VARIABLES DISCRETES

Une variable aléatoire a un caractère discret

si elle est susceptible de prendre un nombre **fini de valeurs.**

(En général un nombre trés limité de valeurs)
Exemples bien connus : tirages au sort avec une pièce, un dé, un loto ...

Modélisation avec la loi binomiale B(n,p)

n = nombre d'événements susceptibles de se produire
Les événements sont désignés par un numéro : k=1, k=2, . . . , k=n
Chaque événement à la **même probabilité p** de se produire

Exemple du tirage avec remise :
Une urne contient **p% boules noires** et (1-p)% boules blanches.
La quantité **x de boules noires** obtenues lors de **n tirages** est aléatoire.

La probabilité pour que l'on obtienne k boules noires est:

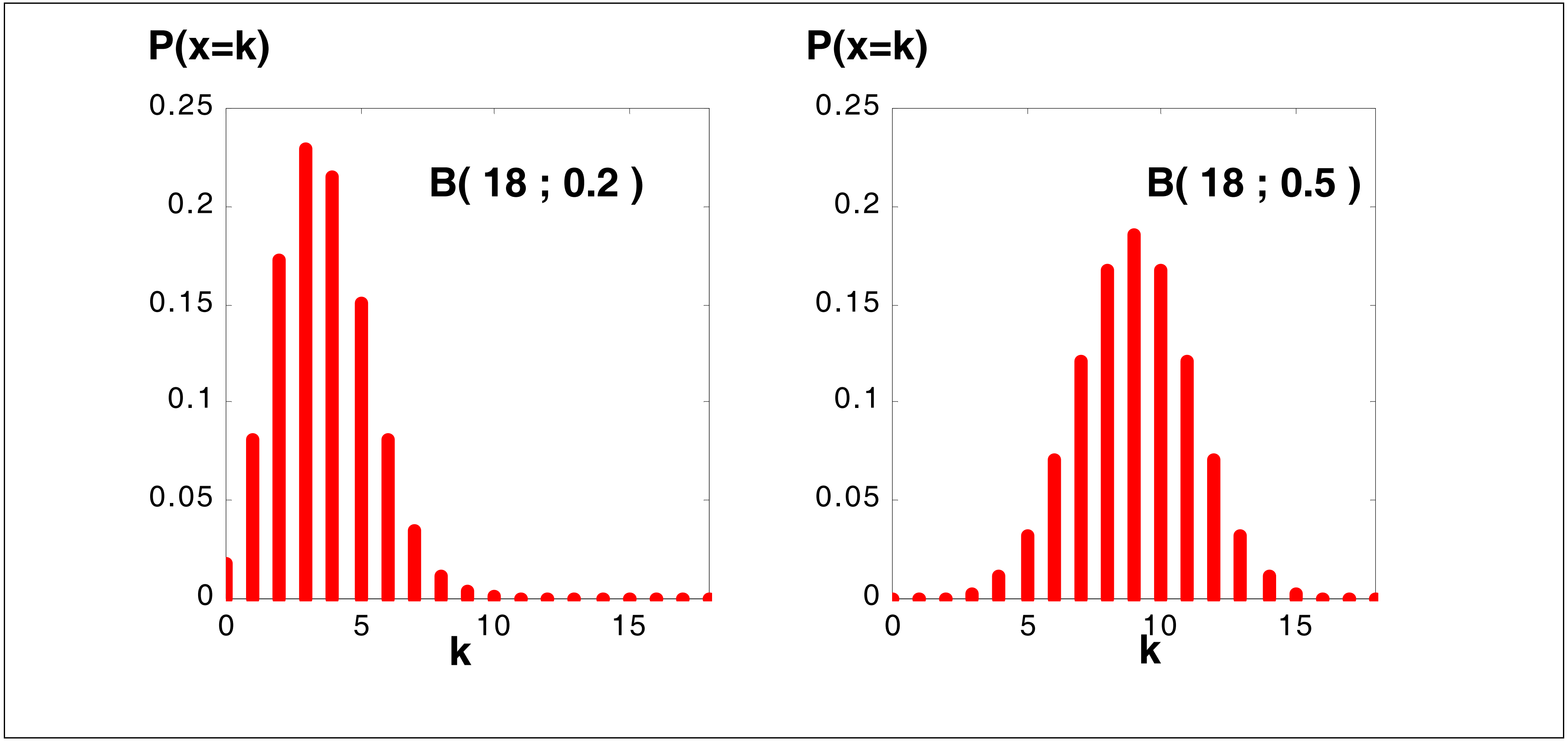
$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Loi binomiale

Exemples

Les graphiques suivants représentent la valeur de P(X = k) pour les différentes valeurs de k

pour un tirage de 18 boules dans une urne contenant :
p = 20% boules noires et p = 50% boules noires.



Loi binomiale

Exercices

- Faire la liste exhaustive de tous les cas possibles lors de 4 lancers d'une pièce: «pile» ou «face».
  Classer les événements par ordre de nombre d'apparition de «pile» croissant

- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un ⚅ en lançant dix fois un dé?
  Quelle est la probabilité d'obtenir des résultats pairs en lançant dix fois un dé?
  Tracer la distribution de la loi de probabilité correspondant à ces expériences aléatoires.

VARIABLES CONTINUES

Une variable aléatoire a un caractère continu,

si elle est susceptible de prendre **toutes les valeurs** réelles entre «moins l'infini» et «plus l'infini».

La probabilité pour qu'une variable aléatoire continue X **prenne une valeur particulière** est nulle.

P(" X = 5 ") = 0.

MAIS

La probabilité pour que cette variable soit **inférieure ou égale à une valeur particulière** existe

P(" $X \leq 5$ ") est non nulle

Pour la calculer on utilise une **fonction de répartition**: $F(a) = P(X \leq a)$

DENSITE de PROBABILITE

La distribution f(x) ou densité de probabilité

est la dérivée de la fonction de répartition F(x)

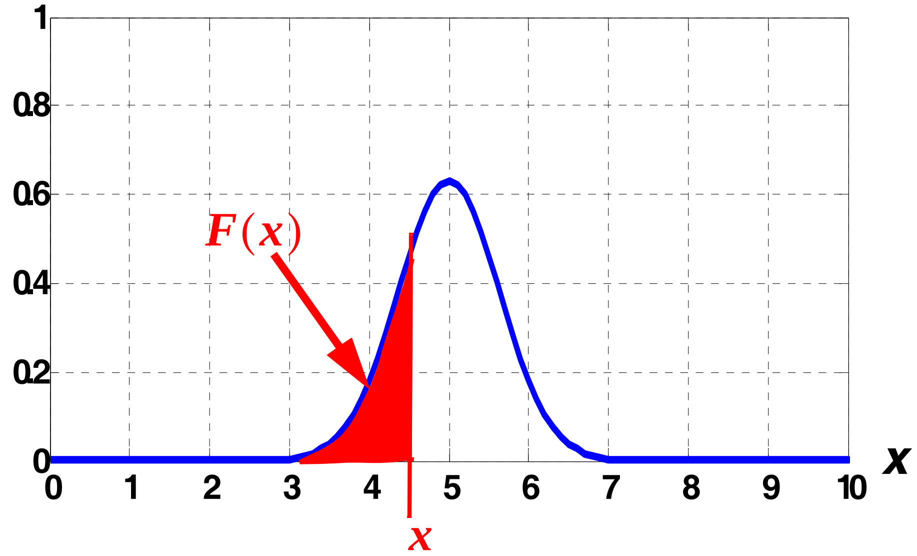
$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

Pour calculer la **probabilité** $P(X \leq x)$, on utilise la **fonction de répartion** $F(x)$

Elle correspond à l'**aire sous la courbe** de *f(u)* entre moins l'infini et x :

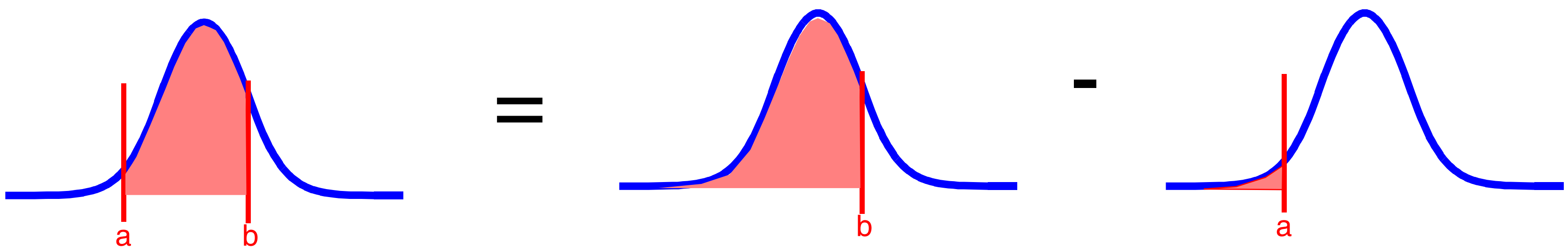
$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du,$$

f(x): distribution



INTERVALE

Probabilité d'appartenir à un intervale



$$P(a \le X \le b) \;=\; P(X \le b) - P(X \le a)$$

Intervale symétrique par rapport à la moyenne

Cas particulier d'un intervale de largeur l tel que : $\begin{aligned} a &= m - l/2 \\ b &= m + l/2 \end{aligned}$

Si la distribution est symétrique par rapport à la moyenne : $P(X \le a) = 1 - P(X \le b)$

Donc : $\boxed{P(a \le X \le b) = 2 \times P(X \le b) - 1}$

Loi de LAPLACE - GAUSS

Fonction de distribution : loi normale N (m ; σ)

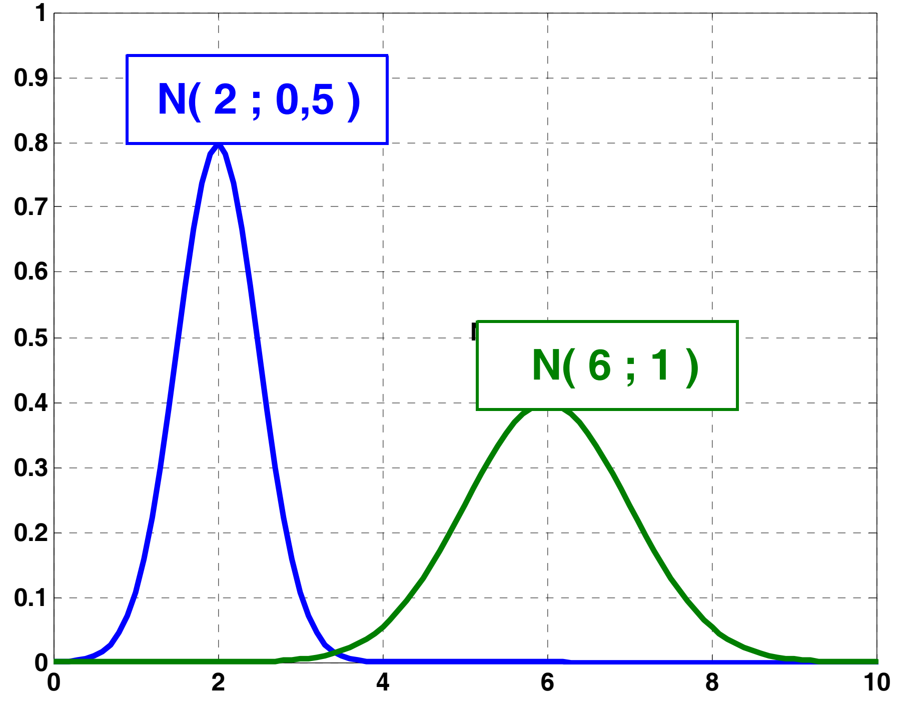
Deux paramètres :

moyenne *m*

écart type σ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Exemples de 2 distributions différentes :



Changement de VARIABLE

But : passer de la fonction N(m ; σ) à la fonction N(0 ; 1)

Changement de variable: $$t = \frac{x - m}{\sigma}$$

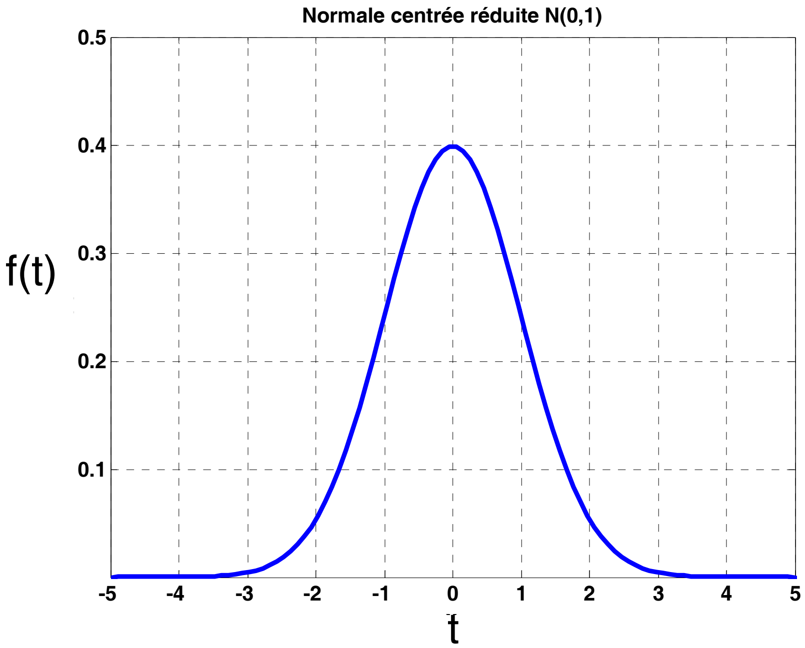
La fonction f(t) est appelée loi normale réduite

Moyenne : m = 0

Ecart type : σ = 1

Propriété :

$$P(X \leq x) = P(T \leq t)$$



Si **X** suit une loi normale **N(m ; σ)** alors **T** suit une loi normale **N(0 ; 1)**

Exemple avec N(2 ; 0,5): $$P(X \leq 3) = P\left(T \leq \frac{3-2}{0,5}\right) = P(T \leq 2)$$

loi normale N (0 ; 1)

Table de la fonction de répartition $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$

Exemples :

t = 1,25
F(t) = 0,8944

Si t est négatif :

F sym. par rap. à t = 0
F(t) = 1 - F(-t)

t = -0,72
F(t) = 1 - 0,7642
F(t) = 0,2358

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Exercices

- **Exercice3:**
  Calculer la probabilité pour qu'une variable aléatoire X soit inférieure à 4.5 si elle obéit à une loi normale de moyenne 5, et de variance 0.4

- **Exercice4:**
  Calculer la probabilité pour que cette variable prenne des valeurs entre 4.5 et 5.5

- **Exercice5:**
  Quelle est la probabilité pour qu'une variable, suivant une loi normale, prenne des valeurs dans l'intervalle centré sur la moyenne, et de largeur 2σ ? (puis 4σ; puis 6σ)

- **Exercice6:**
  Une variable aléatoire X suit une loi normale d'écart type σ. Quelle est la largeur de l'intervalle (centré sur la moyenne) dans lequel X trouvera des valeurs avec une probabilité de 99%?
  Intervalle de largeur $2t\sigma$: $[m - t\sigma, m + t\sigma]$

  Calculer t pour que : $P(m - t\sigma \leq X \leq m + t\sigma) = 0,99$