TP2 : Approximation de données de dimension 3 par un modèle paramètrique avec la méthode des moindres carrés

1 Courbe P(u)

Position du problème

Les coordonnées de N points expérimentaux E_k avec $k \in \{1, 2, ..., N\}$, sont exprimées dans un repère $(O; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.
Chaque point E_k est associé à un paramètre u_k compris entre 0 et 1.
On notera $\overrightarrow{E_k}$ le vecteur position du point E_k par rapport à l'origine O.

$$\overrightarrow{E_k} = X_{Ek}.\overrightarrow{e_x} + Y_{Ek}.\overrightarrow{e_y} + Z_{Ek}.\overrightarrow{e_z}$$

Les résultats de mesure sont enregistrés dans le fichier nommé : 'coordonnées.txt'.
Celui-ci contient :

— une première ligne d'en-tête avec les noms et les unités des variables,
— N lignes d'enregistrement de 4 valeurs séparées par un espace.

comme indiqué dans la Table1

u_k	X_{Ek}	Y_{Ek}	Z_{Ek}
0.00	+0.0	+0.0	+0.0
0.20	+0.5	+0.3	+1.8
0.40	+1.5	+4.0	+4.1
0.65	+2.5	+2.0	+6.8
0.85	+2.5	-2.0	+8.7
1.00	+2.0	-6.0	+10.5

TABLE 1 – Valeurs expérimentales (N=6)

On désire trouver une fonction de la variable u, à base de polynômes de degré n (avec $n < N$), qui représente le mieux l'ensemble de points expérimentaux .

Modélisation 1

On choisi la base des *polynômes de Bernstein* de degré 3. Leur définition est rappelée ci-dessous :

$$B_{i,n}(u) = C_i^n.u^i.(1-u)^{(n-i)}$$

Le *point courant* $P(u)$ de la courbe destinée à approximer les points expérimentaux aura pour *vecteur position* par rapport à O :

$$\overrightarrow{P(u)} = \sum_{i=0}^{i=n} B_{i,n}(u).\overrightarrow{C_i}$$

Les *coefficients vectoriels* $\overrightarrow{C_i}$ du polynôme $\overrightarrow{P(u)}$ sont appelés *pôles* de la courbe.
Le polygone qui joint les pôles s'appelle le *polygone caractéristique* de la courbe $\overrightarrow{P(u)}$.

Problème à résoudre

Les inconnues du problème sont les coordonnées des coefficients $\overrightarrow{C_i}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$:

$$\overrightarrow{C_i} = X_{Ci}.\overrightarrow{e_x} + Y_{Ci}.\overrightarrow{e_y} + Z_{Ci}.\overrightarrow{e_z}$$

Il s'agit de rechercher les coefficients pour lesquels la courbe $\overrightarrow{P(u)}$ passera *au plus près* des points expérimentaux $\overrightarrow{E_k}$.
L'objectif de ce problème d'optimisation est de minimiser la quantité :

$$W = \sum_{k=1}^{k=N} e_k^2$$

ou e_k est l'écart entre le *point expérimental* $\overrightarrow{E_k}$ et le *point voisin* $\overrightarrow{P(u_k)}$ sur la courbe de lissage.

Travail à réaliser

Question 1 : Fonctions de lissage de degré 3
- *Exprimer chaque polynôme* $B_{i,3}(u)$*en fonction de* u *et* $(1-u)$.
- *Tracer l'allure des 4 fonctions de base* $B_{i,3}(u)$ *en fonction de* u.

Question 2 : Fonction objectif
- *Écrire l'expression de* W *en fonction des inconnues* X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci} *avec* $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$,

Question 3 : Système à résoudre
- *Écrire les dérivées de* W *par rapport à chacune des inconnues.*
- *En déduire le système d'équations à résoudre.*

Question 4 : Formulation matricielle
- *Écrire le système à résoudre sous forme matricielle :*

$$(B^T * B) * [X_{Ci}] = B^T * [X_{Ek}]$$
$$(B^T * B) * [Y_{Ci}] = B^T * [Y_{Ek}]$$
$$(B^T * B) * [Z_{Ci}] = B^T * [Z_{Ek}]$$

(expliciter le contenu des matrices : $[B]$, $[X_{Ci}]$, $[X_{Ek}]$*)*
- *Réduire le système de 3 équations à une seule en combinant les matrices sur X, Y, et Z :*

$$(B^T * B) * [C] = B^T * [Ek]$$

Question 5 : Calcul numérique et représentation graphique
- *Résoudre numériquement le problème.*
- *Dessiner la courbe* $\overrightarrow{P(u)}$ *résultat et la position des pôles* $\overrightarrow{C_i}$ *sur le même graphique.*
- *Modifier la répartition des valeurs des paramètres* u_k *dans l'intervalle* $[0, 1]$, *et commenter.*

Modélisation 2

Question 6 : Base canonique des polynômes
Reprendre le calcul précédent avec le modèle :

$$\overrightarrow{P(u)} = \sum_{i=0}^{i=n} f_{i,n}(u).\overrightarrow{c_i}$$

en utilisant la base de fonctions :

$$f_{i,n}(u) = u^i$$

Résultat à obtenir

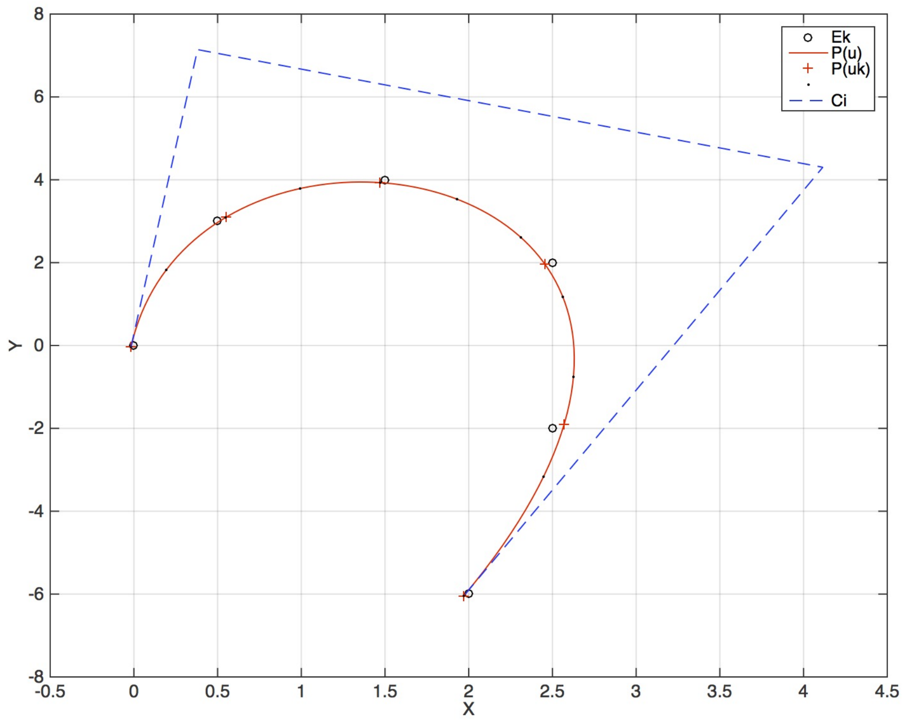

Figure 1 – Points expérimentaux, courbe des MC, pôles

2 Surface P(u,v)

On désire transposer la méthode à l'approximation d'un réseau de points expérimentaux $\overrightarrow{E_{kl}}$ associés à un paramètrage (u_k, v_l) par une fonction bi-paramètrique $\overrightarrow{P(u,v)}$.

On minimisera la fonction :

$$W = \sum_{k=1}^{k=N} \sum_{l=1}^{l=M} e_{k,l}^2$$

ou $e_{k,l}$ est la distance entre le point $\overrightarrow{E_{kl}}$ et le point $\overrightarrow{P(u_k, v_l)}$

Les données sont fournies dans 5 fichiers :
EX.txt
EY.txt
EZ.txt
uk.txt
vl.txt

Question 1 : Calcul numérique
Utiliser la méthode utilisée précédemment pour une courbe, pour calculer les pôles $C_{i,j}$ du modèle :

$$\overrightarrow{P(u,v)} = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=m} B_{i,n}(u).B_{j,m}(u).\overrightarrow{C_{i,j}}$$