TD3 : Approximation par les moindres carrés

Position du problème

Les coordonnées de N points expérimentaux E_k avec $k \in \{1, 2, ..., N\}$, sont exprimées dans un repère $(O; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
Chaque point E_k est associé à un paramètre u_k compris entre 0 et 1.
On notera $\overrightarrow{E_k}$ le vecteur position du point E_k par rapport à l'origine O.

$$\overrightarrow{E_k} = X_{Ek}.\overrightarrow{e_x} + Y_{Ek}.\overrightarrow{e_y}$$

Les résultats de mesure sont enregistrés dans le fichier nommé : 'coordonnées.txt'.
Celui-ci contient :

— une première ligne d'en-tête avec les noms et les unités des variables,

— N lignes d'enregistrement de 4 valeurs séparées par un espace.

comme indiqué dans la Table1

k	u_k	X_{Ek} (mm)	Y_{Ek} (mm)
1	0.00	+0.0	+0.0
2	0.20	+0.5	+0.3
3	0.40	+1.5	+4.0
4	0.65	+2.5	+2.0
5	0.85	+2.5	-2.0
6	1.00	+2.0	-6.0

TABLE 1 – Valeurs expérimentales (N=6)

On désire trouver une fonction de la variable u, à base de polynômes de degré n (avec $n < N$), qui représente le mieux l'ensemble de points expérimentaux .

Modélisation

On choisi la base des *polynômes de Bernstein* de degré 3. Leur définition est rappelée ci-dessous :

$$B_{i,n}(u) = C_i^n.u^i.(1-u)^{(n-i)}$$

Le *point courant* $P(u)$ de la courbe destinée à approximer les points expérimentaux aura pour *vecteur position* par rapport à O :

$$\overrightarrow{P(u)} = \sum_{i=0}^{i=n} B_{i,n}(u).\overrightarrow{C_i}$$

Les *coefficients vectoriels* $\overrightarrow{C_i}$ du polynôme $\overrightarrow{P(u)}$ sont appelés *pôles* de la courbe.
Le polygone qui joint les pôles s'appelle le *polygone caractéristique* de la courbe $\overrightarrow{P(u)}$.

Problème à résoudre

Les inconnues du problème sont les coordonnées des coefficients $\overrightarrow{C_i}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x};\overrightarrow{e_y})$:

$$\overrightarrow{C_i} = X_{Ci}.\overrightarrow{e_x} + Y_{Ci}.\overrightarrow{e_y}$$

Il s'agit de rechercher les coefficients pour lesquels la courbe $\overrightarrow{P(u)}$ passera *au plus près* des points expérimentaux $\overrightarrow{E_k}$.
L'objectif de ce problème d'optimisation est de minimiser la quantité :

$$W = \sum_{k=1}^{k=N} e_k^2$$

ou e_k est l'écart entre le *point expérimental* $\overrightarrow{E_k}$ et le *point voisin* $\overrightarrow{P(u_k)}$ sur la courbe de lissage.

Travail à réaliser

Question 1 : Fonctions de lissage de degré 3
- *Exprimer chaque polynôme* $B_{i,3}(u)$*en fonction de* u *et* $(1-u)$.
- *Tracer l'allure des 4 fonctions de base* $B_{i,3}(u)$ *en fonction de* u.

Question 2 : Fonction objectif

- *Écrire l'expression de W en fonction des inconnues X_{Ci}, Y_{Ci} avec $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$,*

Question 3 : Système à résoudre

- *Écrire les dérivées de W par rapport à chacune des inconnues.*
- *En déduire le système d'équations à résoudre.*
- *Formuler le système à résoudre sous forme matricielle :*

$$(B^T * B) * [X_{Ci}] = B^T * [X_{Ek}]$$
$$(B^T * B) * [Y_{Ci}] = B^T * [Y_{Ek}]$$

Question 4 : représentation graphique

- *Résoudre numériquement le problème.*
- *Dessiner la courbe $\overrightarrow{P(u)}$ résultat et la position des pôles $\overrightarrow{C_i}$ sur le même graphique.*
- *Modifier la répartition des valeurs des paramètres u_k, commenter.*

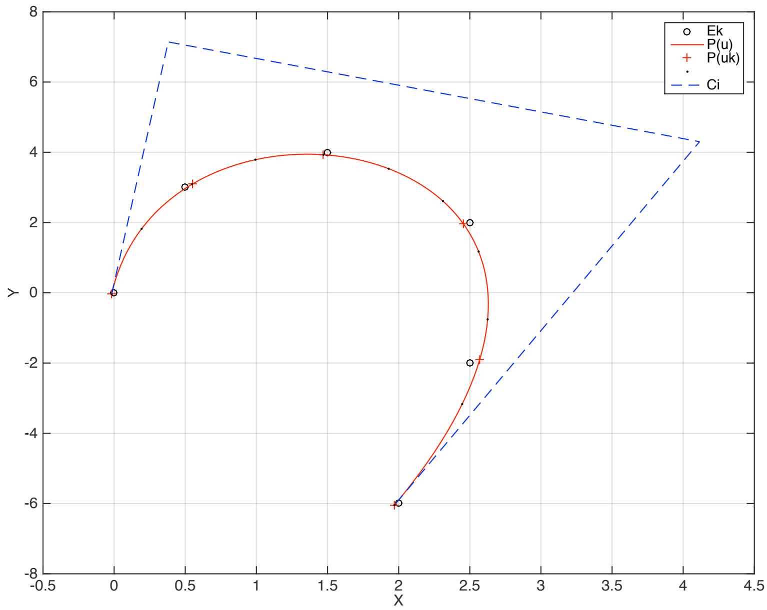

FIGURE 1 – Points expérimentaux, courbe des MC, pôles