}$.
3. La force $\vec{F}$ dérive-t-elle d'un champ scalaire ? Si oui, on définit l'énergie potentielle par la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p$. Déterminer E_p.

Exercice n° 58

On considère le repère orthonormé $\mathcal{R}$: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et un point M de coordonnées (x, y, z). Soit le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ de norme $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et le vecteur unitaire $\vec{u} = \vec{r}/r$.

1. Calculer $\text{div}\overrightarrow{r}$ et $\text{div}\overrightarrow{u}$. Retrouver le résultat obtenu pour $\text{div}\overrightarrow{u}$ en utilisant la relation $\text{div}(G\vec{A}) = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, G + G\text{div}\overrightarrow{A}$.
2. Calculer $\triangle r$ au point $M_1(1, 1, 1)$ à l'aide de la relation $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, G) = \triangle G$.
3. Montrer que $\triangle \frac{1}{r} = 0$.
4. Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{r}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\dfrac{\vec{r}}{r^3}$.
5. Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$ avec $\vec{A} = 3x^2y\vec{i} - 2yz^3\vec{j} + x^2y\vec{k}$. Déterminer les points de l'espace tels que $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{0}$.

Exercice n° 59 *Champ électrique*

On considère le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M par une charge ponctuelle q située au centre O d'un repère de coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r^3}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM} \neq 0$ et ϵ_0 est une constante.

1. Montrer que ce champ est à flux conservatif.
2. Calculer son flux Φ à travers une sphère de rayon R.
3. Le champ dérive-t-il d'un potentiel $V(M)$? De quelle forme ?
4. Ce potentiel satisfait-il à l'équation de Laplace : $\triangle V = 0$?

Exercice n° 60 *Champ de force conservatif*

On considère le repère orthonormé $\mathcal{R}$: $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tout point M de coordonnées (x, y, z) est soumis à la force $\vec{F}(M)$ dont les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont données par :

$$\begin{aligned} F_x &= 2ax \\ F_y &= 2ay \\ F_z &= 2ap \end{aligned}$$

où a et p sont des constantes. On définit ainsi un champ de forces.

1. Calculer le rotationnel de $\vec{F}(M)$. En déduire que la force dérive d'une énergie potentielle $U(M)$. Trouver l'expression de U qui s'annule en O.
2. Calculer la divergence de $\vec{F}(M)$. En déduire le flux de $\vec{F}(M)$ sortant d'une surface fermée simple délimitant un domaine de l'espace de volume $\mathcal{V}$.
3. Retrouver le résultat précédent par un calcul direct du flux dans le cas d'un cylindre de révolution d'axe (Oz) de rayon R et de hauteur h.

Exercice n° 61 *Champ magnétique*

On considère le champ magnétique $\vec{B}$ suivant :

$$\vec{B} = a \left(\frac{-y\vec{e_x} + x\vec{e_y}}{r_0^2} \right) \qquad \text{avec } a = cte \text{ et } r_0 = cte$$

défini dans le repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

1. On veut calculer le flux de $\vec{B}$ sortant par les six faces d'un cube de côté b et centré en O :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$$

   a. Dessinez le cube dans le repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.
   b. Exprimez l'élément de surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{\sigma}$ sortant de chacune des faces du cube.
   c. Calculez Φ.
2. Calculez $\mathrm{div}\vec{B}$. Le résultat de la question précédente était-il prévisible ?
3. Calculez la circulation de $\vec{B}$ le long d'un cercle (Γ) de centre O et de rayon R, orienté dans le sens direct et contenu dans le plan (xOy).
4. Calculez $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$.
5. Vérifiez le théorème de Stokes pour $\vec{B}$:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \iint_{\Sigma_\Gamma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$$

   en calculant explicitement :

$$\iint_{\Sigma_\Gamma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}$$

   où Σ_Γ est la surface du disque de centre O et de rayon R.