

REPRÉSENTATION DES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES

Fascicule de cours

Maud Versteegen
David Denis-Petit

Université de Bordeaux
Département Licence

Préambule

Ce cours n'est pas un cours de mathématiques.

Il a pour but de présenter les outils indispensables qu'il faut maîtriser pour pouvoir décrire, comprendre et étudier les phénomènes physiques et chimiques abordés dans les premiers semestres à l'Université. Ces outils sont par exemple utilisés en thermodynamique, en mécanique, en électromagnétisme etc. . Ils sont empruntés aux mathématiques, mais sont présentés ici dans un contexte appliqué. Il s'agit d'apprendre à les utiliser pour effectuer des calculs. Les démonstrations des propriétés de ces outils, ainsi que le traitement des cas pathologiques, ne seront donc pas traités. Ces démonstrations seront renvoyées au cours de mathématiques à proprement parler.

Table des matières

1	Calcul différentiel et fonctions de plusieurs variables	5
I	Dérivée et différentielle d'une fonction d'une variable réelle	5
I.1	Rappel : la notion de dérivée	5
I.2	La notion de différentielle	5
I.3	Interprétation géométrique	6
I.4	Propriétés des différentielles	7
II	Dérivées de fonctions de plusieurs variables	8
II.1	Fonction de plusieurs variables	8
II.2	Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables	8
II.3	Propriétés des dérivées partielles	9
II.4	Dérivées partielles du second ordre	10
III	Différentielle d'une fonction de plusieurs variables	11
III.1	Définition	11
III.2	Changement de variables	13
III.3	Applications	15
IV	Fonctions vectorielles	16
V	Formes différentielles	18
V.1	Définition	18
V.2	Formes différentielles exactes et fermées	18
2	Systèmes de coordonnées	22
I	Principe général du repérage d'un point	22
I.1	Coordonnées	22
I.2	Repère local	22
II	Systèmes de coordonnées en dimension deux	23
II.1	Coordonnées cartésiennes	23
II.2	Coordonnées polaires	24
III	Systèmes de coordonnées en dimension trois	26
III.1	Coordonnées cartésiennes	26
III.2	Coordonnées cylindriques	27
III.3	Coordonnées sphériques	28
IV	Dérivées des vecteurs de base locaux	31
IV.1	Coordonnées polaires	31
IV.2	Coordonnées cylindriques	31
IV.3	Coordonnées sphériques	31
V	Déplacement élémentaire d'un point	32
V.1	Cas général	32
V.2	Coordonnées cartésiennes	32
V.3	Coordonnées polaires	32
V.4	Coordonnées cylindriques	33
V.5	Coordonnées sphériques	34

3	Calcul intégral	35
I	Intégrales simples	35
I.1	Primitive	35
I.2	Intégrale définie au sens de Riemann	36
I.3	Propriétés	37
I.4	Quelques méthodes de calcul de primitives	37
II	Intégrales multiples	39
II.1	Intégrales doubles	39
II.2	Intégrales triples	43
II.3	Changement de variables	45
III	Intégrales curvilignes	47
III.1	Courbes	47
III.2	Longueur d'un arc de courbe plane	48
III.3	Intégrale curviligne	50
IV	Calcul de surface	51
IV.1	Élément de surface	51
IV.2	Intégrale de surface	53
IV.3	Surface intérieure d'une courbe fermée	53
4	Champs scalaires et vectoriels	54
I	Définitions	54
I.1	Champ scalaire	54
I.2	Champ vectoriel	54
II	Circulation d'un champ vectoriel	55
II.1	Circulation élémentaire	55
II.2	Circulation sur un déplacement fini	55
III	Flux d'un champ vectoriel à travers une surface	56
III.1	Surface orientée	56
III.2	Flux d'un champ vectoriel à travers une surface Σ	57
IV	Principaux opérateurs différentiels	57
IV.1	Gradient d'un champ scalaire	57
IV.2	L'opérateur vectoriel nabla : $\vec{\nabla}$	59
IV.3	Divergence d'un champ vectoriel	61
IV.4	Rotationnel d'un champ vectoriel	64
IV.5	Laplacien scalaire	67
IV.6	Laplacien vectoriel	68
V	Propriétés et relations entre les opérateurs différentiels	68
V.1	Relations entre les opérateurs	68
V.2	Identités de Poincaré	69
V.3	Théorèmes intégraux	70
A	Quelques rappels sur le calcul vectoriel	74
I	Ensemble des vecteurs	74
I.1	Rappels et définitions	74
I.2	Opérations sur les vecteurs	75
I.3	Les bases	76
II	Produit scalaire	79
II.1	Définition	79
II.2	Propriétés	80
II.3	Utilisation des coordonnées	80
II.4	Norme d'un vecteur	81
III	Produit vectoriel	81
III.1	Définition	81
III.2	Propriétés	82
III.3	Utilisation des coordonnées	83
IV	Produit mixte	85
IV.1	Définition	85
IV.2	Propriétés	86

IV.3	Utilisation des coordonnées	86
------	---------------------------------------	----

Chapitre 1

Calcul différentiel et fonctions de plusieurs variables

Le calcul différentiel a été introduit au XVII^e siècle, par I. Newton et G. W. Leibnitz, dans le but de décrire l'effet de variations infinitésimales de paramètres sur des observables. La forme actuelle de l'étude des dérivées, des tangentes aux courbes et des infiniment petits est le fruit du grand nombre de travaux mathématiques qui a suivi ces premiers développements.

I Dérivée et différentielle d'une fonction d'une variable réelle

I.1 Rappel : la notion de dérivée

On considère une fonction continue $f(x)$ d'une variable réelle x :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Si on se place au point x_0 , et qu'on se déplace vers le point $x_0 + \epsilon$, la fonction f change de valeur et passe de $f(x_0)$ à $f(x_0 + \epsilon)$.

Définition :

La fonction f est dite *dérivable* au point x_0 si et seulement si la limite suivante :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon}$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et est appelée la *dérivée de f en x_0* .

La dérivée au point x_0 mesure le taux de variation local d'une fonction f : elle est égale à la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0 . À partir de la définition de dérivabilité précédente, on peut définir la *fonction dérivée* de f :

Définition :

Si la fonction f est dérivable en tous points x de son domaine de définition, ici \mathbb{R} , on appelle *dérivée de f* la fonction qui à tout point x associe $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

I.2 La notion de différentielle

Toujours dans le contexte de décrire l'effet de variations des paramètres (ici x) sur les observables qui en dépendent (ici $f(x)$), la variation de la fonction $f(x)$ due au passage du point x_0 au point $x_0 + \epsilon$ correspond à la *différence* :

$$\Delta f = f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)$$

Pour calculer Δf on utilise la notion de *différentielle* :

Définition :

Si la fonction f est dérivable au point x_0 , on appelle *différentielle* de f au point x_0 la fonction notée $d_{x_0}f$ et qui à tout point ϵ de \mathbb{R} associe $f'(x_0)\epsilon$:

$$\begin{aligned} d_{x_0}f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \epsilon &\mapsto f'(x_0)\epsilon \end{aligned}$$

C'est donc une fonction linéaire, dont la pente est $f'(x_0)$.

Si on revient à la notion de variation Δf de la fonction f , induite par la variation ϵ de sa variable, on peut réécrire :

$$\Delta f = f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) \simeq f'(x_0) \cdot \epsilon \simeq d_{x_0}f(\epsilon) \tag{1.1}$$

dans le cas où ϵ est assez petit pour définir $f'(x_0)$. C'est donc une équation approchée, qui devient exacte lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, et qui permet d'estimer les faibles variations de f autour du point x_0 par le calcul de $d_{x_0}f$.

En pratique, on adopte une écriture condensée. En effet, si on considère la fonction identité : $f(x) = x$, que l'on note abusivement x tout simplement, alors $d_{x_0}f(\epsilon) = d_{x_0}x(\epsilon) = 1 \cdot \epsilon$. On constate que $d_{x_0}x$ est indépendant de x_0 et est égal à ϵ . On écrit alors abusivement pour une fonction f quelconque :

$$df = f'(x_0)dx$$

en omettant le x_0 de $d_{x_0}f$ et en remplaçant ϵ par dx . On constate alors que la dérivée de f au point x_0 peut s'écrire comme le rapport des différentielles df et dx :

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)}$$

et ce constat est étendu à tout point x .

I.3 Interprétation géométrique

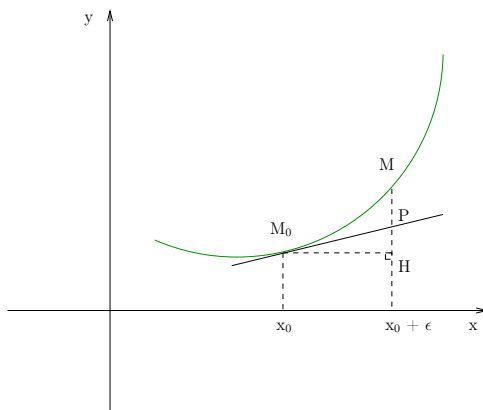


FIGURE 1.1 – Représentation graphique

Sur la figure (1.1) la distance HM correspond à la variation de la fonction f :

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)$$

La distance HP correspond à l'accroissement de la tangente au point M_0 quand x varie de x_0 à $x_0 + \epsilon$. On obtient la distance HP à partir de l'équation de la tangente :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

et des coordonnées du point $P(x_0 + \epsilon, f'(x_0) \times \epsilon + f(x_0))$:

$$\begin{aligned} HP &= y_P - y_H \\ &= f'(x_0) \times \epsilon + f(x_0) - f(x_0) \\ &= f'(x_0) \times \epsilon \end{aligned}$$

Dans la limite où $\epsilon \rightarrow 0$ la distance HP tend vers la différentielle de la fonction f au point x_0 (équation (1.1)) :

$$HP \rightarrow df$$

Dans ce cas, on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{HM}{HP} \rightarrow 1$$

et la différentielle tend vers la variation de f .

I.4 Propriétés des différentielles

Les dérivées et les différentielles partagent les mêmes propriétés :

1. Somme :

$$d(f + g) = df + dg$$

2. Multiplication par une constante :

$$d(\lambda f) = \lambda df$$

3. Produit :

$$d(f \times g) = f \cdot dg + g \cdot df$$

4. Quotient :

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$$

5. Composition :

On note $h = f(g(x)) = f \circ g(x)$ avec $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Connaissant la dérivée d'une fonction composée $(f \circ g(x))' = f' \circ g(x) \cdot g'(x)$ on en déduit :

$$dh = df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = f'(g) dg = \frac{df}{dg} dg$$

6. Utilisation du logarithme :

Dans beaucoup d'applications physiques, on s'intéresse à la variation d'une grandeur par rapport à sa valeur nominale. La variation est souvent exprimée en terme de pourcentage de la valeur nominale, et on s'intéresse alors à la grandeur $\Delta f/f$ où $\Delta f/f$ est la *variation relative* (souvent exprimée en %). Il est alors souvent plus intéressant d'utiliser les *différentielles logarithmiques*. En effet :

$$d \ln(f) = \frac{df}{f}$$

Les propriétés du logarithme $\ln(|fg|) = \ln(|f|) + \ln(|g|)$ et $\ln(|f/g|) = \ln(|f|) - \ln(|g|)$ permettent en effet d'écrire :

$$\begin{aligned} d \ln(fg) &= \frac{d(fg)}{fg} \\ &= d(\ln(f) + \ln(g)) = \frac{dg}{g} + \frac{df}{f} \\ \Rightarrow \frac{d(fg)}{fg} &= \frac{dg}{g} + \frac{df}{f} \end{aligned}$$

et de la même manière on montre que :

$$d \ln\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{\frac{f}{g}} = \frac{df}{f} - \frac{dg}{g}$$

II Dérivées de fonctions de plusieurs variables

II.1 Fonction de plusieurs variables

La plupart des grandeurs physiques et chimiques dépendent d'un ensemble de variables. Par exemple, la pression d'un gaz parfait peut s'écrire :

$$P(T, V) = \frac{nRT}{V} \quad (1.2)$$

où les deux grandeurs T , la température, et V , le volume, peuvent être modifiées au cours d'une expérience. Le terme R est la constante des gaz parfaits : il est fixe. En revanche, n est le nombre de moles de gaz considéré, et peut être fixé ou variable. Si la quantité de gaz peut varier alors la pression P devient une fonction de trois variables et on écrit :

$$P(T, V, n) = \frac{nRT}{V}.$$

Dans cette partie, on va considérer des fonctions f de plusieurs variables, en se limitant pour la plupart des résultats aux fonctions de deux variables x et y , et en généralisant parfois ces résultats à N variables. La fonction f est donc une fonction réelle :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

qui prend la valeur $z = f(x, y)$ au point (x, y) .

Représentation :

Lorsqu'on représente une fonction $f(x)$ d'une seule variable, la valeur $f(x_0)$ au point x_0 correspond à la hauteur de la courbe $y = f(x)$ au dessus de l'axe (Ox). Si la fonction f est continue, alors le graphe de f est une ligne continue.

De la même manière, la valeur d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ au point (x_0, y_0) est donnée par la hauteur de la surface $z = f(x, y)$ au dessus du plan (xOy) . Si la fonction f est continue, le graphe de f est une surface continue. Si on fixe la valeur de $y = y_0$ et qu'on se déplace le long de l'axe (Ox), on ne fait alors varier qu'une seule variable et on suit la courbe à une dimension donnée par $z = f(x, y_0)$. De la même façon, si on fixe $x = x_0$ et qu'on laisse y varier, on obtient une courbe à une dimension $z = f(x_0, y)$.

Exercice :

Considérer la fonction $P(T, V)$ donnée par l'équation (1.2) dans le cas où $nR = 1$.

1. Dessiner le graphe de $P(T, 1)$ en fonction de T .
 2. Dessiner le graphe de $P(1, V)$ en fonction de V .
 3. Dessiner le graphe de $z(T, V) = P(T, V)$ en fonction de T et V .
 4. Indiquer sur cette surface les courbes $P(T, 1)$ et $P(1, V)$.
-

II.2 Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

Si on considère une fonction de deux variables $f(x, y)$, les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ définies par :

$$\begin{aligned} g &: x \rightarrow g(x) = f(x, y_0) \\ h &: y \rightarrow h(y) = f(x_0, y) \end{aligned}$$

où x_0 et y_0 sont fixés, sont des fonctions d'une seule variable réelle. Si g et h sont dérivables autour du point (x_0, y_0) , leurs dérivées sont appelées les *dérivées partielles* de f .

Définition :

La dérivée partielle d'une fonction $f(x, y)$ par rapport à x , au point (x_0, y_0) est définie par :

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= g'(x_0) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon, y_0) - f(x_0, y_0)}{\epsilon} \end{aligned}$$

La dérivée partielle est elle-même une fonction de deux variables, si on la calcule pour tous les points (x_0, y_0) . On la note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon, y) - f(x, y)}{\epsilon}$$

De la même façon, la dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à y , au point (x_0, y_0) est définie par :

$$\begin{aligned} f'_y(x_0, y_0) &= h'(y_0) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \epsilon) - f(x_0, y_0)}{\epsilon} \end{aligned}$$

et on la note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \epsilon) - f(x_0, y_0)}{\epsilon} \quad (1.3)$$

Cette définition est trivialement généralisable à N variables x_1, x_2, \dots, x_N .

Pour calculer une dérivée partielle par rapport à une variable, il suffit donc de calculer la dérivée usuelle par rapport à cette variable en considérant toutes les autres constantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left. \frac{df}{dx}(x, y) \right|_{\text{avec } y=\text{cste}}$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left. \frac{df}{dy}(x, y) \right|_{\text{avec } x=\text{cste}}$$

II.3 Propriétés des dérivées partielles

Comme les dérivées partielles sont des dérivées usuelles où toutes les variables sauf une sont considérées comme constantes, elles ont toutes les propriétés habituelles des dérivées usuelles : (les résultats sont donnés pour les dérivées partielles par rapport à x , mais sont valables pour les dérivées par rapport à y en remplaçant x par y)

1. **Somme :**

$$\frac{\partial}{\partial x}(f + g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

2. **Multiplication par une constante :**

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda f) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

3. **Produit :**

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \times g) = f \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} g$$

4. **Quotient :**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} f}{g^2}$$

5. **Composition : changement de variables**

Le calcul des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables composée intervient lorsqu'on effectue un changement de variables. Si les variables (x, y) de la fonction $f(x, y)$ sont elles-mêmes des fonctions des variables (r, s, t) , alors la fonction $f(x, y)$ est une fonction composée qui s'écrit $f(x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t))$. Elle devient une fonction de (r, s, t) : $F(r, s, t)$.

Les dérivées partielles de F s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

Plus généralement, si f dépend de N variables x_1, x_2, \dots, x_N , telles que $x_1 = h_1(r_1, r_2, \dots, r_p), \dots, x_N = h_N(r_1, r_2, \dots, r_p)$, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial r_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial r_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial r_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \frac{\partial x_N}{\partial r_k} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, p$$

Exemples :

Exemple 1. $f(x, y) = x^2 y$

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ on doit calculer $\frac{df}{dx}$ en considérant y comme constant, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

De la même manière :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

Exemple 2. $f(x, y) = \exp(yx^3)$

Ici :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y \exp(yx^3) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \exp(yx^3)$$

Exemple 3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exemple 4. $f(x, y) = \exp(ax) \cos(by)$ où a et b sont des constantes

Ici :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \exp(ax) \cos(by) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -b \exp(ax) \sin(by)$$

Exemple 5. $f(x, y) = \frac{x^m}{y^n}$ où m et n sont des constantes

Ici :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{mx^{m-1}}{y^n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-nx^m}{y^{n+1}}$$

Exemple 6. $f(x, y) = g(y)$, i.e la fonction f est indépendante de x , donc $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Exemple 7. $P = nRT/V$: loi des gaz parfaits

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$$

II.4 Dérivées partielles du second ordre

Les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y)$ sont également des fonctions de deux variables. On peut donc calculer les dérivées partielles des dérivées partielles. On note :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Théorème de Schwarz (théorème d'inversion) :

Si f vérifie les conditions de continuité et de dérivabilité nécessaires à l'existence de dérivées partielles d'ordre deux, alors les dérivées partielles croisées sont égales :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (1.4)$$

Le théorème de Schwarz permet de calculer la dérivée d'ordre 2 croisée sans se soucier de l'ordre dans lequel chaque dérivée partielle d'ordre 1 est calculée.

Exemple :

On considère la fonction :

$$\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Les dérivées partielles d'ordre 1 de ϕ sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

En considérant que la dérivée partielle $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ peut s'écrire comme le produit des deux fonctions f et g définies par $f(x) = 2x$ et $g(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$, on utilise la propriété (3) des dérivées partielles donnée au paragraphe (II.3) pour écrire les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et à y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} + 2x \times \left(-\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

La fonction ϕ est symétrique si on échange x et y , donc on peut écrire sans calcul supplémentaire :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 croisées vérifient le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) = 2x \times 2y \times \left(-\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \right) = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Enfin, on peut remarquer que :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{4}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 + 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4}{x^2 + y^2} - \frac{4}{x^2 + y^2} = 0$$

Cette particularité de la fonction ϕ en fait une solution de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

L'équation de Laplace intervient par exemple en électrostatique, et contraint le potentiel du champ électrostatique dans le cas où la distribution de charge est nulle.

III Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

III.1 Définition

On considère une fonction de deux variables $f(x, y)$. Les déplacements ϵ et η selon x et y respectivement vont induire une variation de f . Comme dans le cas des fonctions à une variable, cette variation s'exprime par :

$$\Delta f = f(x_0 + \epsilon, y_0 + \eta) - f(x_0, y_0) \quad (1.5)$$

et va pouvoir être estimée par la *différentielle* de f dans le cas où ϵ et η sont assez petits.

Si on suppose un déplacement selon x seulement : on se déplace de ϵ suivant (Ox) , et y reste constant. Dans ce cas $\eta = 0$, et on remarque que l'équation (1.5) devient :

$$\Delta f = f(x_0 + \epsilon, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Si $\epsilon \rightarrow 0$, on peut utiliser la définition de la dérivée partielle (définition 1.3) pour faire apparaître :

$$\Delta f \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\epsilon$$

De la même manière on peut exprimer la variation Δf à partir de la dérivée partielle d'ordre 1 selon y dans le cas où x est gardé constant. Pour des déplacements infinitésimaux suivant x et y , on trouve alors :

$$\begin{aligned} \Delta f &\simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\epsilon + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta \\ &\simeq d_{x_0, y_0}f(\epsilon, \eta) \end{aligned}$$

C'est l'expression de la différentielle.

Définition :

Si la fonction f vérifie les conditions de continuité et de dérivabilité nécessaires à l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y au point (x_0, y_0) , alors la fonction notée $d_{x_0, y_0}f$ définie par :

$$\begin{aligned} d_{x_0, y_0}f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\epsilon, \eta) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\epsilon + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta \end{aligned} \quad (1.6)$$

est la *différentielle* de f au point (x_0, y_0) . Comme dans le cas des fonctions à une variable réelle, c'est une application linéaire qui à tout couple (ϵ, η) associe une valeur réelle.

Comme dans le cas des fonctions à une variable réelle, on adopte en pratique une écriture condensée. En effet, en considérant la fonction $f(x, y) = x$ que l'on note x tout simplement, on se rend compte que $d_{x_0, y_0}f(\epsilon, \eta) = d_{x_0, y_0}x(\epsilon, \eta) = 1 \cdot \epsilon$. On constate donc que $d_{x_0, y_0}x$ est indépendant à la fois de x_0 et de y_0 mais est également de η , et est égal à ϵ . On le notera alors simplement $dx = \epsilon$. De la même manière, en considérant la fonction $g(x, y) = y$, on constate que $d_{x_0, y_0}g(\epsilon, \eta) = d_{x_0, y_0}y(\epsilon, \eta) = 1 \cdot \eta$. Pour une fonction quelconque $f(x, y)$, on réécrit donc la différentielle $d_{x_0, y_0}f(\epsilon, \eta)$ de la façon suivante :

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy} \quad (1.7)$$

en omettant le x_0, y_0 de $d_{x_0, y_0}f$ ainsi qu'en remplaçant ϵ et η par dx et dy respectivement.

Cette définition est généralisable à N variables x_1, x_2, \dots, x_N :

$$df = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \quad (1.8)$$

Exemple : utilisation du logarithme

La loi des gaz parfaits donnée par l'équation (1.2) est une fonction de deux variables réelles : la température T et le volume V . Dans ce cas, la fonction $f(x, y)$ correspond donc à $P(T, V)$. Il est possible de réécrire cette fonction sous la forme :

$$\ln(P) = \ln(nR) + \ln(T) - \ln(V)$$

en en prenant le logarithme. La différentielle de cette équation s'écrit :

$$d\ln(P) = \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$

Calculer cette différentielle directement à partir de l'équation (1.2) est plus compliqué. Ici, on trouve rapidement que :

$$dP = \frac{nRdT}{V} - \frac{nRT}{V^2}dV$$

Dans le cas d'une fonction f qui ne fait intervenir que des produits ou des quotients de variables, le calcul des différentielles logarithmiques est presque toujours plus simple que le calcul direct de la différentielle.

III.2 Changement de variables

Les différentielles de fonctions de plusieurs variables vérifient les mêmes propriétés que les différentielles de fonctions d'une variable, décrites dans le paragraphe II.3. La propriété de composition a pour principale application le calcul de la différentielle d'une fonction dont on a changé les variables. En effet, du fait des symétries d'un problème en physique, il est souvent utile de changer les variables dont dépendent une fonction : passage des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) par exemple.

Dans le cas général, on considère donc une fonction $f(x, y)$ dont les variables x et y sont elles-mêmes des fonctions des variables t et s par exemple. On note donc :

$$F(t, s) = f(x(t, s), y(t, s))$$

D'après la définition 1.7, la différentielle de la fonction de plusieurs variables F s'exprime alors comme :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} ds$$

La propriété de composition des dérivées partielles permet d'écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

On peut donc réécrire la différentielle dF :

$$dF = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

En regroupant les termes de la façon suivante :

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial s} ds \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial s} ds \right) \quad (1.9)$$

et sachant que :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial s} ds \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial s} ds \end{aligned}$$

on remarque finalement que l'équation (1.9) est équivalente à :

$$dF = df$$

La différentielle est donc indépendante du choix des coordonnées (ouf!).

Exemple : l'équation d'onde

Une onde est une perturbation d'un milieu continu qui se propage. Elle peut être mécanique, sonore, électromagnétique ... Si on suppose qu'il n'y a pas de phénomène d'absorption ni de dispersion dans le milieu, et que l'onde n'est pas stationnaire, l'onde se propage en conservant sa forme à une vitesse constante dans le milieu. Il y a donc une relation qui lie la position de la "forme" de l'onde et le temps. Cette relation est l'équation d'onde, et peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

pour une onde décrite par son amplitude $\phi(x, t)$, qui dépend de la position x et du temps t . Dans l'équation (1.10), l'onde se déplace à la vitesse c .

L'amplitude ϕ d'une onde quelconque présente une dépendance très particulière entre les variables x et t : l'amplitude à l'instant t , donnée par $\phi(x, t)$, doit être la même que celle à l'instant $t = 0$, alors que l'onde se trouvait à la position $x - ct$. Il est donc naturel d'introduire les variables :

$$\begin{aligned} p &= t - \frac{x}{c} \\ q &= t + \frac{x}{c} \end{aligned}$$

et d'exprimer l'équation d'onde en termes de ces nouvelles variables : $\phi(p, q)$. Les dérivées partielles dans l'équation d'onde (1.10) doivent donc être réexprimées par rapport aux nouvelles coordonnées p et q , pour obtenir la nouvelle équation d'onde. On considère donc la dérivée partielle par rapport à x dans un premier temps :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \times \left(-\frac{1}{c}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial q} \times \frac{1}{c} \quad (1.11)$$

En effet : $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c}$ et $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{c}$.

De la même façon, la dérivée partielle par rapport à t s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \times 1 + \frac{\partial \phi}{\partial q} \times 1.$$

car $\frac{\partial p}{\partial t} = 1$ et $\frac{\partial q}{\partial t} = 1$.

Pour calculer la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x qui apparaît dans l'équation d'onde (1.10) on effectue le même calcul que dans l'équation (1.11) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \times \left(-\frac{1}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \times \frac{1}{c}$$

On utilise le résultat du calcul (1.11) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) \times \left(-\frac{1}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) \times \frac{1}{c} \\ &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial p} \right] \end{aligned}$$

en vertu du théorème de Schwartz.

En effectuant le même calcul, on obtient $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) \\ &= \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} \right] \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant ces deux résultats dans l'équation d'onde (1.10), on obtient :

$$\frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial p} \right] = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial p} \right]$$

qui se simplifie pour donner :

$$\frac{4}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial p} = 0$$

Exprimée en fonction des variables p et q , l'équation d'onde est maintenant telle qu'il est évident que ses solutions doivent être de la forme :

$$\phi(p, q) = \psi_+(p) + \psi_-(q)$$

où les fonctions ψ_+ et ψ_- sont quelconques. Cette solution s'écrit sous la forme :

$$\phi(x, t) = \psi_+(t - \frac{x}{c}) + \psi_-(t + \frac{x}{c})t$$

en fonction des variables originelles x et t . Toute fonction ψ_{\pm} est donc une onde qui conserve sa forme et se propage à la vitesse $\pm c$.

III.3 Applications

III.3.a Estimer la variation d'une fonction

On considère une fonction $f(x, y)$. Une modification des variables (x, y) du point (x_0, y_0) au point $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ induit une variation de la fonction $f(x, y)$ telle que :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Si les variations Δx et Δy sont assez petites, on peut estimer Δf à partir de la différentielle de f , puisque df représente la variation infinitésimale de la fonction induite par des variations infinitésimales de ses paramètres. On écrit donc :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \quad (1.12)$$

III.3.b Calcul d'incertitudes

Notion d'incertitude

Si x est une grandeur physique mesurable (distance, température, différence de potentiel *etc...*), sa valeur mesurée x_0 est toujours une estimation de sa valeur réelle, plus ou moins proche selon la qualité de la mesure. Par exemple si on répète un grand nombre de fois la mesure de x , on trouvera rarement exactement la même valeur. Les différences peuvent être dues à un biais dans la méthode de mesure, ou introduit par l'appareil de mesure, à du bruit de fond qui s'ajoute à la grandeur physique mesurée x , ou autre.

La valeur réelle de x se trouve donc dans un intervalle autour de la valeur mesurée x_0 qui est associé à l'estimation de l'incertitude sur la mesure. On note cet intervalle $\pm \Delta x$ et on écrit :

$$x = x_0 \pm \Delta x$$

Propagation des incertitudes

On s'intéresse à une grandeur f qui est fonction de deux grandeurs physiques, x et y . La valeur de f est déterminée à partir des mesures de x et y , chacune associée à un intervalle d'incertitude $\pm \Delta x$ et $\pm \Delta y$ respectivement. Comment se propagent les incertitudes sur x et y à la grandeur f ?

Si les incertitudes sont des intervalles de variation assez petits autour de la valeur mesurée, la variation de f induite par les variations des grandeurs x et y peut être estimée à l'aide de la différentielle de f :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ \Delta f \simeq |df| &\simeq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y \end{aligned} \quad (1.13)$$

Les valeurs absolues déterminent le cas le plus défavorable : celui où les incertitudes sur x et y s'ajoutent. Elles permettent de déterminer l'incertitude la plus grande pour f .

Utilisation du logarithme

Si $f > 0$, on accède à l'incertitude relative en divisant l'équation (1.13) par f :

$$\frac{\Delta f}{f} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \frac{\Delta x}{f} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \frac{\Delta y}{f}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\Delta f}{f} = \left| \frac{\partial \ln(f)}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial \ln(f)}{\partial y} \right| \Delta y \quad (1.14)$$

Exemple

La période d'oscillation d'un pendule dépend de la longueur de ce dernier, et de la constante de gravitation g suivant l'équation :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

La mesure de l donne $l = (0.200 \pm 0.001)$ m et g vaut $g = (9.81 \pm 0.01)$ m/s². Pour calculer l'incertitude sur la période T on utilise la formule de propagation des erreurs (1.13) :

$$\Delta T = \left| \frac{\partial T}{\partial l} \right| \Delta l + \left| \frac{\partial T}{\partial g} \right| \Delta g$$

Les dérivées partielles sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial l} &= 2\pi \times \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{gl}} \\ \frac{\partial T}{\partial g} &= 2\pi \times \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{l}}{g^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\Delta T = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{gl}} \Delta l + \frac{\sqrt{l}}{g^{\frac{3}{2}}} \Delta g \right) \quad (1.15)$$

On sait que $l = 0.200$ m, que $\Delta l = 0.001$ m, que $g = 9.81$ m/s², et que $\Delta g = 0.01$ m/s². En remplaçant dans l'équation (1.15), on obtient $\Delta T = 0.003$ s pour $T = 0.897$ s. L'incertitude relative vaut $0.0027/0.897 \times 100 = 0.3\%$.

L'incertitude relative est obtenue plus directement à partir du logarithme de T :

$$\ln(T) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(l) - \frac{1}{2} \ln(g)$$

à partir duquel on calcule :

$$\frac{\partial \ln T}{\partial l} = \frac{1}{2l} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \ln T}{\partial g} = -\frac{1}{2g}$$

En utilisant l'équation (1.14) on a finalement :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta l}{2l} + \frac{\Delta g}{2g}$$

ce qui donne directement $\frac{\Delta T}{T} = 0.003 = 0.3\%$.

IV Fonctions vectorielles

De nombreuses grandeurs physiques sont modélisées par des vecteurs¹, dont les composantes ne sont pas constantes mais dépendent d'une ou de plusieurs variables. C'est le cas de la position, ou de la vitesse par exemple. Une *fonction vectorielle* est un vecteur dont les coordonnées varient.

Jusqu'ici, la notion de différentielle a été développée pour des fonctions d'une et de plusieurs variables. Chaque composante d'une fonction vectorielle est une fonction d'une ou de plusieurs variables. On peut donc définir la différentielle d'une fonction vectorielle :

1. Un rappel des outils de calcul vectoriel (bases, composantes, norme, produits scalaire, vectoriel, mixte etc...) est proposé en annexe A.

Différentielle d'une fonction vectorielle de deux variables :

Si $\vec{f}(u, v)$ est une fonction vectorielle de deux variables u et v :

$$\vec{f}(u, v) = f_x(u, v)\vec{e}_x + f_y(u, v)\vec{e}_y + f_z(u, v)\vec{e}_z$$

la différentielle de \vec{f} est donnée par :

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= \vec{f}(u + du, v + dv) - \vec{f}(u, v) \\ &= \begin{pmatrix} f_x(u + du, v + dv) \\ f_y(u + du, v + dv) \\ f_z(u + du, v + dv) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x(u, v) \\ f_y(u, v) \\ f_z(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_x(u + du, v + dv) - f_x(u, v) \\ f_y(u + du, v + dv) - f_y(u, v) \\ f_z(u + du, v + dv) - f_z(u, v) \end{pmatrix} \\ &= df_x(u, v)\vec{e}_x + df_y(u, v)\vec{e}_y + df_z(u, v)\vec{e}_z \end{aligned} \quad (1.16)$$

N.B. : Pour des raisons de cohérence de notations entre ce paragraphe et les chapitres suivants qui y feront référence, la base du repère cartésien est notée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ici, au lieu de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les égalités $\vec{e}_x = \vec{i}$, $\vec{e}_y = \vec{j}$ et $\vec{e}_z = \vec{k}$ seront démontrées au prochain chapitre.

Chaque coordonnée de $d\vec{f}$ est une différentielle d'une fonction de plusieurs variables qui s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} df_x(u, v) &= \frac{\partial f_x}{\partial u} du + \frac{\partial f_x}{\partial v} dv \\ df_y(u, v) &= \frac{\partial f_y}{\partial u} du + \frac{\partial f_y}{\partial v} dv \\ df_z(u, v) &= \frac{\partial f_z}{\partial u} du + \frac{\partial f_z}{\partial v} dv \end{aligned} \quad (1.17)$$

d'après le paragraphe III du chapitre 1. En introduisant les équations (1.17) dans la définition (1.16) de la différentielle on peut réécrire $d\vec{f}$ sous la forme :

$$d\vec{f} = \left(\frac{\partial f_x}{\partial u} du + \frac{\partial f_x}{\partial v} dv \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f_y}{\partial u} du + \frac{\partial f_y}{\partial v} dv \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f_z}{\partial u} du + \frac{\partial f_z}{\partial v} dv \right) \vec{e}_z$$

En rassemblant les termes on obtient l'expression :

$$\boxed{d\vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{f}}{\partial v} dv} \quad (1.18)$$

L'expression de la différentielle d'une fonction vectorielle sous cette forme interviendra dans les chapitres 2, 3 et 4. Notons que si seule la variable u varie, en laissant v constant, alors la différentielle $d\vec{f}$ se réduit à :

$$d\vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u} du$$

qui est un vecteur parallèle à $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}$.

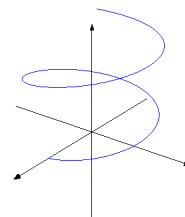
Exemple

La position d'un point en fonction du temps est une fonction vectorielle bien connue. Si on repère un point M dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par le vecteur \overrightarrow{OM} , souvent noté \vec{r} , et que le point M se déplace, alors les trois coordonnées de \vec{r} varient en fonction d'une variable : le temps. On note habituellement :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Par exemple, considérons une particule suivant une trajectoire hélicoïdale. Dans le plan (x, y) , la particule décrit un cercle. Les coordonnées suivant x et y de \vec{r} sont des fonctions du temps qui décrivent une courbe circulaire, avec une vitesse angulaire ω . La coordonnée de \vec{r} suivant z augmente linéairement en fonction du temps : la particule "monte" avec une vitesse v constante. La position de la particule est modélisée par le vecteur :

$$\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y + vt\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ vt \end{pmatrix}$$



La vitesse de la particule est également une fonction vectorielle, égale à la dérivée par rapport au temps de $\vec{r}(t)$:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{e}_z = -\omega \sin(\omega t)\vec{e}_x + \omega \cos(\omega t)\vec{e}_y + v\vec{e}_z$$

FIGURE 1.2 – Exemple de trajectoire hélicoïdale selon l'axe z

De la même façon, on peut exprimer l'accélération de la particule :

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cos(\omega t)\vec{e}_x - \omega^2 \sin(\omega t)\vec{e}_y$$

V Formes différentielles

Les formes différentielles sont des objets mathématiques dont les différentielles définies au paragraphe III, ou par l'équation (1.8), sont un cas particulier. Elles jouent un rôle incontournable en physique, qui ne sera qu'en partie mesuré dans ce cours. Elles interviennent par exemple dans le calcul des intégrales curvilignes, abordé au chapitre 3, ou de la circulation de champs vectoriels, abordé dans le chapitre 4.

V.1 Définition

Définition :

On appelle *forme différentielle* une application linéaire ω qui agit sur un vecteur de \mathbb{R}^n et produit un nombre. L'écriture générale d'une forme différentielle est la suivante :

$$\omega = \sum_{i=1}^N A_i(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_i$$

où les A_i sont appelés des *coefficients*, qui dépendent des N variables x_1, x_2, \dots, x_N .

Dans le cas particulier de deux variables réelles x et y , on a $N = 2$ et on écrit ω de la façon suivante :

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy \tag{1.19}$$

La différentielle que nous avons déjà rencontré est un bon exemple de forme différentielle :

$$df = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

où les coefficients A_i sont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

V.2 Formes différentielles exactes et fermées

Une forme différentielle ressemble à s'y méprendre à une différentielle, c'est à dire à la variation d'une fonction induite par la variation infinitésimale de ses variables. Pour qu'une forme différentielle ω soit une différentielle, il faut qu'il existe une fonction $f(x, y)$ telle que :

$$\omega = df$$

Définition :

Une forme ω est dite *exacte* s'il existe une fonction f telle que $\omega = df$. La fonction f est une primitive de la forme ω .

Toutes les différentielles sont donc des formes différentielles, mais seules les formes différentielles exactes, sont des différentielles.

Pour qu'une forme différentielle ω , définie par l'équation (1.19), soit une différentielle exacte, il faut que :

$$A(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad (1.20)$$

$$B(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad (1.21)$$

d'après la définition de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables (1.7). Si on s'intéresse maintenant à la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y de l'équation (1.20), on peut écrire :

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

De même, la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x de l'équation (1.21) donne :

$$\frac{\partial B(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

En appliquant le théorème de Schwarz (équation (1.4)), on voit finalement que la forme différentielle $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ est exacte si et seulement si :

$$\boxed{\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x}}$$

Plus généralement, ce résultat reste valable en dimension N . Les formes différentielles $\omega = \sum_i A_i dx_i$ telles que :

$$\forall (i, j) : \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

sont dites *fermées*. Le caractère fermé d'une forme différentielle assure presque toujours qu'elle soit exacte. Les cas où cette condition n'est pas nécessaire et suffisante concerne des cas pathologiques de topologie des espaces vectoriels.

Exemple : Travail d'une force

Le travail d'une force est une forme différentielle bien connue. En effet, si on considère une force \vec{F} ayant deux coordonnées $F_x(x, y)$ et $F_y(x, y)$ dans le repère cartésien, et un déplacement infinitésimal dx suivant (Ox) et dy suivant (Oy) permettant de passer de la position (x, y) à $(x + dx, y + dy)$, alors le travail de \vec{F} le long du déplacement est donné par :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy$$

Le travail d'une force est donc une quantité qui peut s'écrire sous la forme mathématique décrite dans la définition (1.19).

La force \vec{F} est dite conservative si elle dérive d'un potentiel $V(x, y)$ et qu'on peut écrire :

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Dans ce cas, le travail effectué lors d'un déplacement infinitésimal du point (x, y) au point $(x + dx, y + dy)$ s'écrit :

$$\delta W = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy = -dV$$

Le travail est alors une forme différentielle exacte.

Exemples divers :

Exemple 1. $\omega = 3x^2ydx + x^3dy$

Ici on peut identifier :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) = 3x^2 \\ \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2\end{aligned}$$

La forme ω est donc exacte, *i.e.* il existe une fonction f telle que la forme différentielle ω peut s'écrire :

$$\omega = df = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy$$

On détermine la fonction f à partir de :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2y$$

En intégrant cette équation selon x (en considérant y comme constant) on obtient :

$$f(x, y) = \int (3x^2y)dx = x^3y + a(y) \quad (1.22)$$

où le terme $a(y)$ est constant vis à vis de x : il est indépendant de x de sorte que la dérivée partielle $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$. Mais il peut dépendre de y . Pour déterminer $a(y)$, on dérive $f(x, y)$ obtenu dans l'équation (1.22) par rapport à y , en considérant x comme constant :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^3 + \frac{da(y)}{dy}$$

On identifie ce résultat avec la forme différentielle ω :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^3$$

La dérivée de $a(y)$ est donc nulle, il faut donc nécessairement que $a(y)$ soit une constante : $a(y) = C$ avec $C \in \mathbb{R}$. La fonction f telle que $df = \omega$ est donc :

$$f(x, y) = x^3y + C$$

Exemple 2. $\omega = (-y^2 \sin(x) + 4x^3)dx + (2y \cos(x) + 1)dy$

On identifie :

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = -2y \sin(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} = -2y \sin(x)$$

On vérifie donc que la forme différentielle ω est une forme différentielle exacte. On détermine la fonction f dont ω est la différentielle à l'aide des équations :

$$f(x, y) = \int (-y^2 \sin(x) + 4x^3)dx = y^2 \cos(x) + x^4 + a(y) \quad (1.23)$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 2y \cos(x) + \frac{da(y)}{dy} \quad \text{d'après} \quad (1.23) \\ &= 2y \cos(x) + 1\end{aligned}$$

Ces deux expressions doivent être égales, ce qui implique que :

$$a'(y) = 1 \Rightarrow a(y) = y + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Finalement :

$$f(x, y) = y^2 \cos(x) + x^4 + y + C$$

Exemple 3. $\omega = \frac{y}{x}dx + \frac{x}{y}dy$

Ici :

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{y}$$

donc ω n'est pas exacte.

Exemple 4. On considère un soleil de masse M , autour duquel gravite une planète de masse m . On suppose que l'orbite de la planète est dans le plan (x, y) et que le soleil est à l'origine $(0, 0)$. Le travail fourni par la planète pour se déplacer du point (x, y) au point $(x + dx, y + dy)$ est donné par la forme différentielle :

$$\delta W = -\mathcal{G}Mm \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

où \mathcal{G} est la constante universelle de gravitation. Est-ce que δW est une différentielle exacte ?

Ici :

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = -\mathcal{G}Mm \left[x \times \left(-\frac{3}{2} \right) \times \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \right] = \frac{3\mathcal{G}Mmxy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

On peut constater que ce résultat est symétrique si on échange x et y . On a donc clairement :

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x}$$

et δW est une différentielle exacte. Il existe donc une fonction $f(x, y)$ telle que $\delta W = df$. La fonction f doit vérifier :

$$f(x, y) = \int -\frac{\mathcal{G}Mmx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (1.24)$$

On sait par ailleurs que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = -\frac{1}{2} \times \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

L'intégrale de l'équation (1.24) est donc égale à :

$$f(x, y) = \frac{\mathcal{G}Mm}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + a(y)$$

où $a(y)$ est une fonction de y seulement, dont la dérivée par rapport à x est donc nulle. En dérivant ce résultat par rapport à y , à x constant, et en identifiant à δW on obtient :

$$a'(y) = 0$$

En conséquence, on a :

$$f(x, y) = \frac{\mathcal{G}Mm}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

où C est une constante réelle. En écrivant $f(x, y) = -V(x, y)$, on a l'expression du potentiel de gravitation V :

$$V(x, y) = -\frac{\mathcal{G}Mm}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} - C$$

En pratique, on suppose que le potentiel d'interaction est nul pour des corps infiniment loins, c'est à dire que $V = 0$ pour $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$. Dans cette convention, la constante C doit être nulle. On montre donc par ce calcul que la force de gravitation est conservative.

Chapitre 2

Systemes de coordonnees

Dans la plupart des problemes de physique, on souhaite comprendre et decrir l'evolution d'un objet dans l'espace, lorsqu'il est soumis a des actions exterieures. Cette etude requiert des outils de reperege de l'objet, qui permettront d'exprimer son evolution. Ce sont les systemes de coordonnees.

Il existe une infinite de choix de systemes de coordonnees possibles. Un resultat physique doit etre independant de ce choix. Cependant, l'analyse mathematique du probleme de physique aboutissant au resultat observe peut etre considerablement simplifiee par un choix judicieux. Dans ce chapitre, nous allons detailler les systemes de coordonnees les plus usuels, utilises pour exprimer les points et les vecteurs¹ dans les espaces de dimension deux (le plan) et trois : les coordonnees cartesiennes, polaires, cylindriques et spheriques.

I Principe general du reperege d'un point

I.1 Coordonnees

La position dans l'espace d'un point M quelconque est reperee par rapport a des elements de reference a l'aide de trois nombres (deux dans le cas de l'espace plan), appeles les *coordonnees*. Ces trois coordonnees, notees de facon generale u , v et w , peuvent représenter des longueurs, absolues ou algebriques, des angles ou autres. . .

Lorsque les trois coordonnees u , v et w sont laissees libres de varier dans l'ensemble de leurs valeurs possibles respectives, le point M decrit tout l'espace. Lorsqu'une des coordonnees est fixee, u par exemple, et que les deux autres parcourent leurs domaines de valeurs, le point M est contraint de se deplacer sur une surface appelee *surface coordonnee-vw*. Lorsque deux des coordonnees sont fixees, et qu'une seule est laissee libre de parcourir son domaine de valeurs, le point M se deplace sur une ligne, appelee *ligne coordonnee-u* si v et w sont fixes par exemple.

I.2 Repere local

La notion de vecteur est indispensable pour decrir de nombreuses grandeurs physiques, comme la position, la vitesse, les forces, les moments *etc.* . . . Dans un espace a n dimensions, il est possible de definir n vecteurs particuliers, lineairement independants, pour former une base. Tout vecteur de l'espace s'exprime alors comme une combinaison lineaire de ces vecteurs de base¹.

Supposons que le point M soit repere par trois coordonnees (u, v, w) , dans un espace a trois dimensions ou on a choisi un point de reference fixe O . Le *repere local* associe au point mobile M une base constituee de trois vecteurs unitaires. Ces trois vecteurs indiquent chacun dans quelle direction et quel sens le point M se deplace lorsqu'une des trois coordonnees varie infinimentesimement. Ces trois vecteurs unitaires se construisent a partir du vecteur \overrightarrow{OM} . En effet, le vecteur \overrightarrow{OM} est une fonction vectorielle qui depend des trois coordonnees (u, v, w) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(u, v, w)$$

1. Un rappel des outils de calcul vectoriel (bases, composantes, norme, produits scalaire, vectoriel, mixte *etc.* . . .) est propose en annexe A.

Lorsque deux coordonnées sont fixées, v et w par exemple, et que la troisième parcourt l'ensemble de son domaine de valeurs, le point M décrit la *ligne coordonnée- u* . Le vecteur :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}(u, v, w)}{\partial u}$$

est tangent à cette ligne (c.f. chapitre 1). En divisant ce vecteur par sa norme, on obtient le premier des trois vecteurs unitaires de la base du repère local. En procédant de la même façon pour v et w , on obtient les trois vecteurs unitaires du repère local :

$$\vec{e}_u = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \right|} \quad \vec{e}_v = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} \right|} \quad \vec{e}_w = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w} \right|}$$

Définition :

Les trois vecteurs unitaires :

$$\vec{e}_u = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \right|} \quad \vec{e}_v = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} \right|} \quad \vec{e}_w = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w} \right|}$$

associés au point M forment le repère local centré sur le point M : $(M, \vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$.

La définition ci-dessus des vecteurs de base du repère mobile est appliquée dans les paragraphes II et III qui suivent, où les éléments de référence, les coordonnées (u, v, w) ainsi que le repère local de chaque système de coordonnées usuel du plan et de l'espace de dimension trois sont détaillés.

II Systèmes de coordonnées en dimension deux

II.1 Coordonnées cartésiennes

Les éléments de référence et les coordonnées du système cartésien sont illustrés sur la figure (2.1). Les vecteurs \vec{i} et \vec{j} du repère cartésien global (O, \vec{i}, \vec{j}) sont également représentés.

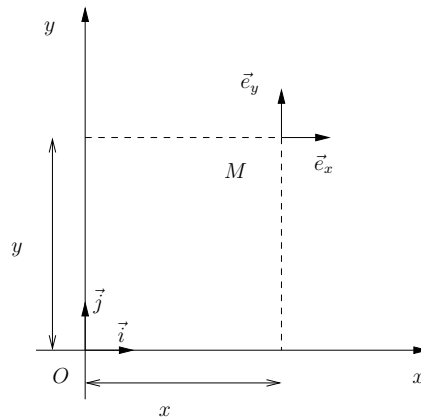


FIGURE 2.1 – Éléments de référence du système de coordonnées cartésiennes dans le plan

Éléments de référence

Les éléments de référence par rapport auxquels sont définies les coordonnées cartésiennes sont :

- un point origine O
- deux droites orientées orthogonales se coupant en O .

Coordonnées

On note $M(x, y)$ avec :

- x : l'*abscisse*, qui est la distance algébrique entre le point O et le projeté de M sur l'axe (Ox)
- y : l'*ordonnée*, qui est la distance algébrique entre le point O et le projeté de M sur l'axe (Oy)

Repère local cartésien

Lorsque la coordonnée y est fixée, et que la coordonnée x peut varier, le point M décrit une ligne coordonnée- x parallèle à (Ox) . Le vecteur

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}(x, y)}{\partial x}$$

qui est tangent à la ligne coordonnée, est donc égal au vecteur directeur de la droite (Ox) : \vec{i} . De la même manière, le vecteur

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}(x, y)}{\partial y}$$

est donc égal au vecteur directeur de (Oy) : \vec{j} . Comme \vec{i} et \vec{j} sont normés, le repère local cartésien est donc directement donné par :

$$\vec{e}_x = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} \right|} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{e}_y = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} \right|} = \vec{j}$$

Dans le cas du repère cartésien, les vecteurs de base du repère local sont donc identiques aux vecteurs de base du repère cartésien global (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Vecteur position

Le vecteur position \overrightarrow{OM} s'exprime alors de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \tag{2.1}$$

II.2 Coordonnées polaires

Un autre façon de repérer un point M dans un plan est d'avoir recours à la distance à laquelle il se trouve d'un point de référence et de considérer ensuite l'angle entre la direction donnée par la droite (OM) et une direction de référence. Ce sont les coordonnées polaires. Les éléments de référence et les coordonnées du système polaire sont illustrés sur la figure (2.2).

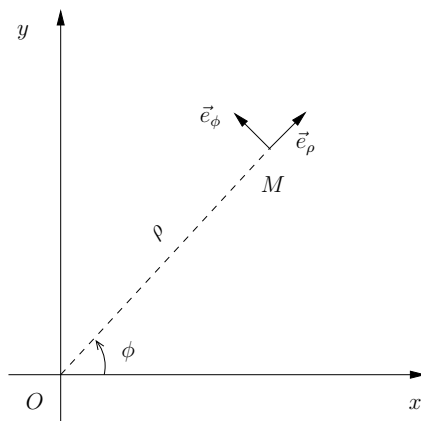


FIGURE 2.2 – Système de coordonnées polaires

Éléments de référence

Les éléments de référence par rapport auxquels sont définies les coordonnées polaires sont :

- un point origine O
- une demi-droite orientée (Ox) .

Coordonnées

On note $M(\rho, \phi)$ avec :

ρ : la longueur du rayon vecteur de O à M . La distance ρ est toujours positive : $\rho \in [0, +\infty[$.

ϕ : l'angle polaire, qui est l'angle entre les droites (Ox) et (OM) . Exprimé en radians, il est compris entre zéro et 2π : $\phi \in [0, 2\pi[$.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, et *vice versa*, s'effectue à l'aide des relations géométriques :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \phi = y/x \end{cases} \quad (2.2)$$

Notons que le rapport y/x ne définit pas complètement l'angle ϕ puisque $\tan \phi = \tan(\phi + \pi)$. En toute rigueur, l'angle ϕ est défini par les deux relations :

$$\begin{cases} \cos \phi = x/\sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \phi = y/\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Repère local polaire

On cherche à déterminer les deux vecteurs unitaires du repère local polaire, définis à partir de la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(\rho, \phi)$ comme défini dans le paragraphe I.2 :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} \right|} \quad \text{et} \quad \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} \right|}$$

L'expression de la fonction vectorielle \overrightarrow{OM} dans le repère cartésien est connue, et est donnée par l'équation (2.1) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

Par ailleurs, les équations (2.2) montrent que x et y sont des fonctions de deux variables : ρ et ϕ . La fonction vectorielle \overrightarrow{OM} peut donc s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(\rho, \phi) &= x(\rho, \phi) \vec{e}_x + y(\rho, \phi) \vec{e}_y \\ &= \rho \cos \phi \vec{e}_x + \rho \sin \phi \vec{e}_y \end{aligned}$$

La dérivée partielle de \overrightarrow{OM} par rapport à ρ peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cos \phi \vec{e}_x) + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sin \phi \vec{e}_y)$$

L'angle polaire est considéré comme constant dans la dérivée partielle par rapport à ρ , et les vecteurs de la base locale cartésienne \vec{e}_x et \vec{e}_y sont égaux aux vecteurs de la base cartésienne globale \vec{i} et \vec{j} respectivement. Ils restent inchangés lors de la variation de ρ . On peut donc réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} &= \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \cos \phi \vec{e}_x + \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \sin \phi \vec{e}_y \\ &= \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} \right| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1$$

Et finalement on obtient :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y}$$

On procède de la même façon pour déterminer le vecteur \vec{e}_ϕ . On calcule la dérivée partielle de \overrightarrow{OM} par rapport à ϕ :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \cos \phi \vec{e}_x) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \sin \phi \vec{e}_y)$$

La distance ρ est considérée comme constante, et les vecteurs de la base locale cartésienne restent invariant par rapport à ϕ . La dérivée partielle de \overrightarrow{OM} par rapport à ϕ se réduit donc à :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} &= \frac{\partial \cos \phi}{\partial \phi} \rho \vec{e}_x + \frac{\partial \sin \phi}{\partial \phi} \rho \vec{e}_y \\ &= -\rho \sin \phi \vec{e}_x + \rho \cos \phi \vec{e}_y\end{aligned}$$

et

$$\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} \right| = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi} = \rho \quad \text{car} \quad \rho > 0$$

Finalement, en divisant la dérivée partielle de \overrightarrow{OM} par rapport à ϕ par sa norme, on obtient :

$$\boxed{\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y}$$

On peut vérifier que les vecteurs de base du repère local sont construits de telle sorte qu'ils soient orthonormaux. Leur normalité est vérifiée par construction, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\phi = (\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y) \cdot (-\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y) = 0$$

ce qui confirme leur orthogonalité.

Vecteur position

Le vecteur position \overrightarrow{OM} s'exprime dans la base locale polaire de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho \tag{2.3}$$

III Systèmes de coordonnées en dimension trois

III.1 Coordonnées cartésiennes

Les éléments de référence et les coordonnées du système cartésien sont illustrés sur la figure (2.3).

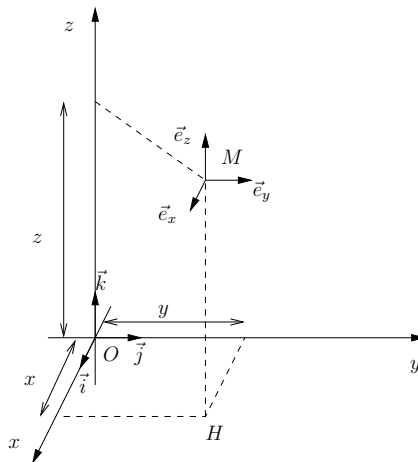


FIGURE 2.3 – Éléments de référence du système de coordonnées cartésiennes dans l'espace à trois dimensions

Éléments de référence

Les éléments de référence par rapport auxquels sont définies les coordonnées cartésiennes sont :

- un point origine O
- trois droites orientées orthogonales se coupant en O .

Coordonnées

On note $M(x, y, z)$ avec :

- x : l'abscisse, qui est la distance algébrique entre le point O et le projeté de H sur l'axe (Ox) . Le point H est lui-même le projeté de M dans le plan (xOy) .
- y : l'ordonnée, qui est la distance algébrique entre le point O et le projeté de H sur l'axe (Oy) .
- z : la cote, qui est la distance algébrique entre le point O et le projeté de M sur l'axe (Oz) .

Repère local cartésien

En suivant le même raisonnement que pour les coordonnées cartésiennes dans le plan, on identifie les vecteurs de la base locale aux vecteurs de la base cartésienne globale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{e}_x = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial x}}{\left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} \right|} = \vec{i} \quad \vec{e}_y = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial y}}{\left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} \right|} = \vec{j} \quad \vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial z}}{\left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} \right|} = \vec{k}$$

Vecteur position

Le vecteur position \vec{OM} s'écrit de la façon suivante :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (2.4)$$

III.2 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques repèrent un point M dans l'espace à trois dimensions en utilisant les coordonnées polaires dans le plan (xOy) , et la cote z comme troisième coordonnée. Les éléments de référence et les coordonnées du système cylindrique sont illustrés sur la figure (2.4).

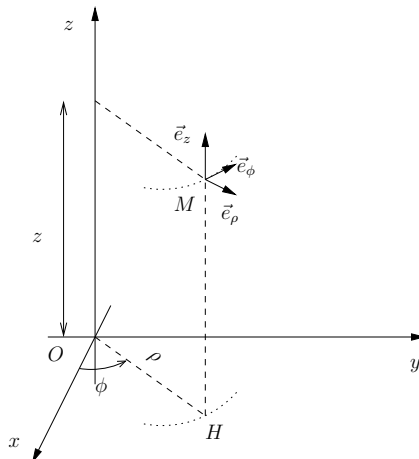


FIGURE 2.4 – Système de coordonnées cylindriques

Éléments de référence

Les éléments de référence par rapport auxquels vont être définies les coordonnées cylindriques sont :

- un point origine O ,
- une demi-droite orientée (Ox) , identique à celle utilisée pour les coordonnées polaires,
- un axe (Oz) perpendiculaire au plan (xOy) .

Coordonnées

On note $M(\rho, \phi, z)$ avec :

- ρ : la longueur du rayon vecteur de O à H , où H est le projeté de M sur le plan (xOy) . C'est donc la distance de M à l'axe (Oz) , et non plus au point O . Elle est toujours positive : $\rho \in [0, +\infty[$
- ϕ : l'angle azimutal, qui est l'angle entre les droites (Ox) et (OH) . Exprimé en radians, il est compris entre zéro et 2π : $\phi \in [0, 2\pi[$
- z : la cote, qui est la distance algébrique entre le point O et le projeté de M sur l'axe (Oz) .

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques, et *vice versa*, s'effectue à l'aide

des relations géométriques :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \phi = y/x \\ z = z \end{cases} \quad (2.5)$$

La même remarque qu'au paragraphe II.2 peut être faite à propos de la définition de ϕ .

Repère local cylindrique

Le repère local cylindrique $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ est déjà connu. Il est constitué des trois vecteurs de base :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right|} \quad \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \phi} \right|} \quad \vec{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial z}}{\left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} \right|}$$

Les vecteurs \vec{e}_ρ et \vec{e}_ϕ sont définis par la direction et le sens de déplacement du point M lorsqu'on fait varier ρ et ϕ . Ils sont identiques pour les coordonnées cylindriques et polaires. Par ailleurs, \vec{e}_z est le même vecteur que celui défini pour les coordonnées cartésiennes. Donc :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{k} \end{cases}$$

On vérifie que la base construite par cette méthode est orthonormale :

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\phi = 0 \quad \text{et} \quad \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = 0 \quad \text{et} \quad \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_z = 0$$

Vecteur position

Dans le repère local, le vecteur position \vec{OM} s'exprime simplement :

$$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \quad (2.6)$$

Surface coordonnée

Lorsqu'une des trois coordonnées cylindriques est fixée le point M décrit les surfaces coordonnées :

- $\rho = \text{constante}$: M décrit un cylindre infini d'axe (Oz) ,
- $\phi = \text{constante}$: M décrit un demi-plan limité par l'axe (Oz) ,
- $z = \text{constante}$: M décrit un plan parallèle à (xOy) .

III.3 Coordonnées sphériques

Le repérage d'un point en coordonnées sphériques s'effectue à l'aide d'une distance et de deux angles, comme illustré sur la figure (2.5), où sont représentés les éléments de référence et les coordonnées du système sphérique.

Éléments de référence

Les éléments de référence par rapport auxquels sont définies les coordonnées sphériques sont :

- un point origine O
- deux demi-droites orientées (Ox) et (Oz) .

Coordonnées

On note $M(r, \theta, \phi)$ avec :

- r : la longueur du rayon vecteur de O à M . Elle est toujours positive : $r \in [0, +\infty[$
- θ : l'angle polaire, ou *colatitude*, qui est l'angle entre les droites (Oz) et (OM) . Exprimé en radians, il est compris entre zéro et π : $\theta \in [0, \pi]$
- ϕ : l'angle azimutal, ou *longitude*, qui est l'angle entre les droites (Ox) et (OH) , où H est le projeté de M sur le plan (xOy) . Exprimé en radians, il est compris entre zéro et 2π : $\phi \in [0, 2\pi[$

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques, et *vice versa*, s'effectue à l'aide des

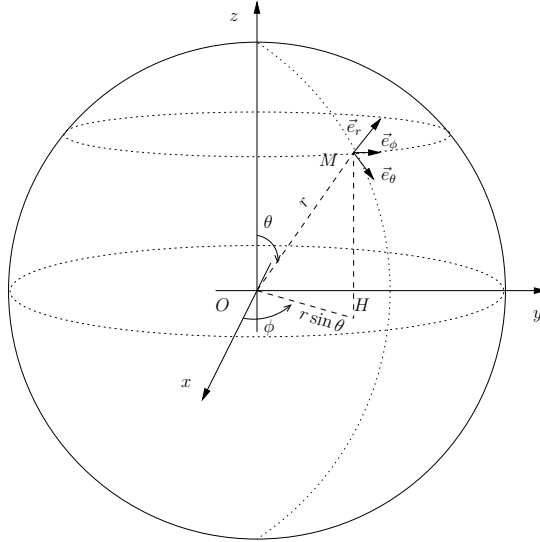


FIGURE 2.5 – Système de coordonnées sphériques

relations géométriques :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (2.7)$$

La même remarque qu'au paragraphe II.2 peut être faite à propos de la définition de ϕ .

Repère local sphérique

Les trois vecteurs de base du repère local sphérique sont déterminés à partir de la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(r, \theta, \phi)$ par les définitions :

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \right|} \quad \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right|} \quad \text{et} \quad \vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} \right|}$$

L'expression de la fonction vectorielle \overrightarrow{OM} dans le repère cartésien dans l'espace à trois dimensions est donnée par l'équation (2.4) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Les équations (2.7) traduisent le fait que x , y et z sont des fonctions des trois variables : r , θ et ϕ , et permettent de réécrire la fonction vectorielle \overrightarrow{OM} comme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(r, \theta, \phi) &= x(r, \theta, \phi) \vec{e}_x + y(r, \theta, \phi) \vec{e}_y + z(r, \theta, \phi) \vec{e}_z \\ &= r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

La dérivée partielle de \overrightarrow{OM} par rapport à r s'écrit alors :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x) + \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y) + \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \theta \vec{e}_z)$$

Dans la dérivée partielle par rapport à r , toutes les variables sont considérées comme constante sauf r , et les vecteurs de la base locale cartésienne \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z ne dépendent pas de r . On peut donc réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} &= \frac{\partial(r)}{\partial r} \cdot (\sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z) \\ &= \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \right| = \left(\sin^2 \theta \underbrace{(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}_1 + \cos^2 \theta \right)^{1/2} = 1$$

Et finalement on obtient :

$$\boxed{\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z}$$

On procède de la même façon pour déterminer les vecteurs \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ . On calcule la dérivée partielle de \overrightarrow{OM} par rapport à θ et ϕ respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta \vec{e}_z) \\ \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} (r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r \cos \theta \vec{e}_z) \end{aligned}$$

La distance r est considérée comme constante, et les vecteurs de la base locale cartésienne sont invariants par rapport à θ et ϕ . Les dérivées partielles de \overrightarrow{OM} par rapport à θ et ϕ se réduisent donc à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} &= \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \cdot (r \cos \phi \vec{e}_x + r \sin \phi \vec{e}_y) + \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \cdot (r \vec{e}_z) = r \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + r \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - r \sin \theta \vec{e}_z \\ \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} &= \frac{\partial \cos \phi}{\partial \phi} \cdot (r \sin \theta \vec{e}_x) + \frac{\partial \sin \phi}{\partial \phi} \cdot (r \sin \theta \vec{e}_y) = -r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_x + r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_y \end{aligned}$$

dont les normes valent :

$$\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right| = \left(r^2 \cos^2 \theta \underbrace{(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}_1 + r^2 \sin^2 \theta \right)^{1/2} = r \quad \text{car} \quad r > 0$$

et :

$$\left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} \right| = \left(r^2 \sin^2 \theta \underbrace{(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}_1 \right)^{1/2} = r \sin \theta \quad \text{car} \quad r > 0 \text{ et } \theta \in [0, \pi]$$

Finalement, en divisant les dérivées partielles par leurs normes respectives, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{aligned}}$$

On peut vérifier que les vecteurs de base du repère local sont orthonormaux. Leur normalité est assurée par construction, et leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta &= (\sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z) \cdot (\cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z) \\ &= \sin \theta \cos \theta \underbrace{(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}_1 - \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\phi &= (\cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z) \cdot (-\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y) = 0 \\ &= -\cos \theta \cos \phi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \phi = 0 \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi &= (\sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z) \cdot (-\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y) = 0 \\ &= -\sin \theta \cos \phi \sin \phi + \sin \theta \cos \phi \sin \phi = 0 \end{aligned}$$

ce qui confirme leur orthogonalité.

Vecteur position

Le vecteur position \overrightarrow{OM} s'exprime dans la base locale sphérique tout simplement comme :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \tag{2.8}$$

Surface coordonnée

Lorsqu'une des trois coordonnées sphériques est fixée le point M décrit les surfaces coordonnées :

- $r = \text{constante}$: M décrit une sphère de centre O , d'où le nom des coordonnées,
- $\theta = \text{constante}$: M décrit un cône d'axe (Oz) ,
- $\phi = \text{constante}$: M décrit un demi-plan limité par l'axe (Oz) .

IV Dérivées des vecteurs de base locaux

La direction et le sens des vecteurs de base des repères locaux en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques, dépendent de la position du point M . En d'autres termes, si le point M se déplace, les vecteurs de base locaux changent de sens et de direction. En conséquence, si une grandeur physique est exprimée en fonction des vecteurs de base locaux, comme la position ou la vitesse par exemple, les dérivées de cette grandeur vont faire appel aux dérivées des vecteurs de base locaux.

Les vecteurs de base \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z sont constants. Pour calculer les dérivées partielles des vecteurs de base locaux, il suffit donc d'exprimer ces derniers sous la forme de combinaison linéaire des vecteurs de base cartésiens.

IV.1 Coordonnées polaires

Dans la base de coordonnées polaires, le point M est associé au repère local $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi)$, avec :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho &= \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{cases}$$

Les dérivées partielles des vecteurs de la base locale sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi} &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y = \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \rho} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} &= -\cos \phi \vec{e}_x - \sin \phi \vec{e}_y = -\vec{e}_\rho \end{aligned}$$

IV.2 Coordonnées cylindriques

Dans la base de coordonnées cylindriques, le point M est associé au repère local $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, où on rappelle que :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho &= \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{cases}$$

D'après les résultats du paragraphe IV.1, les dérivées partielles des vecteurs de la base locale sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi} &= \vec{e}_\phi & \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \rho} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} &= -\vec{e}_\rho & \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial z} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \rho} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \phi} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} &= \vec{0} \end{aligned}$$

IV.3 Coordonnées sphériques

Dans la base de coordonnées sphériques, le point M est associé au repère local $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, avec :

$$\begin{cases} \vec{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{cases}$$

Les dérivées partielles des vecteurs de la base locale se calculent donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} &= -\sin \theta \sin \phi \vec{e}_x + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_y \\
& & &= \vec{e}_\theta & &= \sin \theta \vec{e}_\phi \\
\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\sin \theta \cos \phi \vec{e}_x - \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y - \cos \theta \vec{e}_z & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} &= -\cos \theta \sin \phi \vec{e}_x + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_y \\
& & &= -\vec{e}_r & &= \cos \theta \vec{e}_\phi \\
\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta} &= \vec{0} & \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} &= -\cos \phi \vec{e}_x - \sin \phi \vec{e}_y \\
& & & & &= -\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

Les résultats des dérivées partielles des vecteurs de la base locale sphérique *ne* sont *pas* à connaître par cœur ! Il est cependant indispensable de savoir les recalculer.

V Déplacement élémentaire d'un point

V.1 Cas général

On considère un point M repéré par trois coordonnées u , v et w dans l'espace à trois dimensions. Dans le cas du système de coordonnées sphériques par exemple, on a $u = r$, $v = \theta$ et $w = \phi$. Si chaque coordonnée u , v et w subit une variation arbitraire infinitésimale du , dv et dw , le point M se déplace vers le point M' . Le déplacement élémentaire, ou infinitésimal, du point M vers M' est défini par la différence :

$$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{OM'}(u + du, v + dv, w + dw) - \overrightarrow{OM}(u, v, w)$$

Le déplacement élémentaire est donc la différentielle de la fonction vectorielle \overrightarrow{OM} , telle qu'elle a été définie au paragraphe IV du chapitre A pour une fonction vectorielle \vec{f} quelconque. D'après la relation (1.18) on peut réécrire le déplacement élémentaire en fonction de ses dérivées partielles :

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} du + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} dv + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w} dw$$

En appliquant cette définition aux différents repères cartésien, polaire, cylindrique et sphérique, on va exprimer le déplacement élémentaire dans chaque système de coordonnées.

V.2 Coordonnées cartésiennes

Il s'agit du cas le plus simple, puisque :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

et qu'on a directement :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} = \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} = \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

Donc :

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

V.3 Coordonnées polaires

En coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$. Donc :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho \vec{e}_\rho)}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} = \frac{\partial(\rho \vec{e}_\rho)}{\partial \phi} = \rho \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi} = \rho \vec{e}_\phi$$

d'après les résultats du paragraphe IV.1. Donc :

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\phi \vec{e}_\phi$$

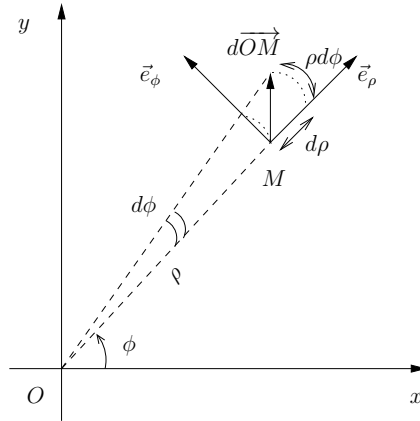


FIGURE 2.6 – Déplacement élémentaire en coordonnées polaires

La figure (2.6) illustre la construction géométrique du déplacement élémentaire. Le point M est à la distance ρ du point de référence O , et la droite (OM) fait un angle ϕ avec l'axe (Ox) . On fait varier ρ d'une distance élémentaire $d\rho$, puis ϕ d'un angle infinitésimal $d\phi$. En conséquence, le point M se déplace d'une longueur $d\rho$ le long de la droite (OM) , puis d'une longueur $\rho d\phi$ le long de l'arc de rayon $\rho + d\rho$. On peut en déduire graphiquement les composantes du vecteur $d\overrightarrow{OM}$ sur la base polaire : $d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\phi \vec{e}_\phi$.

V.4 Coordonnées cylindriques

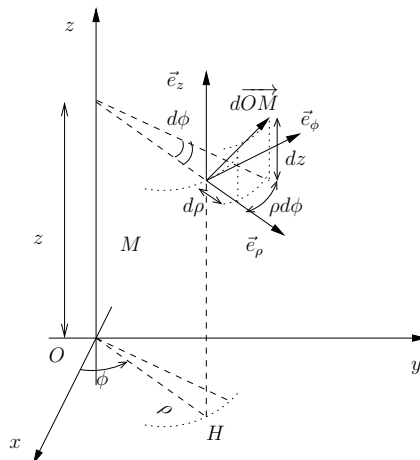


FIGURE 2.7 – Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$. En reprenant les résultats des coordonnées polaires et cartésiennes on peut directement écrire :

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\phi \vec{e}_\phi + dz \vec{e}_z$$

La figure (2.7) illustre la construction géométrique du déplacement élémentaire. Le point M est à la distance ρ et à la hauteur z du point de référence O , et la droite (OH) fait un angle ϕ avec l'axe (Ox) . On fait varier ρ d'une distance élémentaire $d\rho$, puis ϕ d'un angle infinitésimal $d\phi$, et enfin z d'une distance dz . En conséquence, le point M se déplace d'une longueur $d\rho$ le long de la droite parallèle à (OH) , puis d'une longueur $\rho d\phi$ le long de l'arc de rayon $\rho + d\rho$, et enfin d'une hauteur dz . On peut en déduire graphiquement les composantes du vecteur $d\overrightarrow{OM}$ sur la base cylindrique : $d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\phi \vec{e}_\phi + dz \vec{e}_z$.

V.5 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} &= \frac{\partial(r \vec{e}_r)}{\partial r} = \vec{e}_r \\ \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} &= \frac{\partial(r \vec{e}_r)}{\partial \theta} = r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} &= \frac{\partial(r \vec{e}_r)}{\partial \phi} = r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = r \sin \theta \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

d'après les résultats du paragraphe IV.1. Donc :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$$

Exercice

Entrenez vous à dessiner la construction géométrique de $d\overrightarrow{OM}$ pour vous familiariser avec le dessin en trois dimensions et les variations des coordonnées dans l'espace.

Chapitre 3

Calcul intégral

Ce chapitre a pour but de présenter les méthodes de calcul des intégrales doubles et triples, ainsi que quelques unes de leurs applications, après un rappel sur les intégrales simples. Les questions mathématiques de définition, de continuité, et de toutes caractéristiques potentiellement pathologiques des fonctions sont reportées vers le cours de mathématiques *per se*.

I Intégrales simples

I.1 Primitive

Le calcul différentiel et les dérivées, traités au chapitre 1, sont complémentaires de la problématique du calcul intégral. En effet, le calcul intégral consiste essentiellement à trouver les fonctions $F(x)$ qui ont pour *dérivée* la fonction $f(x)$ supposée continue sur un intervalle fermé $[a, b]$.

Définition :

On considère une fonction $f(x)$ d'une variable réelle x , continue sur un intervalle fermé quelconque $[a, b]$, tel que $a < b$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Les *fonctions primitives* $F(x)$ de $f(x)$ vérifient l'égalité :

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

D'après la définition de la différentielle d'une fonction d'une variable réelle, on peut réécrire :

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad dF(x) = f(x)dx$$

On note les fonctions primitives à l'aide du symbole :

$$F(x) = \int dF = \int f(x)dx$$

On parle des fonctions primitives au pluriel, car il en existe une infinité. En effet, si $f(x)$ admet $F(x)$ comme fonction primitive, alors les fonctions $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante, sont également des fonctions primitives de $f(x)$ puisque :

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$$

Exemple :

Sur l'intervalle $] -\infty, +\infty[$, la fonction $F(x) = x^2 + 5x$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x + 5$ puisqu'on peut vérifier par dérivation que :

$$[F(x)]' = [x^2 + 5x]' = 2x + 5$$

La fonction $f(x)$ admet également comme fonctions primitives $G(x) = x^2 + 5x + 3$ et $H(x) = x^2 + 5x + C$ où C est une constante quelconque.

I.2 Intégrale définie au sens de Riemann

Une méthode pour définir l'intégrale d'une fonction f sur un segment $[a, b]$ est d'avoir recours à la notion d'aire. On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle quelconque $[a, b]$, tel que $a < b$, comme illustré sur la figure (3.1). On divise le segment $[a, b]$ en n parties de tailles comparables

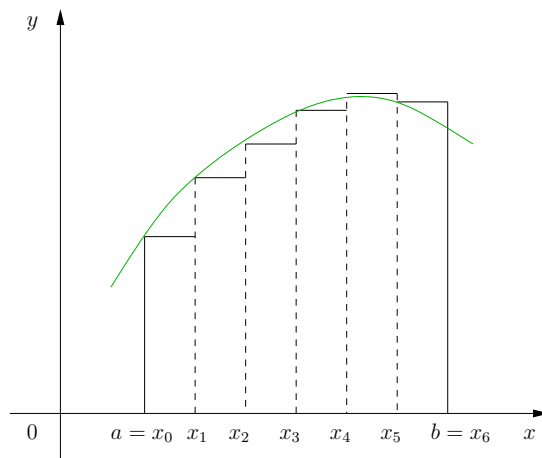


FIGURE 3.1 – Illustration de l'interprétation géométrique de l'intégrale définie.

environ égales à $(b - a)/n$, en choisissant n x_i réels tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

On approche f par une fonction constante sur chaque intervalle, qui prend la même valeur que f au début de l'intervalle. On obtient ainsi une succession de rectangles ayant chacun pour aire $f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})$. On construit alors la somme de Riemann de f associée à la subdivision de $[a, b]$:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

On peut penser que cette somme va converger vers l'aire totale comprise sous la courbe $y = f(x)$ si n tend vers l'infini et que l'approximation de f est d'autant plus proche de f que les intervalles de style $[x, x + \epsilon]$ sont petits. C'est la définition de l'intégrale au sens de Riemann.

Définition : intégrale au sens de Riemann

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. Quelle que soit la façon de subdiviser l'intervalle $[a, b]$, la suite des sommes de Riemann de f converge et permet de définir l'intégrale de f sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

La fonction $S(x)$, qui représente l'aire sous la fonction f délimitée par l'axe (Ox) et les droites $x = a$ et x , est une primitive de f . En effet, si on considère l'accroissement Δx de x , l'accroissement correspondant de S , noté ΔS , est compris entre les aires :

$$f(x) \cdot \Delta x < \Delta S < f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$$

soit :

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$$

Si l'accroissement Δx tend vers zéro, alors $f(x + \Delta x) \rightarrow f(x)$, car f est supposée continue. Alors la fonction $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ tend vers $f(x)$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = S'(x) = f(x)$$

La fonction $S(x)$ est donc une primitive de f , puisque sa dérivée est égale à f . Si maintenant on considère une primitive $F(x)$ quelconque de f , on obtient :

$$\begin{aligned} S(x) &= F(x) + C && \text{avec } C \in \mathbb{R} \\ \text{et } S(a) &= F(a) + C = 0 \\ \text{donc } S(x) &= F(x) - F(a) \end{aligned}$$

L'aire totale I comprise sous la courbe f sur l'intervalle $[a, b]$, qui correspond à $S(b)$, s'écrit donc :

$$I = S(b) = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Définition : intégrale définie sur un segment

L'intégrale définie de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$, où f est supposée continue, est symbolisée par :

$$I = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

avec $F(x)$ une fonction primitive de f .

I.3 Propriétés

1. Linéarité :

Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, et λ et μ deux nombres réels :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

2. Multiplication :

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, alors leur produit fg est également intégrable et :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Cette relation permet d'intégrer par parties, et son utilisation sera illustrée au paragraphe suivant.

3. Bornes :

Soit f une fonction quelconque intégrable sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x)dx &= 0 \\ \int_a^b f(x)dx &= - \int_b^a f(x)dx \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

I.4 Quelques méthodes de calcul de primitives

Le principe général du calcul d'intégrales consiste à faire apparaître dans l'élément différentiel à intégrer des dérivées de fonctions connues. Par exemple, la dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, une primitive de $\sin x$ est donc $-\cos x$:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Une fois la primitive connue, l'intégrale définie sur un intervalle $[a, b]$ revient simplement à prendre la différence entre la valeur de la primitive en b et en a .

Changement de variables

On se propose de calculer $\int f(x)dx$ en utilisant un changement de variables. La méthode de changement de variables consiste à poser $x = \varphi(u)$. La primitive $F(x)$ de la fonction $f(x) = f \circ \varphi(u) = f[\varphi(u)]$ devient alors $G(u) = F \circ \varphi(u) = F[\varphi(u)]$, dont la dérivée s'écrit :

$$G'(u) = F' \circ \varphi(u) \cdot \varphi'(u) = F'(x)\varphi'(u)$$

d'après les règles de composition du calcul des dérivées. Par ailleurs $F'(x) = f[\varphi(u)]$, puisque F est une primitive de f , et $dx = d\varphi(u) = \varphi'(u)du$ d'après la définition des différentielles. On peut donc réécrire :

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int F'(x)\varphi'(u)du = G(u) + C$$

Dans le cas d'une intégrale définie sur un segment $[a, b]$, il ne faut pas oublier que le changement de variables induit un changement des bornes de l'intégrale. Elles doivent être exprimées sur la nouvelle variable d'intégration u :

$$\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \varphi^{-1}(a) \\ u = \varphi^{-1}(b) \end{cases}$$

où $\varphi^{-1}(x)$ est la fonction inverse de $\varphi(u)$.

Exemple 1

On se propose de calculer :

$$I = \int \cos(3x) dx$$

Il s'agit donc de trouver la fonction dont la dérivée est égale à $\cos 3x dx$. L'élément différentiel ressemble à $\cos u du$, sauf que dx n'est pas la différentielle de $3x$, mais de x . On pose donc :

$$u = 3x \quad \text{donc} \quad du = 3dx$$

L'intégrale devient :

$$I = \int \cos u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3} \sin u = \frac{\sin 3x}{3} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Exemple 2

On se propose de calculer :

$$I = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

en utilisant le changement de variable :

$$x = \tan u \quad \text{donc} \quad dx = (1 + \tan^2 u) du$$

L'intégrale devient :

$$I = \int \frac{(1 + \tan^2 u) du}{(1 + \tan^2 u)^2} = \int \frac{du}{(1 + \tan^2 u)}$$

Sachant que $1 + \tan^2 u = 1/\cos^2 u$ et que $2 \cos^2 u = 1 + \cos 2u$ (règles de trigonométrie), on peut simplifier :

$$I = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2u) du$$

On effectue un nouveau changement de variables :

$$t = 2u \quad \text{soit} \quad dt = 2du$$

pour obtenir :

$$I = \int \frac{1}{4}(1 + \cos t) dt = \frac{1}{2} \left(u + \frac{\sin 2u}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{\sin(2 \arctan x)}{2} \right)$$

Sachant que $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, que $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1+x^2}$ et que $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ on a finalement :

$$I = \frac{1}{2} \left(\arctan x + \sin(\arctan x) \cos(\arctan x) \right) = \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right) + C$$

Intégration par parties

L'intégration par parties exploite l'expression de la différentielle du produit de deux fonctions (c.f. chapitre 1 paragraphe I.4). Si f et g sont deux fonctions continues et dérivables alors la différentielle du produit $f.g$ s'écrit :

$$d(f.g) = f.dg + g.df$$

soit :

$$f.dg = d(f.g) - g.df$$

En intégrant on obtient :

$$\begin{aligned}\int f.dg &= \int d(f.g) - \int g.df \\ &= f.g - \int g.df\end{aligned}$$

puisque l'on sait que $\int dF = F$.

Exemple

On veut calculer :

$$I = \int x \cdot \sin 2x \cdot dx$$

On pose :

$$\begin{aligned}f(x) &= x \quad \text{d'où} \quad df = f'(x) dx = dx \\ \text{et} \quad dg &= \sin 2x \cdot dx \quad \text{d'où} \quad g(x) = \int dg = \int \sin 2x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cos 2x\end{aligned}$$

Par intégration par parties on a alors :

$$I = f(x).g(x) - \int g(x).df(x) = x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \cdot dx$$

soit :

$$I = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

II Intégrales multiples

La notion d'intégrale simple est généralisée dans ce paragraphe. Les propriétés des intégrales sont identiques et ne seront pas rappelées. L'accent sera mis sur les règles pratiques de calcul.

II.1 Intégrales doubles

II.1.a Introduction

On considère une fonction de deux variables $f(M)$, définie sur un domaine \mathcal{D} de l'espace des réels à deux dimensions \mathbb{R}^2 . On a vu au paragraphe II.1 du chapitre 1 que la représentation graphique de f est une surface Σ : à chaque point M du plan (xOy) est associée une cote $z = f(M)$. Si on entoure le point M d'une surface infinitésimale $d\sigma$, alors le volume du prisme infinitésimal représenté sur la figure (3.2) est égal à $f(M).d\sigma$. En effectuant la somme sur tous les volumes des prismes pour chaque point M du domaine \mathcal{D} on obtient l'intégrale double :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(M) d\sigma$$

Cette intégrale représente le volume algébrique compris entre le plan (xOy), délimité par le domaine \mathcal{D} , et la surface Σ .

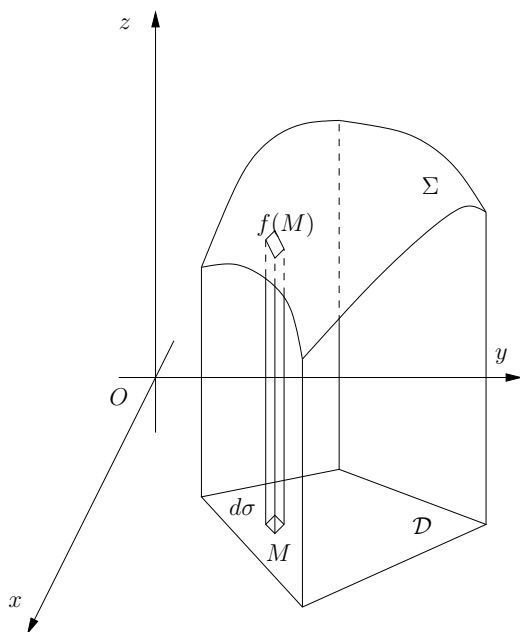


FIGURE 3.2 – Illustration de l'interprétation géométrique de l'intégrale double.

II.1.b Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, le point M est repéré par l'abscisse x et l'ordonnée y dans le plan (xOy) . L'élément de surface $d\sigma$ est obtenu en faisant varier infinitésimalement x de dx et y de dy , à partir du point M . Il s'agit donc d'un rectangle infinitésimal dont la surface est $d\sigma = dx dy$. L'intégrale double s'écrit alors :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$$

Le calcul d'une intégrale double peut s'interpréter graphiquement, comme illustré sur la figure (3.3).

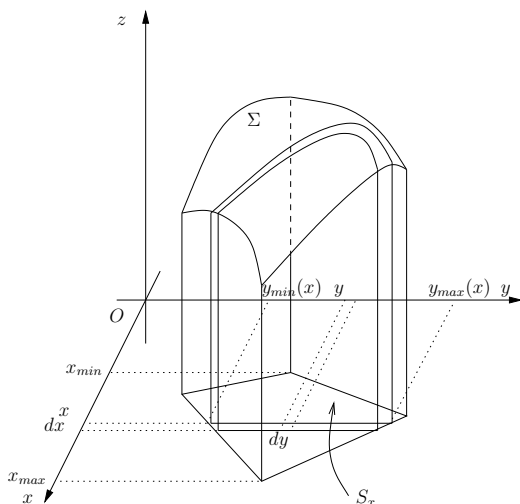


FIGURE 3.3 – Illustration de l'interprétation géométrique de l'intégrale double en coordonnées cartésiennes.

Pour une valeur *donnée* de x , comprise entre x_{min} et x_{max} du domaine \mathcal{D} , on fait varier x de dx . On définit ainsi une coupe d'épaisseur infinitésimale dx en x , parallèle au plan (yOz) . Cette coupe a pour volume $d\tau_x = S_x dx$, où S_x est la surface de la coupe. Le volume total recherché, compris entre le plan

(xOy) , délimité par le domaine \mathcal{D} , et la surface Σ , est donc la somme des volumes infinitésimaux $d\tau_x$:

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx dy = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} d\tau_x = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} S_x \, dx$$

Dans ce calcul, il reste à déterminer la surface S_x . Il s'agit de la surface délimitée par la courbe $z = f(x, y)$ pour x fixé et les droites verticales $y = y_{\min}(x)$ et $y = y_{\max}(x)$, soit de :

$$S_x = \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x, y) \, dy$$

Finalement, une intégrale double sur un domaine \mathcal{D} se calcule comme une succession de deux intégrales simples :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx dy = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Notons qu'il est tout à fait possible d'inverser les rôles de x et de y , et de calculer les deux intégrales dans l'ordre inverse :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx dy = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left(\int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

comme le montre la figure (3.4) pour un domaine elliptique. Avant de calculer une intégrale double, il est

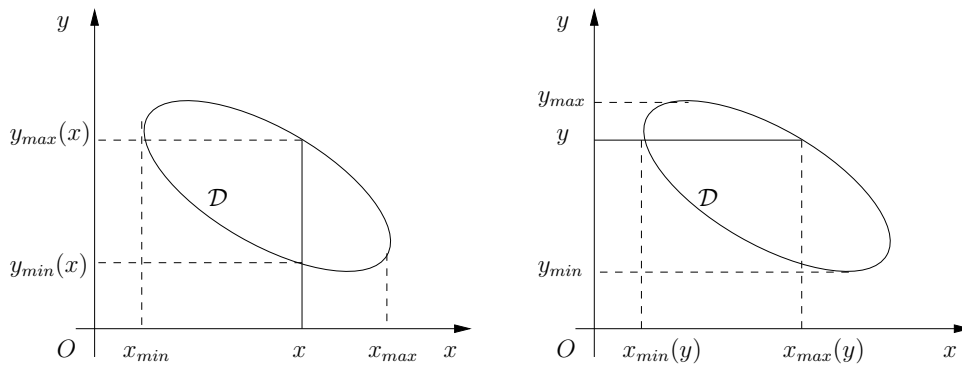


FIGURE 3.4 – Parcours du domaine d'intégration \mathcal{D} suivant x ou y .

donc souvent intéressant de représenter graphiquement le domaine d'intégration \mathcal{D} pour pouvoir choisir une formule plutôt que l'autre.

Exemple :

On considère le domaine d'intégration $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x; x^2 \leq y \leq 1\}$, et la fonction $f(x, y) = y^3$. On se propose de calculer :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} y^3 \, dx dy$$

On commence par représenter le domaine \mathcal{D} , comme sur la figure (3.5). Dans un premier temps, on choisit d'effectuer l'intégrale en fixant y , et en intégrant une première fois par rapport à x , puis par rapport à y . Pour une valeur de y , on déduit de l'équation $x_{\max}^2(y) = y$ que :

$$\begin{aligned} x_{\max}(y) &= \sqrt{y} \\ x_{\min}(y) &= 0 \end{aligned}$$

On voit également que $y_{\min} = 0$ et $y_{\max} = 1$. On peut donc réécrire I :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} y^3 \, dx \right) dy = \int_0^1 y^3 \left(\int_0^{\sqrt{y}} dx \right) dy = \int_0^1 y^3 [x]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 y^{7/2} dy = \left[\frac{2}{9} y^{9/2} \right]_0^1 = \frac{2}{9}$$

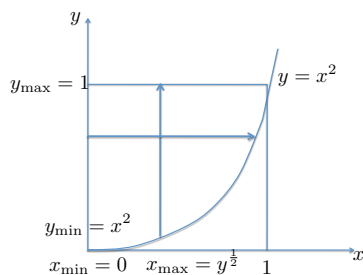


FIGURE 3.5 – Domaine \mathcal{D} , sous-domaine de $[0, 1] \times [0, 1]$ au dessus de la courbe $y = x^2$.

Si on effectue l'intégrale par rapport à y d'abord, en fixant x , les bornes deviennent :

$$\begin{aligned} y_{\max}(x) &= 1 \\ y_{\min}(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Et les bornes en x sont $x_{\min} = 0$ et $x_{\max} = 1$. On peut ainsi réécrire I :

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 y^3 dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^4}{4} \right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \frac{(1 - (x^2)^4)}{4} dx = \int_0^1 \frac{1 - x^8}{4} dx = \frac{2}{9}$$

On montre bien que les deux méthodes permettent d'obtenir le même résultat.

II.1.c Calcul de surfaces

On a vu que l'intégrale double d'une fonction de deux variables f sur un domaine \mathcal{D} correspond au calcul du *volume* sous la surface Σ et au dessus \mathcal{D} (c.f. figure (3.2)). Si la fonction f est constante, et plus particulièrement égale à 1, alors l'intégrale double mesure la surface du domaine \mathcal{D} :

$$I = S_{\mathcal{D}} = \iint_{\mathcal{D}} 1 d\sigma$$

En coordonnées cartésiennes, on calcule donc la surface d'un domaine \mathcal{D} en calculant :

$$S_{\mathcal{D}} = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$$

Exemple :

On se propose de calculer l'aire \mathcal{A} de la région comprise entre les deux paraboles $y = 4x^2$ et $y = 6 - 2x^2$, entre les points $x = -1$ et $x = 1$. Cette région est illustrée sur la figure (3.6).

L'aire du domaine est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 \left(\int_{4x^2}^{6-2x^2} dy \right) dx = \int_{-1}^1 [y]_{4x^2}^{6-2x^2} dx = \int_{-1}^1 (6 - 2x^2 - 4x^2) dx = \int_{-1}^1 (6 - 6x^2) dx = [6x - 2x^3]_{-1}^1 = 8$$

II.1.d Intégration sur un pavé : variables séparées

En reprenant les notations du chapitre 2, on considère l'intégrale double :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(u, v) du dv$$

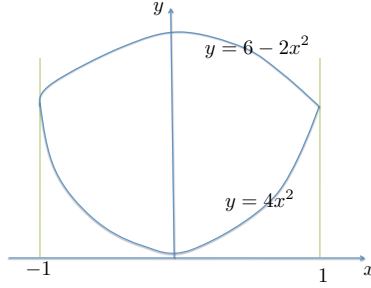


FIGURE 3.6 – Domaine \mathcal{D} délimité par les courbes $y = 6 - 2x^2$ et $y = 4x^2$, pour $x \in [-1, 1]$.

où f est une fonction de deux variables u et v , qui peuvent représenter n'importe quel type de coordonnées du point M , et telle que $f(u, v) = g(u)h(v)$. Si le domaine d'intégration \mathcal{D} est un *pavé*, c'est à dire que les bornes $v_{max}(u)$ et $v_{min}(u)$ sont *indépendantes* de u , alors on peut séparer les intégrales :

$$I = \int_{u_{min}}^{u_{max}} \left(\int_{v_{min}(u)}^{v_{max}(u)} f(u, v) dv \right) du = \left(\int_{u_{min}}^{u_{max}} g(u) du \right) \left(\int_{v_{min}}^{v_{max}} h(v) dv \right)$$

On explique au paragraphe II.3 comment effectuer un changement de variables dans une intégrale multiple. Appliquer un tel changement a essentiellement pour but d'obtenir un domaine d'intégration qui soit un pavé pour les nouvelles variables d'intégration. Le calcul d'intégrale multiple en est très simplifié.

II.2 Intégrales triples

II.2.a Introduction

On considère une fonction f de trois variables, définie sur une région \mathcal{R} de l'espace des réels à trois dimensions \mathbb{R}^3 . La représentation graphique de f nécessiterait de pouvoir dessiner quatre dimensions, puisqu'on fait varier le point M dans \mathcal{R} et qu'il faut reporter une quatrième composante : $f(M)$. On dit que f est une hyper surface. Si on entoure le point M d'un volume infinitésimal $d\tau$, alors l'élément $f(M).d\tau$ est un hyper prisme infinitésimal. La somme de tous les hyper prismes pour tous les points M de \mathcal{R} est l'intégrale triple :

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} f(M) d\tau$$

Comme pour les intégrales doubles, les intégrales triples se calculent par une suite de trois intégrations successives, symbolisées par le signe \iiint .

II.2.b Coordonnées cartésiennes

Par analogie avec les intégrales doubles, l'élément de volume en coordonnées cartésiennes s'écrit $d\tau = dx dy dz$. C'est un parallélépipède rectangle, qui s'obtient en faisant varier x de dx , y de dy et z de dz . L'intégrale triple devient :

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz$$

Pour déterminer les bornes d'intégration, on procède par découpage du domaine pour effectuer des intégrations successives, comme pour les intégrales doubles. Par exemple, un domaine d'intégration \mathcal{R} est représenté sur la figure (3.7). Pour une abscisse x fixée, variant entre x_{min} et x_{max} , on coupe une "tranche" du domaine, de surface S_x , qu'on peut représenter dans le plan (yOz) . Pour le calcul de S_x , on applique la même méthode que pour les intégrales doubles :

$$I = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\int_{y_{min}(x)}^{y_{max}(x)} \left(\int_{z_{min}(x,y)}^{z_{max}(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Les rôles de x , y et z sont toujours intervertibles : on a ainsi six possibilités différentes de calcul de I . La représentation de \mathcal{R} est indispensable.

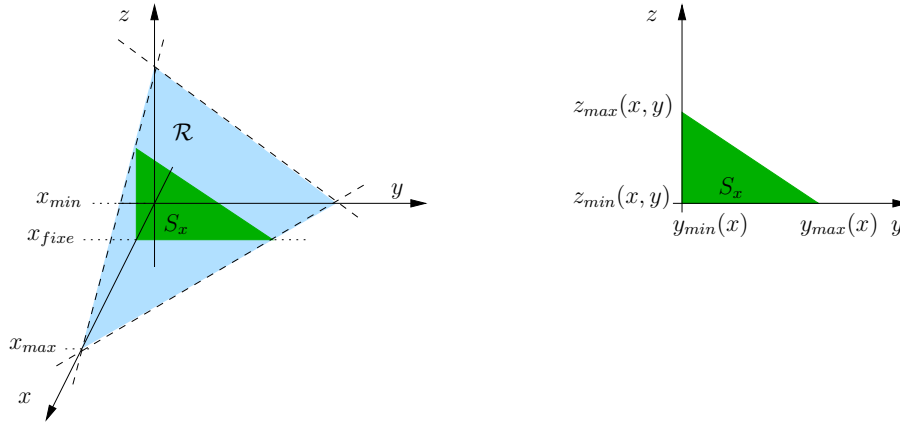


FIGURE 3.7 – Parcours du domaine \mathcal{R} pour calculer une intégrale triple en coordonnées cartésiennes.

II.2.c Calcul de volumes

Si la fonction f est égale à 1, l'intégrale triple est égale au volume du domaine d'intégration \mathcal{R} :

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} 1 d\tau$$

En coordonnées cartésiennes, le calcul d'un volume s'effectue donc à partir de :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \iiint_{\mathcal{R}} dx dy dz$$

Exemple :

Passons tout de suite à la pratique, et calculons par exemple le volume d'une calotte sphérique de hauteur $h = R - a$, où R est le rayon de la sphère et a un réel inférieur à R . Il s'agit donc de calculer :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \iiint_{\mathcal{R}} dx dy dz$$

avec $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0; y \geq 0; z \geq a; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Le domaine \mathcal{R} est représenté sur la figure (3.8). Si on fixe z et qu'on effectue une "coupe" de \mathcal{R} parallèle à (xOy) et passant par z , on obtient

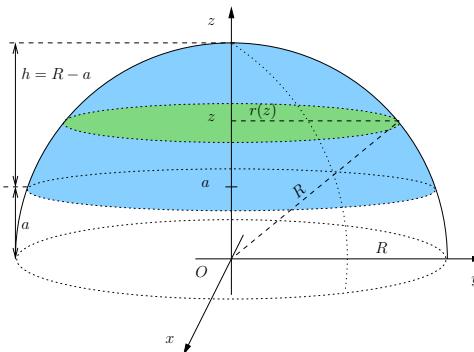


FIGURE 3.8 – Calotte sphérique de hauteur h .

des disques de surface S_z délimités par l'équation $x^2 + y^2 = r^2(z) = R^2 - z^2$. Le volume de la calotte est égal à la somme des disques d'altitude z compris entre $z_{min} = a$ et $z_{max} = R$:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \int_{z_{min}=a}^{z_{max}=R} \left(\iint_{\mathcal{D}_z} dx dy \right) dz$$

où \mathcal{D}_z est le domaine du plan (x, y) défini par $x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2$. L'intégrale double sur \mathcal{D}_z représente donc l'aire d'un disque d'altitude z et de rayon $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$:

$$S(z) = \iint_{\mathcal{D}_z} dx dy = \pi r^2(z) = \pi(R^2 - z^2)$$

Donc :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \int_a^R \pi(R^2 - z^2) dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_a^R = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h)$$

en fonction de $h = R - a$.

II.3 Changement de variables

II.3.a Méthode générale

On a vu au paragraphe I.4 que procéder à un changement de variables était une méthode efficace pour simplifier les éléments différentiels des intégrales, et ainsi trouver les primitives. Il est possible d'appliquer la même méthode aux intégrales multiples (double et triple), à l'aide du Jacobien.

Jusqu'ici on a considéré les domaines d'intégration, notés \mathcal{D} et \mathcal{R} , exprimés en coordonnées cartésiennes. Pour réécrire l'intégrale triple :

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz$$

dans un système de coordonnées quelconque, où le point M est repéré par u, v et w par exemple, on commence par écrire les "anciennes" coordonnées en fonction des nouvelles :

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned}$$

Ensuite, on exprime le nouveau domaine d'intégration \mathcal{R}' , image de \mathcal{R} dans le nouveau système de coordonnées. On réécrit également f :

$$g(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

pour finalement obtenir :

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{R}'} g(u, v, w) |J(u, v, w)| du dv dw$$

où $|J(u, v, w)|$ est le *jacobien* du changement de variables. C'est le déterminant de la matrice 3×3 , appelée matrice Jacobienne, définie par :

$$J(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

II.3.b Changement de coordonnées

En pratique, les changements de variables les plus souvent utilisés sont les changements de systèmes de coordonnées : passer du système cartésien au système cylindrique ou sphérique typiquement. On peut espérer que le domaine d'intégration soit un pavé dans le nouveau système de coordonnées, et qu'il soit ainsi possible d'effectuer les intégrales sur chaque variable séparément. On se propose donc dans ce paragraphe de traiter ces cas particuliers de changement de variables. Pour cela on va adopter une méthode géométrique.

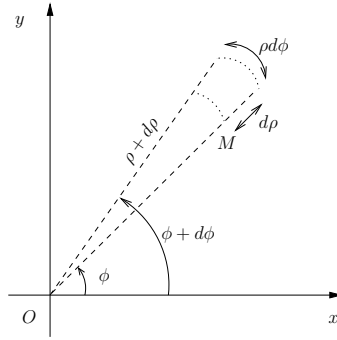


FIGURE 3.9 – Élément de surface en coordonnées polaires.

Coordonnées polaires

L'élément de surface $d\sigma$ exprimé en coordonnées cartésiennes est égal à $dx dy$. Il est obtenu en effectuant un déplacement infinitésimal du point M suivant chacune des coordonnées, de sorte à créer un élément de surface. En coordonnées polaires, le point M est repéré par la distance au point O , notée ρ , et l'angle polaire ϕ (c.f. chapitre 2 paragraphe II.2). De la même manière, on va déplacer le point M d'une longueur infinitésimale $d\rho$ et d'un angle infinitésimal $d\phi$, comme illustré sur la figure (3.9). L'élément de surface ainsi formé est assimilable à un rectangle dont la surface est égale au produit des longueurs des côtés :

$$d\sigma = \rho d\rho d\phi$$

Coordonnées cylindriques

On dessine l'élément de volume $d\tau$ en faisant varier infinitésimalement chacune des coordonnées ρ , ϕ et z (figure (3.10)). On obtient ainsi un volume assimilable à un parallélépipède rectangle, dont le volume est égal au produit des trois côtés :

$$d\tau = \rho d\rho d\phi dz$$

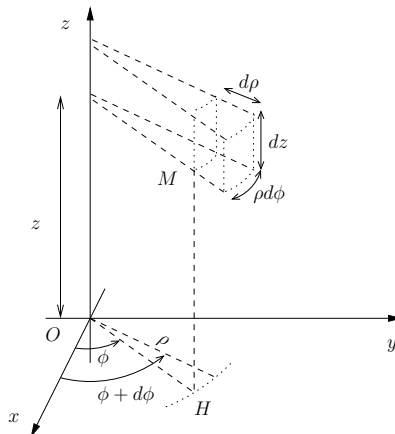


FIGURE 3.10 – Élément de volume en coordonnées cylindriques.

Coordonnées sphériques

De la même manière que pour les coordonnées cylindriques, on fait varier chaque coordonnée d'une grandeur infinitésimale : r de dr , θ de $d\theta$ et ϕ de $d\phi$. On obtient le volume $d\tau$ représenté sur la figure (3.11) égal à :

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

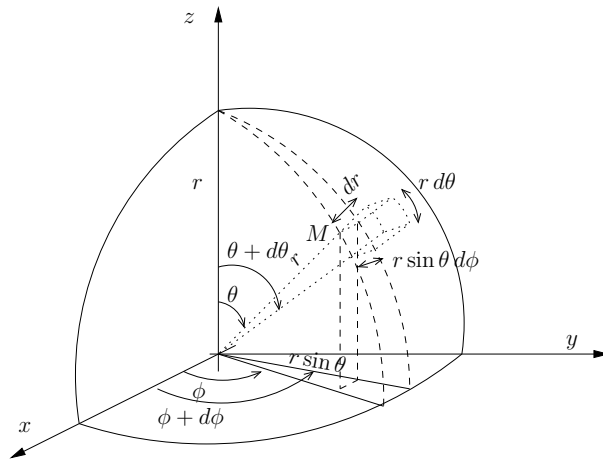


FIGURE 3.11 – Élément de volume en coordonnées sphériques.

III Intégrales curvilignes

On aborde ici une application des intégrales simples au calcul de longueurs d'arcs de courbes, et aux intégrales de fonctions de long de ces arcs, appelées intégrales curvilignes.

III.1 Courbes

Définition :

Une *courbe* Γ dans un espace à n dimensions est une fonction vectorielle d'une seule variable :

$$\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

En pratique, on considère des courbes planes ($n = 2$), ou gauches ($n = 3$), comme par exemple la position d'une particule à l'instant $t : \vec{r}(t)$. On se limitera dans ce paragraphe aux courbes planes. Celles-ci peuvent être définies des façons suivantes :

- Représentation cartésienne explicite :

La courbe Γ représente l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan qui vérifient :

$$y = f(x)$$

- Représentation cartésienne implicite :

La courbe Γ est définie à l'aide d'une fonction des deux variables indépendantes x et y , telle que :

$$g(x, y) = 0$$

Il est parfois possible d'extraire une des variables pour obtenir une représentation explicite, mais pas toujours.

- Représentation paramétrée :

Les coordonnées des points M appartenant à Γ sont des fonctions d'un paramètre p qui varie dans un intervalle de \mathbb{R} :

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = f(p) \\ y = g(p) \end{cases}$$

On a ici exprimé Γ en représentation paramétrée cartésienne, mais il est possible d'exprimer les coordonnées polaires du point M en fonction d'un paramètre.

Exemple :

Le *folium* de Descartes est une courbe plane qui forme une boucle, représentée sur la figure (3.17). Il est obtenu par les représentations suivantes :

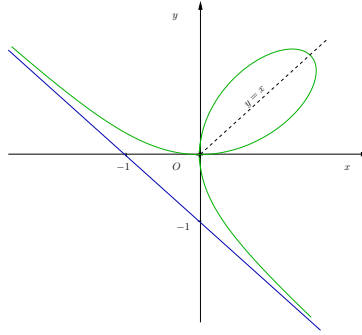


FIGURE 3.12 – Folium de Descartes.

équation cartésienne implicite : $y^3 + x^3 - 3xy = 0$

équation paramétrique cartésienne : $\begin{cases} x = \frac{3p}{1+p^3} \\ y = px \end{cases}$

III.2 Longueur d'un arc de courbe plane

III.2.a Courbe bijective en coordonnées cartésiennes

Une fonction f est dite *bijective* si tout élément $y = f(x)$ n'a qu'un et un seul antécédent x . Dans le cas le plus simple, une courbe plane Γ est définie en coordonnées cartésiennes, à l'aide d'une équation explicite bijective : $y = f(x)$. Comme illustré sur la figure (3.13), le théorème de Pythagore permet alors d'exprimer la distance dl entre deux points $M(x, y)$ et $M'(x + dx, y + dy)$ appartenant à Γ et infiniment voisins :

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

La longueur totale de l'arc de courbe entre les points M_1 et M_2 est la somme des longueurs infinitésimales

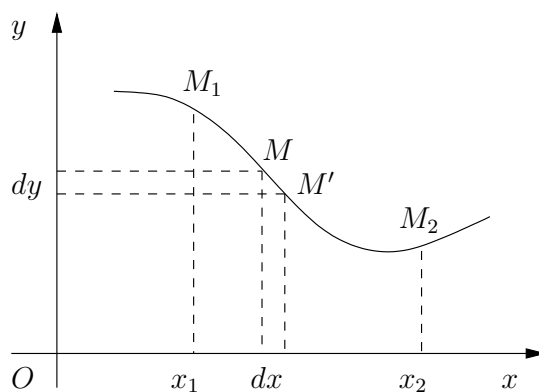


FIGURE 3.13 – Illustration d'une courbe Γ quelconque définie en coordonnées cartésiennes.

dl le long de la courbe. On note :

$$\mathcal{L}_{12} = \int_{\widehat{M_1 M_2}} dl = \int_{\widehat{M_1 M_2}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Si la définition de Γ est explicite, alors on peut écrire :

$$\mathcal{L}_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Cependant, dans le cas des courbes ayant des enroulements, ou des boucles, ce calcul est impossible. En effet, il existe alors plusieurs valeurs de x pour une même valeur de y . On utilise dans ce cas les équations paramétriques, et la notion d'abscisse curviligne.

III.2.b Courbe paramétrée

Définition :

On considère une courbe plane Γ orientée et à laquelle appartiennent les points M_0 et M . L'abscisse curviligne du point M le long de Γ est une grandeur relative notée :

$$s(M) = \widehat{M_0M}$$

La valeur absolue de $s(M)$ est égale à la longueur de l'arc de courbe de M_0 à M , et son signe dépend du sens de parcours arbitrairement choisi de Γ .

Si on se place dans le sens de parcours positif de Γ , et qu'on fait tendre le point M vers le point de référence M_0 alors :

$$\widehat{M_0M} \rightarrow ds$$

La longueur d'un arc de Γ entre deux points quelconques $M_1(p_1)$ et $M_2(p_2)$ est alors égale à :

$$\mathcal{L}_{12} = \int_{p_1}^{p_2} ds$$

En pratique, on calcule ds à partir du déplacement infinitésimal $d\vec{OM}$. En effet, comme illustré sur la

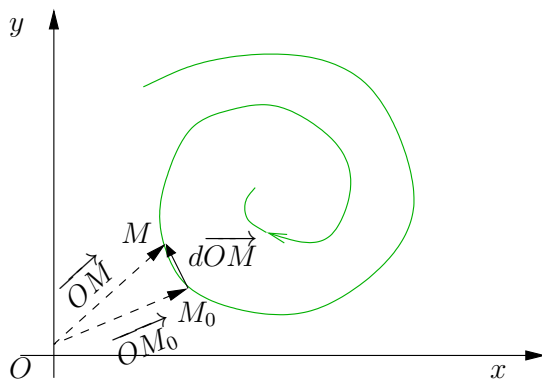


FIGURE 3.14 – Calcul de $ds = \widehat{M_0M}$ quand $M \rightarrow M_0$.

figure (3.14), si M tend vers M_0 alors :

$$ds = \left| \vec{OM} - \vec{OM_0} \right| = \left| d\vec{OM} \right|$$

Or, en représentation paramétrique le vecteur \vec{t} défini par :

$$\vec{t} = \frac{d\vec{OM}}{dp}$$

est le vecteur tangent à la trajectoire (il s'agit d'un des vecteurs permettant de définir le repère de Frenet, dont la description dépasse le cadre de ce cours). Donc ds est donné par :

$$ds = |\vec{t}| dp$$

si le sens positif de parcours de Γ a été choisi dans le sens des paramètres p croissants.

Exemple : longueur d'un quart de cercle

On considère la courbe plane paramétrée Γ définie par :

$$\begin{cases} x = R \cos p \\ y = R \sin p \end{cases} \quad \text{avec } p \in [0, 2\pi[$$

On veut calculer la longueur de l'arc de cette courbe compris entre les points $M_1(x(p_1), y(p_1))$, avec $p_1 = 0$, et $M_2(x(p_2), y(p_2))$ avec $p_2 = \pi/2$.

Pour dessiner Γ rapidement, on prend quelques valeurs de p , et on trace les points $M(x(p), y(p))$ dans le plan (xOy) . La courbe Γ est un cercle de rayon R . Les points M_1 et M_2 correspondent à l'intersection du cercle avec les axes (Ox) et (Oy) respectivement.

La longueur d'un arc de courbe entre deux points s'écrit :

$$\mathcal{L}_{12} = \int_{\widehat{M_1 M_2}} ds$$

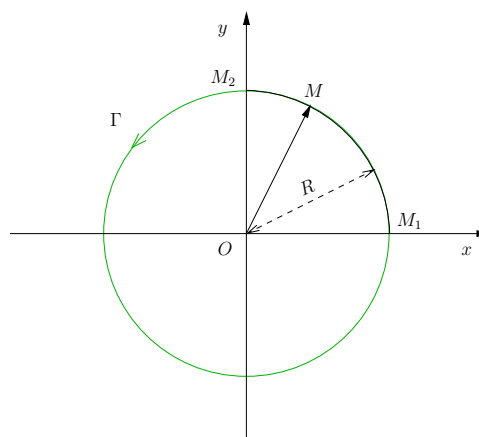


FIGURE 3.15 – Cercle.

On exprime donc ds , sachant que $ds = |\vec{t}| dp$ avec le vecteur \vec{t} défini par :

$$\vec{t} = \frac{d\vec{OM}}{dp} \quad \text{avec} \quad \vec{OM} = R \cos p \vec{e}_x + R \sin p \vec{e}_y$$

On a donc :

$$\vec{t} = \frac{d\vec{OM}}{dp} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dp} \\ \frac{dy}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \sin p \\ R \cos p \end{pmatrix}$$

et on en déduit :

$$ds = |\vec{t}| dp = R \sqrt{\sin^2 p + \cos^2 p} dp = R dp$$

D'où :

$$\mathcal{L}_{12} = \int_{p_1=0}^{p_2=\pi/2} R dp = R[p]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R}{2}$$

III.3 Intégrale curviligne

III.3.a Définition

Si on considère maintenant une fonction $f(M)$, définie en tous points M d'une courbe plane Γ , on peut définir l'intégrale de f sur un arc de courbe.

Définition :

Soit f une fonction définie en tous points M d'une courbe plane Γ . L'intégrale curviligne I de f sur l'arc $\widehat{M_1 M_2}$ de Γ est définie par :

$$I = \int_{\widehat{M_1 M_2}} f(M) ds$$

Si Γ est définie en représentation paramétrique cartésienne, alors l'intégrale curviligne de f s'écrit :

$$I = \int_{p_1}^{p_2} f(x(p), y(p)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2} dp$$

III.3.b Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Les formes différentielles ont été définies au chapitre 1. Pour N variables x_1, x_2, \dots, x_N , on considère une forme différentielle ω définie par :

$$\omega = \sum_{i=1}^N A_i(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_i$$

où les A_i sont les coefficients de ω . On considère par ailleurs une courbe paramétrée Γ :

$$t \in [a, b] \rightarrow \overrightarrow{OM}(t) = \sum_i x_i(t) \vec{e}_i$$

L'intégrale curviligne de ω le long de Γ est alors définie par :

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \omega(\overrightarrow{OM}(t)) \left(\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^N A_i(x_1, x_2, \dots, x_N) x'_i(t) dt$$

Dans le cas simple où $N = 2$, et où on écrit $\omega = P dx + Q dy$, on a donc :

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

Cas des formes différentielles exactes

Si ω est une forme différentielle exacte, et si f est une primitive de ω , c'est à dire si $\omega = df$, alors on a :

$$\int_{\widehat{AB}} \omega = f(B) - f(A)$$

pour toute courbe Γ d'origine A et d'extrémité B .

IV Calcul de surface

Nous allons maintenant aborder une application des intégrales doubles : les intégrales sur des surfaces quelconques.

IV.1 Élément de surface

On a vu au paragraphe II.1.a de ce chapitre qu'une intégrale double s'écrit sous forme générale :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(M) d\sigma$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface élémentaire du domaine d'intégration \mathcal{D} . On considère ici que le domaine \mathcal{D} appartient à une surface Σ quelconque de l'espace à trois dimensions, par exemple celle représentée sur la figure (3.16). Les points M de $f(M)$ sont contraints de rester sur la surface Σ . Si on choisit une origine O , et qu'on repère M par trois coordonnées u, v et w , alors cette contrainte se traduit par :

$$w = F(u, v)$$

où F est la fonction qui décrit Σ .

Comme pour les coordonnées cartésiennes, on exprime $d\sigma$ à partir des déplacements infinitésimaux de M sur la surface Σ . Si on fait varier u de du en gardant v constant, le point M se déplace le long de la ligne coordonnée- u (c.f. paragraphe I du chapitre 2). D'après la définition de la différentielle d'une fonction vectorielle (paragraphe IV du chapitre 1), le déplacement infinitésimal de $\overrightarrow{OM}(u, v)$ est exprimé à partir de l'équation (1.18) :

$$d\overrightarrow{OM}(u, v) \Big|_{v=\text{cte}} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} du$$

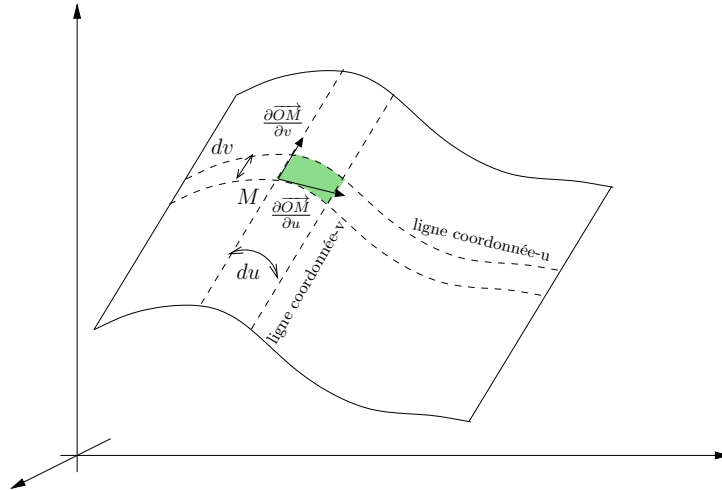


FIGURE 3.16 – Élément de surface élémentaire sur une surface quelconque.

En déplaçant ensuite le point M de dv le long de la ligne coordonnée- v , on forme un élément de surface assimilable à un parallélogramme, dont le deuxième côté est approché par la différentielle :

$$d\vec{OM}(u, v) \Big|_{u=\text{cte}} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} dv$$

La surface $d\sigma$ du parallélogramme ainsi formé est égale à la norme du produit vectoriel des vecteurs qui l'ont engendré (c.f. paragraphe III du chapitre A) :

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right| |dudv|$$

Si on introduit les vecteurs unitaires directeurs des tangentes aux lignes coordonnées :

$$\vec{e}_u = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \right|} \quad \text{et} \quad \vec{e}_v = \frac{\frac{\partial \vec{OM}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right|}$$

alors on peut réécrire $d\sigma$:

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v} \right| |dudv| |\vec{e}_u \wedge \vec{e}_v|$$

Exemple : élément de surface d'un parabolôïde de révolution

On considère un parabolôïde de révolution. C'est une surface Σ définie par l'ensemble des points M de l'espace à trois dimensions qui vérifient :

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

On se propose d'exprimer l'élément de surface du parabolôïde.

Les points M sur la surface Σ vérifient :

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + \frac{x^2 + y^2}{2} \vec{e}_z$$

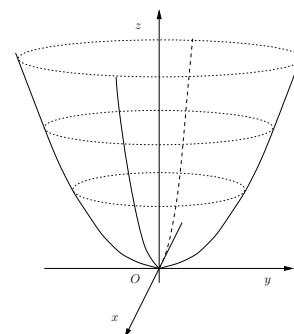


FIGURE 3.17 – Parabolôïde de révolution.

On en déduit :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} = \vec{e}_x + x \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} = \vec{e}_y + y \vec{e}_z$$

et l'élément de surface $d\sigma$:

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} \right| dx dy = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \right| dx dy = \left| \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix} \right| dx dy = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy$$

IV.2 Intégrale de surface

On considère la fonction f du point M , définie en tous points de la surface Σ . L'intégrale de f sur un domaine \mathcal{D} appartenant à Σ est définie par :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(M) d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} f(M(u, v)) \left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} \right| |\vec{e}_u \wedge \vec{e}_v| du dv$$

IV.3 Surface intérieure d'une courbe fermée

Dans ce dernier paragraphe, on énonce la formule de Green-Riemann qui lie les intégrales doubles sur un domaine \mathcal{D} avec une intégrale curviligne, dans le cas particulier où l'élément différentiel intégré est une forme différentielle linéaire.

Formule de Green-Riemann :

On considère un domaine d'intégration \mathcal{D} délimité par une courbe Γ fermée orientée et sans point double. Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions de deux variables x et y , définies et admettant des dérivées partielles en tout point de Γ . La *formule de Green-Riemann* énonce l'égalité suivante :

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

La formule de Green-Riemann est un cas particulier du théorème de Stokes qui sera détaillé à la fin du chapitre suivant.

Chapitre 4

Champs scalaires et vectoriels

L'ensemble des outils mathématiques développés dans les chapitres 1 à 3 vont être exploités dans ce dernier chapitre sur les champs scalaires et vectoriels. Ces grandeurs physiques sont modélisées par des fonctions de plusieurs variables, scalaires ou vectorielles. En effet, ce sont des grandeurs qui dépendent de la position dans l'espace. Les composantes des champs vectoriels dépendent donc des coordonnées u , v et w choisies pour repérer un point dans l'espace. Elles peuvent également dépendre du temps ou d'autres variables. Les variations de ces grandeurs en fonction de leurs variables seront exprimées à l'aide des outils différentiels et des intégrales.

I Définitions

I.1 Champ scalaire

Un champ scalaire est une grandeur physique scalaire qui dépend de la position dans l'espace et éventuellement du temps. A tout point $M(x, y, z)$ de l'espace est associé une valeur du champ scalaire $U(x, y, z, t)$:

$$M(x, y, z) \mapsto U(x, y, z, t)$$

Si le champ scalaire U ne dépend pas du temps, alors U est dit stationnaire et l'on a :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Exemples en physique : température, pression, potentiel électrostatique...

I.2 Champ vectoriel

Un champ vectoriel est une grandeur physique vectorielle qui dépend de la position dans l'espace et éventuellement du temps. A tout point $M(x, y, z)$ de l'espace est associé une valeur du champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z, t)$:

$$M(x, y, z) \mapsto \vec{A}(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + A_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + A_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$$

où A_x , A_y et A_z sont les composantes de \vec{A} , exprimées dans le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le champ vectoriel \vec{A} est dit stationnaire si :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial A_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Exemples en physique : champs de vitesse, d'accélération, électrique ...

II Circulation d'un champ vectoriel

Considérons le point $M(x, y, z)$, repéré dans le système de coordonnées cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ a pour expression : $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et sa variation infinitésimale $d\vec{r} = d\overrightarrow{OM}$ s'écrit comme (voir chapitre 2) :

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \quad (4.1)$$

II.1 Circulation élémentaire

Définition :

Pour un champ vectoriel \vec{A} et un déplacement élémentaire $d\vec{r}$, la *circulation élémentaire* $d\mathcal{C}$ est le scalaire défini par :

$$d\mathcal{C} = \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Remarque :

Si le champ vectoriel est un champ de force \vec{F} alors la circulation élémentaire correspond au travail élémentaire δW de la force au cours du déplacement élémentaire $d\vec{r}$: $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Exemple : circulation en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le champ vectoriel \vec{A} a pour expression :

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

et le déplacement élémentaire est rappelé par l'équation (4.1). La circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ a donc pour expression :

$$d\mathcal{C} = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

II.2 Circulation sur un déplacement fini

Définition :

Considérons une courbe Γ de l'espace à trois dimensions dont l'une des extrémités est le point $M_i(x_i, y_i, z_i)$ et l'autre est le point $M_f(x_f, y_f, z_f)$. La circulation \mathcal{C}_Γ du champ de vecteur \vec{A} de M_i à M_f le long du chemin Γ est définie par :

$$\mathcal{C}_\Gamma = \int_\Gamma d\mathcal{C} = \int_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Il s'agit d'une intégrale curviligne dont le résultat **dépend (en général) du chemin suivi** pour aller de M_i à M_f . Par exemple, sur la figure 4.1, on a en général : $\mathcal{C}_{\Gamma_1} \neq \mathcal{C}_{\Gamma_2}$.

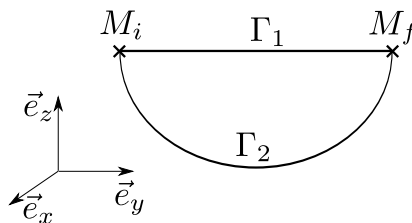


FIGURE 4.1 – Exemples de chemins pour aller de M_i à M_f

Si les extrémités du contour Γ sont confondues ($M_i = M_f$) alors la circulation le long de Γ est notée :

$$\mathcal{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Elle est **généralement non nulle** et dépend du contour Γ .

III Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

III.1 Surface orientée

La méthode pour calculer l'élément de surface $d\sigma$ a été détaillée au chapitre 3. Pour de nombreux phénomènes physiques l'élément de surface doit être orienté. Ainsi, on définit le *vecteur élément de surface* $\vec{d\sigma}$ tel que $\vec{d\sigma} = d\sigma \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface. L'orientation de \vec{n} , et donc de $\vec{d\sigma}$, dépend du type de surface.

Cas d'une surface fermée

Dans le cas d'une surface fermée, la convention est d'orienter le vecteur élément de surface vers l'extérieur de cette surface. Sur l'exemple de la figure 4.2, tous les vecteurs élément de surface sont orientés vers l'extérieur de la surface fermée (un cylindre de rayon R). On a, de plus, :

$$\begin{aligned} \vec{d\sigma}_1 &= d\sigma_1 \vec{e}_z = \rho d\rho d\phi \vec{e}_z \\ \vec{d\sigma}_2 &= d\sigma_2 (-\vec{e}_z) = -\rho d\rho d\phi \vec{e}_z \\ \vec{d\sigma}_3 &= d\sigma_3 \vec{e}_\rho = R d\phi dz \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

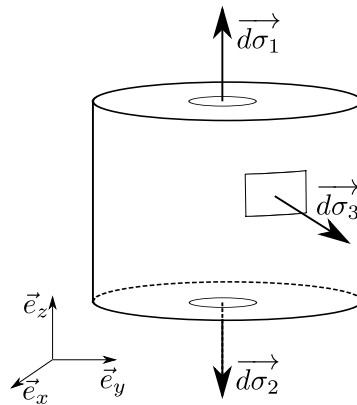


FIGURE 4.2 – Exemple de tracé des vecteurs élément de surface sur une surface fermée (cylindre)

Cas d'une surface limitée par un contour orienté

Si la surface s'appuie sur un contour fermé et orienté Γ , alors il convient d'orienter le vecteur élément de surface en appliquant la règle du tire-bouchon (voir figure 4.3a).

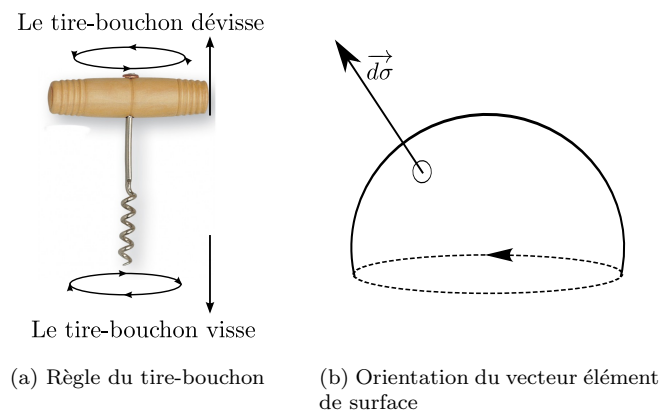


FIGURE 4.3 – Convention pour une surface fermée délimitée par un contour orienté

Sur l'exemple de la figure 4.3b, le tire bouchon dévisse et donc $\vec{d\sigma}$ est orienté vers l'extérieur de la surface.

Cas d'une surface quelconque

Dans le cas d'une surface quelconque, il n'y a pas de convention définie et on choisit *arbitrairement* l'orientation du vecteur élément de surface. Bien entendu, il faut respecter ce choix tout au long de la résolution du problème. Sur l'exemple de la figure 4.4, on a choisi d'orienter $\vec{d\sigma}$ suivant \vec{e}_z : $\vec{d\sigma} = d\sigma\vec{e}_z = dx dy \vec{e}_z$.

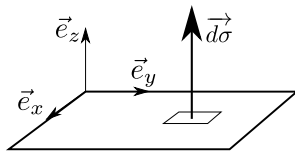


FIGURE 4.4 – Exemple de tracé du vecteur élément de surface sur une surface quelconque

III.2 Flux d'un champ vectoriel à travers une surface Σ

Définition :

Le *flux élémentaire* $d\Phi$ du champ vectoriel \vec{A} à travers l'élément de surface $\vec{d\sigma}$ est le *scalaire* :

$$d\Phi = \vec{A} \cdot \vec{d\sigma}$$

Le *flux* d'un champ vectoriel \vec{A} à travers la surface Σ est donné par :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} d\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{d\sigma}$$

Si la surface Σ est une surface fermée, le flux du champ vectoriel \vec{A} sortant de cette surface est noté :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{d\sigma}$$

IV Principaux opérateurs différentiels

IV.1 Gradient d'un champ scalaire

Définition :

Le *gradient* d'un champ scalaire U , noté $\overrightarrow{\text{grad}}U$, est un vecteur noté :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U \equiv \vec{\nabla}U$$

tel que :

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot \vec{dr} \quad (4.2)$$

En effet, la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables $U(x, y, z)$ s'écrit (voir chapitre 1) :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (4.3)$$

On considère un point $M(x, y, z)$, repéré dans le système de coordonnées cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'expression du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et de sa variation infinitésimale $\vec{dr} = d\overrightarrow{OM}$ ont été rappelées au paragraphe II et valent :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \\ \vec{dr} &= dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

En comparant les équations (4.3) et (4.4), on constate que la différentielle de U peut s'exprimer comme un produit scalaire :

$$\begin{aligned} dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{dr} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \vec{dr} \end{aligned}$$

On a fait apparaître le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

appelé *gradient* de U , et ici exprimé en coordonnées cartésiennes.

Propriété de linéarité

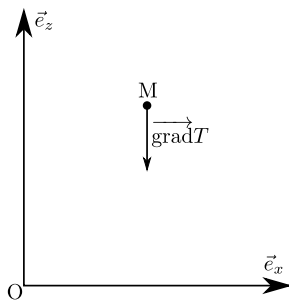
Soient U et V deux champs scalaires et a une constante. L'opérateur gradient est linéaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(aU) &= a \overrightarrow{\text{grad}} U \\ \overrightarrow{\text{grad}}(U + V) &= \overrightarrow{\text{grad}} U + \overrightarrow{\text{grad}} V \end{aligned}$$

Interprétation du gradient

Le gradient est la généralisation de la notion de dérivée aux trois dimensions de l'espace. De plus, la direction et le sens du vecteur gradient d'un champ scalaire en un point correspondent à la direction et au sens dans lesquels ce champ scalaire varie le plus en ce point. Le gradient est donc un vecteur qui indique la direction et le sens de variation du champ scalaire auquel il est appliqué.

Exemple : gradient à une dimension



Considérons l'atmosphère terrestre où la température en un point d'altitude z varie comme : $T(z) = T(0) - az$ où a est une constante positive. On a $\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{dT}{dz} \vec{e}_z = -a \vec{e}_z$. Ainsi, la direction de $\overrightarrow{\text{grad}} T$ indique que la température va varier suivant l'axe z . Le sens de $\overrightarrow{\text{grad}} T$ (suivant $-\vec{e}_z$) indique le sens de variation de la température : plus z diminue et plus T augmente.

On remarque, de plus, que lorsque le champ scalaire ne dépend que d'une variable (T ne dépend que de z) alors la norme du gradient est égale à la valeur absolue de la dérivée du champ scalaire par rapport à cette variable : $|\overrightarrow{\text{grad}} T| = \left| \frac{dT}{dz} \right|$.

Conséquence : Définition de la normale à une surface

Une équation du type $U(x, y, z) = cste$ définit une surface. Par exemple, les points de coordonnées (x, y, z) satisfaisant à l'équation $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (avec R une constante) définissent une sphère de centre O et de rayon R .

Considérons le déplacement infinitésimal \vec{dr} du point $M(x, y, z)$ sur une surface caractérisée par l'équation $U(x, y, z) = cste$. Il vient :

$$\begin{aligned} dU = d(cste) = 0 &\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \vec{dr} = 0 \quad \forall \vec{dr} \text{ sur la surface} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} U \perp \vec{dr} \end{aligned}$$

Ainsi le vecteur unitaire normal à la surface \vec{n} au point M de cette surface (caractérisée par $U(x, y, z) = cste$) s'exprime par :

$$\vec{n} = \pm \frac{\overrightarrow{\text{grad}} U(M)}{|\overrightarrow{\text{grad}} U(M)|}$$

où $\overrightarrow{\text{grad}} U(M)$ est le gradient de U évalué au point M . Suivant la convention choisie pour l'orientation de \vec{n} , on prendra le signe $+$ ou le signe $-$.

Circulation d'un champ vectoriel dérivant d'un champ scalaire : $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}U$

Si le champ vectoriel \vec{A} s'exprime à partir du gradient d'un champ scalaire U :

$$\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}U$$

on dit que le champ vectoriel \vec{A} dérive du champ scalaire U , ou que le champ vectoriel \vec{A} dérive du potentiel scalaire U (expression plus utilisée en physique). Dans ce cas particulier, la circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ du champ vectoriel \vec{A} s'exprime par :

$$d\mathcal{C} = \vec{A} \cdot d\vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot d\vec{r} = dU$$

d'après la définition (4.2). La circulation \mathcal{C}_Γ du champ vectoriel \vec{A} du point $M_i(x_i, y_i, z_i)$ au point $M_f(x_f, y_f, z_f)$ le long de Γ se simplifie en :

$$\mathcal{C}_\Gamma = \int_\Gamma d\mathcal{C} = \int_{M_i}^{M_f} dU = [U]_{M_i}^{M_f} = U(M_f) - U(M_i) = U(x_f, y_f, z_f) - U(x_i, y_i, z_i)$$

Dans ce cas, la circulation ne dépend pas du chemin suivi pour joindre les points M_i et M_f , mais seulement de la position de ces derniers.

Si les extrémités sont identiques ($M_i = M_f$), on a alors :

$$\mathcal{C} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} = U(M_i) - U(M_i) = 0 \quad \forall \Gamma$$

Attention, la réciproque n'est pas vraie :

$$\oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \Gamma \not\Rightarrow \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}U$$

Par exemple, la réaction du support \vec{R} est telle que : $\vec{R} \perp d\vec{r} \Rightarrow \vec{R} \cdot d\vec{r} = 0$ et donc : $\oint_\Gamma \vec{R} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \Gamma$ mais \vec{R} ne dérive pas d'un champ scalaire : $\nexists U$ tel que $\vec{R} = \overrightarrow{\text{grad}}U$.

IV.2 L'opérateur vectoriel nabla : $\vec{\nabla}$

La forme de l'expression du gradient d'un champ scalaire $U(x, y, z)$ en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

fait apparaître un opérateur vectoriel qui "agit" sur le champ $U(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \vec{\nabla}U = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) U(x, y, z)$$

Cet opérateur est appelé *nabla*. Il est noté $\vec{\nabla}$, et a déjà été discrètement introduit au paragraphe précédent dans la définition du gradient. Nabla n'est pas un vecteur, mais en présente de nombreuses caractéristiques. Il peut être multiplié par un scalaire et multiplié à un autre vecteur, *via* le produit scalaire ou vectoriel. Ces deux produits appliqués à un champ vectoriel vont définir la divergence et le rotationnel, abordés dans les paragraphes qui suivent.

Expressions de nabla $\vec{\nabla}$:

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.5)$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.6)$$

En coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4.7)$$

Expression du gradient en fonction de nabla

En utilisant les expressions de nabla des équations (4.5), (4.6) et (4.7), on peut développer l'expression du gradient d'un champ scalaire U dans les trois systèmes de coordonnées de l'espace à trois dimensions.

Coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}U(x, y, z) &= \overrightarrow{\nabla}U = \left[\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right] U \\ &= \vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}U(\rho, \phi, z) &= \overrightarrow{\nabla}U = \left[\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right] U \\ &= \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}U(r, \theta, \phi) &= \overrightarrow{\nabla}U = \left[\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] U \\ &= \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

Exemple : travail de la force gravitationnelle

Considérons un satellite de masse m en orbite autour de la Terre (masse M_T , rayon R_T) à une altitude h du sol.

Le système de coordonnées adapté à cet exemple et le système de coordonnées sphériques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. En effet, on considère un système dans lequel la force est radiale et ne dépend que de la distance entre les deux corps. Ainsi, si le centre du repère est le centre de gravité terrestre (associé à la masse M_T) alors la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r$$

avec $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ la constante de gravitation, et $r = R_T + h$.

Le travail élémentaire δW au cours du déplacement élémentaire \overrightarrow{dr} (exprimé en coordonnées sphériques) est donné par :

$$\begin{aligned}\delta W &= \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} \\ &= -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi) \\ &= -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} dr\end{aligned}$$

C'est une forme différentielle (voir chapitre 1, paragraphe V). On peut vérifier que c'est une différentielle totale exacte, et donc qu'il existe une fonction dont δW est la variation. Pour des questions de normalisation, on considère que δW est l'opposé de la variation de la fonction E_p , appelée l'énergie potentielle : $dE_p = \frac{dE_p}{dr} dr = -\delta W$. On a donc :

$$dE_p = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} dr \Rightarrow E_p = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r} + cste$$

La variation infinitésimale d'énergie potentielle étant par définition une différentielle totale, on peut donc aussi écrire que :

$$dE_p = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{r} \quad (4.8)$$

On a donc :

$$dE_p = -\delta W = -\vec{F} \cdot \vec{dr}$$

et par identification avec l'équation (4.8), on en déduit que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

La force gravitationnelle dérive d'une énergie potentielle.

Il est alors facile de calculer le travail W de la force gravitationnelle sur un trajet quelconque. En effet, le travail de \vec{F} pour déplacer le satellite d'un point A à un point B correspond à la circulation de \vec{F} le long du chemin parcouru de A vers B . Comme \vec{F} dérive d'un potentiel scalaire (l'énergie potentielle), sa circulation ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de la position des points de départ et d'arrivée. Par exemple, le travail au cours de la retombée du satellite au sol, qui correspond à la chute du point $M_i(R_T + h, 0, 0)$ au point $M_f(R_T, 0, 0)$, est donc :

$$\begin{aligned} W &= \int_{M_i}^{M_f} \vec{F} \cdot \vec{dr} \\ &= - \int_{R_T+h}^{R_T} dE_p \\ &= E_p(R_T + h) - E_p(R_T) \\ &= \mathcal{G}mM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right) \end{aligned}$$

IV.3 Divergence d'un champ vectoriel

Définition :

La *divergence* d'un champ vectoriel \vec{A} , notée $\text{div} \vec{A}$, est un scalaire défini par le produit scalaire entre l'opérateur $\vec{\nabla}$ et \vec{A} :

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (4.9)$$

Propriété de linéarité

Soient \vec{A} , \vec{B} deux champs vectoriels et a une constante. L'opérateur divergence est linéaire :

$$\begin{aligned} \text{div} (a\vec{A}) &= a \text{div} \vec{A} \\ \text{div} (\vec{A} + \vec{B}) &= \text{div} \vec{A} + \text{div} \vec{B} \end{aligned}$$

Expressions de la divergence

L'opérateur $\vec{\nabla}$ agit sur la totalité du vecteur \vec{A} : sur les coordonnées *et* sur les vecteurs de base. Ainsi, il faudra faire attention lors du calcul de la divergence si les vecteurs de base dépendent de la position (coordonnées cylindriques et sphériques). Le calcul du produit scalaire à partir des coordonnées est alors possible *uniquement* en coordonnées cartésiennes.

Il est évident que les expressions de la divergence ne sont pas à connaître par cœur. Cependant, il faut savoir les recalculer si nécessaire.

Coordonnées cartésiennes :

A partir de la définition de l'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes (x, y, z) (équation (4.5)) et de la définition de la divergence (équation (4.9)), l'expression de la divergence du champ vectoriel :

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

est donnée par :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\
&= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \\
&= \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \vec{e}_x + A_x \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_x}{\partial x}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \vec{e}_y + A_y \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_y}{\partial x}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{e}_z + A_z \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial x}}_{=\vec{0}} \right) \\
&+ \vec{e}_y \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \vec{e}_x + A_x \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_x}{\partial y}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \vec{e}_y + A_y \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_y}{\partial y}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{e}_z + A_z \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial y}}_{=\vec{0}} \right) \\
&+ \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \vec{e}_x + A_x \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_x}{\partial z}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \vec{e}_y + A_y \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_y}{\partial z}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{e}_z + A_z \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{=\vec{0}} \right) \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

Les vecteurs de base ne dépendant pas de la position, le calcul du produit scalaire pouvait être fait directement en utilisant les coordonnées.

Coordonnées cylindriques :

De la même manière, grâce à la définition de l'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) (équation (4.6)) et de la définition de la divergence (équation (4.9)), l'expression de la divergence du champ vectoriel :

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z$$

est donnée par :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\
&= \left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_\rho \vec{e}_\rho + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z) \\
&= \vec{e}_\rho \cdot \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + A_\rho \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \rho}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_z + A_z \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \rho}}_{=\vec{0}} \right) \\
&+ \frac{1}{\rho} \vec{e}_\phi \cdot \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \vec{e}_\rho + A_\rho \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi}}_{=\vec{e}_\phi} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}}_{=-\vec{e}_\rho} + \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{e}_z + A_z \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \phi}}_{=\vec{0}} \right) \\
&+ \vec{e}_z \cdot \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} \vec{e}_\rho + A_\rho \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial z}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{e}_z + A_z \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{=\vec{0}} \right) \\
&= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(A_\rho + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + A_\rho \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho A_\rho \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques :

De la même manière, grâce à la définition de l'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) (équation (4.7)) et de la définition de la divergence (équation (4.9)), l'expression de la divergence du champ vectoriel :

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ &= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \cdot (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi) \\ &= \vec{e}_r \cdot \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{e}_r + A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r}}_{=\vec{0}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \cdot \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{=-\vec{e}_\theta} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}}_{=-\vec{e}_r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta}}_{=\vec{0}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \cdot \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} \vec{e}_r + A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}}_{=\sin \theta \vec{e}_\phi} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \vec{e}_\theta + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi}}_{=\cos \theta \vec{e}_\phi} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}}_{=-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta} \right) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(A_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta A_r + \cos \theta A_\theta + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \\ &= 2 \frac{A_r}{r} + \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} A_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 A_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta A_\theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Interprétation de la divergence

On se propose de calculer le flux $\delta\Phi$ du champ vectoriel $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ à travers la surface fermée Σ présentée en figure 4.5. Cette surface délimite un volume : $d\tau = dx dy dz$. On rappelle que le

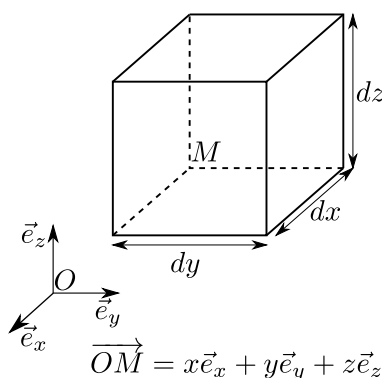


FIGURE 4.5 – Surface Σ délimitant le volume $d\tau$

flux élémentaire d'un champ \vec{A} à travers une surface élémentaire $d\vec{\sigma}$ s'écrit : $d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{\sigma}$. Ici, il s'agit d'une surface fermée, donc tous les vecteurs élément de surface sont orientés vers l'extérieur. Faisons le bilan des flux à travers les différentes faces de la surface Σ de la figure 4.5.

Selon \vec{e}_x :

$$A_x(x + dx, y, z) dy dz - A_x(x, y, z) dy dz = [A_x(x + dx, y, z) - A_x(x, y, z)] dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz$$

de même selon \vec{e}_y :

$$A_y(x, y + dy, z)dx dz - A_y(x, y, z)dx dz = [A_y(x, y + dy, z) - A_y(x, y, z)] dx dz = \frac{\partial A_y}{\partial y} dy dx dz$$

et selon \vec{e}_z :

$$A_z(x, y, z + dz)dx dy - A_z(x, y, z)dx dy = [A_z(x, y, z + dz) - A_z(x, y, z)] dx dy = \frac{\partial A_z}{\partial z} dz dx dy$$

Ainsi le flux à travers la surface Σ est donc :

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d\tau \\ &= \operatorname{div} \vec{A} d\tau \end{aligned}$$

On remarque donc que la divergence peut être interprétée comme une *densité volumique de flux*. Ainsi, suivant le signe de $\operatorname{div} \vec{A}$, on pourra savoir si le flux total à travers la surface Σ est dirigé vers l'extérieur ou l'intérieur de Σ . La divergence de \vec{A} au point M permet donc de déterminer si le point M se comporte comme un *point source* (le champ diverge¹ à partir du point M) ou comme un *puits* (le champ converge vers le point M) vis à vis du champ vectoriel \vec{A} . Cette notion est très importante en mécanique des fluides et en électromagnétisme par exemple.

IV.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

Définition :

Le rotationnel d'un champ vectoriel \vec{A} , noté $\vec{\operatorname{rot}} \vec{A}$, est un *vecteur* défini par :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (4.10)$$

Si le rotationnel d'un champ vectoriel est nul alors ce champ est qualifié d'irrotationnel.

Propriété de linéarité

Soient \vec{A} , \vec{B} deux champs vectoriels et a une constante. Le rotationnel est un opérateur linéaire :

$$\begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}} (a\vec{A}) &= a\vec{\operatorname{rot}} \vec{A} \\ \vec{\operatorname{rot}} (\vec{A} + \vec{B}) &= \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} + \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} \end{aligned}$$

Expressions du rotationnel

Les expressions du rotationnel ne sont pas à connaître par cœur mais à savoir redémontrer si nécessaire.

Coordonnées cartésiennes :

A partir de la définition de l'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes (x, y, z) (équation (4.5)) et de la définition du rotationnel (équation (4.10)), l'expression du rotationnel du champ vectoriel :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

1. D'où le terme *divergence*

est donnée par :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\
&= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \wedge (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \\
&= \vec{e}_x \wedge \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \vec{e}_x + A_x \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_x}{\partial x}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \vec{e}_y + A_y \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_y}{\partial x}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{e}_z + A_z \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial x}}_{=\vec{0}} \right) \\
&+ \vec{e}_y \wedge \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \vec{e}_x + A_x \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_x}{\partial y}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \vec{e}_y + A_y \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_y}{\partial y}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{e}_z + A_z \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial y}}_{=\vec{0}} \right) \\
&+ \vec{e}_z \wedge \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \vec{e}_x + A_x \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_x}{\partial z}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \vec{e}_y + A_y \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_y}{\partial z}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{e}_z + A_z \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{=\vec{0}} \right) \\
&= \frac{\partial A_y}{\partial x} \vec{e}_z - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{e}_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} \vec{e}_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial A_x}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial A_y}{\partial z} \vec{e}_x \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Les vecteurs de base ne dépendant pas de la position, le calcul du produit vectoriel pouvait être fait directement en utilisant les coordonnées (calcul en "colonne").

Coordonnées cylindriques :

De la même manière, grâce à la définition de l'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) (équation (4.6)) et de la définition du rotationnel (équation (4.10)), l'expression du rotationnel du champ vectoriel :

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z$$

est donnée par :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\
&= \left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \wedge (A_\rho \vec{e}_\rho + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z) \\
&= \vec{e}_\rho \wedge \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + A_\rho \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \rho}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_z + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \rho}}_{=\vec{0}} \right) \\
&+ \frac{1}{\rho} \vec{e}_\phi \wedge \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \vec{e}_\rho + A_\rho \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \phi}}_{=\vec{e}_\phi} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}}_{=-\vec{e}_\rho} + \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{e}_z + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \phi}}_{=\vec{0}} \right) \\
&+ \vec{e}_z \wedge \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} \vec{e}_\rho + A_\rho \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial z}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{e}_z + \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}}_{=\vec{0}} \right) \\
&= \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \vec{e}_z - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \vec{e}_z + A_\phi \vec{e}_z + \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \vec{e}_\rho \right) + \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \vec{e}_\phi - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \vec{e}_\rho \\
&= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} + A_\phi \right) \vec{e}_z \\
&= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho A_\phi \right] - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z
\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques :

De la même manière, grâce à la définition de l'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées sphériques (O, r, θ, ϕ) (équation (4.7)) et de la définition du rotationnel (équation (4.10)), l'expression du rotationnel du champ vectoriel :

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ &= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \wedge (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi) \\ &= \vec{e}_r \wedge \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} \vec{e}_r + A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r}}_{=\vec{0}} + \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r}}_{=\vec{0}} \right) \\ &+ \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \wedge \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{=-\vec{e}_\theta} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}}_{=-\vec{e}_r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta}}_{=\vec{0}} \right) \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \wedge \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} \vec{e}_r + A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}}_{=\sin \theta \vec{e}_\phi} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \vec{e}_\theta + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi}}_{=\cos \theta \vec{e}_\phi} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}}_{=-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta} \right) \\ &= \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{e}_\phi - \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{e}_\phi + A_\theta \vec{e}_\phi + \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \vec{e}_r \right) \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} \vec{e}_\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \vec{e}_r - \sin \theta A_\phi \vec{e}_\theta + \cos \theta A_\phi \vec{e}_r \right) \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} + \cos \theta A_\phi \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \left[r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} + A_\phi \right] \right) \vec{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + A_\theta \right) \vec{e}_\phi \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta A_\phi \right] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r A_\phi \right] \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[r A_\theta \right] - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

Interprétation du rotationnel

Comme son nom l'indique, le rotationnel caractérise "la rotation" d'un champ de vectoriel. Ainsi, la direction du rotationnel donne l'axe de rotation du champ vectoriel, son signe le sens de rotation autour de cet axe (règle du tire-bouchon) et sa norme est proportionnelle à la vitesse de rotation autour de cet axe. Le rotationnel est, en particulier, très utilisé en mécanique des fluides pour décrire les tourbillons (ou vortex) qui peuvent apparaître dans les écoulements (cuvette qui se vide par exemple).

Exemple : vecteur vorticité

Prenons par exemple le champ de vitesse \vec{v} représenté en figure 4.6 et qui a pour expression en coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$.

En mécanique des fluides, on définit le vecteur vorticité $\vec{\omega}$ par : $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\text{rot}} \vec{v}$. Calculons $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ &= -\vec{e}_z \end{aligned}$$

En utilisant la règle du tire bouchon, l'orientation de l'écoulement est bien selon $-\vec{e}_z$.

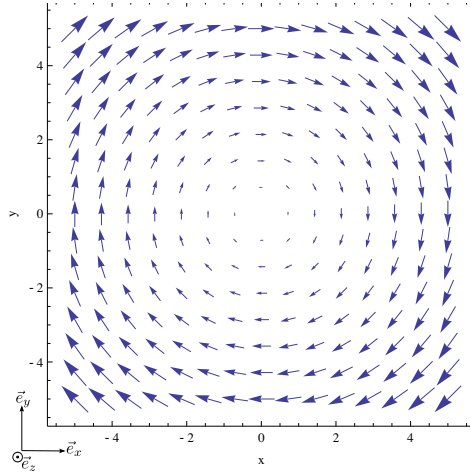


FIGURE 4.6 – Champ de vitesse défini par $\vec{v} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$

On peut aussi exprimer le champ de vitesse en coordonnées cylindriques : $\vec{v} = -\rho\vec{e}_\phi$ et on retrouve bien l'expression du vecteur vorticité :

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho v_\phi] - \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z \right] \\ &= \frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [-\rho^2] \vec{e}_z \\ &= -\vec{e}_z\end{aligned}$$

IV.5 Laplacien scalaire

Définition :

Le *laplacien* d'un champ scalaire U , noté ΔU , est un scalaire défini par :

$$\Delta U = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) \quad (4.11)$$

Propriété de linéarité

Soient U, V deux champs scalaires et a une constante. Le laplacien scalaire est linéaire :

$$\begin{aligned}\Delta(aU) &= a\Delta U \\ \Delta(U + V) &= \Delta U + \Delta V\end{aligned}$$

Expressions du laplacien scalaire

Les expressions du laplacien scalaire dans les différents systèmes de coordonnées sont données à titre indicatif.

Coordonnées cartésiennes :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Coordonnées cylindriques :

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques :

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

IV.6 Laplacien vectoriel

Définition :

Le laplacien d'un champ vectoriel \vec{A} , noté $\Delta \vec{A}$, est un vecteur défini par :

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\nabla} (\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{A}) - \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}) \quad (4.12)$$

Propriété de linéarité

Soient \vec{A} , \vec{B} deux champs vectoriels et a une constante. Le laplacien vectoriel est linéaire :

$$\begin{aligned} \Delta (a \vec{A}) &= a \Delta \vec{A} \\ \Delta (\vec{A} + \vec{B}) &= \Delta \vec{A} + \Delta \vec{B} \end{aligned}$$

Expression du laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes

On peut montrer qu'en coordonnées cartésiennes ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), le laplacien vectoriel du champ vectoriel $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ est donnée par :

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z$$

où ΔA_i est le laplacien scalaire de la coordonnée i .

Les expressions du laplacien vectoriel dans les autres systèmes de coordonnées étant complexes et peu utilisées (au cours du cursus universitaire), elles ne seront pas données ici.

V Propriétés et relations entre les opérateurs différentiels

V.1 Relations entre les opérateurs

Soient U, V deux champs scalaires et \vec{A} et \vec{B} deux champs vectoriels.

Gradient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} (UV) &= U \overrightarrow{\text{grad}} V + V \overrightarrow{\text{grad}} U \\ \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{grad}} U) &= \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Divergence

$$\begin{aligned} \text{div} (U \vec{A}) &= U \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U \\ \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) &= \text{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Rotationnel

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(U\vec{A}) &= U\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}U \wedge \vec{A} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A} \text{div}\vec{B} - \vec{B} \text{div}\vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\nabla})\vec{B} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) &= \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

Laplacien scalaire

$$\begin{aligned}\Delta(UV) &= U\Delta V + V\Delta U + 2\overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{\text{grad}}V \\ \Delta(\text{div}\vec{A}) &= \text{div}(\Delta\vec{A}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\Delta U) &= \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

Laplacien vectoriel

$$\begin{aligned}\Delta(U\vec{A}) &= U\Delta\vec{A} + \vec{A}\Delta U + 2(\overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \overrightarrow{\nabla})\vec{A} \\ \Delta(\overrightarrow{\text{grad}}U) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\Delta U) \\ \Delta(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) &= \overrightarrow{\text{rot}}(\Delta\vec{A}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\vec{A}) &= \Delta\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

V.2 Identités de Poincaré

Première identité

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}U) = \vec{0}$$

En conséquence : si $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists U$ tel que $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}U$
 U est alors appelé le *potentiel scalaire* de \vec{A} .

Deuxième identité

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = 0$$

En conséquence : si $\text{div}\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$
 \vec{A} est alors appelé le *potentiel vecteur* de \vec{B} .

Exemple : équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide

La propagation d'une onde électromagnétique (champ électrique \vec{E} et champ magnétique \vec{B}) dans le vide et en l'absence de source est décrite par les équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.13)$$

$$\text{div}\vec{E} = 0 \quad (4.14)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (4.15)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.16)$$

Nous allons exprimer les équations de propagation des champs électriques et magnétiques dans le vide. Appliquons l'opérateur rotationnel aux membres de l'équation (4.13) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

En appliquant les propriétés de l'opérateur rotationnel, il vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right)$$

En introduisant le laplacien vectoriel (équation (4.12)), il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{E} \right) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right)$$

En utilisant les équations (4.14) et (4.16), on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} 0 - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \implies \Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.17)$$

De la même manière, en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (4.16) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right) &= \overrightarrow{\text{rot}} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) \end{aligned}$$

et en utilisant les équations (4.12), (4.13) et (4.15) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\underbrace{\text{div} \vec{B}}_{=0} \right) - \Delta \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \implies \Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.18)$$

Les équations (4.17) et (4.18) sont des équations de d'Alembert. Elles régissent la propagation dans le vide d'une onde électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) se déplaçant à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Or la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide étant la vitesse de la lumière dans le vide c , on a donc : $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

V.3 Théorèmes intégraux

Théorème de Stokes :

Soient Σ une surface ouverte limitée par le contour fermé Γ , \vec{dr} l'élément de parcours de Γ et $\vec{d\sigma}$ l'élément de surface dirigé suivant le sens direct relié au sens de parcours de Γ (règle du tire-bouchon). Alors la circulation du champ vectoriel \vec{A} sur le contour Γ est égale au flux du rotationnel de \vec{A} à travers Σ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{dr} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{d\sigma}$$

Théorème de Green-Ostrogradski (théorème de la divergence) :

Soient τ un volume délimité par une surface fermée Σ , $d\tau$ l'élément de volume et $\vec{d\sigma}$ l'élément de surface dirigé vers l'extérieur de Σ . Alors le flux du champ vectoriel \vec{A} à travers Σ est égal à l'intégrale de la divergence de \vec{A} sur le volume τ :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{d\sigma} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{A} d\tau$$

Exemple 1 : théorème de Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss donne l'expression de la divergence du champ électrique et s'écrit, en présence d'une densité volumique de charge ρ :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Considérons une surface fermée Σ délimitant un volume τ de cette densité de charge ρ . La charge Q_{int} présente dans le volume τ est donnée par :

$$Q_{int} = \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

En introduisant l'équation de Maxwell-Gauss, on a :

$$Q_{int} = \epsilon_0 \iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{E} d\tau$$

et en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$Q_{int} = \epsilon_0 \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma}$$

On vient ici d'exprimer le théorème de Gauss : *le flux du champ électrostatique créé par une distribution de charge, à travers une surface fermée Σ quelconque, est proportionnel à la charge totale intérieure Q_{int} à cette surface :*

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Exemple 2 : potentiel électrostatique d'une sphère uniformément chargée en volume

Cet exemple illustre plusieurs notions du cours de RPP.

Considérons une sphère de rayon R et de charge Q uniformément chargée en volume. Le centre de cette sphère correspondant au centre du repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On se propose de calculer le potentiel électrostatique V en tout point M de l'espace, c'est à dire à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

Le problème est à symétrie sphérique : la distribution de charge est une sphère. On utilisera évidemment le système de coordonnées sphériques pour résoudre le problème. D'après le principe de Curie, qui stipule que les symétries des causes se retrouvent dans les effets, le potentiel V doit avoir des propriétés spatiales qui reflètent la symétrie sphérique de la distribution de charge qui le crée. En conséquence, le potentiel V ne dépend que de la distance r au centre de la sphère :

$$V(r, \theta, \phi) = V(r)$$

Une des propriétés fondamentales du champ électrostatique \vec{E} est qu'il dérive du potentiel scalaire V : $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$. En appliquant la définition du gradient en coordonnées sphériques, on a :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= - \left(\frac{\partial V(r)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V(r)}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right) \\ &= - \frac{dV(r)}{dr} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Le champ électrostatique est donc radial : $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{e}_r$, et si on connaît \vec{E} , on peut directement en déduire V .

Nous allons utiliser le théorème de Gauss reliant le flux du champ électrostatique \vec{E} à travers une surface fermée Σ à la charge Q_{int} contenue dans le volume τ délimité par Σ pour extraire \vec{E} :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d\sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Dans un premier temps, considérons comme surface Σ_1 (appelée surface de Gauss), une sphère de rayon $r \leq R$. La charge contenue Q_{int}^1 dans cette sphère (de volume τ_1) est donnée par :

$$Q_{int}^1 = \iiint_{\tau_1} \rho d\tau$$

où ρ est la densité volumique de charge $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, et $d\tau = r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi$ est l'élément de volume en coordonnées sphériques. Comme ρ ne dépend pas de r , on peut directement écrire :

$$\begin{aligned} Q_{int}^1 &= \rho \iiint_{\tau_1} d\tau \\ &= \rho \int_{r'=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r'^2 dr' \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \rho \left[\frac{r'^3}{3} \right]_0^r [-\cos\theta]_0^{\pi} [\phi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \\ &= Q \frac{r^3}{R^3} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Au passage, on vient de démontrer que le volume d'une sphère de rayon r est : $\frac{4}{3}\pi r^3$. Appliquons le théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q_{int}^1}{\epsilon_0}$$

Le vecteur élément de surface (orienté vers l'extérieur car la surface est fermée) est donné par :

$$d\vec{\sigma} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{e}_r$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} E(r) r^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= E(r) r^2 [-\cos\theta]_0^{\pi} [\phi]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi r^2 E(r) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Au passage, on vient de démontrer que la surface d'une sphère de rayon r est : $4\pi r^2$. En combinant les équations (4.19) et (4.20), on déduit que :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}^1}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

Et le potentiel $V(r)$ est donné par :

$$-\frac{dV(r)}{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \implies V(r) = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} + cste$$

A l'intérieur de la sphère ($r \leq R$), on a donc :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{e}_r \text{ et } V(r) = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} + cste$$

Considérons maintenant comme surface de Gauss Σ_2 une sphère de rayon $r \geq R$. La charge contenue dans le volume délimitée par cette sphère est alors : $Q_{int}^2 = Q$. De la même manière, en appliquant le théorème de Gauss, on en déduit :

$$\oiint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q_{int}^2}{\epsilon_0} \implies 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Le champ électrique à l'extérieur de la sphère est donc de la forme : $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, et le potentiel électrostatique à l'extérieur de la sphère est donné par :

$$-\frac{dV(r)}{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \implies V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste'$$

Le potentiel étant nul à l'infini, on a : $V(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow cste' = 0$. De plus, le potentiel est continu à la traversée de la sphère (en $r = R$) :

$$-\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} + cste = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \implies cste = \frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

On en déduit le potentiel en tout point de l'espace :

$$V(r \leq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right)$$
$$V(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Annexe A

Quelques rappels sur le calcul vectoriel

Les notions de direction et de sens sont indispensables pour représenter certaines grandeurs physiques, comme la vitesse ou l'accélération. La description de ces grandeurs physiques doit faire appel à un élément mathématique qui tient compte de ces propriétés : le *vecteur*.

La description mathématique rigoureuse et complète des vecteurs s'effectue dans le cadre des espaces vectoriels. Nous adoptons dans ce chapitre une approche pragmatique de l'utilisation des vecteurs dans les cas les plus courants des phénomènes physiques : celui des espaces vectoriels à trois dimensions.

I Ensemble des vecteurs

I.1 Rappels et définitions

Scalaire

Un *scalaire* est une quantité entièrement déterminée par sa valeur numérique. La masse, la température *etc...*, sont des exemples de grandeurs physiques scalaires.

Bipoint

Dans l'espace géométrique à trois dimensions, deux points A et B peuvent former un segment orienté, noté $[\overrightarrow{AB}]$, si on suppose que le segment $[AB]$ a une origine (le point A) et une extrémité (le point B). Le segment orienté $[\overrightarrow{AB}]$ est aussi appelé *bipoint* (A, B) et peut être caractérisé par :

- son support : la droite (AB)
- son sens : de A vers B
- sa longueur : AB
- son origine : A

Vecteur

Un *vecteur* est un bipoint qui n'est pas "attaché" à son origine. La position du vecteur dans l'espace n'est pas nécessaire pour le caractériser. Un vecteur \vec{v} est donc une grandeur mathématique caractérisée par :

- sa direction
- son sens
- sa longueur, appelée sa *norme*, et notée $|\vec{v}|$

Deux vecteurs sont donc égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme. Citons quelques vecteurs particuliers :

- $\vec{0}$: vecteur nul, de norme nulle, $|\vec{0}| = 0$
- \vec{e} : vecteur unitaire, de norme égale à un, $|\vec{e}| = 1$
- $-\vec{v}$: vecteur de même direction, de même norme mais de sens opposé au vecteur \vec{v}

I.2 Opérations sur les vecteurs

I.2.a Addition

La somme de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est un vecteur de même dimension que \vec{a} et \vec{b} :

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

On dit que l'addition est une *loi de composition interne* dans la mesure où son résultat ne sort pas de l'espace vectoriel auquel appartiennent les vecteurs auxquels elle est appliquée.

Sur la figure (A.1), le vecteur \vec{a} part du point O et mène au point A . Le vecteur \vec{b} , situé n'importe où dans l'espace, est ramené au point A : un vecteur \vec{b}' de même direction, de même sens et de même norme que \vec{b} , donc égal à \vec{b} , part du point A et mène au point B . Le vecteur somme \vec{c} part du point O et mène directement au point B .

Relation de Chasles :

La relation de Chasles traduit l'interprétation géométrique de l'addition de deux vecteurs :

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \quad (\text{A.1})$$

En conséquence, on construit le vecteur $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ comme la diagonale du parallélogramme formé par les vecteurs \vec{a} et \vec{b} .

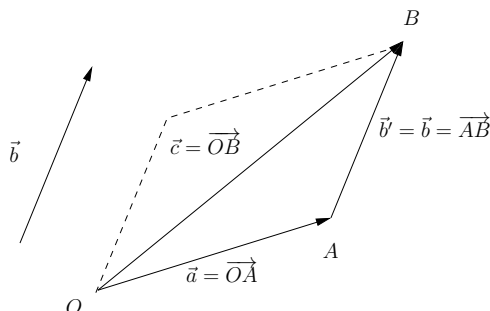


FIGURE A.1 – Représentation de la relation de Chasles (équation (A.1))

Propriétés

L'addition de deux vecteurs a les propriétés suivantes :

- c'est une opération interne (le résultat est toujours un vecteur)
- elle est commutative : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- elle est associative : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- elle possède un élément neutre $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- tout élément a un symétrique tel que l'addition d'un vecteur et de son symétrique soit égale à l'élément neutre : $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

I.2.b Multiplication par un scalaire

Si λ est un scalaire, le vecteur :

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

est un vecteur *colinéaire* à \vec{a} , c'est à dire de même direction, et tel que :

$$|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

Propriétés

La multiplication d'un vecteur par un scalaire a les propriétés suivantes :

- elle est associative : $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$
- elle est distributive par rapport à l'addition : $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- elle possède un élément neutre 1 : $1\vec{a} = \vec{a}$

I.2.c Notion d'espace vectoriel

Définition :

L'ensemble \mathcal{E} des vecteurs, muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire ayant les propriétés décrites dans les paragraphes (I.2.a) et (I.2.b) est un *espace vectoriel*.

La notion d'espace vectoriel est utilisée en mathématiques. Ses applications dépassent le cadre de ce cours. Nous n'aborderons ici que les aspects pratiques de ses propriétés.

I.3 Les bases

I.3.a Combinaison linéaire

On dit qu'un vecteur \vec{b} est une combinaison linéaire des n vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, si on peut trouver n coefficients scalaires, notés $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tels qu'on puisse écrire :

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

I.3.b Vecteurs linéairement dépendants et indépendants

Un ensemble de n vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ est dit linéairement dépendant s'il est possible de trouver n coefficients scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, qui ne soient pas tous nuls et qui permettent d'écrire :

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad (\text{A.2})$$

En revanche, si la seule façon d'obtenir la relation (A.2) est d'avoir tous les coefficients λ_i nuls, alors l'ensemble des vecteurs \vec{a}_i est dit *linéairement indépendant*.

I.3.c Bases et Repères

Dans l'espace à trois dimensions qui nous entoure, et dans lequel on décrit les phénomènes physiques, on peut choisir trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, pour former une *base*. Tout vecteur de l'espace à trois dimensions \vec{b} va pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire des trois vecteurs de la base :

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$$

Les coefficients scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 sont appelés les *coordonnées*, ou *composantes*, du vecteur \vec{b} sur la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. On note usuellement :

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Exemple dans l'espace à deux dimensions

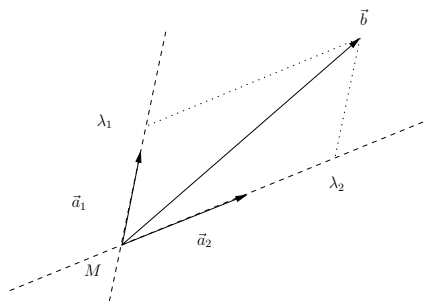


FIGURE A.2 – Construction des coordonnées sur une base quelconque de l'espace à deux dimensions

Les vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 définissent deux directions, et sont tracés en partant d'un même point quelconque M . Un vecteur \vec{b} , ramené au point M , peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base (\vec{a}_1, \vec{a}_2) :

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

Les coefficients λ_1 et λ_2 sont obtenus par projection du vecteur \vec{b} sur les directions définies par les vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 de la base, parallèlement aux directions définies par \vec{a}_2 et \vec{a}_1 respectivement.

La notion de base se généralise aux espaces à n dimensions, et on peut montrer qu'une base doit comporter autant de vecteurs linéairement indépendants que l'espace a de dimensions. Dans ce cas, tout vecteur de l'espace à n dimensions peut s'écrire comme une combinaison linéaire des n vecteurs de la base.

On peut distinguer deux bases particulières :

- **la base orthogonale** : les vecteurs de la base orthogonale sont orthogonaux deux à deux,
- **la base orthonormale** : les vecteurs de la base orthonormale sont orthogonaux deux à deux et unitaires, *i.e.* de norme égale à un. Ils sont habituellement notés $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

À partir d'une base et d'un point O , choisi arbitrairement comme origine, on construit un *repère*. Dans l'espace à trois dimensions, le repère cartésien global est par exemple construit à partir du point O et de la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tout vecteur \vec{a} de l'espace à trois dimensions peut donc s'écrire comme une combinaison des trois vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans le repère cartésien :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Dans ce contexte, on note habituellement les coordonnées a_x , a_y et a_z , au lieu de λ_i .

I.3.d Opérations sur les coordonnées

Les opérations d'addition de vecteurs, et de multiplication d'un vecteur par un scalaire peuvent s'exprimer en termes des coordonnées des vecteurs sur une base choisie. Dans l'espace à trois dimensions, on choisit la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère cartésien. Sur cette base, les deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} s'écrivent :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire les opérations en termes des coordonnées :

Addition :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire λ :

$$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

Relation de Chasles et coordonnées

On considère une pyramide de base carrée, comme illustrée sur la figure (A.3). Dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées des points A, B, C, D qui forment la base carrée de la pyramide sont données par $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$, $C = (-a, 0, 0)$ et $D = (0, -a, 0)$, avec a un scalaire quelconque. Le sommet de la pyramide correspond au point H de coordonnées $H = (0, 0, h)$.

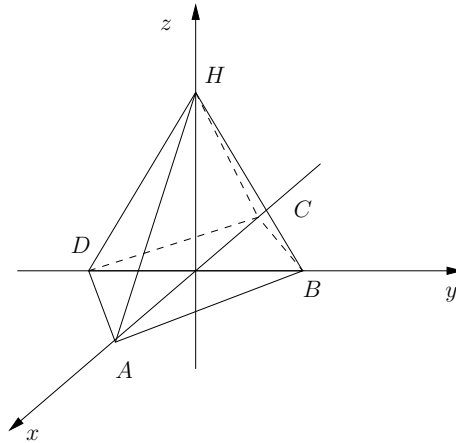


FIGURE A.3 – Pyramide de base carrée $ABCD$ et de sommet H

Les vecteurs associés aux arêtes de la pyramide peuvent être calculés à l'aide de la relation de Chasles. Par exemple, le vecteur \vec{AH} , qui part du point A et mène au point H , peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\vec{AH} &= \vec{OH} - \vec{OA} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ h \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemple de mécanique

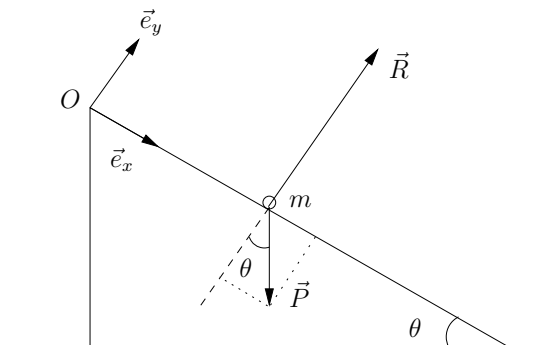


FIGURE A.4 – Schéma d'une masse m , sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale.

Une masse m , supposée ponctuelle, est placée sur un plan incliné. Si on néglige les frottements, la masse subit deux forces : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, qui est dû à la gravité, et \vec{R} la réaction du support, normale au plan incliné. On souhaite appliquer le principe fondamental de la dynamique, pour connaître l'expression de \vec{R} :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}$$

où \vec{a} est l'accélération de la masse.

Le principe fondamental de la dynamique est une équation vectorielle. On choisit donc un repère pour avoir accès aux équations sur les coordonnées des vecteurs. On est dans un espace à deux dimensions, la base de l'espace ne doit donc contenir que deux vecteurs indépendants. On choisit l'origine du repère en haut du plan incliné, et les vecteurs de base \vec{e}_x et \vec{e}_y parallèle et perpendiculaire au plan incliné respectivement (voir figure (A.4)).

Dans son mouvement, la masse ne peut pas décoller du plan incliné, ni s'enfoncer dans sa surface. Le vecteur accélération n'a donc pas de composante suivant \vec{e}_y et peut s'écrire :

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

La réaction du support est perpendiculaire au plan incliné, et n'a donc qu'une seule composante suivant \vec{e}_y :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_y \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du poids sont déterminées par projection du vecteur \vec{P} sur les directions fixées par la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) :

$$\vec{P} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ -mg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \end{pmatrix}$$

Finalement, la principe fondamental de la dynamique peut se réécrire :

$$\vec{F}_{ext} = \vec{R} + \vec{P} = \begin{pmatrix} mg \sin \theta \\ R_y - mg \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation sur les coordonnées dans la direction y permet d'exprimer la valeur de la réaction du support :

$$R_y - mg \cos \theta = 0$$

La condition d'équilibre de la masse sur le plan incliné donne donc : $R = mg \cos \theta$

II Produit scalaire

II.1 Définition

Définition géométrique :

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est un nombre, *i.e.* un *scalaire*, défini de façon géométrique par la relation :

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \tag{A.4}$$

où $\theta = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ est l'angle entre les vecteurs \vec{a} et \vec{b} , et $|\vec{a}|$ et $|\vec{b}|$ sont les normes (longueurs) des vecteurs \vec{a} et \vec{b} .

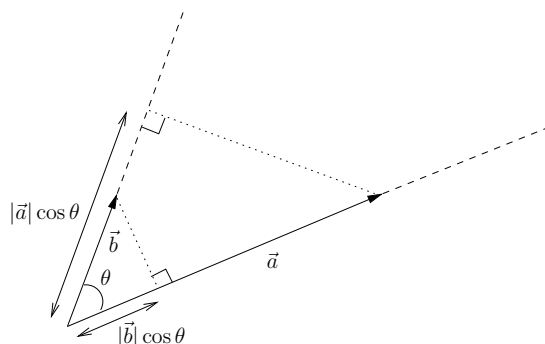


FIGURE A.5 – Interprétation géométrique du produit scalaire.

Interprétation géométrique

La figure (A.5) illustre l'interprétation géométrique de la définition du produit scalaire :

- c est égal à la projection de \vec{a} sur la direction définie par \vec{b} , multipliée par la norme de \vec{b} ,
- c est aussi égal à la projection de \vec{b} sur la direction définie par \vec{a} , multipliée par la norme de \vec{a} .

Coordonnées

En conséquence, si \vec{a} est unitaire, c est la projection de \vec{b} sur \vec{a} multipliée par 1 : c'est la coordonnée de \vec{b} sur \vec{a} . En se plaçant dans le repère cartésien, on obtient donc les coordonnées d'un vecteur quelconque \vec{v} sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en faisant :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\begin{cases} v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} \\ v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} \\ v_z = \vec{v} \cdot \vec{k} \end{cases}}$$

II.2 Propriétés

La définition (A.4) permet de déduire les propriétés suivantes, associées au produit scalaire :

– si \vec{a} et \vec{b} sont colinéaires alors $\theta = 0$ et :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

– si \vec{a} et \vec{b} sont orthogonaux alors $\theta = \pm\pi/2$ et :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

– le produit scalaire est commutatif :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

– il est également distributif :

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \mu \vec{a} \cdot \vec{c}$$

– et associatif :

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$$

pour tout scalaire μ et λ .

II.3 Utilisation des coordonnées

En se plaçant dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace géométrique à trois dimensions, on considère les vecteurs \vec{a} et \vec{b} :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

En utilisant les propriétés de commutativité et de distributivité du produit scalaire de \vec{a} et \vec{b} , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} \\ &\quad + (a_y b_x + a_x b_y) \vec{i} \cdot \vec{j} + (a_z b_x + a_x b_z) \vec{i} \cdot \vec{k} + (a_y b_z + a_z b_y) \vec{k} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée donc $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ et les vecteurs \vec{i} , \vec{j} , et \vec{k} sont orthogonaux deux à deux : $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$. Par conséquent :

Produit scalaire et coordonnées :

Le produit scalaire peut s'écrire en termes des coordonnées des vecteurs \vec{a} et \vec{b} de la façon suivante :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{A.5})$$

II.4 Norme d'un vecteur

L'expression de la norme d'un vecteur \vec{a} se déduit directement de la définition (A.4) du produit scalaire, et de l'équation (A.5) qui exprime ce dernier en fonction des coordonnées des vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 \\ &= |\vec{a}|^2 \\ &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\end{aligned}$$

Norme et coordonnées :

La norme d'un vecteur \vec{a} s'exprime en termes de ses coordonnées a_x , a_y et a_z sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la façon suivante :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Exemple

On considère à nouveau la pyramide représentée sur la figure (A.3). Pour obtenir l'angle $\theta = \widehat{AHB}$ entre les arêtes HA et HB on utilise la relation :

$$\theta = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}}{|\overrightarrow{HA}| |\overrightarrow{HB}|} \right)$$

Les vecteurs \overrightarrow{HA} et \overrightarrow{HB} sont donnés par :

$$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}$$

et :

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -h \end{pmatrix}$$

On en déduit la norme des vecteurs \overrightarrow{HB} et \overrightarrow{HA} :

$$|\overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{HA}| = \sqrt{a^2 + h^2}$$

et le produit scalaire :

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = h^2$$

pour finalement obtenir :

$$\theta = \arccos \left(\frac{h^2}{h^2 + a^2} \right)$$

III Produit vectoriel

III.1 Définition

Définition géométrique :

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} est un vecteur \vec{c} , perpendiculaire au plan défini par \vec{a} et \vec{b} et dont le sens est défini par le trièdre direct $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. On l'écrit :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

Sa norme est définie de façon géométrique par la relation :

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta \tag{A.6}$$

où $\theta = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ est l'angle entre les vecteurs \vec{a} et \vec{b} , et $|\vec{a}|$ et $|\vec{b}|$ sont les normes des vecteurs \vec{a} et \vec{b} .

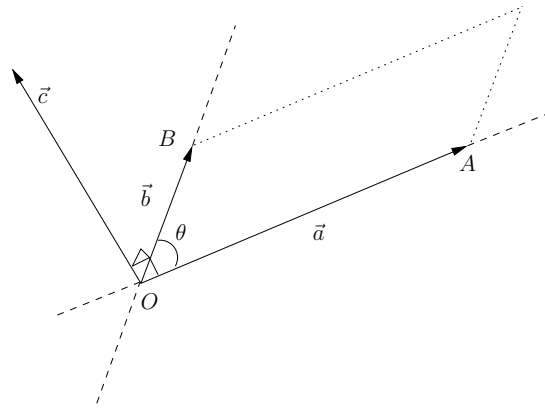


FIGURE A.6 – Construction géométrique du produit vectoriel.

Interprétation géométrique

La figure (A.6) illustre la construction géométrique du produit vectoriel. Comme $|\vec{b}| \cdot \sin \theta$ est la hauteur du triangle OAB , la norme du produit vectoriel $|\vec{c}|$ est égale à l'aire du parallélogramme bâti sur les vecteurs \vec{a} et \vec{b} . Le sens du vecteur \vec{c} est déterminé par le sens du trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ selon la méthode dite "de la main droite" illustrée sur la figure (A.7).

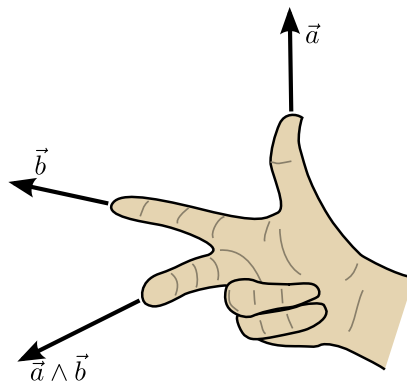


FIGURE A.7 – La règle "de la main droite" permet de déterminer le sens du produit vectoriel de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} : le pouce, l'index et le majeur sont disposés de sorte à former un trièdre direct. Le pouce pointe dans la direction du vecteur \vec{a} , l'index dans celle de \vec{b} et le majeur indique finalement la direction du produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Base des coordonnées cartésiennes

La base orthonormée du repère cartésien $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a été définie au paragraphe (I.3.c). C'est une base *directe* par construction car elle vérifie :

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \end{aligned}$$

III.2 Propriétés

La définition du produit vectoriel permet de déduire les propriétés suivantes :

– si \vec{a} et \vec{b} sont colinéaires alors $\theta = 0$ et :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$$

et par conséquent $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$,

– si \vec{a} et \vec{b} sont orthogonaux alors $\theta = \pi/2$ et :

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

– le produit vectoriel est anticommutatif :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

car intervertir \vec{a} et \vec{b} revient à changer le signe de θ ,

– il est également distributif :

$$\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda \vec{a} \wedge \vec{b} + \mu \vec{a} \wedge \vec{c}$$

pour tout scalaire μ et λ .

III.3 Utilisation des coordonnées

En se plaçant dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace géométrique à trois dimensions, on considère les vecteurs \vec{a} et \vec{b} :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Les propriétés d'anticommutativité et de distributivité du produit vectoriel de \vec{a} et \vec{b} permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{e}_z) \wedge (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= a_x b_x \vec{i} \wedge \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \wedge \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \wedge \vec{k} \\ &\quad + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{i} \wedge \vec{j} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{k} \wedge \vec{i} + (a_y b_z - a_z b_y) \vec{j} \wedge \vec{k} \end{aligned}$$

La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est telle que :

$$\begin{cases} |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \\ \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$$

car les vecteurs \vec{i} , \vec{j} , et \vec{k} sont normés et orthogonaux deux à deux. Par conséquent :

Produit vectoriel et coordonnées :

Le produit vectoriel peut s'écrire en termes des coordonnées des vecteurs \vec{a} et \vec{b} de la façon suivante :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

La force de Lorentz

Une particule chargée, de charge q , se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un espace où règne un champ magnétique \vec{B} subit une force appelée force de Lorentz, donnée par :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Typiquement, on trouve des espaces où règnent des champs magnétiques sur la plupart des installations accélératrices de particules ou d'ions (cyclotrons, synchrotrons *etc...*). Ces installations sont équipées d'aimants ou de bobines qui créent des zones de champ magnétique. Lorsqu'elles traversent ces zones, les particules subissent la force de Lorentz.

Si on se place dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et qu'on suppose la vitesse \vec{v} dirigée suivant (Ox) et de norme v , tandis que le champ \vec{B} est dirigé suivant (Oz) et est de norme B , la force de Lorentz prend la forme :

$$\vec{F} = q \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 \\ -vB \\ 0 \end{pmatrix} = -qvB \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -qvB \vec{e}_y$$

Dans ce cas, l'amplitude de la force de Lorentz vaut donc qvB et la force est dirigée suivant les y négatifs.

Notons qu'on retrouve l'expression de la norme du produit vectoriel, définie par (A.6), à partir de l'expression (A.7) :

$$\begin{aligned}
|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 &= (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\
&= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

On voit apparaître dans le développement ci-dessus l'expression du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ où θ est l'angle entre les deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} . On utilise également la relation trigonométrique $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$. Finalement on obtient :

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

Aire d'un triangle

L'aire du triangle AHB appartenant à la pyramide de la figure(A.3) est directement donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{AHB} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{HB} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -h \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} ha \\ ha \\ a^2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} (2h^2 a^2 + a^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} a (2h^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Double produit vectoriel

En appliquant l'expression (A.7), on montre que le double produit vectoriel entre trois vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} est un vecteur appartenant au plan défini par les vecteurs \vec{b} et \vec{c} qui vérifie :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (\text{A.8})$$

On effectue tout d'abord le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{c}$, et ensuite celui avec \vec{a} :

$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ b_z c_x - b_x c_z \\ b_x c_y - b_y c_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z) \\ a_z (b_y c_z - b_z c_y) - a_x (b_x c_y - b_y c_x) \\ a_x (b_z c_x - b_x c_z) - a_y (b_y c_z - b_z c_y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_x (a_y c_y + a_z c_z + a_x c_x) - c_x (a_y b_y + a_z b_z + a_x c_x) \\ b_y (a_z c_z + a_x c_x + a_y c_y) - c_y (a_z b_z + a_x b_x + a_y b_y) \\ b_z (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_z (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \end{pmatrix} \\
&= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \\
&= \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})
\end{aligned}$$

L'astuce pour obtenir le résultat final est de faire apparaître le produit scalaire. Par exemple, pour la première coordonnée, on *ajoute* le terme $0 = b_x a_x c_x - b_x a_x c_x$.

Notons que l'ordre dans lequel le double produit vectoriel est effectué est important : la relation $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ est *fausse*. On montre en fait, en utilisant la propriété d'antisymétrie du produit vectoriel et l'équation (A.8), que :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = -\vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}$$

Il est alors évident que les deux doubles produits vectoriels $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ et $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ sont en général différents, puisque le premier est la somme de deux vecteurs parallèles à \vec{b} et \vec{c} , tandis que le second est la somme de deux vecteurs parallèles à \vec{a} et \vec{b} .

IV Produit mixte

IV.1 Définition

Définition géométrique :

Le produit mixte de trois vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} est le produit scalaire entre le vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et le vecteur \vec{c} :

$$\mathcal{V} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

C'est un *scalaire*. Il peut se noter :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Interprétation géométrique

Le produit mixte de trois vecteurs est lié au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} . Le volume d'un parallélépipède \mathcal{V} est égal au produit de l'aire de sa base \mathcal{A} par sa hauteur h .

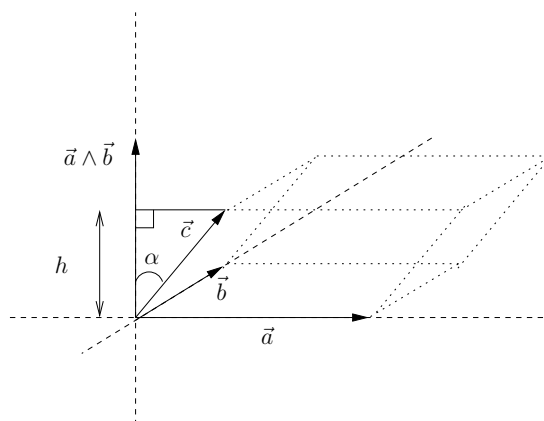


FIGURE A.8 – Parallélépipède construit à partir des trois vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c}

Considérons le parallélépipède formé par les vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} représentés sur la figure (A.8). Sa base correspond au parallélogramme formé par les vecteurs \vec{a} et \vec{b} , donc :

$$\mathcal{A} = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$$

La hauteur h est égale à la projection du vecteur \vec{c} sur la normale au plan contenant la base du parallélépipède. On a vu au paragraphe II que la projection d'un vecteur sur une droite (*i.e.* sa coordonnée) est donnée par le produit scalaire entre ce vecteur et le vecteur unitaire directeur de la droite. Le vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est normal au plan de la base. Le vecteur unitaire dirigeant la normale est donc :

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}$$

La projection du vecteur \vec{c} sur la normale est donc égale à :

$$h = \vec{c} \cdot \vec{n} = |\vec{c}| \cos \alpha \tag{A.9}$$

avec α l'angle entre \vec{c} et \vec{n} . Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\cdot|\vec{c}|\cos\alpha \\ &= |\vec{a}\wedge\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\alpha \\ &= \underbrace{|\vec{a}\wedge\vec{b}|}_{\vec{a}\wedge\vec{b}}\cdot\vec{n}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

On montre donc que :

$$\mathcal{V} = (\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}$$

Notons que ce calcul aurait pu être effectué avec n'importe laquelle des trois bases du parallélépipède et leurs hauteurs correspondantes. Enfin, pour s'assurer que le volume obtenu est positif, il est préférable de prendre la valeur absolue du produit mixte :

$$\mathcal{V} = |(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}| = |(\vec{c}\wedge\vec{a})\cdot\vec{b}| = |(\vec{b}\wedge\vec{c})\cdot\vec{a}|$$

IV.2 Propriétés

Les propriétés du produit vectoriel et du produit scalaire induisent les propriétés suivantes du produit mixte :

- si \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} forment un trièdre direct, alors le produit mixte $(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}$ est positif,
- si \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} sont coplanaires, ou si deux des trois vecteurs sont colinéaires, alors :

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$$

- le produit mixte est invariant par permutation circulaire :

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\wedge\vec{a})\cdot\vec{b} = (\vec{b}\wedge\vec{c})\cdot\vec{a}$$

- en revanche, il change de signe si on permute deux à deux les vecteurs :

$$(\vec{b}\wedge\vec{a})\cdot\vec{c} = -(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}$$

IV.3 Utilisation des coordonnées

En se plaçant dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace géométrique à trois dimensions, on considère les vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Le produit mixte s'écrit :

$$\begin{aligned}(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c} &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)c_y + (a_x b_y - a_y b_x)c_z\end{aligned}$$