Chapitre 2

Comportement aléatoire

Sommaire

1. Notions de probabilités

1.1. Variables aléatoires discrètes

111. Distribution uniforme discrète

Exemple

Variable aléatoire: X = «valeur obtenue par le lancement d'un dé».
Les valeurs x que peut prendre X sont x = 1, 2, 3, 4, 5, 6
Chacun des six événements, face x obtenue (X=x) a la probabilité p=1/6 de se produire.

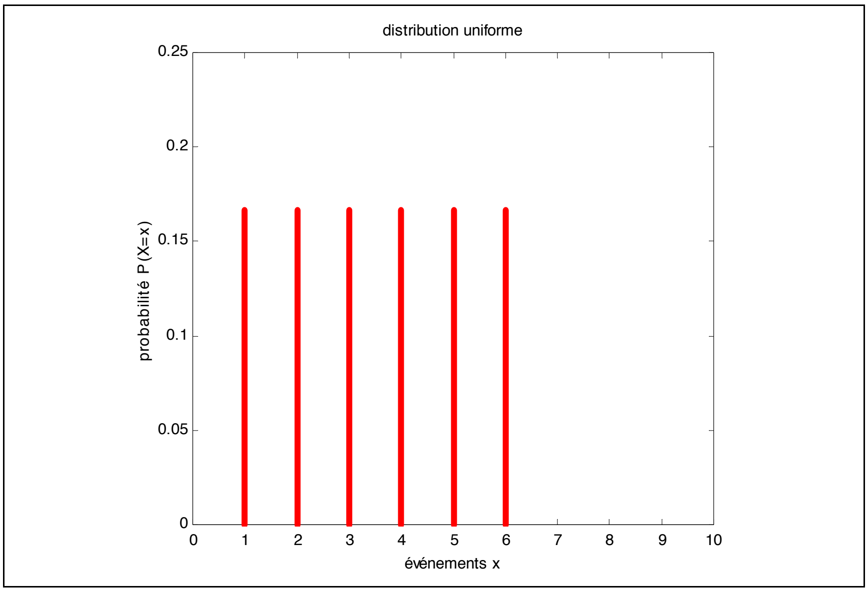


Fig. 1: Distribution uniforme n=6

Loi de probabilité

Une variable aléatoire discrète X obéit à une loi uniforme discrète quand la probabilité pour que l'événement X=x est égale quelque soit x. Si n est le nombre de valeurs de x, alors $P(X = x) = \frac{1}{n}$

Moyenne

$$E(X) = \sum_k x_k \cdot p_k$$

$$E(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_k x_k = \frac{1}{n} \cdot (1 + 2 + ... + n) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right) = \frac{(n+1)}{2}$$

Variance

$$Var(X) = \sum_k (x_k - m)^2 \cdot p_k$$

On montre que: $Var(X) = \frac{(n^2 - 1)}{12}$ car: $(1^2 + 2^2 + ... + n^2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

112. Distribution binomiale B(n,p)

Exemple

Une urne contient des boules noires et blanches avec une proportion de p boules noires et (1-p) boules blanches. On effectue des tirages au hasard, la boule tirée est remise dans l'urne pour le tirage suivant. La variable aléatoire X est *le nombre de boules noires sorties lors d'une expérience à n tirages*.

Loi de probabilité B(n,p)

Si la variable aléatoire discrète X obéit à la loi binomiale de paramètres n et p, B(n,p), la probabilité pour que l'événement (X = k) se produise est:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Les graphiques suivants représentent la valeur de $P(X = k)$ pour les différentes valeurs de k, pour un tirage de 18 boules dans des urnes contenant p = 20% et p = 50% de boules noires.

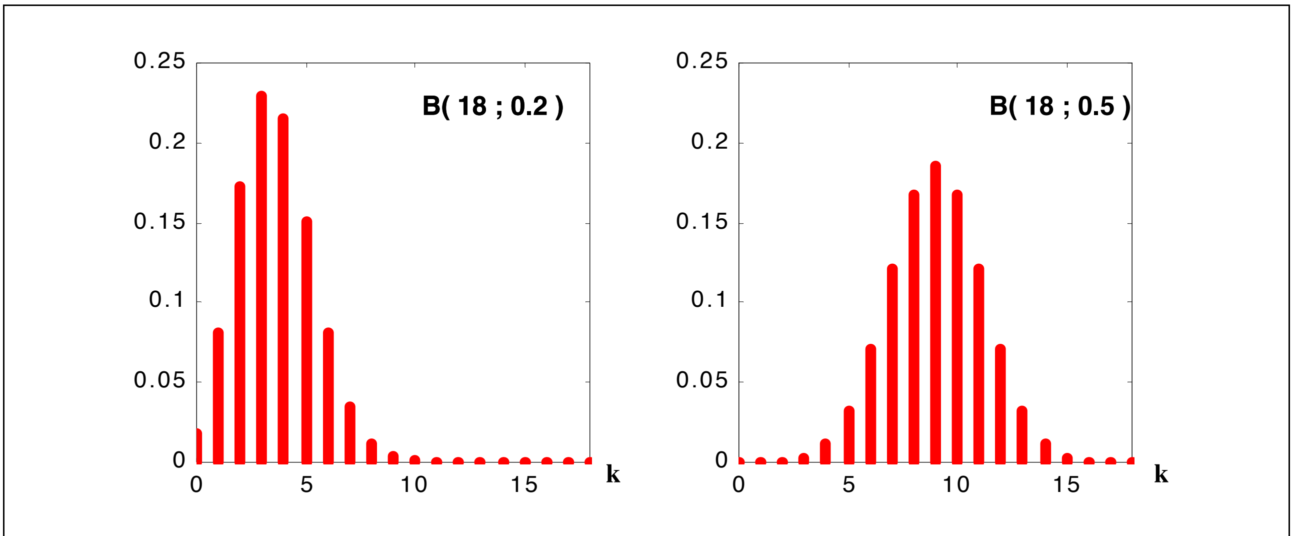


Fig. 2: Distributions binomiales B(18, 0.2) et B(18, 0.5)

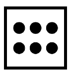
Moyenne

$$E(X) = n \cdot p$$

Variance

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

113. Exercices

- E1: Faire la liste exhaustive de tous les cas possibles lors de quatre lancer d'une pièce: «pile» ou «face».
  Classer les événements par ordre de nombre d'apparition de «pile» croissant
- E2: Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un  en lançant dix fois un dé?
  Quelle est la probabilité d'obtenir des résultats pairs en lançant dix fois un dé?
  Tracer la distribution de la loi de probabilité correspondant à ces expériences aléatoires.

114. Solutions

E1: Faire la liste exhaustive de tous les cas possibles lors de quatre lancer d'une pièce: «pile» ou «face».
Classer les événements par ordre de nombre d'apparition de «pile» croissant

Lors d'un seul lancé, deux cas peuvent se produire:
- P = évènement «pile» avec la probabilité p = 50%;
- F = évènement «face» avec la probabilitré (1 - p) = 50%.

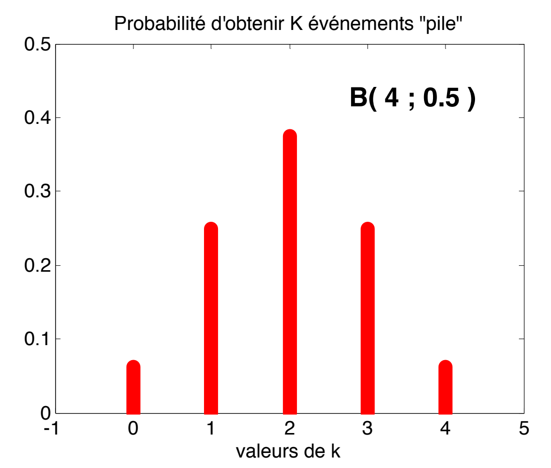
Etudions maintenant les scénarios possibles en quatre lancés (n=4).
Il y a $2^4 = 16$ évènements possibles.
Soit X la variable aléatoire "Nombre d'apparitions de pile". Elle peut prendre ses valeurs dans un ensemble comportant 5 solutions: {0; 1; 2 ; 3; 4 }.

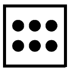
Parmi les 16 évènements possibles:
- Le cas "zéro pile" (k=0) n' apparait qu'une fois {FFFF}; il a donc la probabilité P(X=0) = 1/16 de se produire.
- Le cas "un pile" (k=1) apparait 4 fois {PFFF}{FPFF}{FFPF}{FFFP}; il a donc la probabilité P(X=1) = 4/16 de se produire.
- Le cas "deux piles" (k=2) apparait 6 fois {PPFF}{PFPF}{PFFP}{FPPF}{FPFP}{FFPP}; il a donc la probabilité P(X=2) = 6/16 de se produire.
- Le cas "trois piles" (k=3) apparait 4 fois {PPPF}{PPFP}{FPPP}{PFPP}; il a donc la probabilité P(X=3) = 4/16 de se produire.
- Le cas "quatre piles" (k=4) n' apparait qu'une fois {PPPP}; il a donc la probabilité P(X=4) = 1/16 de se produire.

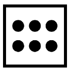
On vérifie bien que la probabilité d'apparition de l'évènement X=k est donnée par la loi binomiale de paramètres (n=4) et (p=0,5) :notée B(4 ; 0,5):

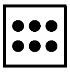
Tableau 1: loi binomiale B(4 ; 0,5):

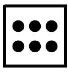
k=0	$P(X = k) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
k=1	$P(X = k) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$
k=2	$P(X = k) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$
k=3	$P(X = k) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16}$
k=4	$P(X = k) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$



E2: Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un  *en lançant dix fois un dé?*
Quelle est la probabilité d'obtenir des chiffres pairs en lançant dix fois un dé?
Tracer la distribution de la loi de probabilité correspondant à ces expériences aléatoires.

La probabilité d'obtenir un  en 1 lancé de dé est de 1/6.

Soit X la variable aléatoire "Nombre de  obtenus en 10 lancés".

La probabilité pour que X prenne la valeur k ("obtenir k fois  ") est donnée par la loi binomiale de paramètres (n=10) et (p=1/6).

$$P(X = k) = C_{10}^{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

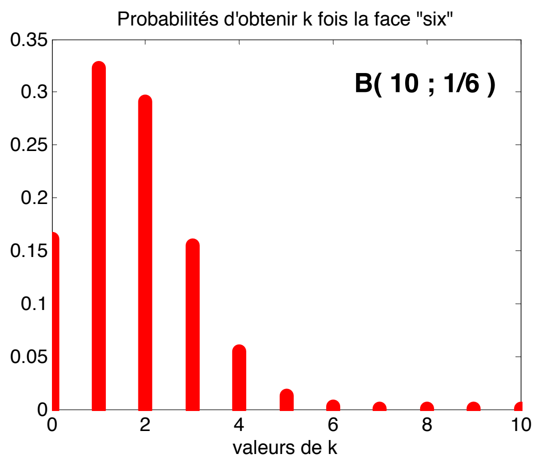
On cherche la probabilité pour que X puisse prendre une valeur parmi {1;2;3;4;5;6;7;8;9;10}; elle est le complément à 1 de la probabilité pour que X puisse prendre la valeur 0.
P(X={1;2;3;4;5;6;7;8;9;10}) = 1 - P(X=0) = 1 - $(5/6)^{10}$ = 84 %

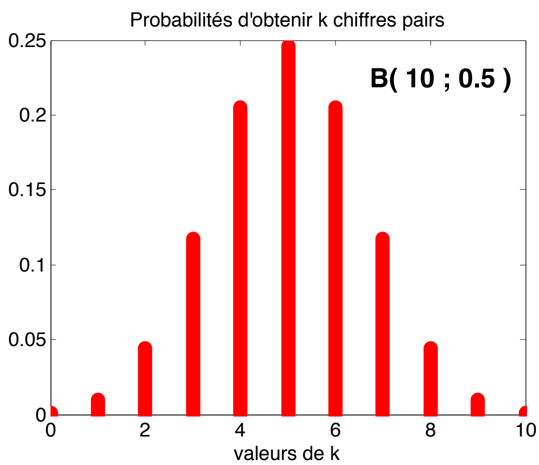
La probabilité d'obtenir un chiffre pair en 1 lancé de dé est de 50%.

Soit Y la variable aléatoire "Nombre de chiffre pair obtenu en 10 lancés".
La probabilité d'obtenir k chiffres pairs en 10 lancés de dé est donnée par une loi binomiale de paramètres (n=10) et (p=50%).

$$P(Y = k) = C_{10}^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

On cherche la probabilité pour que Y puisse prendre une valeur parmi {1;2;3;4;5;6;7;8;9;10}; elle est le complément à 1 de la probabilité pour que Y puisse prendre la valeur 0.
P(Y={1;2;3;4;5;6;7;8;9;10}) = 1 - P(Y=0) = 1 - $(1/2)^{10}$ = 1 - 1/1024 = 99,9 %





2. Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire a un caractère continu si elle est susceptible de prendre toutes les valeurs réelles entre «moins l'infini» et «plus l'infini».
La probabilité pour qu'une variable aléatoire continue X prenne une valeur particulière est nulle.
Par exemple: P("X=5") = 0.

La caractéristique que nous étudierons alors, sera:

- soit la probabilité pour que cette variable soit inférieure à une valeur particulière $P(X \le a)$
- soit la probabilité pour que cette variable appartienne à un intervalle fini $P(a \le X \le b)$

on utilise alors la propriété suivante: $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$

Par exemple, la probabilité pour que "X prenne des valeurs entre 5 et 10" est de 20%, s'écrira:

$$P(5 \le X \le 10) = 0,2$$

2.1. Fonctions caractéristiques

211. Densité de probabilité

Fonction telle que:

$$f(x) \ge 0 \qquad \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

212. Fonction de répartition

Fonction de la variable x, quantifiant la probabilité d'apparition de l'événement: $X \le x$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

On calcule la probabilité pour que la variable X appartienne à un intervalle fini $[a, b]$ par la relation:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(u)du$$

213. Moyenne

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

214. Variance ou écart type

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \cdot f(x)dx$$

2.2. Loi Normale réduite ou Gaussienne réduite N(0,1)

La loi normale est un modèle courament utilisé pour représenter des phénomènes dont la probabilité est répartie de façon symétrique autour d'une valeur "moyenne".
Les deux paramètres permettant de caractériser cette répartition sont:

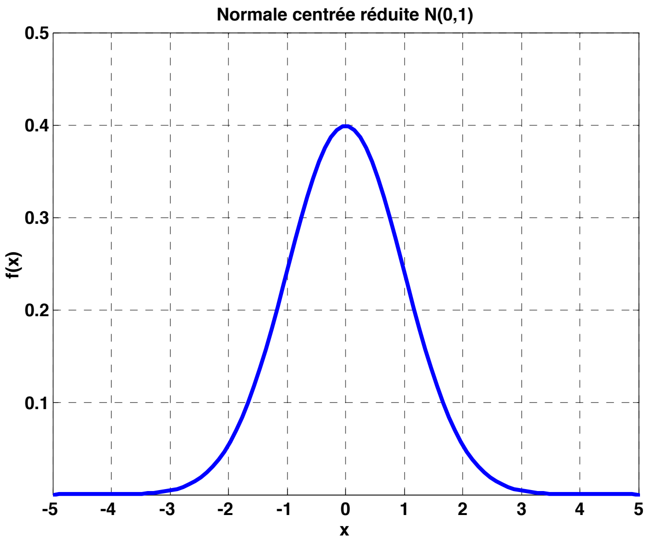
- La moyenne;
- l'écart type (ou la variance)

La loi normale est dite centrée quand la moyenne est égale à zéro.
Elle est dite réduite quand la variance est égale à 1.

La loi Normale "centrée" "réduite" est donc une distribution de moyenne m=0 et de variance $\sigma^2 = 1$

221. Densité de probabilité

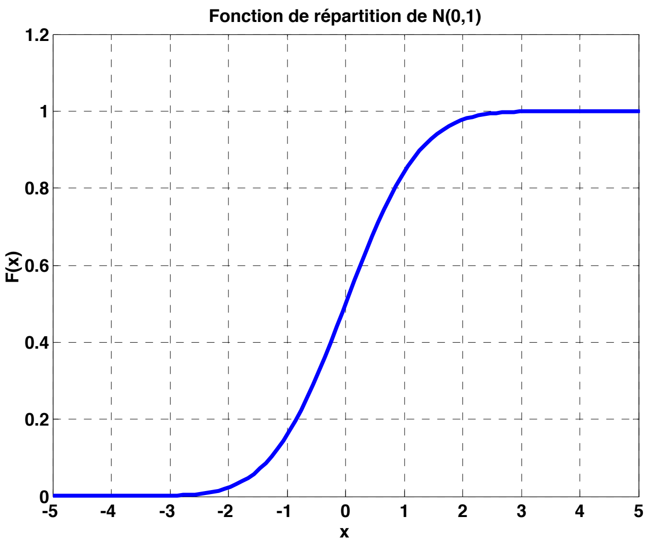
$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-u^2/2}$$



222. Fonction de répartition

$$F(t) = P(T \leq t)$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$$



Cette fonction ne s'exprime pas par des fonctions élémentaires. Pour se passer de calculatrice, on peut utiliser des tables de valeurs.

Tableau 2: **Table de la fonction** $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Tableau 3: **F(t) pourles grandes valeurs de t**

t	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4	4.5
F(t)	0.99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

2.3. Loi Normale ou Gaussienne N(m,σ)

Lorsque la loi de distribution n'est pas centrée sur la valeur moyenne zéro, et lorsque son écart type σ est différent de 1, on la note N(m,σ).

231. Densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

232. Relation entre N(m,σ) et N(0,1)

Changement de variable

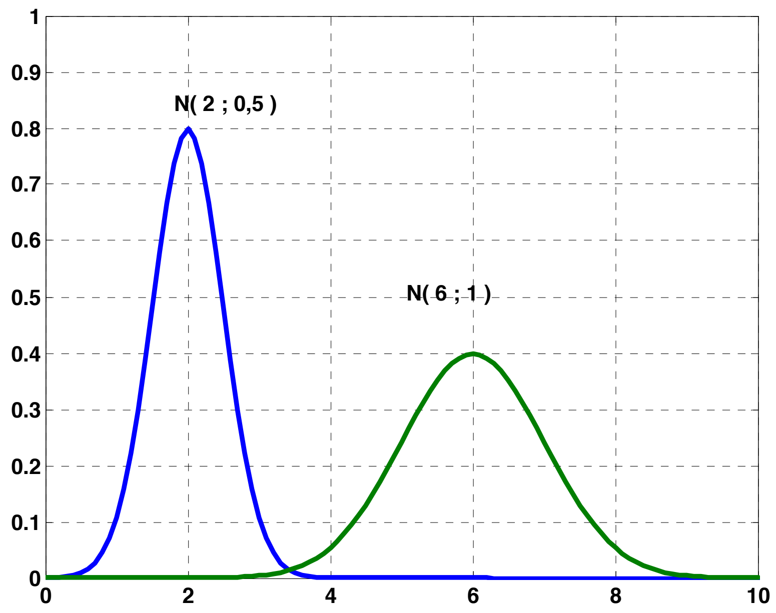
Si **X** suit une loi normale **N(m,σ)** alors la variable $T = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale réduite **N(0,1)**.

$$P(X \leq b) = P\left(T \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

N'ayant pas de table pour nous donner les valeurs de la loi **N(m,σ)**, pour obtenir la probabilté $P(X \leq b)$, on calculera la probabilité $P\left(T \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)$ à l'aide la loi normale **N(0,1)**.

De la même façon: $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq T \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)$

Le graphe suivant montre deux distributions avec des paramètres (moyenne , variance) différents.



Intervalle symétrique par rapport à la moyenne

Si les bornes de l'intervale d'estimation de X sont symétriques par rapport à la moyenne, on peut écrire les deux bornes a et b à l'aide de la largeur de l'intervale $2k\sigma$

On a alors: $a = m - k \cdot \sigma$ et $b = m + k \cdot \sigma$

Dans ce cas:
$$P(m - k \cdot \sigma \le X \le m + k \cdot \sigma) = P(-k \le T \le k) = P(T \le k) - P(T \le -k)$$

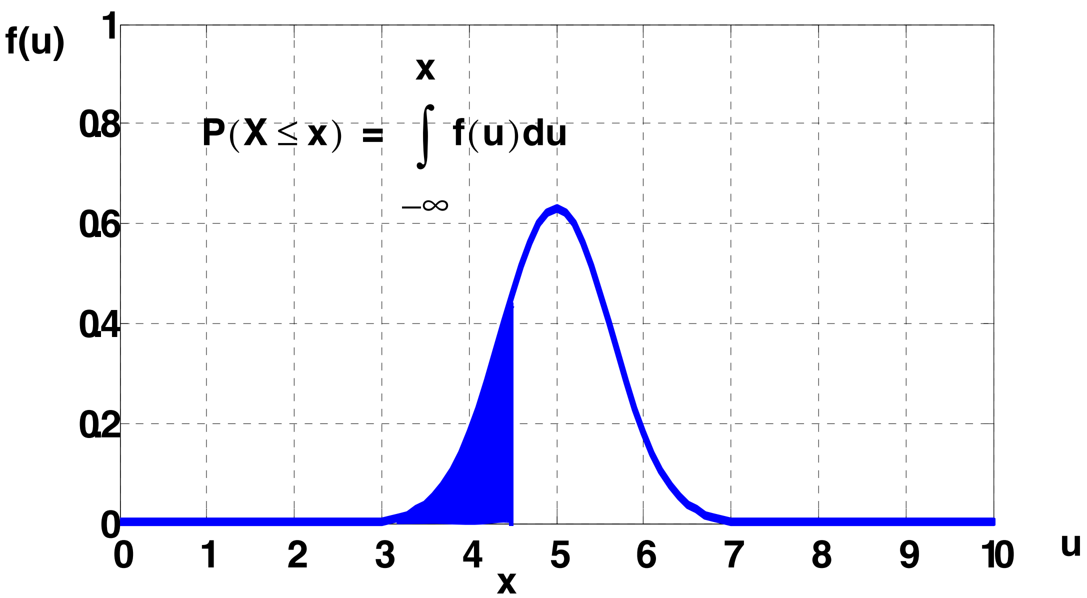
et comme : $P(T \le -k) = 1 - P(T \le k)$, on obtient finalement:

$$\boxed{P(m - k \cdot \sigma \le X \le m + k \cdot \sigma) = 2 \cdot P(T \le k) - 1}$$

233. Exercices

- E3: Calculer la probabilité pour qu'une variable aléatoire X soit inférieure à 4.5 si elle obéit à une loi normale de moyenne 5, et de variance $\sigma^2 = 0,4$
- E4: Calculer la probabilité pour que cette variable prenne des valeurs entre 4.5 et 5.5
- E5: Quelle est la probabilité pour qu'une telle variable prenne des valeurs dans l'intervalle centré sur la valeur moyenne, et de largeur 6σ ?
- E6: Quelle est la largeur de l'intervale pour lequel on peut affirmer, avec un risque de 0,5 %, que X y trouve toutes ses valeurs?

Graphe de la densité de probabilité avec m = 5; σ = 0,632 : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$



234. Solutions

E3: Calculer la probabilité pour qu'une variable aléatoire X soit inférieure à 4.5 si elle obéit à une loi normale de moyenne 5, et de variance 0.4

E4: Calculer la probabilité pour que cette variable prenne des valeurs entre 4.5 et 5.5

E5: Quelle est la probabilité pour qu'une telle variable prenne des valeurs dans l'intervalle centré sur la valeur moyenne, et de largeur 6σ ?

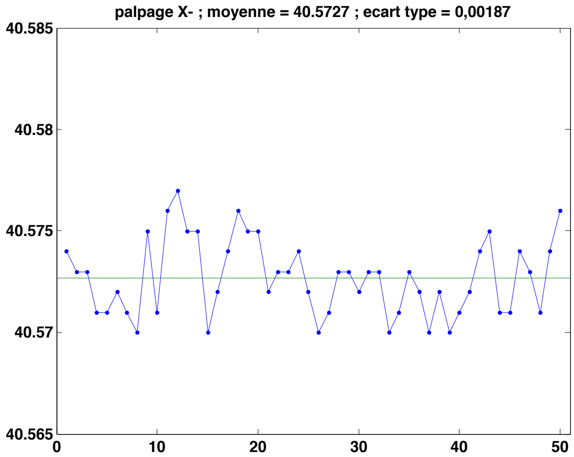
E6: Quelle est la largeur de l'intervale pour lequel on peut affirmer, avec un risque de 0,5 %, que X y trouve toutes ses valeurs?

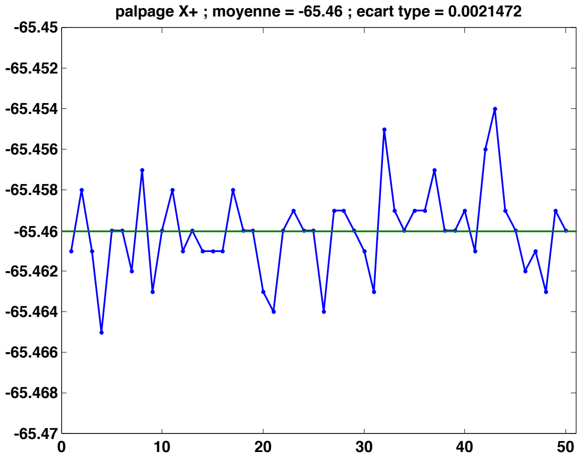
2.4. Exemple expérimental

Le tableau ci-dessous est le résultat de 5 expériences de répétabilité sur une machine à mesurer par coordonnées. Chaque colonne contient les valeurs obtenues lors de palpages dans des directions différentes.

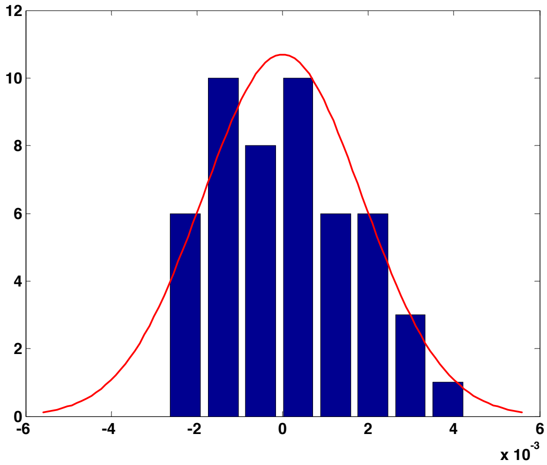
N°	X-	X+	Y-	Y+	Z-
1	40.574	-65.461	138.830	32.814	19.180
2	40.573	-65.458	138.830	32.813	19.180
3	40.573	-65.461	138.830	32.815	19.179
4	40.571	-65.465	138.830	32.816	19.180
5	40.571	-65.460	138.828	32.816	19.181
6	40.572	-65.460	138.827	32.816	19.181
7	40.571	-65.462	138.825	32.816	19.193
8	40.570	-65.457	138.825	32.816	19.193
9	40.575	-65.463	138.826	32.816	19.193
10	40.571	-65.460	138.827	32.816	19.193
11	40.576	-65.458	138.828	32.815	19.193
12	40.577	-65.461	138.826	32.813	19.193
13	40.575	-65.460	138.826	32.814	19.193
14	40.575	-65.461	138.829	32.814	19.193
15	40.570	-65.461	138.831	32.814	19.193
16	40.572	-65.461	138.829	32.813	19.193
17	40.574	-65.458	138.831	32.814	19.193
18	40.576	-65.460	138.831	32.817	19.192
19	40.575	-65.460	138.833	32.817	19.193
20	40.575	-65.463	138.833	32.818	19.193
21	40.572	-65.464	138.834	32.817	19.193
22	40.573	-65.460	138.834	32.818	19.193
23	40.573	-65.459	138.833	32.817	19.193
24	40.574	-65.460	138.833	32.815	19.193
25	40.572	-65.460	138.834	32.815	19.194
26	40.570	-65.464	138.829	32.816	19.194
27	40.571	-65.459	138.831	32.816	19.191
28	40.573	-65.459	138.830	32.815	19.190
29	40.573	-65.460	138.831	32.815	19.190
30	40.572	-65.461	138.830	32.815	19.189
31	40.573	-65.463	138.830	32.816	19.189
32	40.573	-65.455	138.831	32.813	19.187
33	40.570	-65.459	138.829	32.813	19.185
34	40.571	-65.460	138.829	32.813	19.184
35	40.573	-65.459	138.828	32.813	19.185
36	40.572	-65.459	138.829	32.813	19.186
37	40.570	-65.457	138.829	32.813	19.186
38	40.572	-65.460	138.829	32.814	19.186
39	40.570	-65.460	138.829	32.813	19.183
40	40.571	-65.459	138.829	32.814	19.184
41	40.572	-65.461	138.828	32.814	19.185
42	40.574	-65.456	138.826	32.814	19.180
43	40.575	-65.454	138.826	32.814	19.200
44	40.571	-65.459	138.826	32.813	19.173
45	40.571	-65.460	138.827	32.813	19.174
46	40.574	-65.462	138.827	32.815	19.175
47	40.573	-65.461	138.828	32.813	19.176
48	40.571	-65.463	138.827	32.814	19.174
49	40.574	-65.459	138.827	32.813	19.174
50	40.576	-65.460	138.827	32.814	19.174
Maxi	40,577	-65,454	138,834	32,818	19,200
Mini	40,570	-65,465	138,825	32,813	19,173
Etendue	0,007	0,011	0,009	0,005	0,027
Ecart_type	0,00187	0,00215	0,00243	0,00148	0,00709
Moyenne	40,573	-65,460	138,829	32,815	19,187

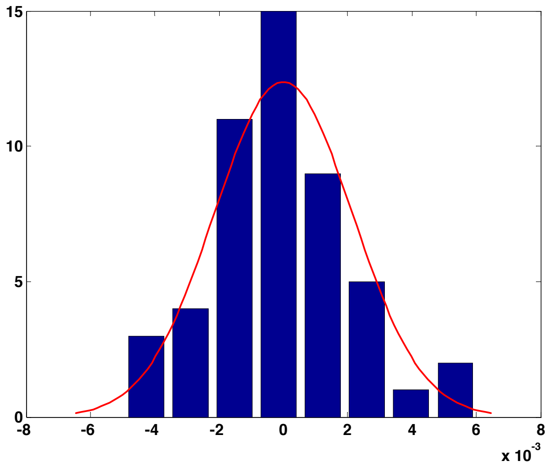
On représente ici l'évolution des dimensions mesurées lors des palpages dans la direction X- et X+ :





Sur ces deux graphiques, on a supperposé un histogramme de 8 classes avec une courbe de loi normale calculée avec les 2 caractéristiques de l'échantillon (moyenne et écart type)





Une classe est une subdivision de l'étendue (intervale entre le mini et le maxi des valeurs mesurées).

Exemple pour X- :
mini = 40,570 mm ; maxi = 40,577 mm ; étendue = 0,007 mm
pour 8 classes : largeur de chaque classe = 0,007 / 8 = 0,000875 mm