

**Dept. Génie Electrique et
Informatique Industrielle
IUT - Université Bordeaux**



TRAVAUX DIRIGES

D'ELECTRONIQUE

2^{ème} Année - Semestre S3

Année 2016-2017

Sommaire

Bloc A : Traitement du signal

1. ANALYSEUR DE SPECTRE HETERODYNE
2. ECHANTILLONNAGE ET CONVERSION ANALOGIQUE-NUMERIQUE (CAN)
3. TRANSFORMATION TEMPS-FREQUENCE PAR FFT

Bloc B : "Des basses fréquences aux hautes fréquences"

4. COMPORTEMENT FREQUENTIEL DE COMPOSANTS PASSIFS
5. PROPAGATION DANS UN CABLE COAXIAL
6. PROPAGATION GUIDEE D'ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Thème 1 :

Analyseur de spectre hétérodyne

I- Les réglages verticaux

II- Les réglages horizontaux

III- Fonctionnement détaillé d'un analyseur et principaux réglages

III-1. Principe de l'hétérodynage

III-2. Description des principaux réglages

IV- Exercice d'application (*extrait d'un partiel de S3*)

Objectifs :

L'objectif de ce TD est de comprendre le **fonctionnement d'un analyseur de spectre par la technique de l'hétérodynage et les principaux réglages associés**. Il permet d'analyser les caractéristiques du spectre d'un signal électrique périodique et d'interpréter la relation temps-fréquence de ce dernier.

Pré-requis :

Relation temps-fréquence. Décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique. Filtrage d'ordre 2.

L'analyseur de spectre est un appareil permettant de relever le spectre d'un signal (représentation en fréquence) à partir de l'application d'une tension à l'entrée.



Figure 1 : Face avant d'un analyseur de spectre

Comme sur un oscilloscope, on peut effectuer des réglages verticaux et horizontaux :

- Sensibilité verticale (utilisant plusieurs unités : Volts ou dBm)
- Gamme de fréquence (SPAN)

Mais ici, aussi d'autres paramètres :

- La position de la fréquence centrale (CENTER FREQUENCY)
- La résolution de l'analyse (RBW)
- La vitesse de balayage (SWEEP TIME)

I- Les réglages verticaux

Sur un analyseur de spectre, on peut choisir deux types d'échelle verticale :

- une échelle linéaire (comme sur un oscilloscope) pour laquelle les unités sont le Volt et ses déclinaisons (mV, μ V)
- une échelle logarithmique beaucoup plus utilisée pour laquelle on utilise le décibel comme unité de base.

On va dans un premier temps se focaliser sur les définitions des unités dB, dBm, dBV,...

- Le gain d'un amplificateur s'exprime en dB

Exemple : Si les tensions d'entrée et de sortie d'un amplificateur sont respectivement égales à 10 mV et 100 mV, le gain de l'amplificateur est égale à 10 soit $20 \log_{10} \left(\frac{0,1}{0,01} \right) = 20 \text{ dB}$.

- $\text{dBm} = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{Puissance en W}}{10^{-3} \text{ W}} \right)$

Exemple : Une tension de 2 V efficace aux bornes d'une résistance de 50 Ω, la puissance dissipée dans la résistance est égale à : $10 \log_{10} \left(\frac{2^2/50}{10^{-3}} \right) = 19 \text{ dBm}$.

- $dBV = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{tension en V}}{1V} \right)$,

Exemple : A une tension de 2 V correspond $20 \log_{10} \left(\frac{2}{1} \right) = 6 \text{ dBV}$.

Question 1 : A quelle valeur du rapport de deux tensions correspond 0 dB ?

Question 2 : A quelle puissance (en mW) correspond 0 dBm ?

Question 3 : A quelle tension (en Volt) correspond 10 dBV.

Question 4 : Soit un système linéaire de gain 60 dB. On applique une tension V_e à l'entrée. Calculer la valeur de la tension à la sortie pour les différentes valeurs de V_e représentées dans le tableau ci-dessous.

V_e	100 μV	1 mV	10 mV
V_s			

Tableau 1

Question 5 : Compléter le tableau ci-dessous,

dBm	Tension équivalente pour une résistance de charge de 50 Ω
-10	
-5	
0	224 mV
+5	
+10	
+20	

Tableau 2

Question 6 : On donne les valeurs efficaces des composantes spectrales d'un signal périodique dans le tableau 3. Compléter le tableau.

F (kHz)	Valeur efficace du pic (mV)	Puissance en dBm dans 50Ω
5	224	
10	200	
15	10	
20	1	
25	0,1	

Tableau 3

Question 7 : Tracer $|V_{\text{eff}}(f)|$ le spectre en mV de ce signal sur la figure 2.

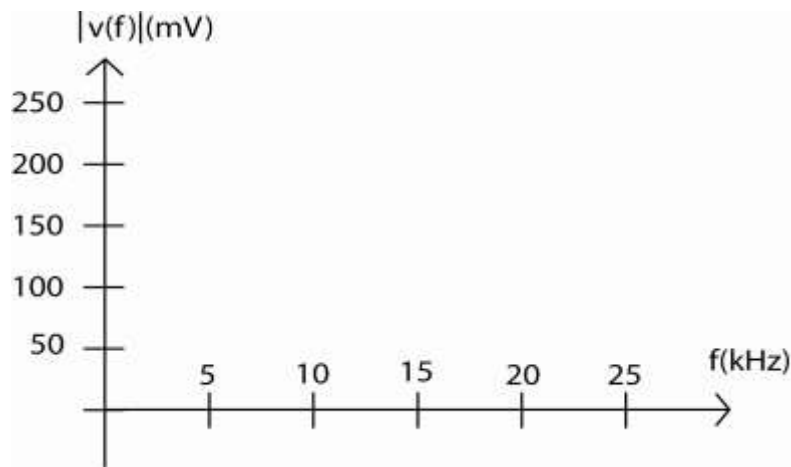


Figure 2

Lorsqu'on souhaite représenter le signal avec une échelle logarithmique, il est nécessaire de positionner un niveau repère appelé niveau de référence. C'est par définition le haut de la fenêtre d'affichage sur l'écran de l'analyseur de spectre. L'échelle est donnée par le nombre de dB par carreau de l'écran. Sur notre exemple, on peut lire « 10dB/ » qui correspond à une sensibilité de 10 décibels par carreaux.

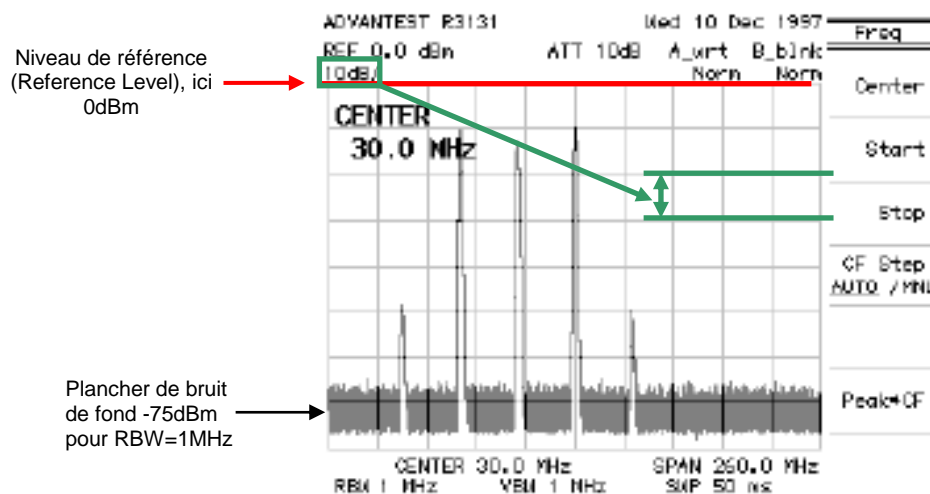


Figure 3 : Exemple d'acquisition d'un spectre et indications associées

Question 8 : En admettant que le niveau de référence est de 0 dBm, calculer le niveau en dBm et en μV correspondant à la ligne au bas de l'écran.

Question 9 : Sur le spectre de la figure 3, on observe un bruit de fond. Déterminer sa valeur « moyenne » en μV .

Question 10 : Sur la figure 4, indiquer la valeur du niveau de référence choisie ainsi que la sensibilité puis **tracer le spectre en dBm** du signal du tableau 3 en supposant qu'un bruit de fond de $10 \mu\text{V}$ se superpose à ce signal.

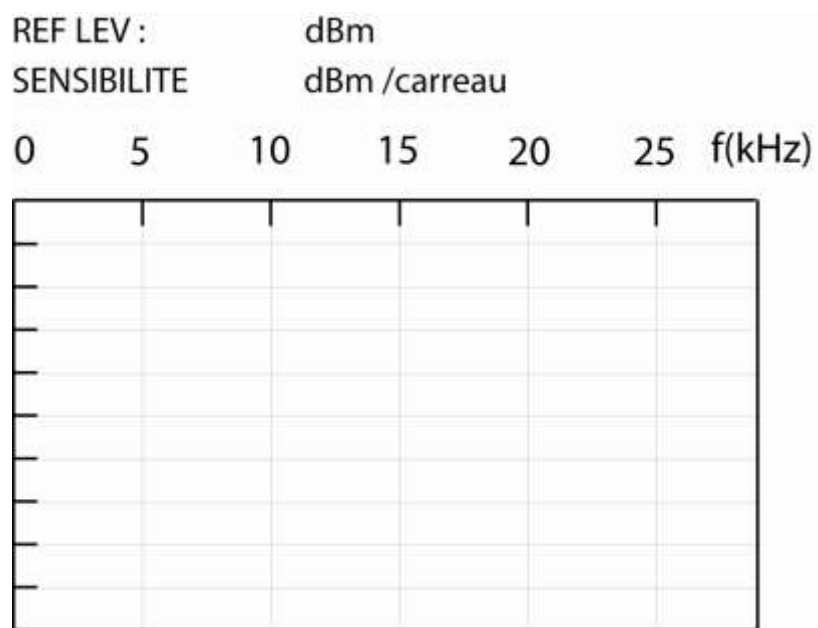


Figure 4

II- Les réglages horizontaux

Pour les réglages horizontaux, deux modes de réglage sont possibles :

- soit on peut préciser les fréquences extrêmes (START FREQUENCY et STOP FREQUENCY),
- soit on entre directement la fréquence centrale et l'étendue en fréquence (CENTER FREQUENCY et SPAN) comme indiqué sur la figure 5.

Question 11 : On considère l'écran représenté en figure 6. Retrouver la valeur des différents réglages horizontaux START, STOP, CENTER FREQUENCY et SPAN. En déduire l'échelle en fréquence par carreau.

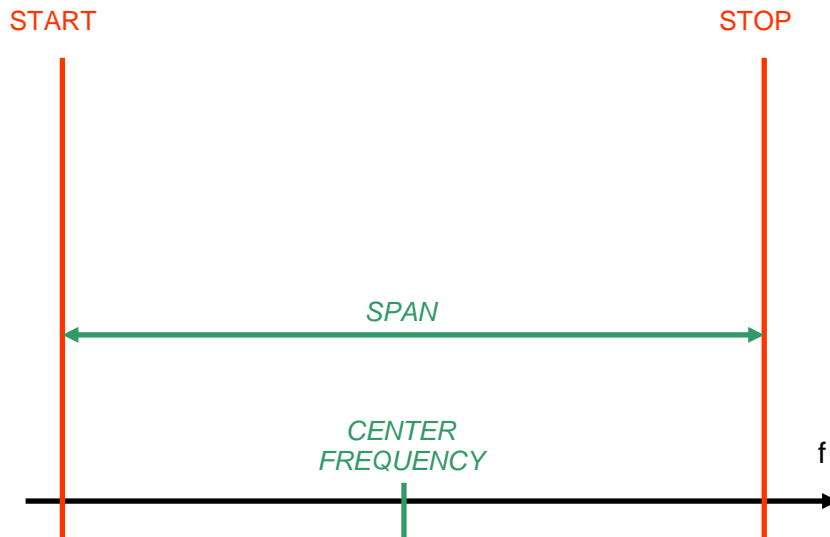


Figure 5

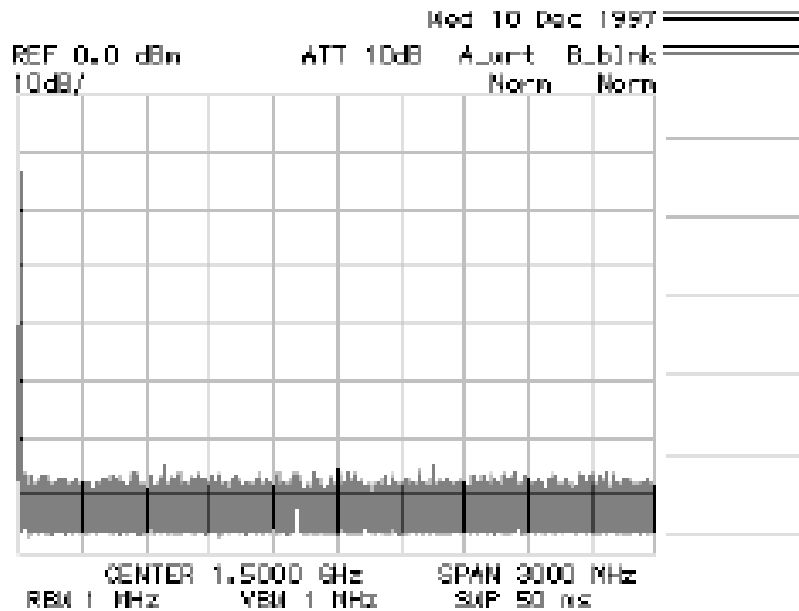


Figure 6

III- Fonctionnement détaillé d'un analyseur et principaux réglages

III-1. Principe de l'hétérodynage

Si on observe l'écran de la figure 3, on constate que les pics, représentatifs des fréquences contenues dans le signal étudié, ont **une largeur non nulle**. Celle-ci découle des réglages choisis pour ces deux paramètres que sont :

- la bande passante de résolution (RBW ou Resolution BandWidth),
- la vitesse de balayage (SWP ou Sweep Time).

Pour comprendre le rôle de ces autres réglages, il faut comprendre le fonctionnement interne de l'analyseur de spectre analogique notamment basé sur le **principe dit de l'hétérodynage**. Cette technique consiste à transposer, par multiplication, les fréquences du signal à observer dans la bande passante d'un filtre passe-bande de fréquence centrale fixe car il est difficile de réaliser un filtre passe-bande de fréquence centrale ajustable par une tension sur une large gamme de fréquences (de quelques kHz à quelques dizaines de GHz) comme le montre la figure 7. Cette technique est particulièrement bien décrite dans l'ouvrage de Christoph Rauscher, « *Fundamental of Spectrum Analysis* » publié par Rohde & Schwarz.

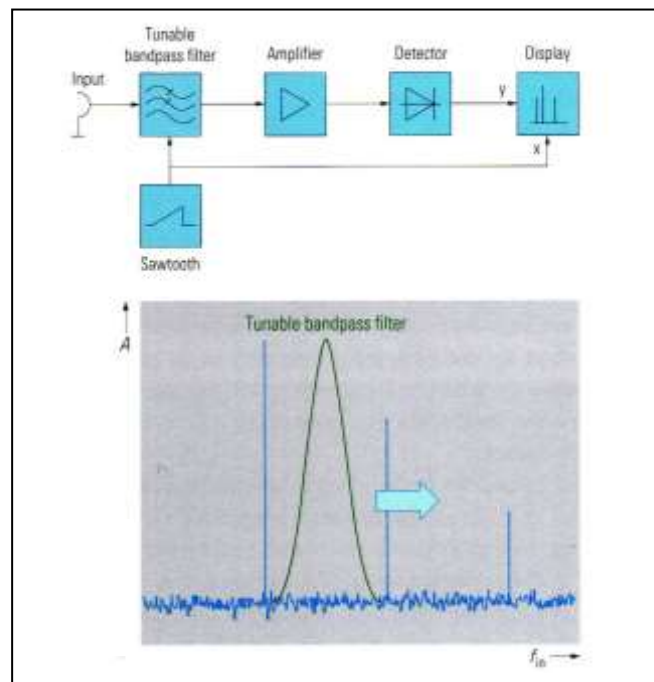


Figure 7 : *Filtre passe-bande ajustable en tension*

Le schéma de principe d'un analyseur de spectre commercialisé est donné en figure 8.

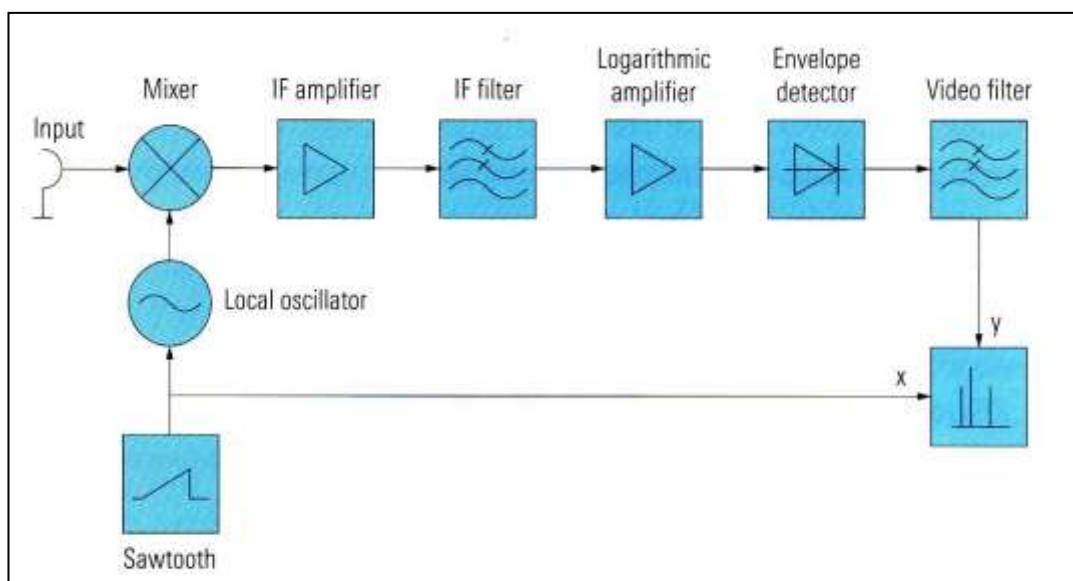


Figure 8 : *Synoptique général d'un analyseur de spectre commercialisé*

Pour des raisons pédagogiques, nous allons étudier une structure simplifiée qui est représentée en figure 9. Elle se base sur :

- un multiplieur (encore appelée « mixer »)
- un oscillateur contrôlé en tension (VCO pour *Voltage Controlled Oscillator*)
- un générateur de dents de scie (encore appelé « Sawtooth »)
- un filtre passe bande
- un détecteur crête
- un oscilloscope utilisé en mode X-Y

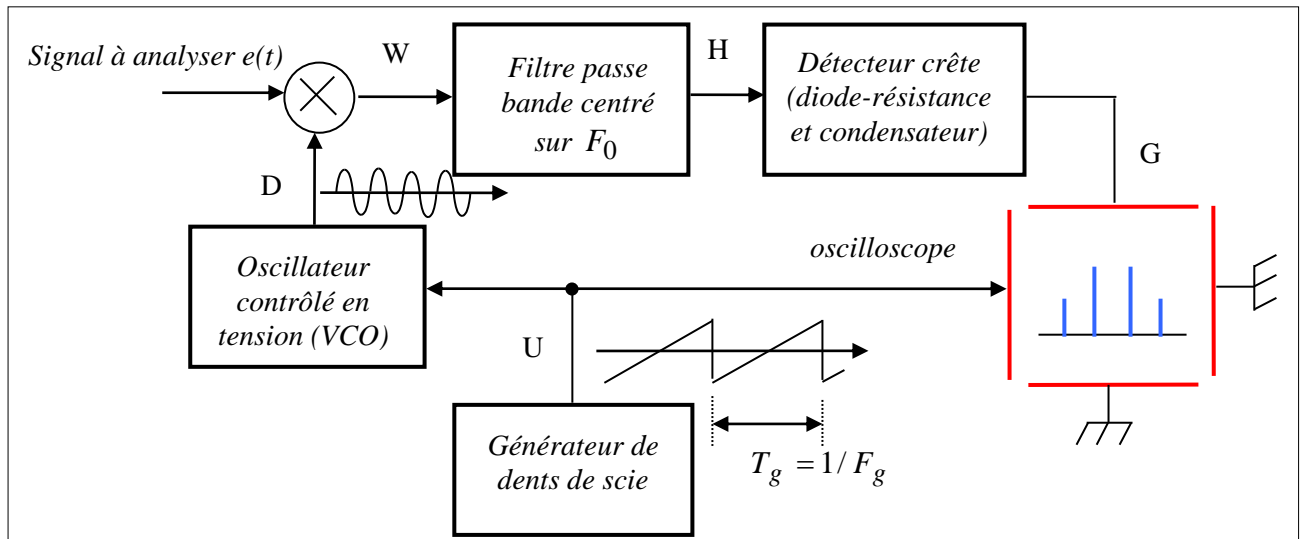


Figure 9 : Synoptique d'un analyseur de spectre

La caractéristique fréquence–tension du VCO est donnée en figure 10.

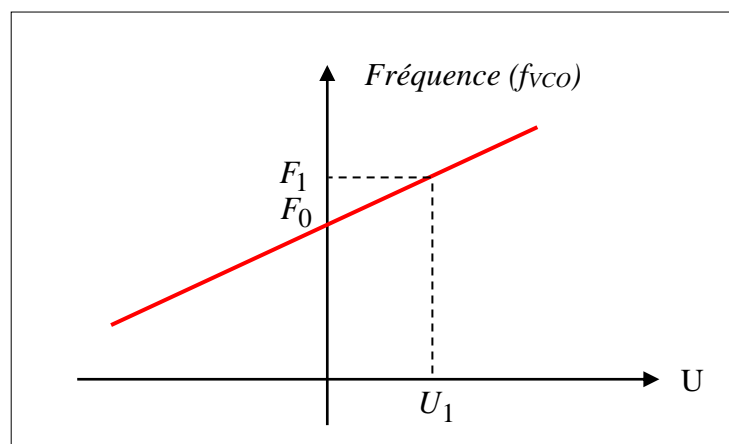


Figure 10 : Caractéristique fréquence-tension du VCO

- Signal à analyser :

Faisons l'hypothèse dans un premier temps que le signal $e(t)$ est de type cosinusoidal soit : $e(t) = A \cos(\omega_c t)$. La fréquence F_c du signal $e(t)$ est égale à 1MHz , son amplitude A est égale à 2V .

- Générateur de dents de scie :

Pour une tension U_1 donnée du générateur de dents de scie, la fréquence du VCO est égal à F_1 . Les valeurs *max.* et *min.* de la dent de scie sont $+5V$ et $-5V$.

- VCO :

La caractéristiques fréquence – tension du VCO sont : $F_{VCO} = F_0 + aU$ avec $F_0 = 100MHz$ et $a = 1MHz/V$. La tension $D(t)$ en sortie du VCO s'écrit : $D(t) = B \cos(\omega_{VCO}t)$ avec $\omega_{VCO} = 2\pi F_{VCO}$. On donne $B = 4V$.

- Filtre passe-bande :

On suppose dans un premier temps un filtre passe bande avec une fonction de transfert idéal du type $\delta(f - F_0)$, c-à-d un filtre qui ne laisse passer que la fréquence $F_0 = 100MHz$ avec un gain unité.

- Détecteur de crête : On suppose un détecteur crête parfait.

L'écran de l'oscilloscope comprend 10 divisions horizontales et verticales. Le spot est en haut à droite de l'écran quand $U = G = 5V$ et il est en bas à gauche quand $U = G = -5V$.

Question 12 : Ecrire l'expression du signal $W(t)$ en sortie du multiplieur et tracer son spectre. Le circuit multiplieur a une fonction d'appareil $k = 1V^{-1}$.

Question 13 : Remplir le tableau ci-dessous et identifier les valeurs U de commande du VCO pour lesquelles les fréquences $(F_{VCO}-F_e)$ et $(F_{VCO}+F_e)$ sont égales à 100 MHz.

U (V)	Fvco (MHz)	Fvco-Fe(MHz)	Fvco+Fe (MHz)
-5			
-4			
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			
5			

Question 14 : Calculer l'amplitude des 2 composantes spectrales de $W(t)$ à $(F_{VCO}-F_e)$ et $(F_{VCO}+F_e)$

Question 15 : Reporter le graphe observé après l'opération de filtrage et la détection de crête lorsque U varie de $-5V$ à $+5V$ sur l'écran de la figure 9.

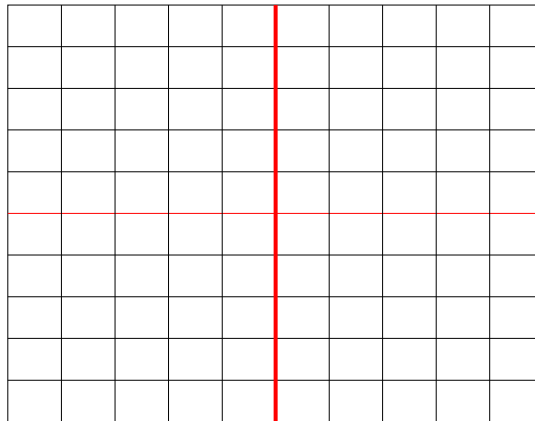


Figure 9 : Ecran de l'oscilloscope

Question 16 : On modifie l'étage d'entrée de l'analyseur comme le montre la figure 10. On garde les mêmes valeurs numériques qu'à la question précédente. Reporter le nouveau spectre obtenu sur l'écran ci-dessous.

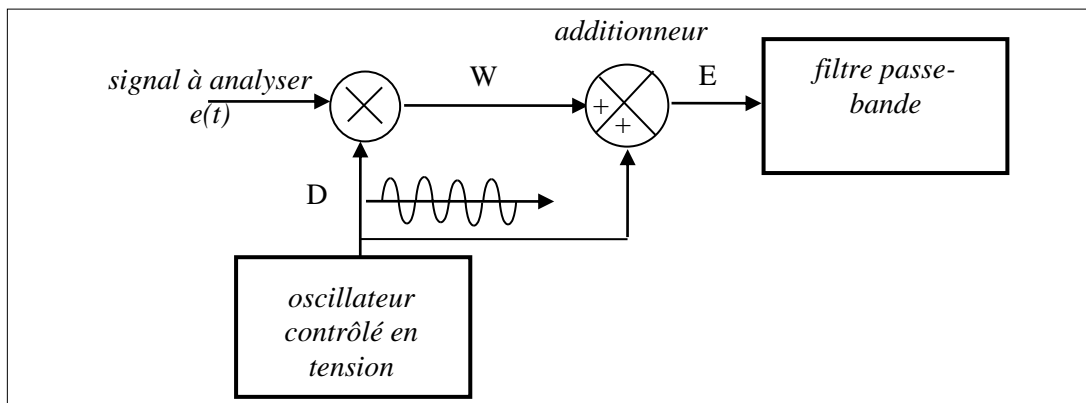
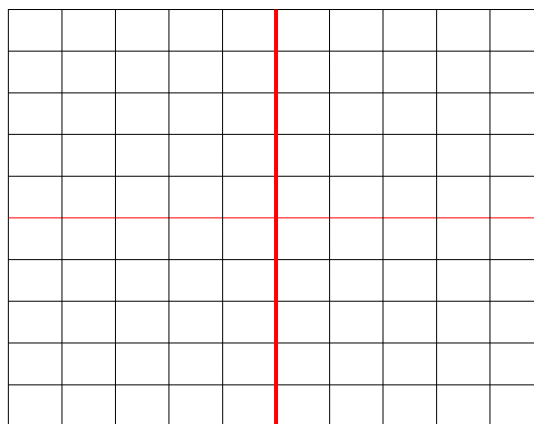


Figure 10 : Etage d'entrée d'un analyseur de spectre



Ecran de l'oscilloscope

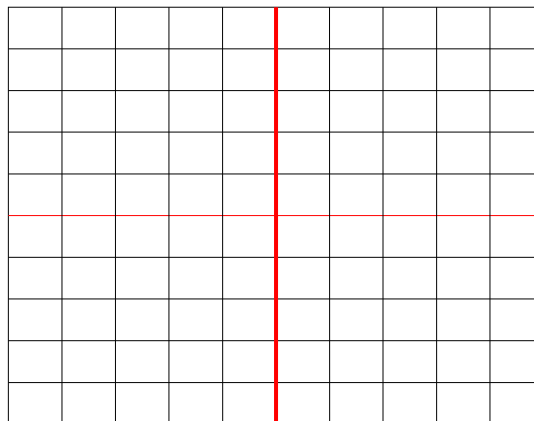
Question 17 : L'impédance d'entrée de l'analyseur est égale à 50Ω . Pour ne pas détruire l'étage d'entrée de l'analyseur, la puissance de doit pas dépasser $25dBm$, en déduire la **valeur efficace** maximale de la tension d'entrée.

III-2. Description des principaux réglages

- **Réglage « SPAN »**

La pente de la caractéristique fréquence – tension du VCO est maintenant modifiée : $F = F_0 + aU$ avec $F_0 = 100MHz$ et $a = 0,2MHz/V$. Les autres valeurs numériques sont inchangées.

Question 18 : Reporter le nouveau spectre obtenu sur l'écran ci-dessous.



Ecran de l'oscilloscope

Le réglage du « SPAN » permet de gérer l'excursion en fréquence de l'analyse.

- **Réglage « CENTER FREQUENCY »**

L'ordonnée à l'origine de la caractéristique fréquence – tension du VCO est maintenant modifiée : $F = (F_0 + 1MHz) + aU$ avec $F_0 = 100MHz$ et $a = 1MHz/V$. Les autres valeurs numériques sont inchangées.

Question 19 : Reporter le nouveau spectre obtenu sur l'écran ci-dessous.



Ecran de l'oscilloscope

Le réglage du « CENTER FREQUENCY » permet de gérer la position des raies sur l'écran. Il est souvent intéressant d'amener une raie au milieu de l'écran pour pouvoir correctement mesurer son amplitude sur un « SPAN » plus réduit.

Pour information, la figure 11 montre l'influence de ce paramètre sur un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence 2 MHz et d'amplitude 500mV_{pp}.

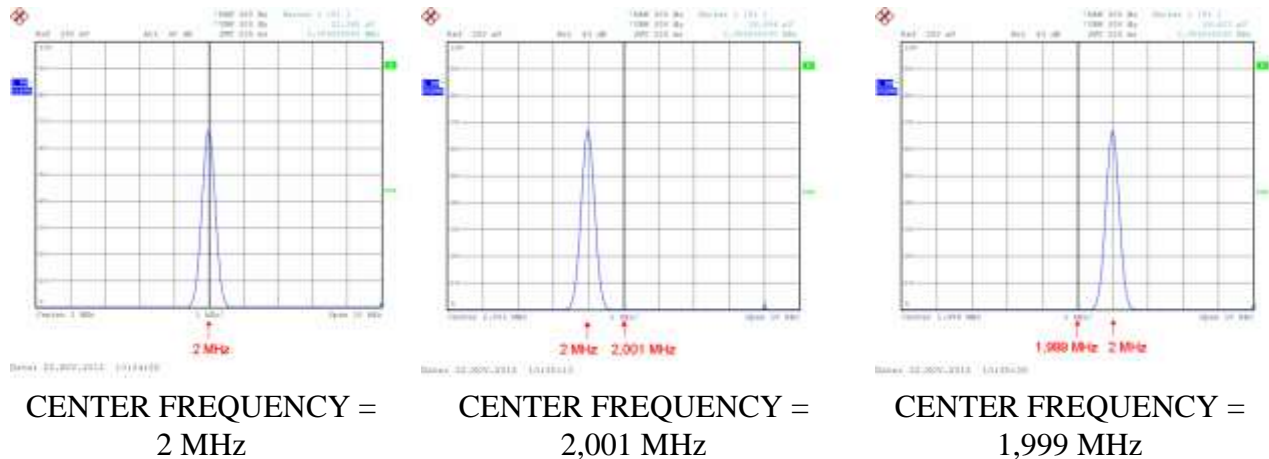


Figure 11 : Influence du réglage « CENTER FREQUENCY »

- Réglage « RBW »

Le filtre passe-bande est réalisé au moyen d'un **convertisseur tension - courant** suivi d'une cellule $L-C$ comme le montre la figure 12. La résistance R représente les pertes du circuit $L-C$ au voisinage de la fréquence $F_0 = 100MHz$.

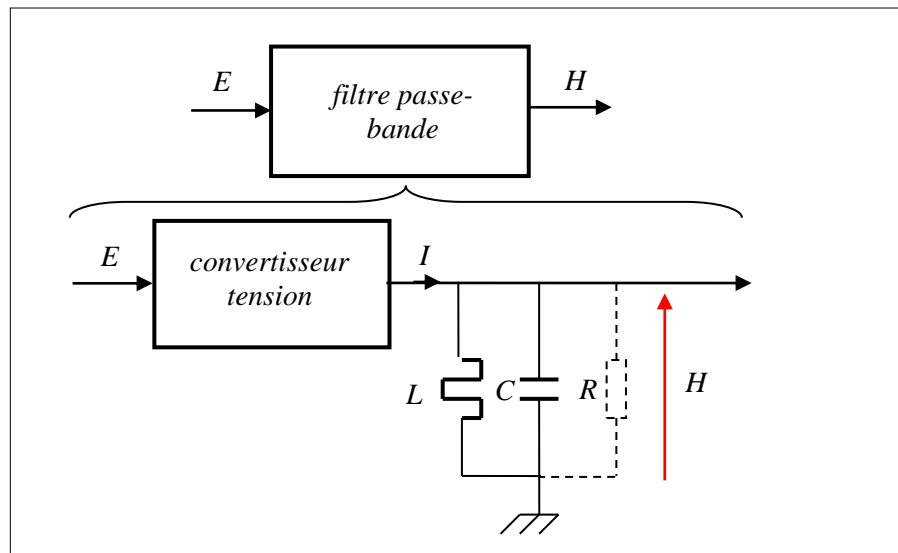


Figure 12 : Réalisation du filtre passe-bande

Question 20 : Ecrire le gain complexe H/I , le mettre sous la forme :

$$\frac{H}{I} = \frac{R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Donner l'expression de Q et ω_0 en fonction de R , L et C .

Question 19 : Tracer l'allure du module et de l'argument de $T = \frac{H/I}{R}$, quelle est la valeur du module pour la fréquence F_0 ?

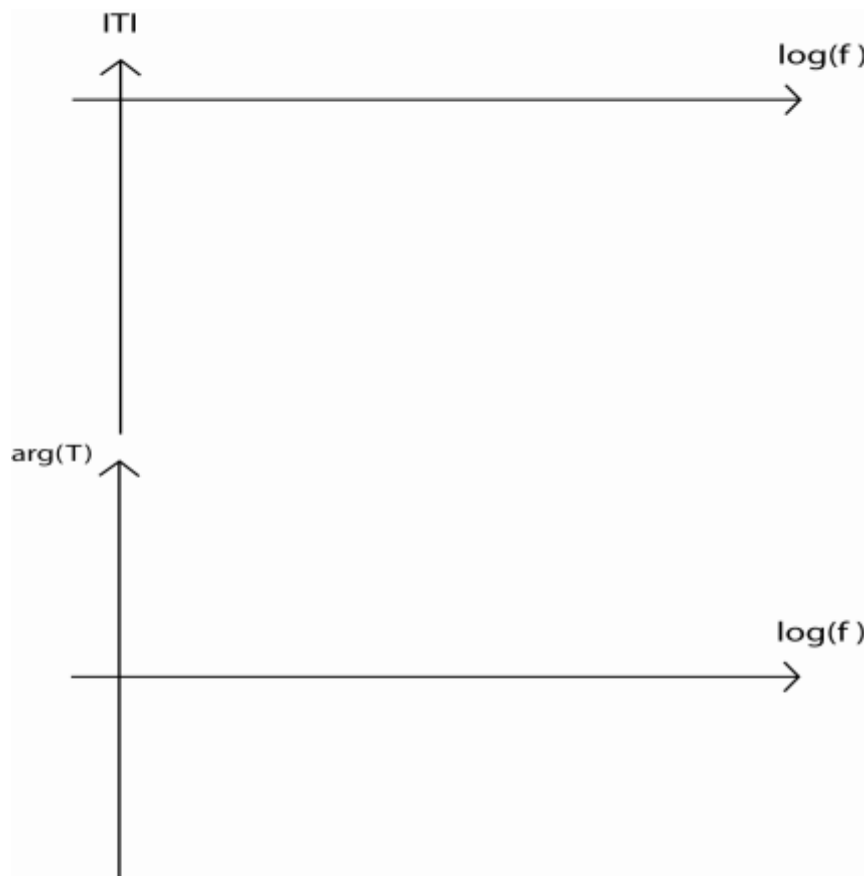


Figure 13

Question 20 : La largeur de bande à -3dB est égale à F_0/Q . Pour simplifier, on assimile la courbe de réponse en fréquence du filtre passe-bande à une fonction « porte » comme le montre la figure 14.

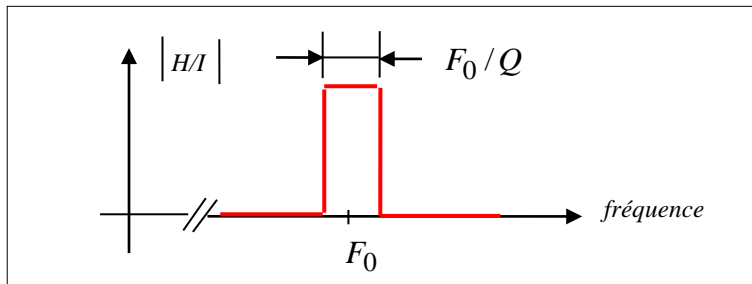
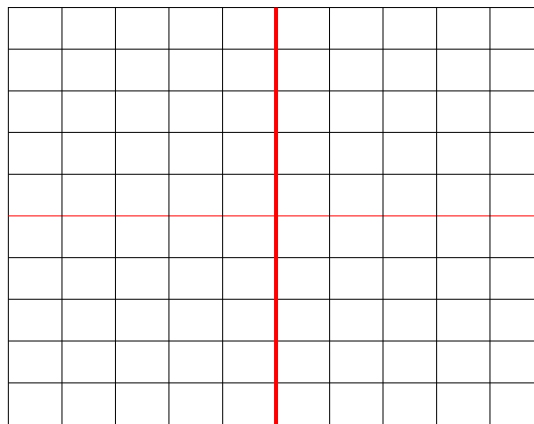


Figure 14 : Approximation de la réponse en fréquence du filtre par une fonction « porte »

Le convertisseur tension – courant à un gain $10^{-5} A/V$, on donne $Q = 500$, $R = 100k\Omega$, reporter le nouveau spectre obtenu sur l'écran ci-dessous. Faites un zoom sur les zones intéressantes.



Ecran de l'oscilloscope

Le réglage de largeur de bande à -3dB correspond à l'influence de la largeur du filtre sur la résolution de l'analyse. Elle est identifiée par la fonction RBW ou « Resolution Bandwidth ». **Pour être efficace, la valeur de RBW doit être inférieure à l'écart minimal entre deux fréquences à observer.**

Pour information, la figure 15 illustre l'influence de la largeur RBW sur la différenciation entre deux signaux sinusoïdaux de 10,001 MHz et 10,0005 MHz et de même amplitude ($\Delta f = 500\text{Hz}$). L'analyse est faite avec un SPAN constant de 10 kHz.

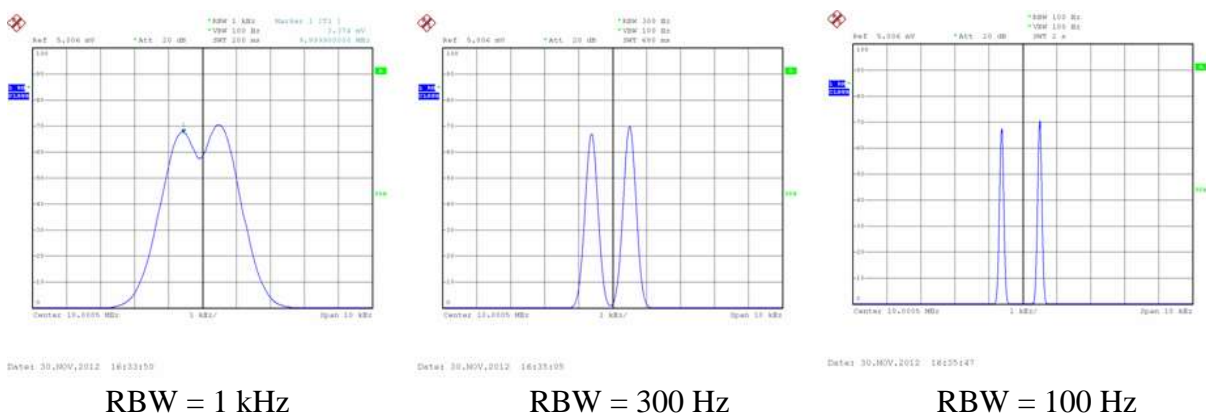


Figure 15 : Influence du réglage « RBW »

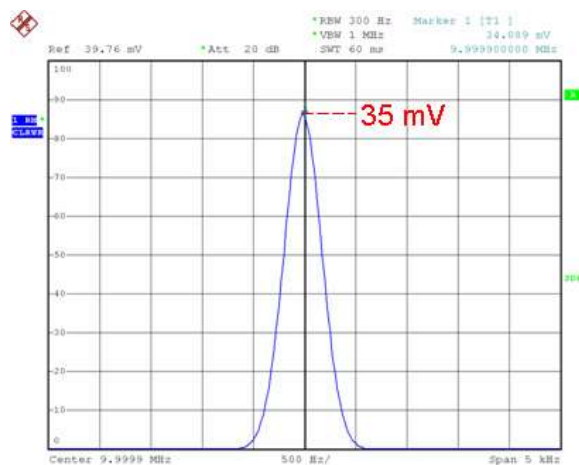
Il est bien évident que plus RBW est faible et meilleure sera la résolution mais plus important sera le temps de balayage. Ce compromis doit être réglé avec le paramètre « SWEEP TIME ».

- **Réglage « SWEEP TIME »**

La caractéristique du VCO est : $F = (F_0 + 1\text{MHz}) + aU$ avec $F_0 = 100\text{MHz}$ et $a = 0,2\text{MHz/V}$, la fréquence du signal $e(t)$ est inchangée.

Question 21 : Représenter l'allure des signaux E, H et G sur une période $T_g = 1/F_g$ du générateur de dents de scie. On a évidemment intérêt à disposer du spectre le plus rapidement possible, a priori il suffit donc de prendre T_g (SWEEP TIME) faible. En pratique T_g est d'autant plus grand que la bande passante F_0/Q du filtre passe bande (RBW) est étroite, chercher à expliquer pourquoi.

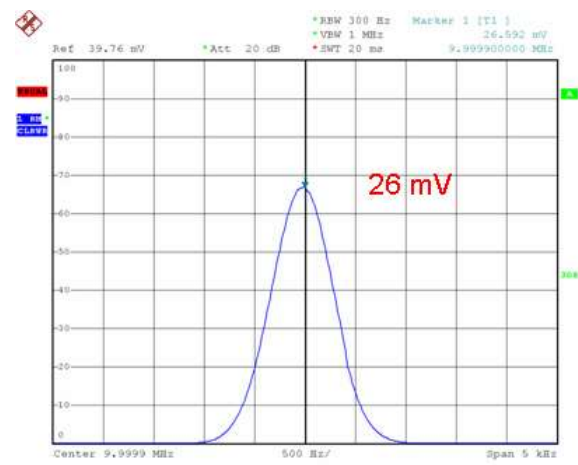
Pour information, la figure 16 présente l'influence du temps de balayage sur le spectre d'un signal sinusoïdal d'amplitude 100mVpp ($V_{\text{eff}} = 35\text{mV}$) et de fréquence 10 MHz .



Date: 29.NOV.2012 20:22:54

SWT = 60 ms
RBW = 300 Hz

On mesure la valeur attendue.



Date: 29.NOV.2012 20:23:56

SWT = 20 ms
RBW = 300 Hz

On ne mesure pas la valeur attendue.
L'appareil indique « UNCAL »

Figure 16 : Influence du réglage « SWEEP TIME »

A RETENIR : Il faut donc retenir qu'un analyseur de spectre déterminant le spectre (représentation fréquentielle) de signaux analogiques fonctionne sur le principe de l'hétérodynage (technique qui consiste à transposer, par multiplication à un oscillateur contrôlé en tension (VCO), les fréquences du signal à observer dans la bande passante d'un filtre passe-bande de fréquence centrale fixe. Les principaux paramètres sont : les réglages verticaux d'amplitude (en tension ou en puissance) et les réglages horizontaux (SPAN, CENTER FREQUENCY, RBW, SWEEP TIME) qui doivent être assimilés pour effectuer une interprétation pertinente du spectre acquis.

IV- Exercice d'application (extrait d'un partiel de S3)

Q1- Quelle est la puissance contenue dans chaque raie du signal dont le spectre est tracé en figure 1 ?

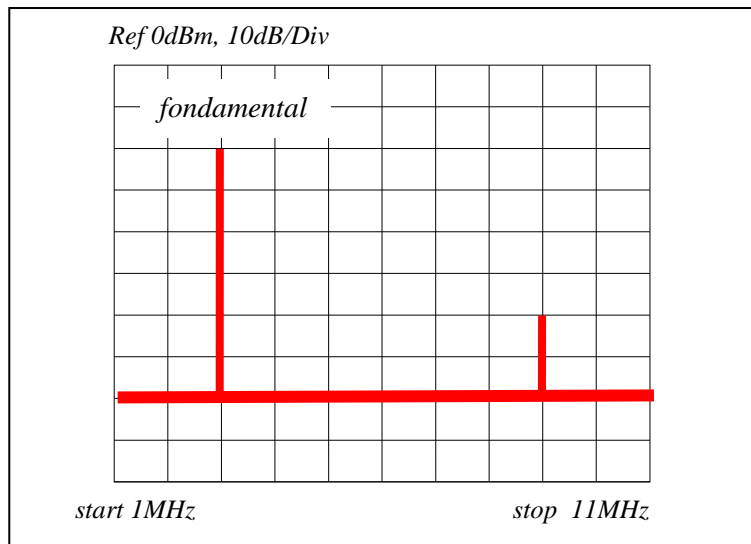


Figure 1 : Spectre du signal

Q2- En déduire les valeurs efficace U_{eff} et crête U_C du fondamental sachant que l'impédance d'entrée de l'analyseur de spectre est égale à 50Ω .

Q3- Calculer la valeur du taux de distorsion D du signal (en %).

Q4- Un analyseur de spectre est attaqué par le signal suivant :
 $e(t) = 2 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^4 t) + 3 \cdot \cos(2\pi \cdot 10,1 \cdot 10^3 t)$

Q4-a) Rappeler ce que représente la fonction "RBW" d'un analyseur de spectre.

Q4-b) Donner la valeur, en la justifiant, du RBW pour observer deux pics distincts sur l'écran de l'analyseur de spectre.

Thème 2 :

Echantillonnage et conversion analogique-numérique **(CAN)**

I- Echantillonnage idéal

II- Echantillonnage pratique

III- Choix de la fréquence d'échantillonnage : Relation de Shannon

IV- Filtre anti-repliement

V- Conversion analogique-numérique

V-1. Principe général de la conversion

V-2. Paramètres usuels d'un CAN

V-3. L'échantillonneur-bloqueur

V-4. Caractéristiques d'un CAN

V-5. Restitution par le CNA – Bruit de quantification

VI- Exercice d'application (*extrait d'un partiel de S3*)

Objectifs :

L'objectif de ce TD est de comprendre :

- les bases de **l'échantillonnage des signaux** et les règles de base à respecter pour reconstruire le signal,
- les principales **caractéristiques d'un CAN**.

Pré-requis :

Maîtrise des représentations temporelles et fréquentielles (spectres) des signaux. Circuits RC et amplificateurs opérationnels.

L'objectif général de la conversion analogique-numérique (CAN) ou numérique-analogique (CNA) est de faire correspondre un nombre binaire N à une tension analogique V et vice-versa. En effet, les informations d'entrée doivent être présentées au système numérique (PC par ex.) EXCLUSIVEMENT sous forme binaire et de même les informations délivrées seront disponibles sous cette forme. Classiquement, une chaîne d'acquisition et de traitement intègre les parties suivantes :

- une entrée d'informations à base de capteurs délivrant la plupart du temps une grandeur de type analogique,
- une partie traitement de données en temps réel ou en temps différé avec des algorithmes complexes de calcul irréalisables de manière analogique (ex. filtrage numérique, calculs sur DSP, codage...),
- une sortie d'informations à base d'actionneurs nécessitant d'être commandé par une grandeur analogique.

Le schéma de la figure 1 permet de localiser les positions des CAN et CNA au sein d'un système électronique.

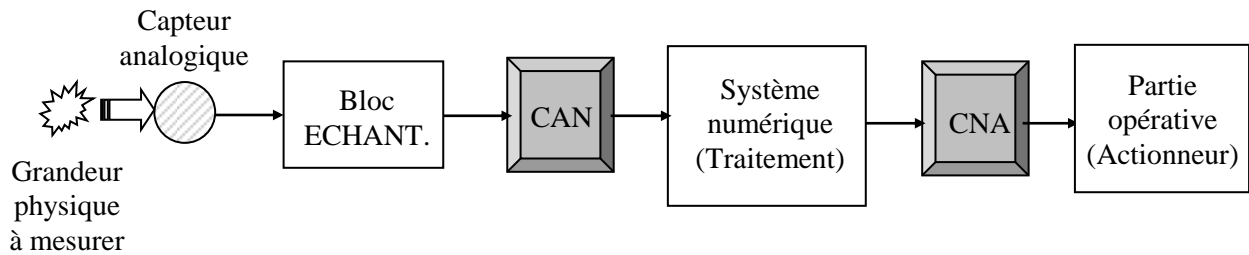


Figure 1 : Schéma de principe d'un système électronique de traitement de l'information

L'échantillonnage est la première étape nécessaire pour réaliser une conversion analogique numérique ainsi que le présente la figure 2.

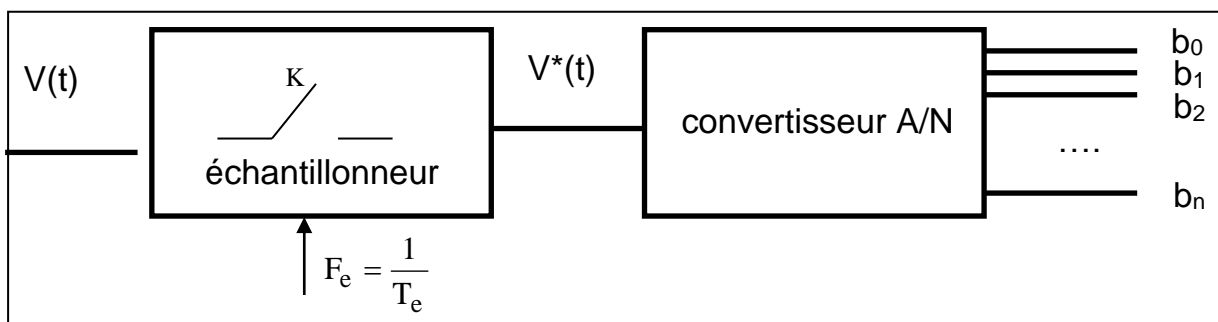


Figure 2 : Principe de la conversion analogique numérique

D'un point de vue mathématique, cette opération consiste à prendre la valeur instantanée du signal $V(t)$ à des instants séparés par un temps constant T_e : la période de l'horloge d'échantillonnage. On obtient alors le signal échantillonné $V^*(t)$ (qui reste encore un signal analogique car non codé numériquement).

I- Echantillonnage idéal

Dans le cas de l'échantillonnage idéal le signal $V^*(t)$ est défini par :

$$V^*(t) = V(t) \text{ si } t = kT_e$$

$$V^*(t) = 0 \text{ si } t \neq kT_e$$

Question 1 : Donner la représentation temporelle du signal échantillonné sur la figure 3.

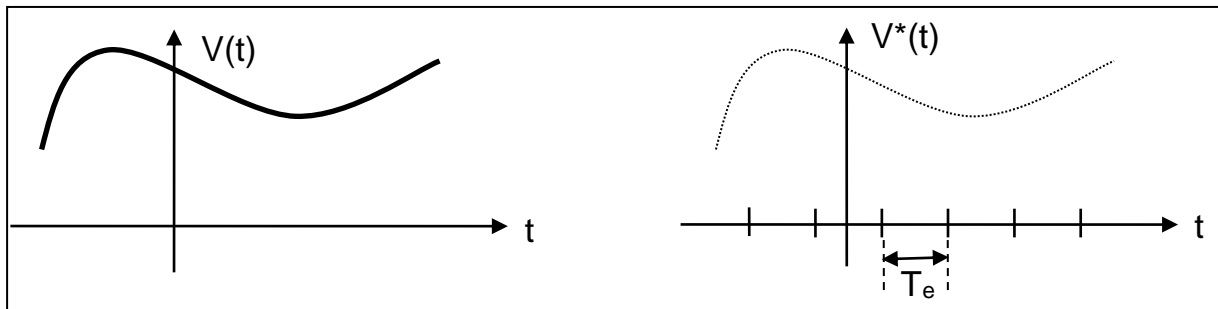


Figure 3 : Représentation temporelle d'un signal échantillonné

II- Echantillonnage pratique

Question 2 : En pratique l'interrupteur K de l'échantillonneur est actionné par un signal impulsionnel logique $g(t)$ comme le montre la figure 4.

Donner, dans ce cas, la représentation temporelle de $S(t)$ sur la figure 5 si le signal $V(t)$ est une sinusoïde.

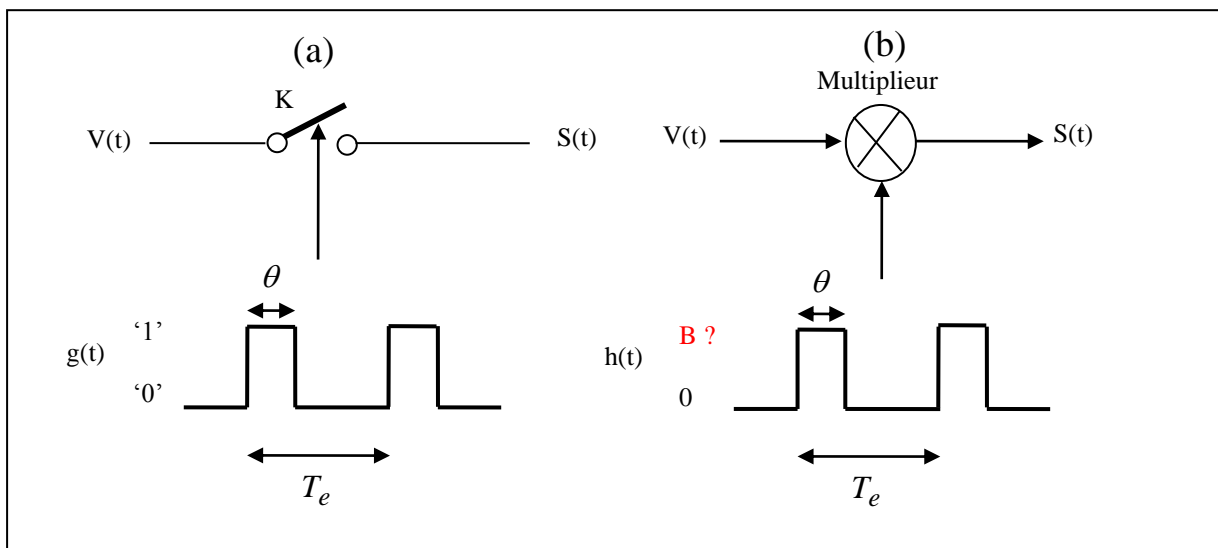


Figure 4 : (a)- Interrupteur K actionné par un signal périodique impulsionnel, (b)- Modélisation mathématique d'un échantillonneur réel

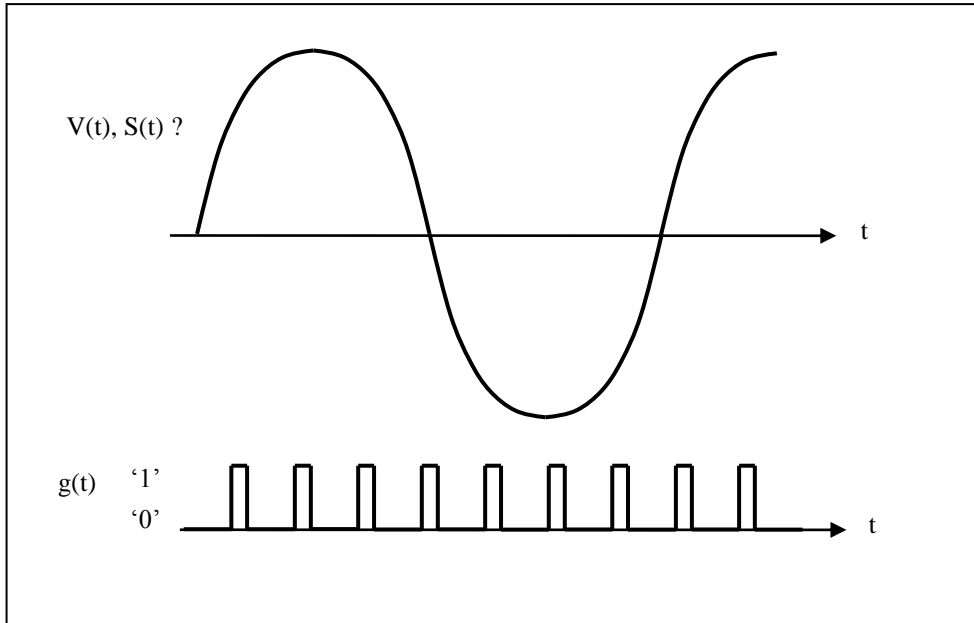


Figure 5 : Représentation temporelle d'un signal échantillonné par un signal impulsionnel

Question 3 : Pour obtenir le spectre du signal échantillonné $S(t)$, on modélise l'échantillonneur de la figure 4-a par le modèle mathématique de la figure 4-b dans lequel $h(t)$ n'est plus un **signal logique** mais un signal avec **deux valeurs algébriques 0 et B**. Quelle est la valeur de B ?

 Pour faire comprendre les effets d'une opération d'échantillonnage dans le domaine fréquentiel, on s'intéresse au cas particulier d'un signal étudié du type : $V(t) = A \cos(\omega_0 t)$.
 Le signal $h(t)$ est périodique et admet comme série de Fourier :

$$S.F \text{ de } h(t) = \frac{B\theta}{T_e} + \frac{2B\theta}{T_e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\theta}{T_e}\right)}{\left(\frac{n\pi\theta}{T_e}\right)} \cos(n\omega_e t) \text{ avec } \omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$$

Question 4 :

- Ecrire le signal $S(t)$ résultant du produit de $V(t)$ par $h(t)$.
- Compléter le tableau I en calculant les valeurs efficaces des cinq premières fréquences du spectre de $S(t)$.

on donne : $A = 5V$, $\frac{\theta}{T_e} = 0,45$, $f_0 = 10 \text{ kHz}$ et $f_e = 80 \text{ kHz}$

NB : On rappelle que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Fréquences					
Valeur efficace					

Tableau I

Question 5 : Tracer le spectre de $S(t)$ sur la figure 6.

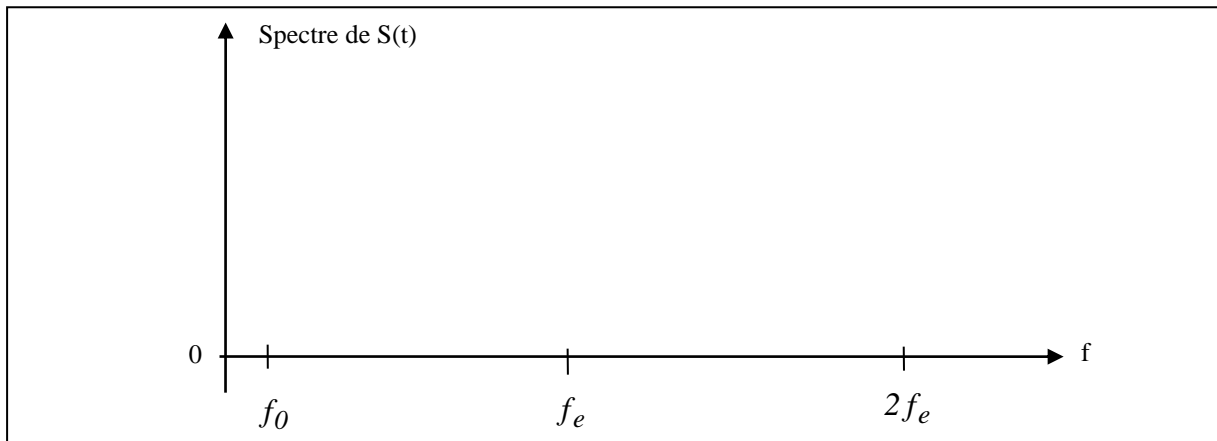


Figure 6 : Représentation fréquentielle du signal échantillonné

III- Choix de la fréquence d'échantillonnage : Relation de Shannon

Comme nous venons de le voir, l'échantillonnage nécessite de fixer une fréquence f_e . Mais comment doit-elle être déterminée ?

Question 6 : D'après le spectre de la figure 6, quelle relation doivent vérifier f_0 et f_e pour récupérer le signal $V(t)$ après filtrage du signal échantillonné $S(t)$?

.....
.....

On remplace maintenant le signal purement sinusoïdal $V(t)$ par un signal contenant des fréquences comprises entre 0 et $f_{max} = 3\text{kHz}$ comme le montre le graphe de la figure 6. La fréquence d'échantillonnage f_e est égale à 8kHz .

Question 7 : Représenter, sur la figure 7, le spectre de $S(t)$ en ne s'intéressant principalement qu'à l'axe des fréquences.

Quelle relation doivent satisfaire f_{max} et f_e si on veut récupérer le signal $V(t)$ par filtrage du signal $S(t)$. Cette relation est appelée la **relation de Shannon** (Mathématicien américain 1916 – 2001).

.....
.....

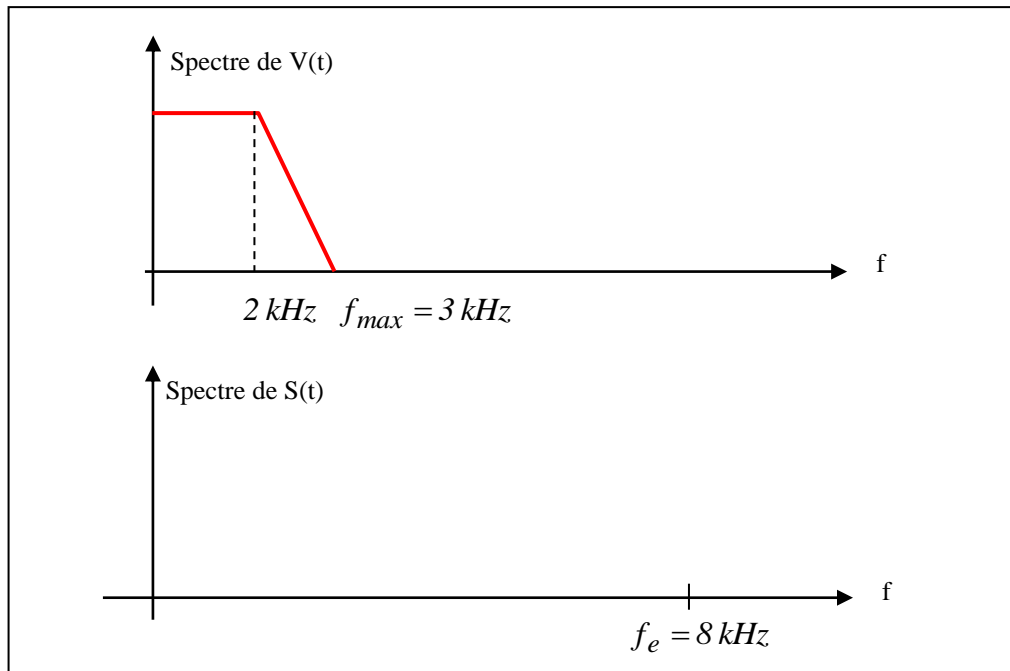


Figure 7 : Spectres de $V(t)$ et $S(t)$

IV- Filtre-antirepliement

En figure 7, on a supposé un signal $V(t)$ avec aucune énergie au-delà de la fréquence f_{max} mais il faut comprendre qu'un tel signal n'existe pas. En pratique, l'énergie diminue quand la fréquence augmente mais il n'existe pas une fréquence au-delà de laquelle l'énergie est nulle, il y a donc, a priori, une difficulté pour choisir la fréquence d'échantillonnage : elle devrait être infinie ! Autrement dit l'électronique numérique ne serait pas possible ?

Prenons le cas de la téléphonie, la fréquence d'échantillonnage est égale à 8 kHz seulement alors qu'un morceau de musique peut produire des sons avec des fréquences bien plus élevées audibles par l'oreille dont la bande passante est comprise entre 20Hz et 20 kHz. **A priori la relation de Shannon n'est pas vérifiée et pourtant cela fonctionne grâce à un filtre appelé « filtre antirepliement ».**

Pour faire comprendre le rôle clé joué par le filtre antirepliement (« *antialiasing filter* ») en traitement numérique du signal, on s'intéresse au spectre d'un signal $V(t)$ comme celui en figure 8.

Question 8 : Tracer le spectre du signal échantillonné $S(t)$ en figure 8 quand la fréquence d'échantillonnage f_e est égale à 8 kHz. Quelles sont les fréquences de $V(t)$ qui contribuent à la fréquence de 2 kHz du signal $S(t)$?

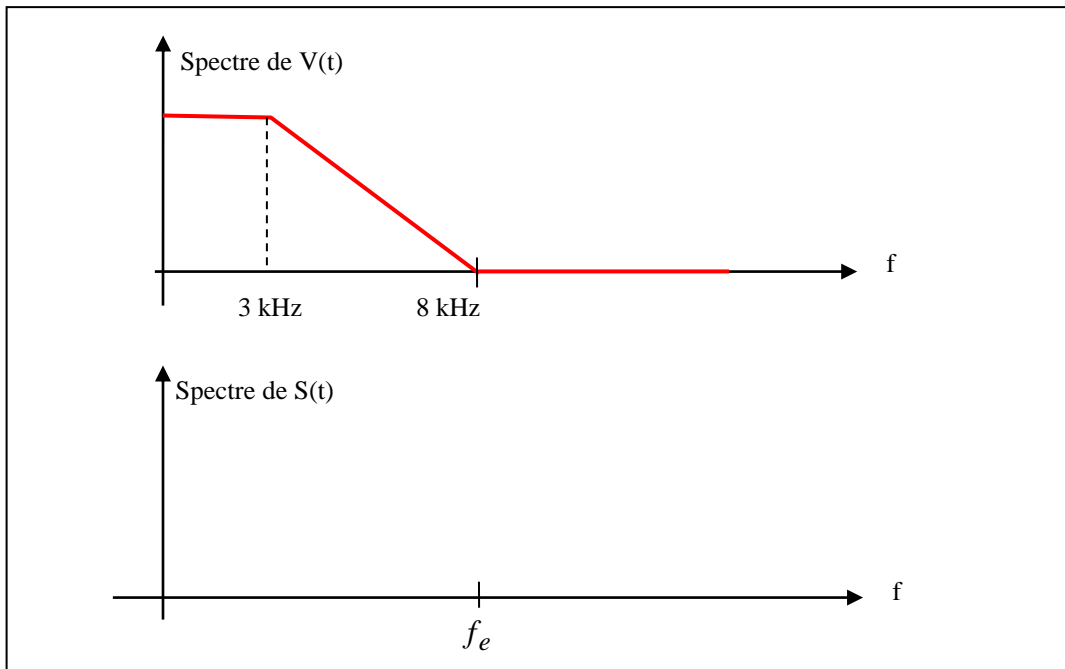


Figure 8 : Spectres de $V(t)$ et $S(t)$, la fréquence d'échantillonnage est égale à 8 kHz

Question 9 : On veut que le spectre de $S(t)$ entre 0 et 3 kHz soit identique au spectre de $V(t)$ dans la même plage de fréquences. Que faut-il faire ?

Question 10 : On considère un système effectuant la conversion d'un signal analogique - numérique. Ce système est constitué de trois blocs : un circuit convertisseur A.N. (CAN), un filtre anti-repliement (FAR) et un échantillonneur (EC).

Placer, dans le bon ordre, ces trois éléments (CAN, FAR, EC) sur le schéma de la figure 9. Indiquer le type de filtre à utiliser pour réaliser un FAR Justifier votre raisonnement.



Figure 9 : Chaîne de conversion analogique-numérique

V- Conversion analogique-numérique (CAN-CNA)

V-1. Principe général de la conversion

On s'intéresse à la chaîne de traitement de la figure 1. Les opérations d'échantillonnage et de conversion analogique - numérique sont, en général, réalisées dans un seul et même circuit intégré (CI).

Le CAN délivre au processeur numérique les échantillons $V(nT_e)$, codé sur N_0 bits, du signal analogique $V(t)$ où T_e est la période d'échantillonnage. Le rôle du processeur est de modifier le signal initial par des traitements numériques particuliers (génération d'échos, suppression de fréquences, distorsion volontaire...). Par exemple, la génération d'échos sera abordée en S4 lors de l'étude des filtres numériques.

A la suite d'échantillons $V(nT_e)$, le processeur fait correspondre une autre suite d'échantillons $S(nT_e)$, par exemple sous la forme d'une relation du type :

$$S(nT_e) = \frac{1}{2} \{V(nT_e) + V((n-1)T_e)\}.$$

Pour reconstruire le signal analogique $S(t)$, on utilise un Convertisseur Numérique-Analogique (CNA) comme représenté en figure 10.

Dans le TP proposé sur ce thème, le processeur réalise l'opération $S(nT_e) = V(nT_e)$. Autrement dit, il ne fait rien et on pourrait donc s'attendre à obtenir : $S(t) = V(t)$. Ce n'est pas le cas et on cherche à en comprendre la raison.

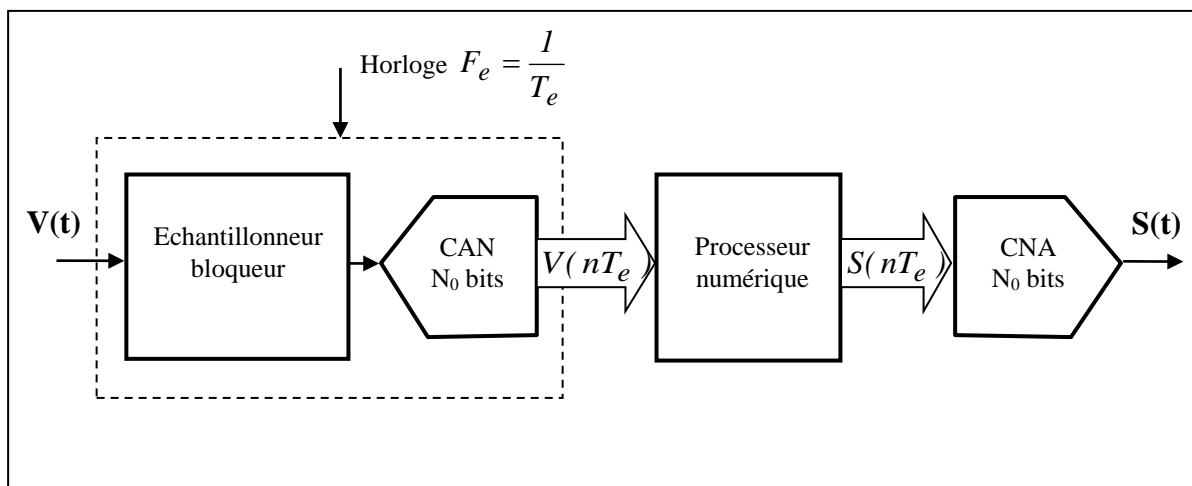


Figure 10 : Chaîne de traitement numérique du signal

Le nombre, souvent appelé mot binaire (N) sera caractérisé par son **nombre de bits** en s'écrivant de la manière suivante :

$$N = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0 \quad (1)$$

avec a_0 représente le bit de poids faible ou LSB et a_{n-1} le bit de poids fort ou MSB

La valeur de la tension analogique V à traduire (CAN) ou traduite (CNA) est discrète et correspond à un multiple d'une valeur de base appelée **quantum de conversion q** (tension analogique élémentaire) :

$$V = q.(a_{n-1}.2^{n-1} + a_{n-2}.2^{n-2} + \dots + a_1.2^1 + a_0.2^0) = q. N_{dec} \quad (2)$$

Les deux principales caractéristiques d'un CAN ou d'un CNA sont donc :

- le nombre de bits : N_0
- la tension analogique élémentaire : q

Effectuer une conversion analogique-numérique, c'est donc rechercher une expression numérique dans un code déterminé pour représenter une information analogique (figure 11).

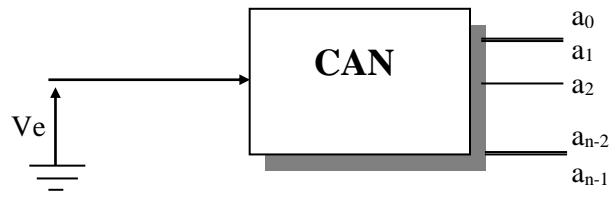


Figure 11 : Rôle général d'un CAN

La quantité q se déduit de la relation (3) :

$$q = \frac{V_{e_{\max}}}{2^{N_0} - 1} \quad (3)$$

La conversion analogique - numérique se caractérise par une **caractéristique de transfert** classiquement appelée « courbe en escalier ». Prenons par exemple, un CAN sur 3 bits (figure 12).

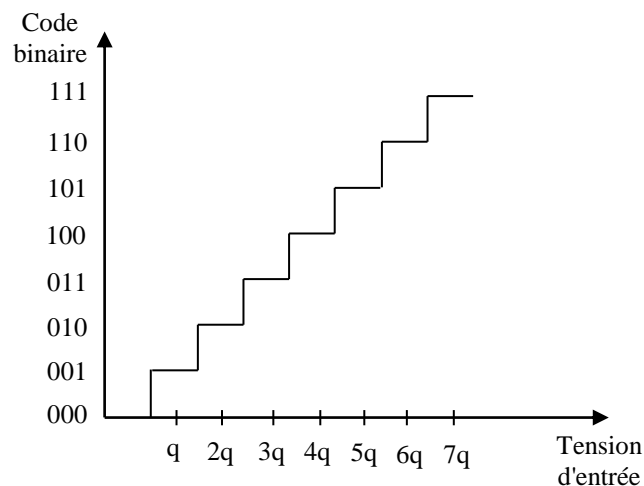


Figure 12 : Caractéristique de transfert idéale d'un CAN utilisant 3 bits de conversion

A partir de cette courbe, on constate d'ores et déjà le problème majeur lié à la conversion. En effet, un mot numérique N pourra correspondre à une tension d'entrée V_e telle que :

$$N_{\text{dec}} \cdot q - q/2 < V_e < N_{\text{dec}} \cdot q + q/2 \quad (4)$$

avec $q/2$ qui représente l'amplitude de l'erreur de quantification

Exemple : Le CAN permet de convertir une tension entre 0 et 10V sur des codes binaires de 3 bits.

$$q = V_{e_{\max}} / (2^{N_0} - 1) = 10 / (2^3 - 1) = 10 / 7 \approx 1,43V$$

Ceci signifie que, pour le code (100), la tension correspondante sera comprise entre :

$$4q - q/2 = 5V < V_e < 4q + q/2 = 6,42V$$

On comprendra aisément la difficulté de coder un nombre binaire uniquement sur 3 bits si, par exemple, le cahier des charges impose de détecter une fluctuation de tension au maximum de 0,1V.

V-2. Paramètres usuels d'un CAN

Les paramètres usuels et fonctionnels relatifs au choix d'un CAN sont les suivants :

- **Pleine échelle (ou FSR) :** C'est la tension maximale acceptable soit $FSR = q \cdot 2^{N_0}$ pour un convertisseur linéaire.
- **Résolution :** Elle s'exprime en nombre de bits de conversion. Le nombre de nombres binaires (ou codes) susceptibles d'être générés est égal à 2^{N_0} .
- **Précision :** Pour attribuer un code à une tension à convertir, il faut déterminer entre quels seuils est située la tension V_e à convertir. En théorie, les seuils sont des multiples de $FSR/2^{N_0}$. En pratique, les seuils peuvent être légèrement différents de ces multiples. L'écart entre les seuils théoriques et réels est appelé précision du convertisseur et elle est souvent exprimée en fraction de LSB.
- **Erreur de quantification :** Toutes les tensions tombant dans une même plage se voient attribuer le même code (Cf figure 13). Disposant seulement du code, on est alors incapable de retrouver la valeur exacte de la tension correspondant à ce dernier. Si la fréquence d'échantillonnage est très grande (théoriquement infinie), on attribue généralement au code une valeur égale au milieu de la plage q_k . L'erreur dite de quantification, commise dans le pire cas, est alors de $\pm q/2$.

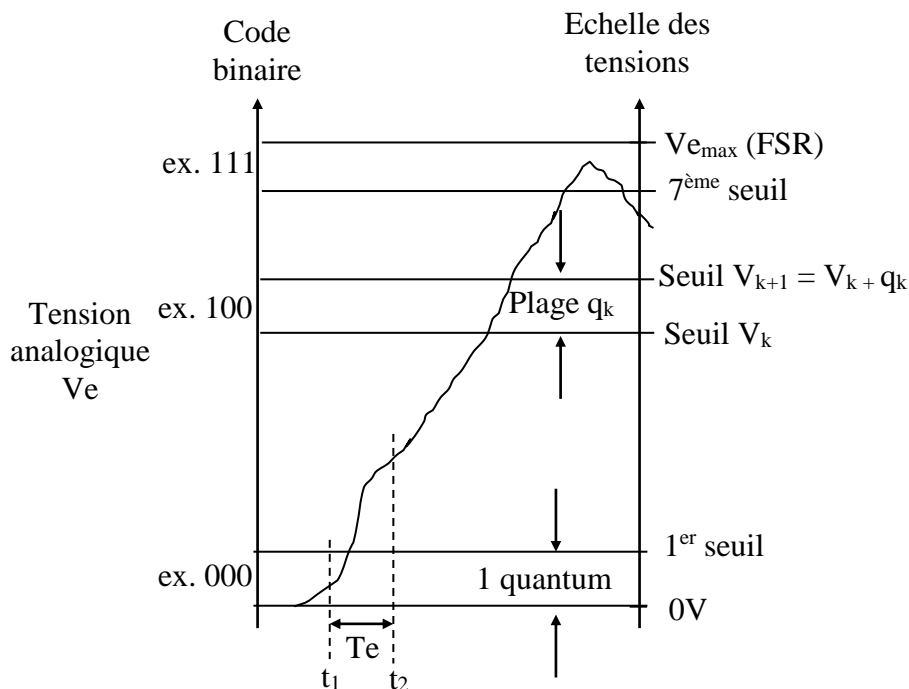


Figure 13 : Illustration du problème lié à la correspondance tension -> code ($N_0 = 3$ bits)

V-3. L'échantillonneur-bloqueur

La conversion d'un échantillon analogique de $V(t)$ par le CAN, en un code binaire sur N_0 bits, nécessite un certain temps. Pendant ce laps de temps, le signal en sortie de l'échantillonneur doit rester constant. Pour cela, **on utilise un échantillonneur - bloqueur** (« *sample & hold* » ou « *sample & track* ») dont le schéma simplifié est donné en figure 14.

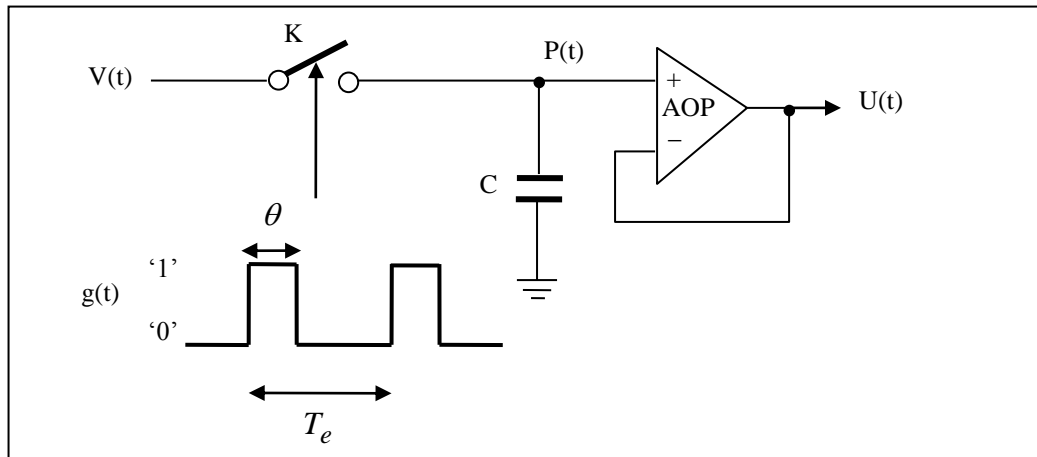


Figure 14 : Schéma général d'un échantillonneur – bloqueur

Question 11 : Compléter le dessin de la figure 15. Quel est l'intérêt de mettre un AOP après le condensateur C ?

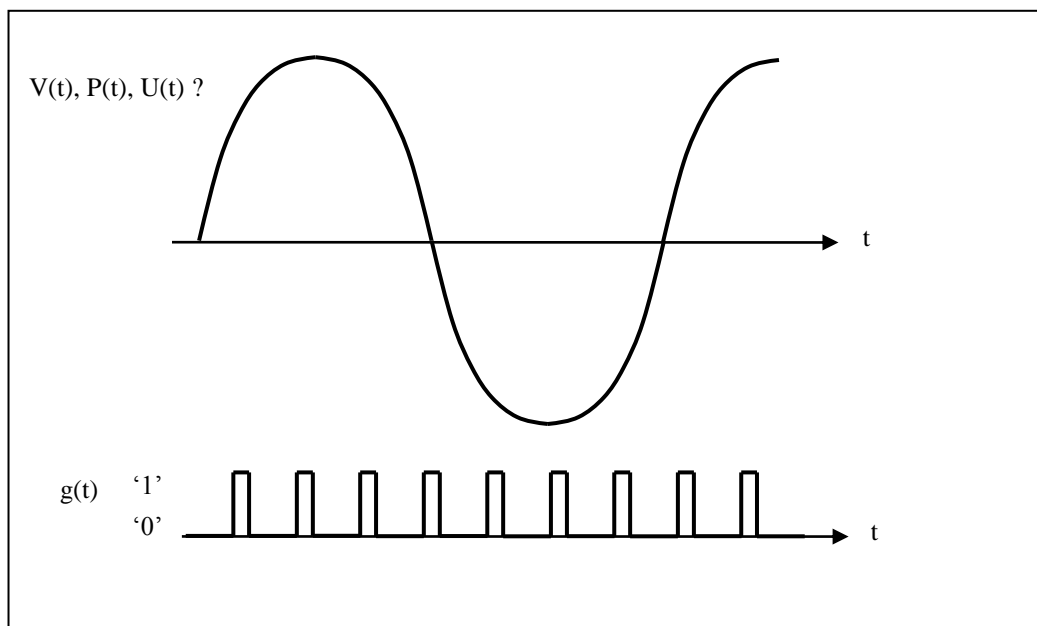


Figure 15 : $V(t)$ signal analogique d'entrée et $U(t)$ signal échantillonné et bloqué

Question 12 : Comment est modifié le signal $U(t)$ si l'interrupteur K n'est pas parfait et modélisé par une résistance r ?

V-4. Caractéristiques d'un CAN

Le CAN AD7819 (commercialisé par Analog Device), utilisé en TP, est un CAN unipolaire 8 bits à approximations successives et de pleine échelle 5V. Un échantillonneur – bloqueur (T/H) est intégré dans le CI. Les blocs fonctionnels du CAN sont donnés à la figure 16. Une conversion analogique numérique est initiée sur le front descendant de l'entrée \overline{CONVST} comme le montre le chronogramme des signaux en figure 17.

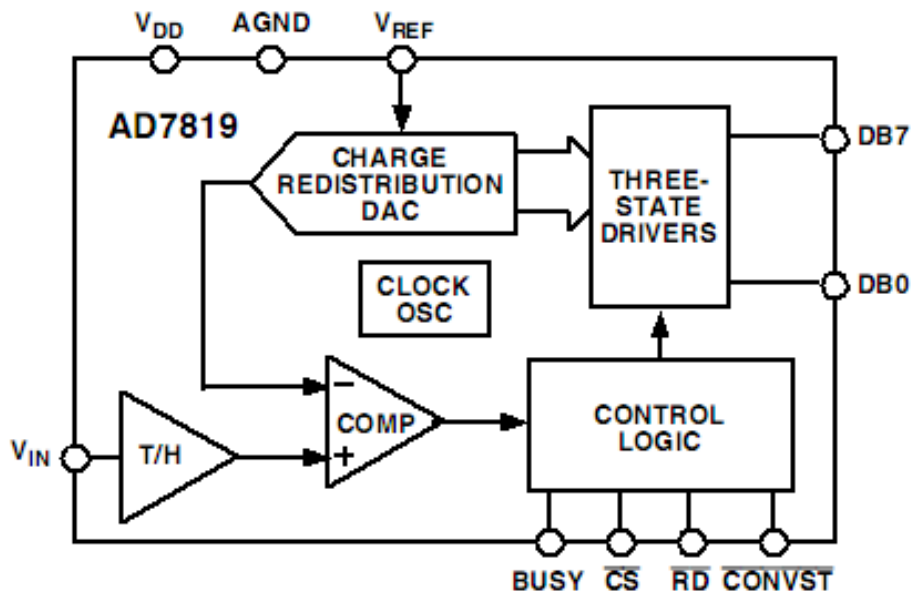


Figure 16 : Blocs fonctionnels du CAN AD7819

Suite à une demande de conversion, le signal BUSY (sortie) passe à l'état « haut » et le front descendant de BUSY indique que les données (DB0 – DB7) sont disponibles en sortie. Pour les lire, les entrées \overline{RD} et \overline{CS} doivent passer à l'état « bas ». Quand les entrées \overline{RD} et \overline{CS} sont à l'état « haut », les sorties (DB0 – DB7) sont en hautes impédances (*three state drivers*).

Question 13 : En vous aidant des tableaux II et III, donner les valeurs des temps t_A , t_B et t_C du chronogramme de la figure 17. En déduire la fréquence maximale de conversion du CAN en kSPS (*kilo Sample Per Second*).

PIN FUNCTION DESCRIPTIONS

Pin No.	Mnemonic	Description
1	V _{REF}	Reference Input, 1.2 V to V _{DD} .
2	V _{IN}	Analog Input, 0 V to V _{REF} .
3	GND	Analog and Digital Ground.
4	CONVST	Convert Start. A low-to-high transition on this pin initiates a 1 μs pulse on an internally generated CONVST signal. A high-to-low transition on this line initiates the conversion process if the internal CONVST signal is low. Depending on the signal on this pin at the end of a conversion, the AD7819 automatically powers down.
5	CS	Chip Select. This is a logic input. CS is used in conjunction with RD to enable outputs.
6	RD	Read Pin. This is a logic input. When CS is low and RD goes low, the DB7-DB0 leave their high impedance state and data is driven onto the data bus.
7	BUSY	ADC Busy Signal. This is a logic output. This signal goes logic high during the conversion process.
8-15	DB0-DB7	Data Bit 0 to 7. These outputs are three-state TTL-compatible.
16	V _{DD}	Positive power supply voltage, +2.7 V to +5.5 V.

Tableau II : Définition des différentes pins du CAN AD7819

TIMING CHARACTERISTICS^{1, 2} (-40°C to +125°C, unless otherwise noted)

Parameter	V _{DD} = 3 V ± 10%	V _{DD} = 5 V ± 10%	Units	Conditions/Comments
t _{POWER-UP}	1	1	μs (max)	Power-Up Time of AD7819 after Rising Edge of CONVST.
t ₁	4.5	4.5	μs (max)	Conversion Time.
t ₂	30	30	ns (min)	CONVST Pulsewidth.
t ₃	30	30	ns (max)	CONVST Falling Edge to BUSY Rising Edge Delay.
t ₄	0	0	ns (min)	CS to RD Setup Time.
t ₅	0	0	ns (min)	CS Hold Time after RD High.
t ₆ ³	10	10	ns (max)	Data Access Time after RD Low.
t ₇ ^{3,4}	10	10	ns (max)	Bus Relinquish Time after RD High.
t ₈ ³	100	100	ns (min)	Data Bus Relinquish to Falling Edge of CONVST Delay.

Tableau III : Temps caractéristiques du CAN AD7819

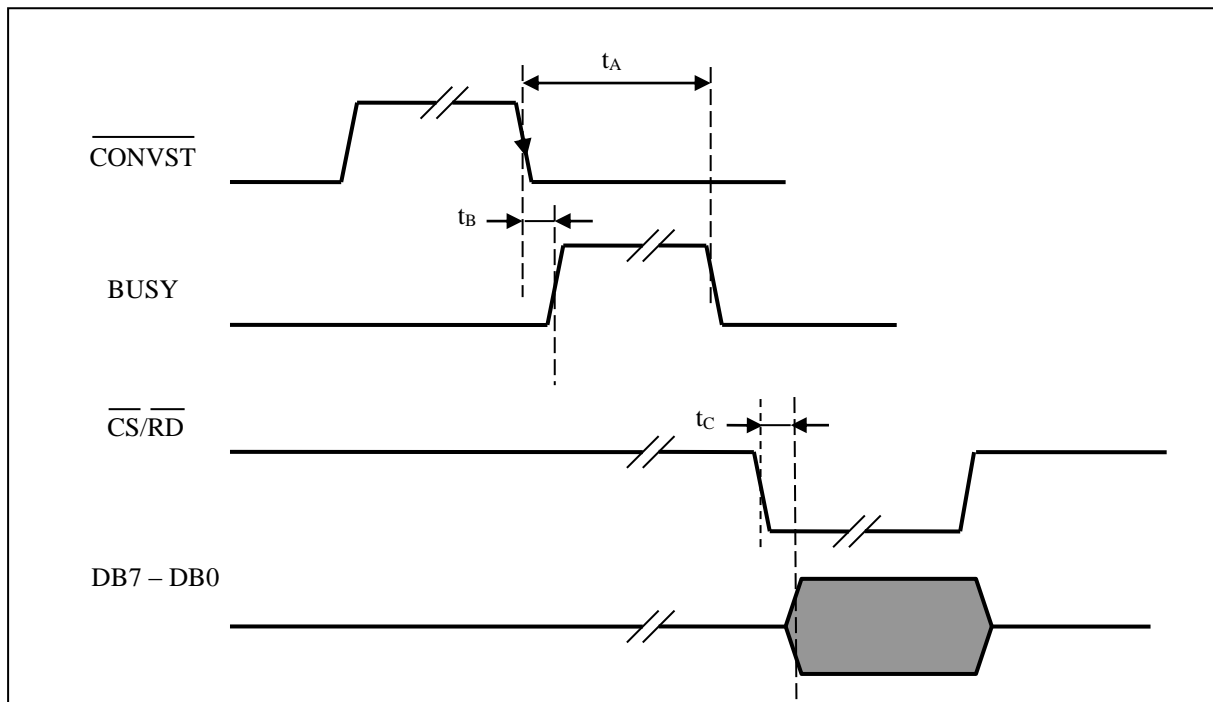


Figure 17 : Chronogramme des principaux signaux du CAN AD7819

Question 14 : Quel type de circuit intégré faut-il connecter au signal « BUSY » du CAN de la figure 18 pour lire les données (DB0 – DB7)?

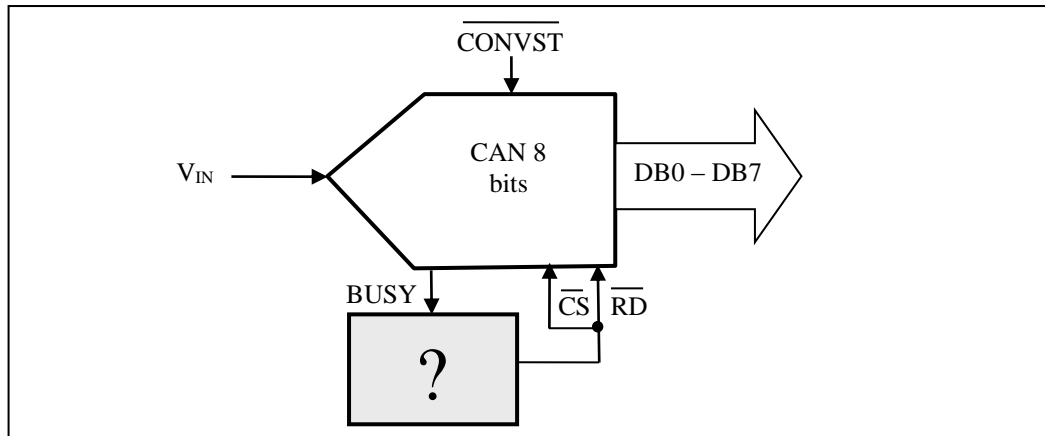


Figure 18 : Compléter le montage avec le circuit intégré manquant

V-5. Restitution par le CNA – Bruit de quantification

La table de vérité du CNA, de la figure 10, est explicitée dans le tableau IV.

Code binaire	Tension de sortie
0000 0000	0
0000 0001	$5/256 = 0,0195 \text{ V}$
0000 0010	$2(5/256) = 0,0390 \text{ V}$
0000 0011	$3(5/256) = 0,0585 \text{ V}$
1111 1111	$255(5/256) = 4,980 \text{ V}$

Tableau IV : Table de vérité du CNA

Si le signal $V(t)$ de la figure 10 est un triangle, le signal $S(t)$ est un signal constitué de marches d'escalier. En effet, à un échantillon de $V(t)$ correspond un code de 8 bits, le CNA recevant ce code lui fait correspondre une tension en accord avec le tableau IV. La tension restituée est différente de la valeur de l'échantillon de $V(t)$ comme le montre la figure 19 car la seule connaissance du code ne permet pas de connaître avec précision la valeur initiale de l'échantillon. **La différence entre la valeur initiale et la valeur restituée est appelée : bruit de quantification.** Pour réduire le bruit de quantification, il faut augmenter le nombre N_0 de bits de conversion.

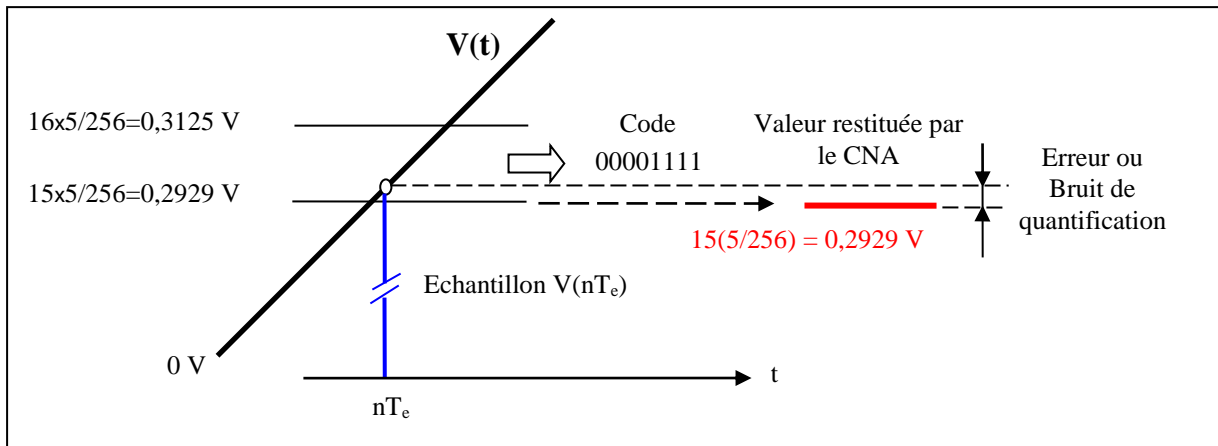


Figure 19 : Illustration de la problématique de la valeur restituée qui est différente de la valeur initiale. La différence est appelée : bruit de quantification

Le signal $V(t)$ de la figure 10 est une rampe symétrique de 5 V et de fréquence 1 kHz comme indiqué en figure 20.

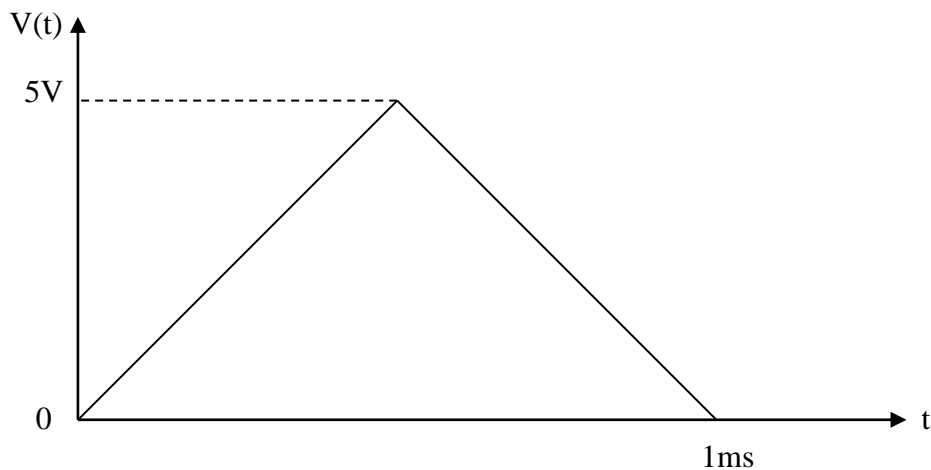


Figure 20 : Caractéristiques temporelles du signal $V(t)$

Question 15 : Déterminer la hauteur des marches (ΔV) du signal $S(t)$ en sortie du CNA quand la fréquence d'échantillonnage est égale à 80 kHz . Comparer cette valeur avec l'erreur de quantification théorique ($\pm q/2$).

Question 16 : Quelle est la nouvelle valeur de ΔV si la fréquence est divisée par 2 ?

A RETENIR : Il faut donc retenir que l'opération de conversion analogique-numérique d'un signal continûment variable dans le temps (par ex. tension fournie par un capteur) en un code ou mot binaire (sur N_0 bits) nécessite l'utilisation d'un échantillonneur-bloqueur puis d'un bloc convertisseur. Le processus d'échantillonnage implique le choix d'une fréquence F_e qui doit satisfaire la relation de Shannon ($F_e > 2 \cdot f_{\max}$). Il est souvent associée l'utilisation d'un filtre anti-repliement (FAR) permettant d'éliminer les raies provoquées par l'opération d'échantillonnage (périodisation de fréquence F_e du spectre du signal avant échantillonnage) et pouvant se superposer aux raies « utiles » du spectre initial. Quatre principaux paramètres guident le choix d'un CAN ou d'un CNA : pleine échelle de tension admissible (FSR), résolution (nombre de bits), précision (liée au quantum de conversion) et l'erreur de quantification importante notamment lors de la restitution après le CNA.

VI- Exercice d'application (extrait d'un partiel de S3)

On échantillonne un signal sinusoïdal $V(t) = 2 \cos(2\pi 10^3 t)$ avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 10 \text{ kHz}$. Les impulsions d'échantillonnage ont un rapport cyclique de 10%.

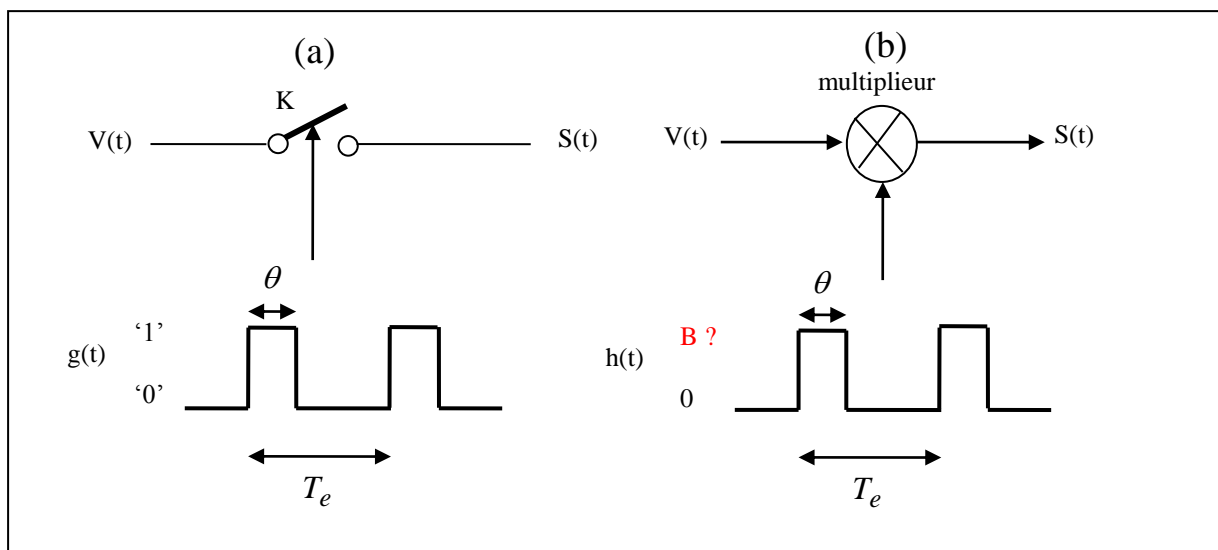


Figure 1 : Echantillonneur et modèle mathématique associé

Q1- Donner les trois premières fréquences du spectre de $S(t)$.

Q2- Calculer les amplitudes des trois premières fréquences.

Q3- Les échantillons du signal $V(t)$ sont codés sur N_0 bits. On se fixe un bruit de quantification inférieur à $7,9 \text{ mV}$ (différence entre la vraie valeur de l'échantillon et la valeur restituée après CNA). Calculer le nombre de bits N_0 nécessaires pour le convertisseur choisi.

Thème 3 :

Transformation temps-fréquence par FFT

Objectifs :

- Savoir lire le résultat d'une FFT
- Savoir choisir une fenêtre d'analyse
- Savoir calibrer une largeur d'impulsion pour obtenir la réponse impulsionnelle d'un système en vue de calculer sa réponse en fréquence (gain complexe).

I- Rappels de cours

I-1/ Transformée de Fourier

La transformée de Fourier $G(\omega)$ d'un signal $g(t)$ est définie comme suit :

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

La transformée de Fourier est une **fonction continue** de la pulsation ω .

I-2/ Transformée de Fourier numérique

Pour calculer une transformée de Fourier avec un processeur il faut procéder à diverses opérations (voir figure 1). Les opérations à réaliser sont :

- échantillonner le signal à une fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$
- numériser le signal avec un CAN de M bits
- tronquer le signal à une durée NT_e où N est le nombre de points stockés en mémoire
- utiliser un algorithme de calcul

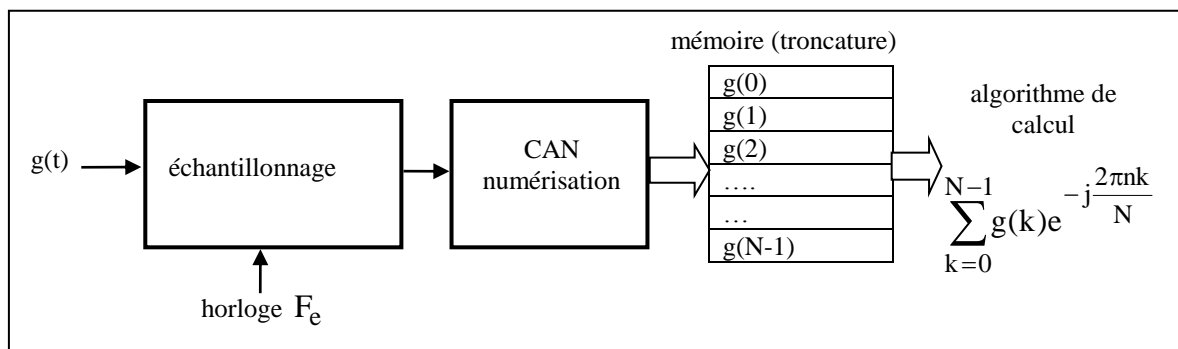


Figure 1 : Les différentes opérations pour calculer une transformée de Fourier avec un processeur

Oublions momentanément le problème de la numérisation pour nous concentrer sur l'effet de l'**échantillonnage** et de la **troncature**. L'échantillonnage fait que l'on ne dispose plus de $g(t)$ mais seulement des échantillons $g(kT_e)$ prélevés aux instants d'échantillonnage kT_e où k est un entier. La transformée de Fourier (1) devient la transformée de **Fourier numérique** $G_{\text{num}}(\omega)$:

$$G_{\text{num}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT_e) e^{-j\omega k T_e} \quad (2)$$

Pour simplifier l'écriture, on note plus simplement : $G_{\text{num}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) e^{-j\omega k T_e}$.

Compte tenu de la périodicité des fonctions cosinus et sinus, la transformée de Fourier numérique $G_{\text{num}}(\omega)$ est une **fonction périodique** de la fréquence d'échantillonnage F_e comme le montre la figure 2-b. On retrouve un résultat déjà obtenu lors de l'étude de la théorie de l'échantillonnage.

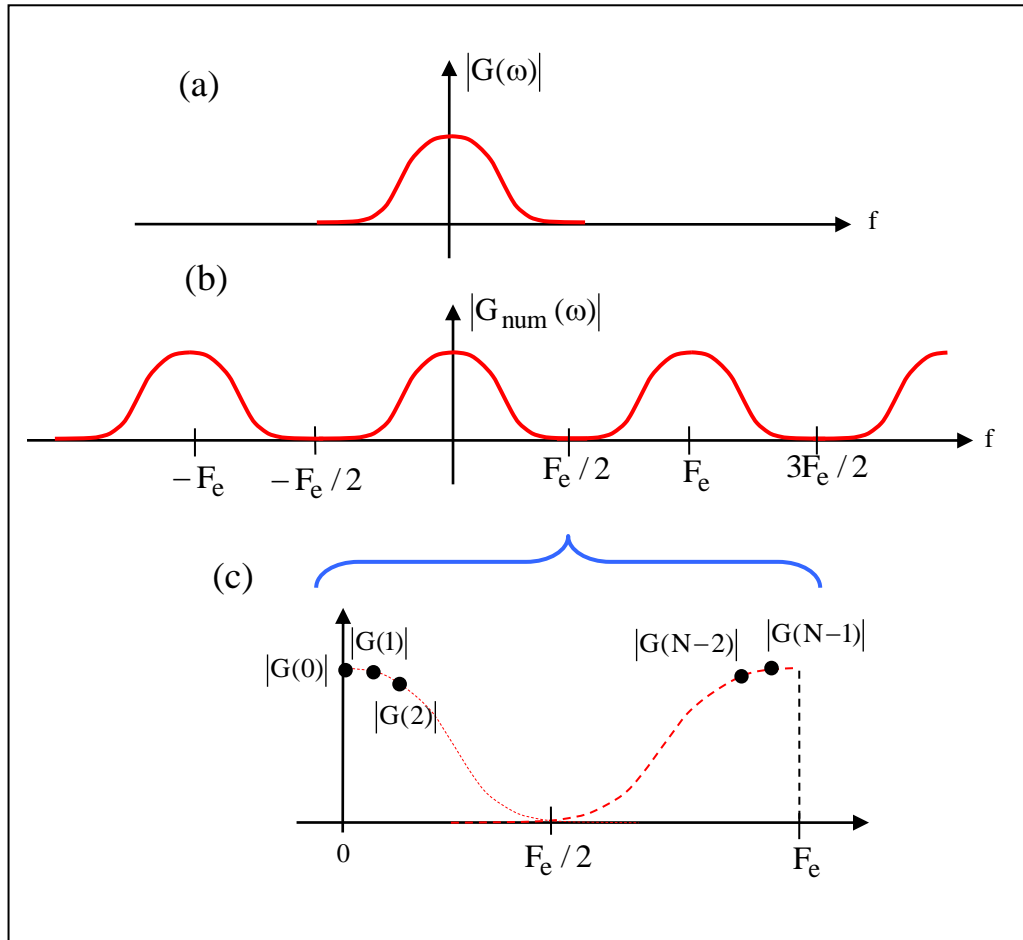


Figure 2 : (a) Transformée de Fourier $G(f)$ de la fonction $g(t)$, (b) transformée de Fourier numérique $G_{\text{num}}(\omega)$ des échantillons $g(kT_e)$ et (c) transformée de Fourier discrète

Compte tenu de la parité des fonctions cosinus et sinus le module $|G_{\text{num}}(\omega)|$ est dans l'intervalle $[0, F_e]$ symétrique par rapport à $\frac{F_e}{2}$. On retrouve un résultat déjà obtenu lors de l'étude de l'échantillonnage.

I-3/ Transformée de Fourier discrète

En pratique on ne peut pas stocker une infinité d'échantillons $g(kT_e)$, on ne stocke que N échantillons, on

effectue donc une **troncature** ($G_{\text{num}}(\omega) \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} g(kT_e)e^{-j\omega kT_e}$). La transformée de Fourier numérique

$G_{\text{num}}(\omega)$ est une fonction continue de la pulsation ω . Un processeur ne peut calculer $G_{\text{num}}(\omega)$ que pour certaines valeurs de la pulsation ω . Compte tenu de la périodicité de $G_{\text{num}}(\omega)$, on ne calcule $G_{\text{num}}(\omega)$ que pour N fréquences multiples de $\frac{F_e}{N}$ où N est le nombre de points d'acquisition. On obtient alors N valeurs, ces

N valeurs constituent ce que l'on appelle la transformée de **Fourier discrète**, notée $G(n)$ (figure 2-c) :

$$G(n) = G_{\text{num}}(\omega) \Big|_{\omega=n2\pi\frac{F_e}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{-jn2\pi\frac{F_e}{N}kT_e}$$

En remarquant que $F_e = \frac{1}{T_e}$, on obtient finalement :

$$G(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots, N-2, N-1 \quad (3)$$

I-4/ FFT et remplissage de zéro (« zero padding »)

Le calcul d'une transformée de Fourier nécessite un grand nombre de multiplications et d'additions. En effet pour obtenir une valeur de $G(n)$ il faut effectuer N multiplications complexes

($g(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = g(k) \left[\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right]$) et N additions. Les multiplications prenant plus

de cycles machines que les additions, c'est grosso modo le nombre de multiplications qui fixe le temps de calcul.

Pour obtenir les N valeurs de $G(n)$, il faut donc effectuer N^2 multiplications complexes. Dans les années 1950, deux mathématiciens, M. Cooley et Tuckey, ont montré que si le nombre de points N était une puissance de deux, $N = 2^p$ (ex : $N = 1024 = 2^{10}$, $p = 10$), il existait un algorithme de calcul rapide réduisant le nombre de

multiplications de N^2 à pN . Prenons comme exemple $N = 1024$, sans l'algorithme rapide il faut effectuer

$\approx 10^6$ multiplications, avec l'algorithme rapide il faut seulement en effectuer $\approx 10^4$, soit un temps de calcul divisé par 100. L'algorithme de calcul rapide est connu sous le nom de **FFT** (Fast Fourier Transform).

Si le nombre de points N n'est pas une puissance de deux, il y a deux possibilités : *i*) utiliser un algorithme dit de

DFT (Direct Fourier Transform) nécessitant N^2 multiplications ou *ii*) compléter les N échantillons avec des zéros pour obtenir un nombre d'échantillons égal à une puissance deux :

$$G(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{2^p}} + \sum_{k=N}^{2^p-1} 0 e^{-j\frac{2\pi nk}{2^p}}$$

Ajouter des zéros ne modifie pas la somme, la transformée de **Fourier numérique** n'est absolument pas

modifiée, par contre le pas de calcul de la transformée de Fourier discrète qui était $\frac{F_e}{N}$ devient $\frac{F_e}{2^p}$, c'est la

technique utilisée dans l'oscilloscope DSO5032A utilisée en TP. La technique de remplissage de zéro est connue sous le nom de **zero padding**.

I-5/ Effet de troncature et fenêtre

La FFT est une opération portant sur un nombre fini d'échantillons. En pratique on rencontre deux types de signaux, comme le montre la figure 3 :

➤ *Les signaux de type I* nuls avant et après la durée NT_e d'enregistrement. Les échantillons $s(kT_e)$ stockés dans la mémoire sont le produit des échantillons $g(kT_e)$ par les échantillons $p(kT_e)$ d'une **fenêtre d'analyse** (ou encore fenêtre de pondération), avec $p(kT_e) = 1$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ et $p(kT_e) = 0$ pour $k < 0$ et $k > N-1$, il s'ensuit que les $s(kT_e)$ sont égaux aux $g(kT_e)$ quel que soit k . Pour les signaux de type I, les transformées de **Fourier numériques** $S_{\text{num}}(\omega)$ et $G_{\text{num}}(\omega)$ sont donc égales. Si le théorème de Shannon est satisfait, c'est-à-dire une fréquence F_e au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale contenue dans le spectre de $g(t)$, alors les N valeurs $S(n)$ calculées sont identiques aux N valeurs de $G(f = n \frac{F_e}{N})$ où $G(f)$, équation (1), est la **transformée de Fourier** du signal $g(t)$. En conclusion, pour les signaux de type I, il n'y a pas de problème, tout se passe comme si on savait calculer une transformée de Fourier. Le seul problème rencontré est celui du bruit de quantification, en effet les échantillons sont quantifiés avec un nombre de bits finis.

➤ *Les signaux de type II* sont les signaux périodiques allant de $-\infty$ à $+\infty$, dans ce cas les échantillons $s(kT_e)$ sont bien égaux aux échantillons $g(kT_e)$ à l'intérieur de la fenêtre, mais ils sont nuls en dehors de la fenêtre alors que les $g(kT_e)$ sont différents de zéro pour $k < 0$ et $k > N-1$, il s'ensuit que $S_{\text{num}}(\omega) \neq G_{\text{num}}(\omega)$. C'est dans ce cas qu'on peut obtenir des valeurs de $S(n)$ différentes des $G(f = n \frac{F_e}{N})$.

Nous traiterons ce cas après l'étude de la réponse en fréquence d'un système.

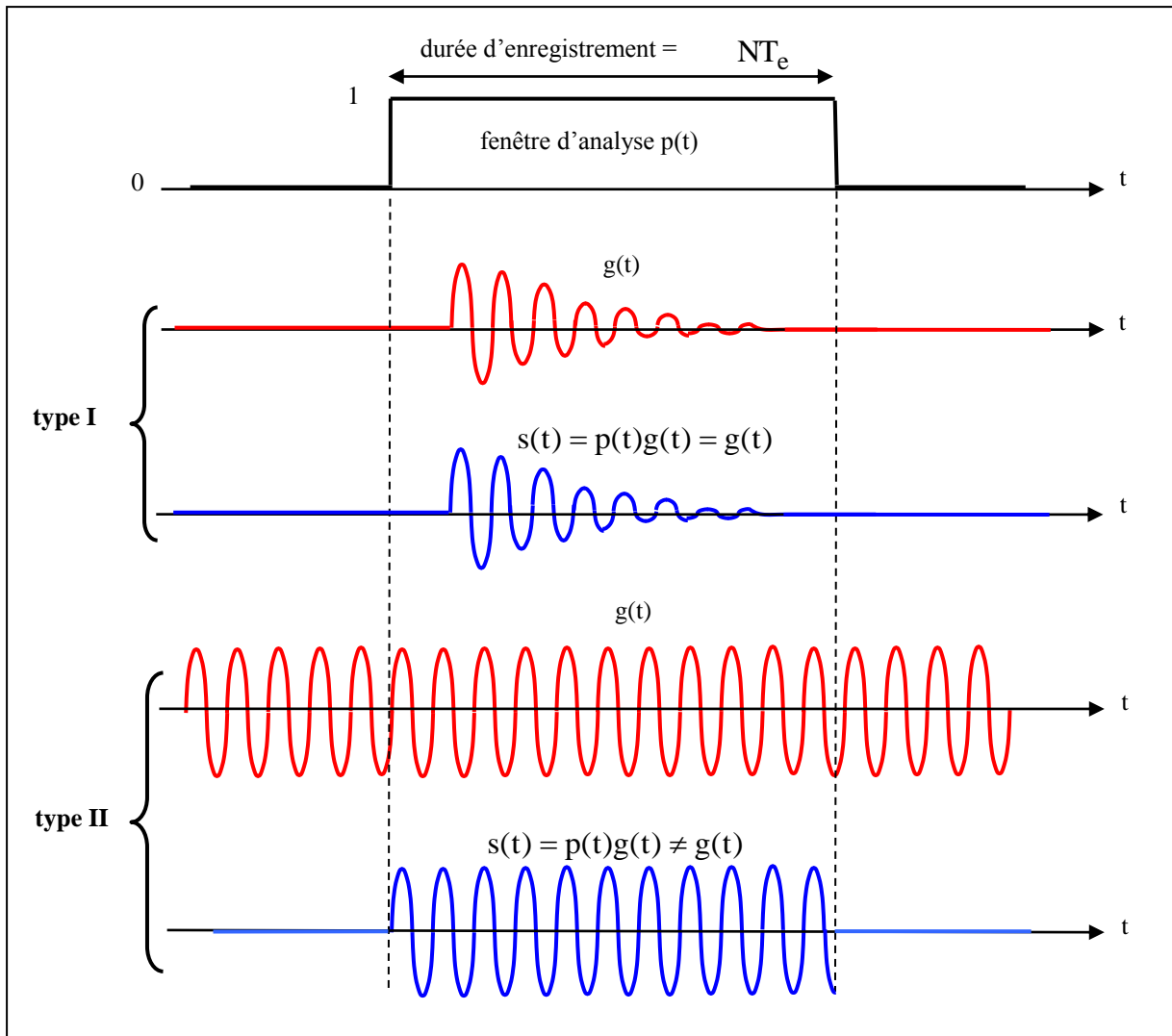


Figure 3 : Les échantillons utilisés pour le calcul de la FFT résultent de la troncature des échantillons $g(kT_e)$ par les échantillons $p(kT_e)$ d'une fenêtre d'analyse. Deux types de signaux sont à considérés, type I et II.

II- Réponse en fréquence d'un système linéaire

La réponse en fréquence $H(\omega)$, ou gain complexe, d'un système linéaire peut être obtenue (voir cours de Mathématiques appliqués au traitement du signal) en excitant le système par une impulsion de Dirac $\delta(t)$ et en calculant la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h(t)$ comme le montre la figure 4-a. Le système étant stable, $h(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, autrement dit la réponse impulsionnelle est un signal de type I. En pratique, le système est excité par une impulsion $x(t)$ de largeur θ et d'amplitude A (figure 4-b), la réponse en fréquence est alors donnée par :

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (4)$$

où $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont respectivement les transformées de Fourier de $x(t)$ et de la sortie $y(t)$.

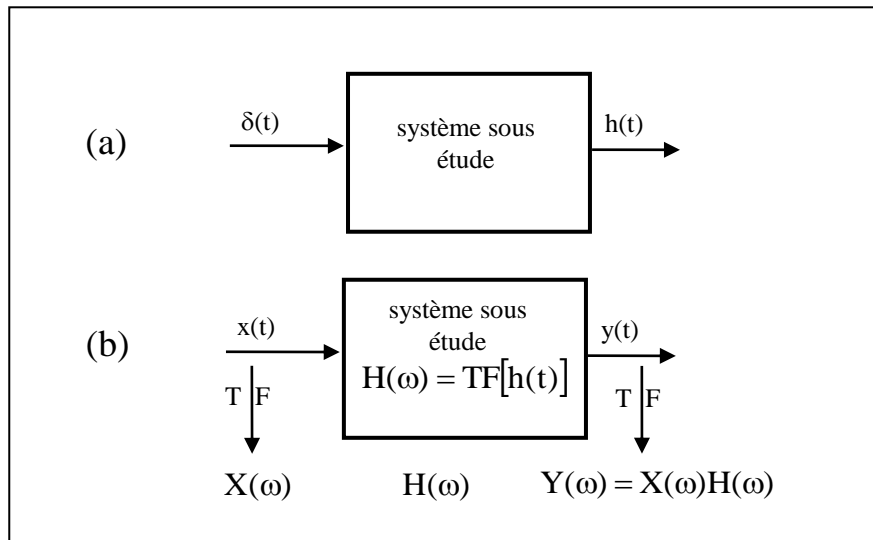


Figure 4 : Réponse en fréquence d'un système par la méthode impulsionnelle, (a) réponse impulsionnelle $h(t)$, (b) réponse à une excitation $x(t)$ quelconque.

Le schéma électrique d'un des deux systèmes étudiés en TP est donné à la figure 5. C'est la boucle ouverte de l'oscillateur étudié en TP Oscillateur, elle est constituée d'un amplificateur suivi d'un filtre de type passe-bande.

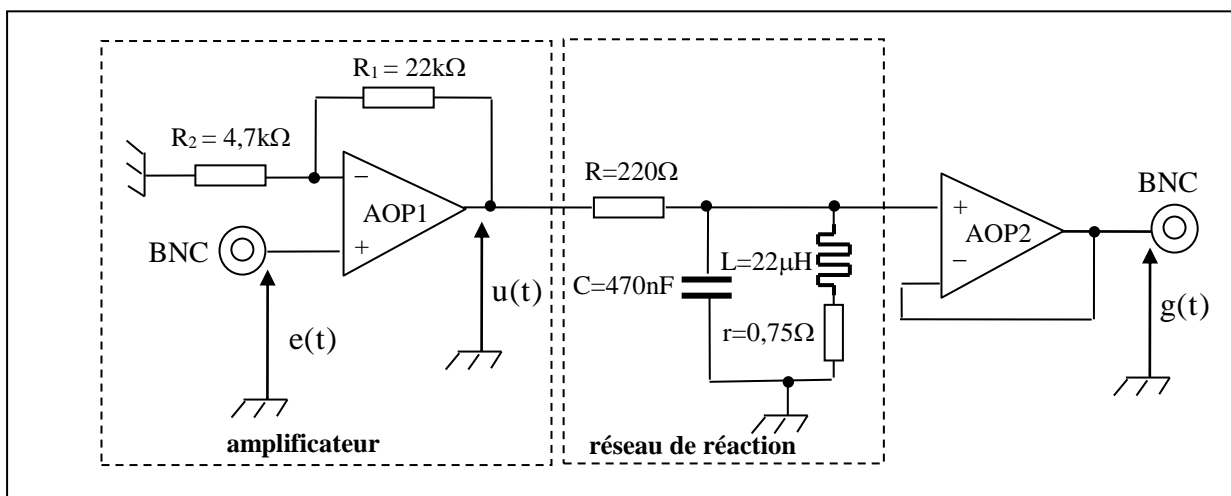


Figure 5 : Schéma électrique de l'amplificateur et du filtre passe-bande

Question 1 : Faites le schéma électrique à fréquence nulle et montrer que le gain statique de la boucle est égal à :

$$H(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \left(\frac{r}{R+r}\right) \quad (5)$$

La fonction de transfert $H(p) = \frac{G(p)}{E(p)}$ se met sous la forme :

$$H(p) = \frac{G(p)}{E(p)} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{1}{RLC} \left(\frac{pL+r}{p^2 + p \frac{(L+rRC)}{RLC} + \frac{(r+R)}{RLC}} \right) \quad (6)$$

NB : Le calcul de $H(p)$ n'est pas demandé pendant la séance mais il est vivement conseillé de la faire en dehors de la séance.

Question 2 : Vérifier que pour $\omega \rightarrow 0$ on retrouve bien le gain statique calculé précédemment.

La forme standard d'un filtre passe-bande du deuxième ordre s'écrit : $A_{BP} \frac{p \frac{\omega_0}{Q}}{p^2 + p \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$. Le gain à la

fréquence de résonance $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ est égal à A_{BP} , la largeur de bande Δf à $-3dB$ est égale à $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$.

Question 3 : Au voisinage de la fréquence de résonance f_0 , $r \ll L\omega_0$, montrer alors que l'expression (6) se met bien sous la forme :

$$H(p) \approx A_{BP} \frac{p \frac{\omega_0}{Q}}{p^2 + p \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \quad (7)$$

Question 4 : On donne : $r = 0,75\Omega$, $R = 220\Omega$, $C = 470nF$, $L = 22\mu H$, $R_1 = 22k\Omega$ et $R_2 = 4,7k\Omega$, déterminer A_{BP} c'est-à-dire $|H(\omega_0)|$, ω_0 et Q

Question 5 : Pour vérifier les calculs précédents, on applique à l'entrée du système une impulsion $x(t)$ et on calcule la FFT de la réponse $y(t)$ en utilisant un scope numérique avec FFT, (voir figure 4). A la fréquence de résonance f_0 , le scope affiche respectivement $|X(\omega_0)| = -38,50dBV$ et $|Y(\omega_0)| = -36,85dBV$, calculer $|H(\omega_0)|$.

NB : Le dBV est défini comme suit : $dBV = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{tension en V}}{1V} \right)$

III- Fenêtres d'analyse et fuites spectrales

Pour comprendre l'effet d'une **fenêtre d'analyse** traitons un exemple, celui d'un signal $g(t) = A \cos(\omega_0 t)$, (voir la figure 3). La transformée de Fourier $G(f)$ s'écrit (sans démonstration) :

$$G(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (8)$$

$G(f)$ est nulle partout sauf en f_0 et $-f_0$ où elle est égale à $\frac{A}{2}$ comme le montre la figure 6-a. On peut obtenir ce résultat d'une manière un peu détournée en remarquant que $g(t) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 t}$, sous cette écriture $g(t)$ apparaît bien comme la somme de deux générateurs complexes de fréquences f_0 et $-f_0$ et de même amplitude $\frac{A}{2}$. Aux échantillons $s(kT_e) = g(kT_e)p(kT_e)$ résultant du produit des $g(kT_e)$ par les échantillons $p(kT_e)$ de la fenêtre, correspond une transformée de Fourier numérique $S_{\text{num}}(f)$ égale au produit de convolution de $G_{\text{num}}(f)$ par $P_{\text{num}}(f)$: $S_{\text{num}}(f) = G_{\text{num}}(f) \otimes P_{\text{num}}(f)$ où le symbole \otimes désigne le produit de convolution et où $P_{\text{num}}(f)$ est la **transformée de Fourier numérique** des échantillons $p(kT_e)$ de la fenêtre d'analyse.

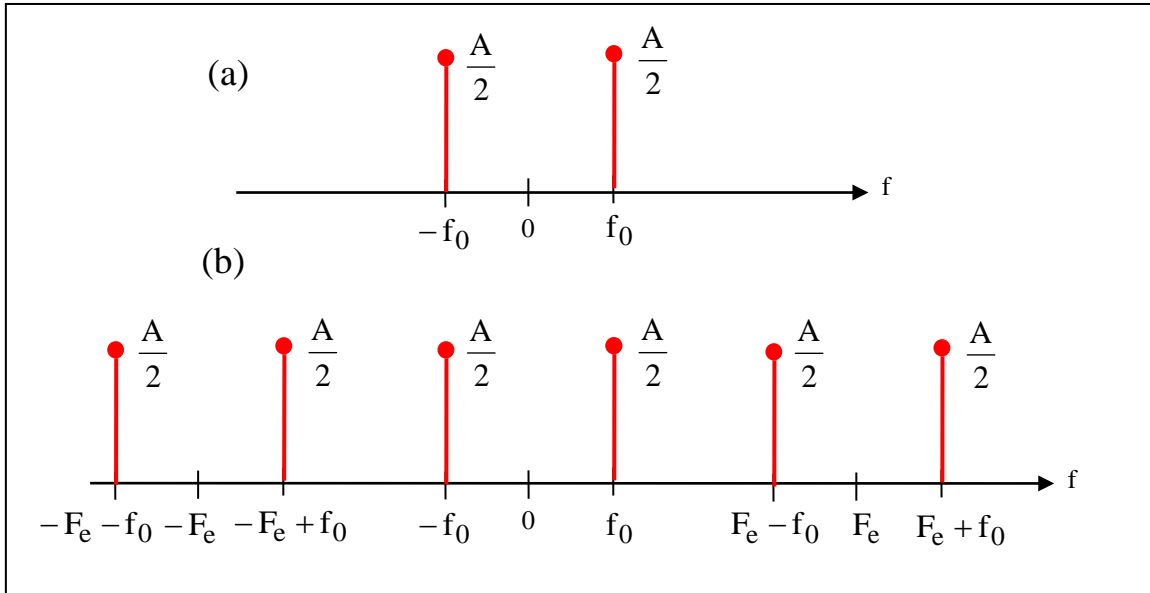


Figure 6 : (a) Transformée de Fourier $G(f)$ de $g(t)$ et (b) transformée de Fourier numérique $G_{\text{num}}(f)$ des $g(kT_e)$

La transformée de Fourier d'un pulse de largeur θ et d'amplitude A correspond à la fonction sinus cardinal : $A\theta \frac{\sin(\pi f\theta)}{\pi f\theta}$. Pour obtenir $P(f)$, transformée de Fourier de la porte $p(t)$, il suffit de remplacer θ par NT_e de la figure 3. La figure 7 représente le module de $P_{\text{num}}(f)$, il est périodique, de période F_e .

Une fenêtre d'analyse est caractérisée par :

- la largeur du **lobe principal**, $\frac{2}{NT_e}$, pour une fenêtre rectangulaire. La largeur du

lobe principal fixe la **résolution** : c'est l'aptitude à séparer deux raies de fréquences proches.

- l'amplitude des **lobes secondaires**, fixe la **dynamique** : c'est l'aptitude à discerner deux raies éloignées en fréquence et avec des amplitudes très différentes.

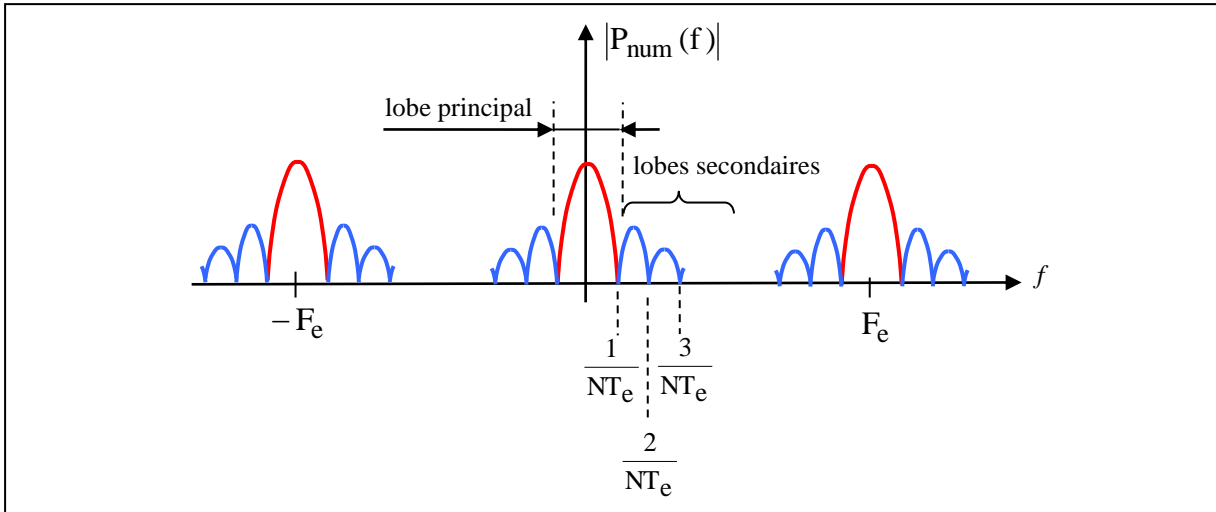


Figure 7 : Transformée de Fourier numérique de la fenêtre rectangulaire

La convolution $S_{\text{num}}(f) = G_{\text{num}}(f) \otimes P_{\text{num}}(f)$ consiste à accrocher autour de chaque raie f_0 , $F_e - f_0$, etc ... le motif de $P_{\text{num}}(f)$ correspondant à l'intervalle $[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}]$. La figure 8 montre le module $|S_{\text{num}}(f)|$ dans l'intervalle $[0, F_e]$. Les N valeurs de $|S(n)|$ sont obtenus en calculant $|S_{\text{num}}(f)|$ pour $\frac{F_e}{N}$, $\frac{2F_e}{N}$, ..., $\frac{(N-1)F_e}{N}$.

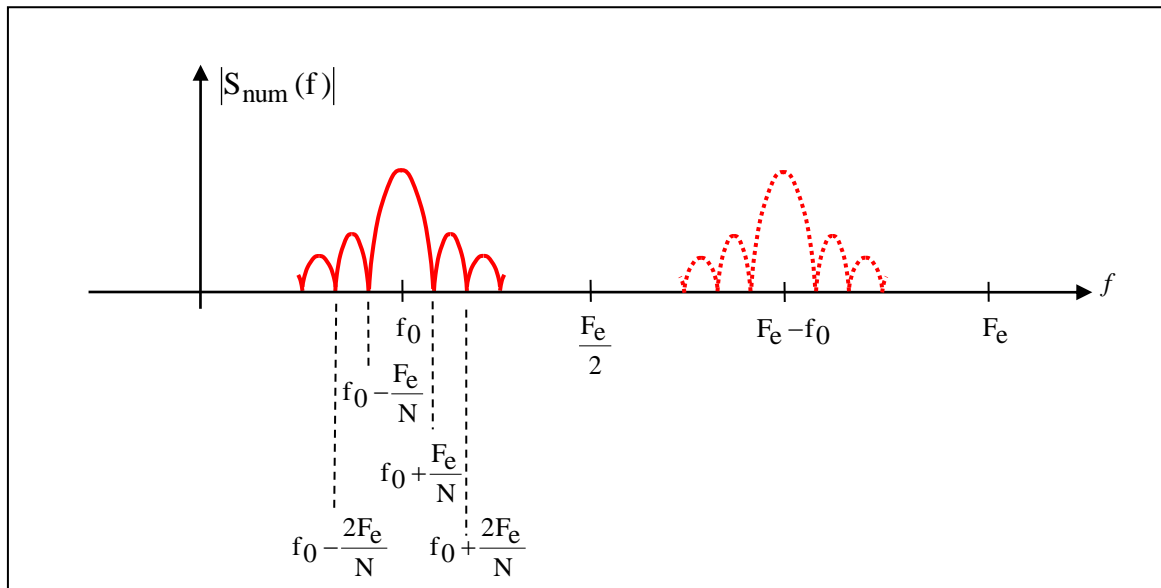
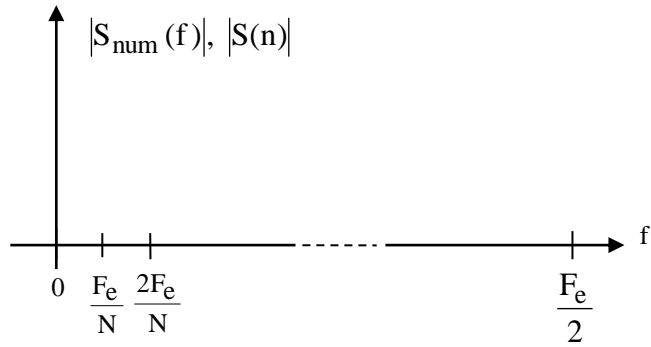
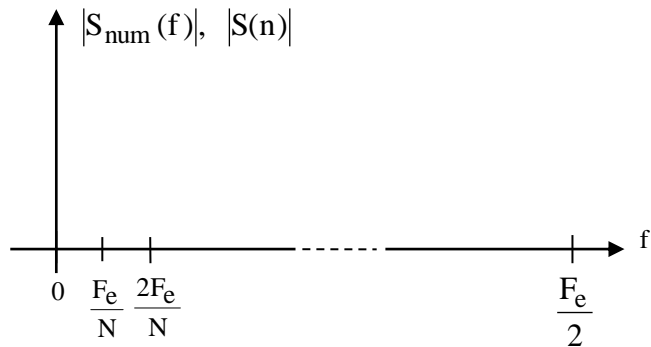


Figure 8 : $|S_{\text{num}}(f)|$ dans l'intervalle $[0, F_e]$

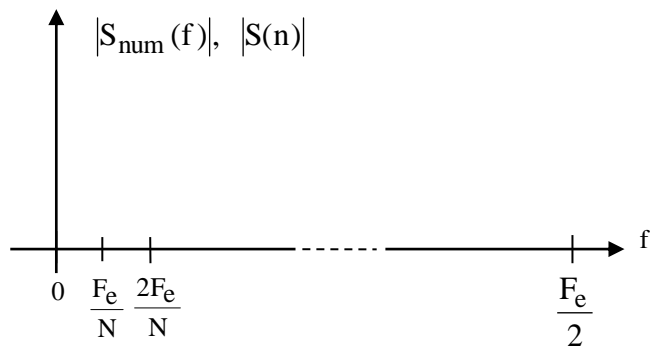
Question 6 : L'algorithme de FFT calcule les valeurs de $S(n)$ pour les fréquences $\frac{nF_e}{N}$ avec $n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$. Dans le cas particulier où f_0 est un multiple de $\frac{F_e}{N}$, compléter le graphe ci-dessous, en traçant $|S_{\text{num}}(f)|$ « à main levé » et en reportant les valeurs des $|S(n)|$.



Question 7 : Dans le cas où f_0 n'est pas un multiple de $\frac{F_e}{N}$, compléter le graphe ci-dessous, en traçant $|S_{\text{num}}(f)|$ « à main levé » et en reportant les valeurs des $|S(n)|$.



Question 8 : L'oscilloscope DSO5038A utilisé en TP mémorise 1000 points, pour utiliser l'algorithme de FFT, il complète les 1000 points avec 24 zéros. Le pas de calcul des $|S(n)|$ est donc $\frac{F_e}{1024}$. Compléter le graphe ci-dessous en traçant $|S_{\text{num}}(f)|$ « à main levé » et en reportant les valeurs des $|S(n)|$ dans le cas où $f_0 = 100\text{kHz}$ et $F_e = 2\text{MHz}$



Dans le cas où la fréquence f_0 n'est pas un multiple du pas de calcul $\frac{F_e}{n}$, il apparaît des raies parasites,

appelées **fuites spectrales**, d'autant plus intenses que les lobes secondaires de la fenêtre d'analyse sont importants. L'idéal serait une fenêtre avec le lobe principal le plus étroit et les lobes secondaires les plus faibles en amplitude. Pour un nombre de points N donné, c'est la fenêtre rectangulaire qui a le lobe principal le plus étroit et donc la meilleure résolution, par contre les lobes secondaires sont importants et masquent d'éventuelles raies de petites amplitudes contenues dans le spectre, la fenêtre rectangulaire a donc une faible dynamique. Il existe donc d'autres fenêtres d'analyse présentant des lobes secondaires de plus faibles amplitudes, présentant une meilleure dynamique, en contre partie la largeur du lobe principal est plus importante et la résolution plus faible. La figure 9 montre les trois fenêtres disponibles avec l'oscilloscope DSO5038A : les fenêtres Rectangulaire, Hanning et Flat Top. La fenêtre de Hanning présente une meilleure dynamique que la fenêtre rectangulaire, la fenêtre Flat Top est essentiellement utilisée pour faire des mesures.

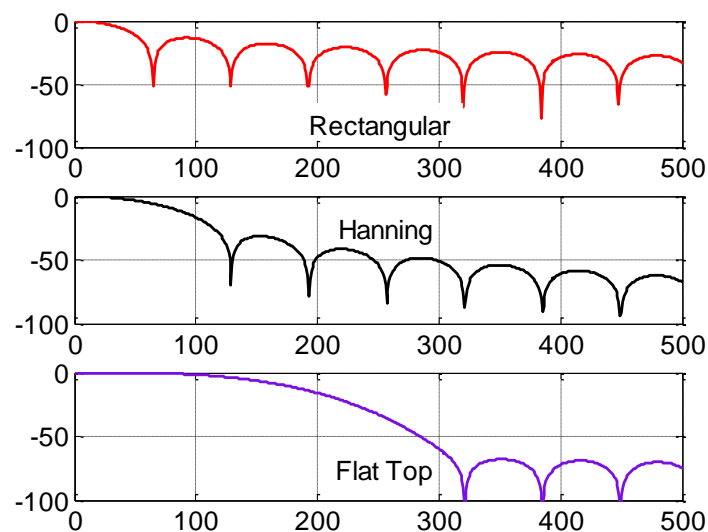


Figure 9 : Les différentes fenêtres d'analyse : Rectangulaire, Hanning et Flat Top

IV- Impact du repliement de spectre

Un signal carré de fréquence $f_0 = 990\text{Hz}$, d'amplitude $A = 1\text{V}$ et de rapport cyclique 50% est échantillonné sans filtre antirepliement à la fréquence de 100kHz . La série de Fourier du signal avant échantillonnage s'écrit :

$$\frac{A}{2} + A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} \cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} \cos(n\omega_0 t) \quad (10)$$

La transformée de Fourier (1) a les mêmes raies que la série de Fourier (10), les amplitudes sont par contre divisées par 2. Sur la figure 10 on a tracé les raies pour $f = 31 \times 990 = 30690\text{Hz}$ et $f = 33 \times 990 = 32670\text{Hz}$, la raie à $f = 32 \times 990 = 31680\text{Hz}$ est nulle d'après la relation (10).

Question 9 : Vérifier que les amplitudes de la figure 10 sont exactes.

Question 10 : Après échantillonnage le spectre contient davantage de raies, entre 30690Hz et 32670Hz il apparaît par exemple une raie d'anti-repliement comme le montre la figure 11, donner sa fréquence et son amplitude en dBV.

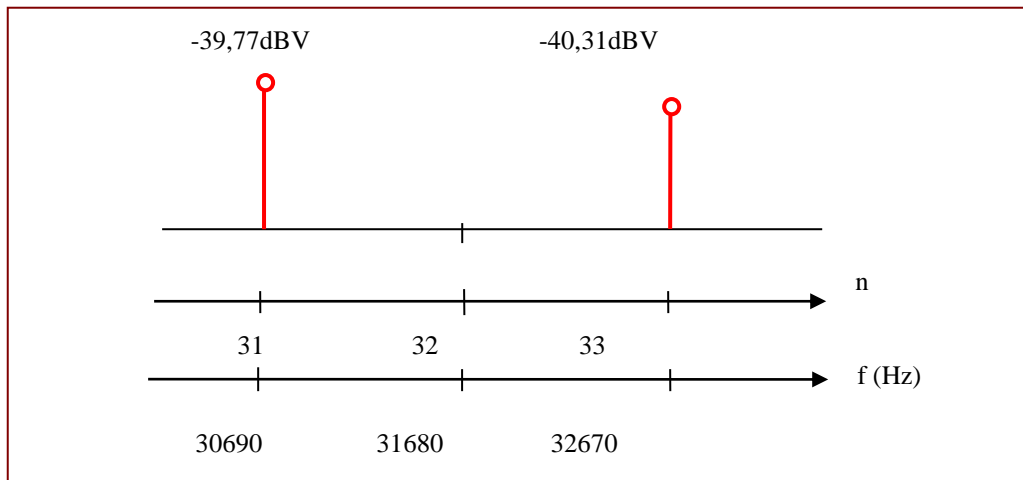


Figure 10 : Harmoniques $n = 31$, 32 et 33 d'un signal carré de rapport cyclique 50%

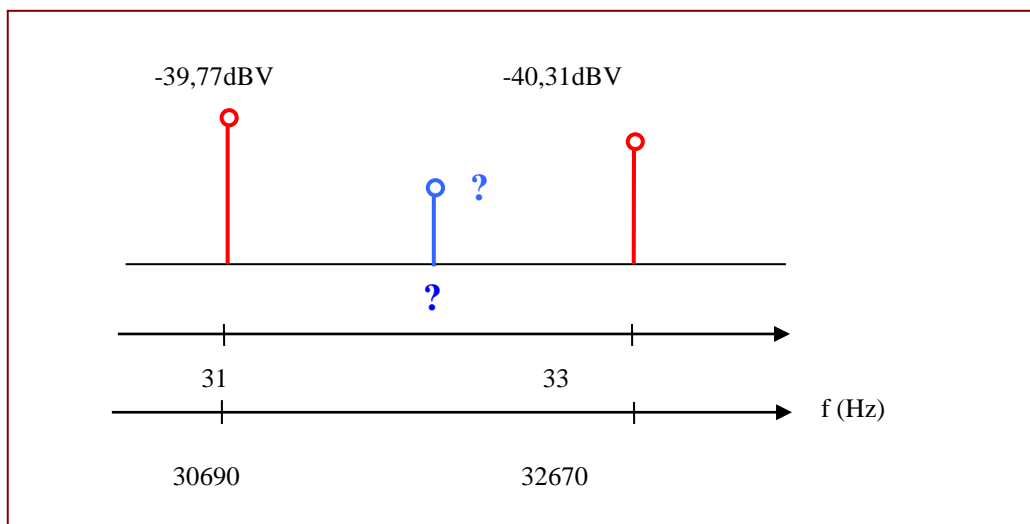


Figure 11 : Fréquence et amplitude de la raie d'anti-repliement comprise entre les harmoniques $n = 31$ et 33

Thème 4 :

Comportement fréquentiel de composants passifs

I- Préliminaires : le transfert de charges

II- La fonction « découplage » : utilisation des condensateurs

III- Etude du comportement en fréquence d'un condensateur

III-1. Modèle électrique équivalent

III-2. Influence sur le découplage

IV- Exercice d'application (*extrait d'un partiel de S3*)

Objectifs :

L'objectif de ce TD est de répondre à la question suivante : **pourquoi faut-il « découpler » les circuits électroniques et comment procéder ?**

- Dans une première partie, on débute par de brefs rappels sur le transfert de charges stockées dans un condensateur puis on étudie la fonction « découplage » sur un circuit simple (inverseur CMOS).
- Dans une deuxième partie, on étudie le comportement en fréquence de condensateurs et on analyse leurs imperfections ainsi que l'impact sur la fonction « découplage ».

L'annexe I présente un rappel des principales équations régissant le fonctionnement d'un circuit R – C .

Pré-requis :

Cours d'électromagnétisme de S1 et S2. Cours-TD de propagation de S3.

I- Préliminaires : le transfert de charges

Question 1 : Soit le circuit à transfert de charges de la figure 1-a dans lequel K_1 est fermé et K_2 est ouvert. Quelle est la charge électrique Q_1 stockée dans le condensateur C_1 ? Indiquer où sont localisées les charges + et - dans les électrodes du condensateur C_1 de la figure 1-b.

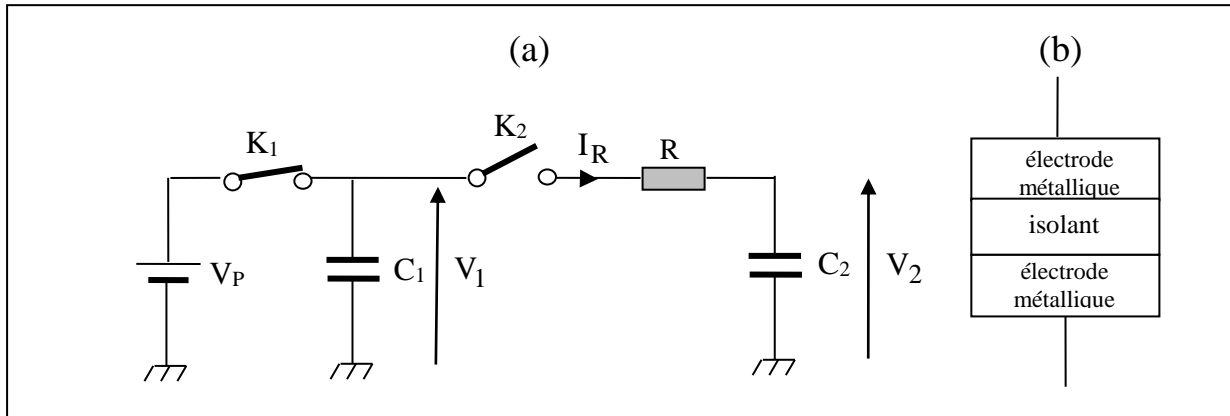


Figure 1 : (a)- Circuit à transfert de charges, (b)- Structure du condensateur plan C_1

Question 2 : Pour $t < 0$, le condensateur C_2 est supposé déchargé. A l'instant $t = 0$, on ouvre K_1 et on ferme K_2 . Indiquer le trajet des électrons dans le circuit. En se basant sur le principe de conservation de la charge, quelle sont au bout d'un temps infini (à l'équilibre) les tensions V_1 et V_2 ?

Question 3 : Donner l'expression du courant I_R circulant dans la résistance R pour $t > 0$. Il est de la forme $I_\infty - (I_\infty - I_0)e^{-t/\tau}$ où I_∞ et I_0 sont les courants pour $t \rightarrow \infty$ et $t = 0^+$ et τ représente la constante de temps.

II- La fonction « découplage » : utilisation des condensateurs

Pour illustrer le découplage, prenons le cas d'un simple inverseur CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor) alimenté par une tension V_P et attaqué par un signal logique V_e « carré » de rapport cyclique 50% comme le montre la figure 2.

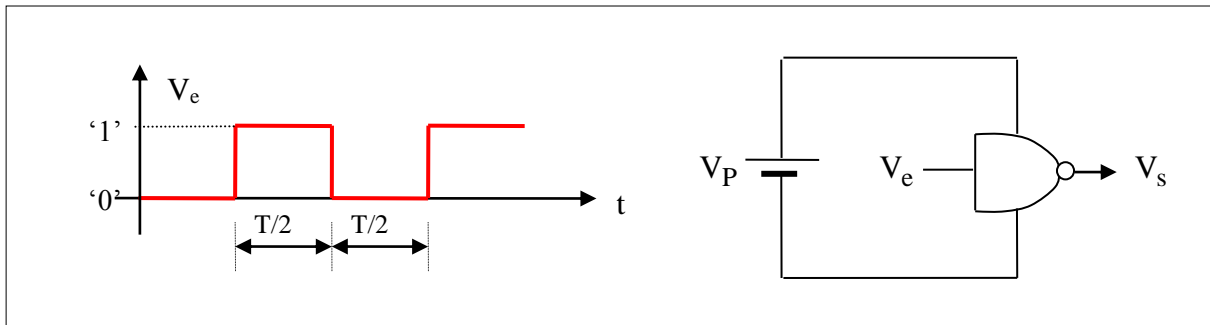


Figure 2 : Inverseur alimenté sous V_P et attaqué par un signal logique V_e

On rappelle qu'un inverseur CMOS est constitué d'un MOS Q_1 canal P et d'un MOS Q_2 canal N comme le montre la figure 3-a. Le fonctionnement est le suivant :

- Figure 3-b : V_e est à l'état '0'
 - Q_1 est saturé et il est équivalent à une résistance r de faible valeur,
 - Q_2 est quant à lui bloqué et il est équivalent à une résistance infinie.
- Figure 3-c : V_e est à l'état '1'
 - Q_2 est saturé et il est équivalent à une résistance r de faible valeur,
 - Q_1 est quant à lui bloqué et il est équivalent à une résistance infinie.

La capacité C , représentée sur les figures 3-b et 3-c, provient essentiellement de la capacité de charge due aux fils de sortie et de la capacité d'entrée des portes logiques connectées en aval du montage.

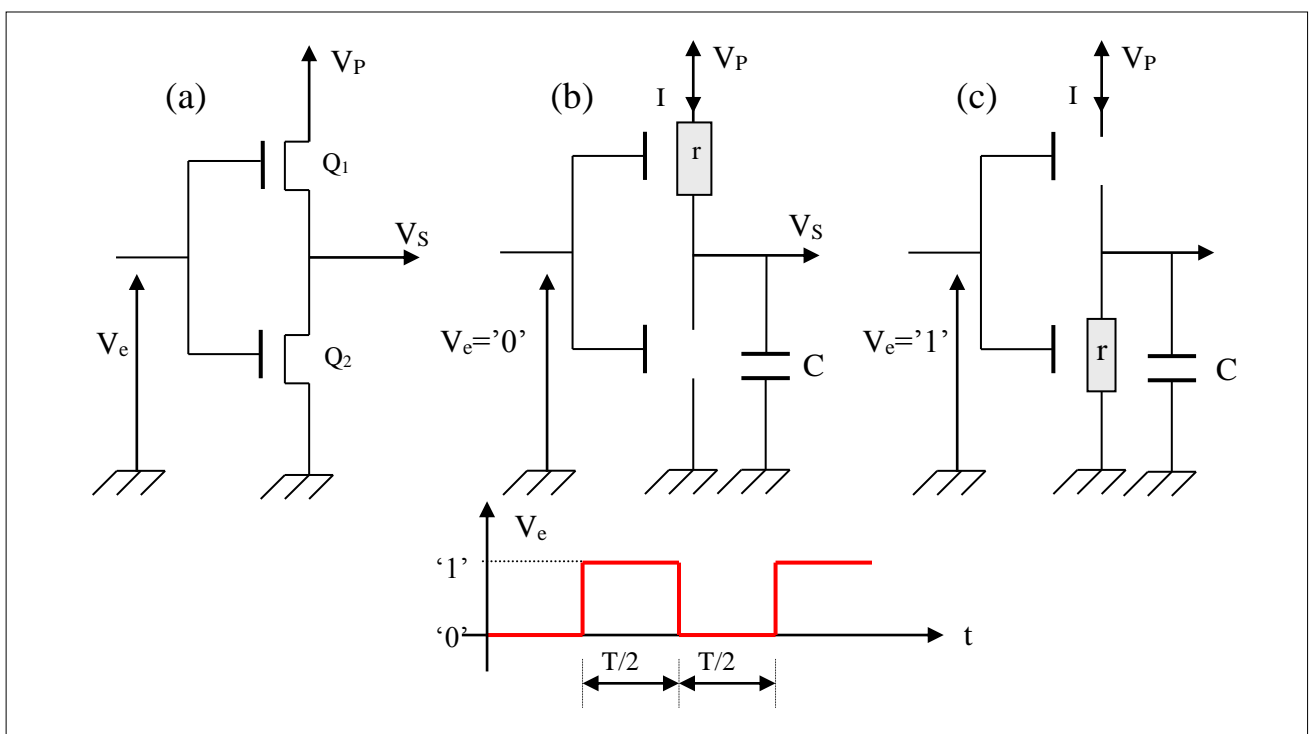
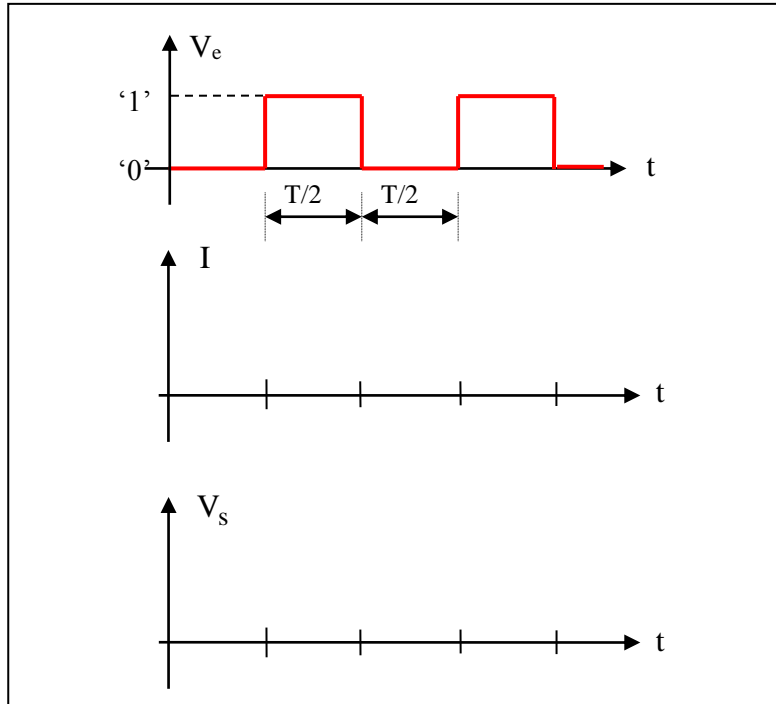


Figure 3 : Modélisation simplifiée d'un inverseur CMOS

Question 5 : Tracer et coter le graphe du courant I fourni par l'alimentation V_P . Tracer également le graphe de la tension V_s . On suppose la constante de temps $r.C \ll T/2$.



En pratique, le circuit inverseur est relié à l'alimentation V_P par un câble d'une certaine longueur. Ce câble peut être modélisé par une structure dite en « Pi » comme le montre la figure 4. Cette impédance fait apparaître une inductance L_C et deux capacités C_C , si la longueur du câble est très inférieure à la longueur d'onde alors, on a les relations suivantes :

- L_C = inductance linéique x longueur du câble
- C_C = capacité linéique x (longueur du câble)/2

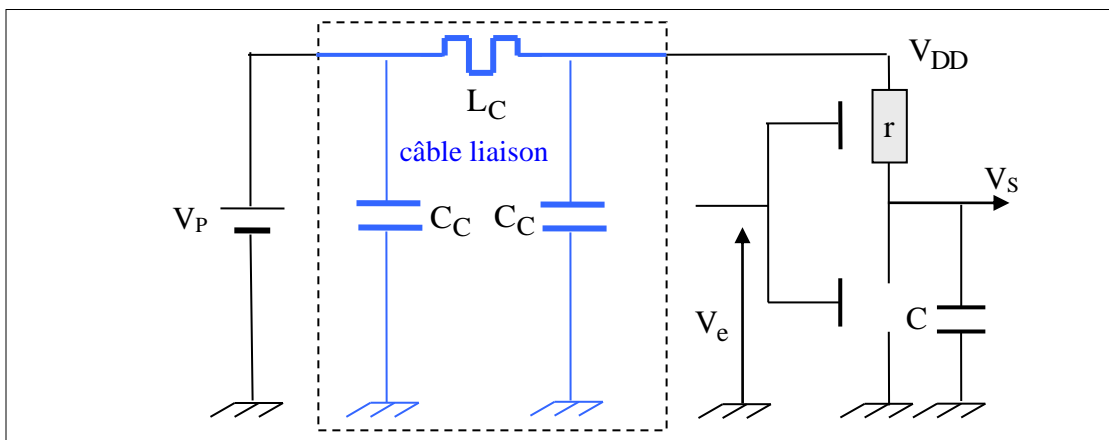


Figure 4 : Modélisation du câble d'alimentation entre l'alimentation V_P et l'inverseur.

NB : Si quelques centimètres de câble sont négligeables aux basses fréquences, il n'en est pas de même aux hautes fréquences. En effet, dès que la longueur des câbles devient du même ordre de grandeur que la longueur d'onde λ , $\lambda = v/f$ avec v la vitesse de propagation et f la fréquence, le phénomène de propagation n'est plus négligeable. La vitesse de propagation dans un câble coaxial (type BNC) est de l'ordre de $2 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ et si f est, par exemple, de l'ordre de 1 GHz alors $\lambda = 0,2 \text{ m}$. En conséquence, si une onde sinusoïdale parcourt un câble supposé **sans pertes et adapté**, ou de longueur infinie, la tension est identique (déphasée de 360°) uniquement tous les 20 cm comme le montre la figure 5. Le câble n'est donc pas **équipotentiel**. On montre que si la longueur ℓ de la ligne de transmission, supposée sans pertes, reste inférieure à λ , le tronçon ℓ admet comme représentation le quadripôle de la figure 6.

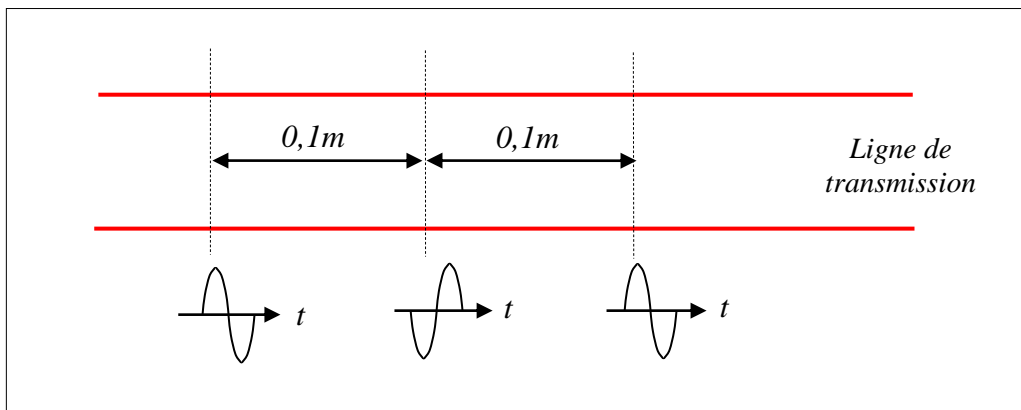


Figure 5 : Photographie, à un instant t , de la tension le long d'une ligne de transmission sans pertes et adaptée, ou de longueur infinie, où la longueur d'onde $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

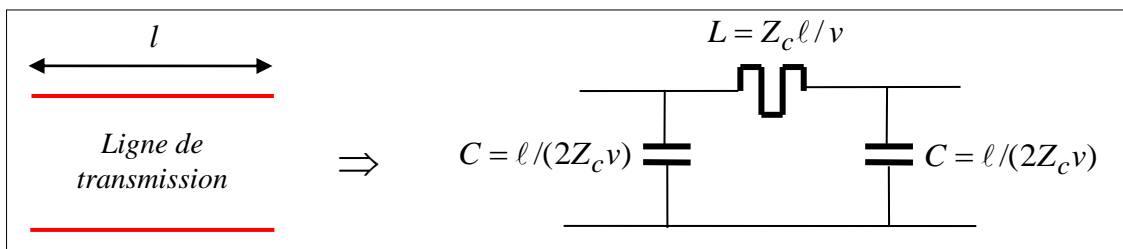


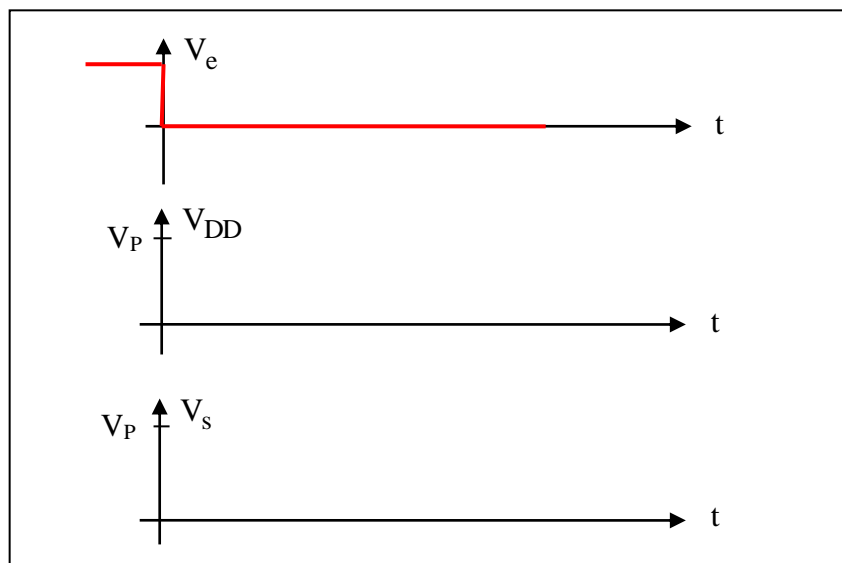
Figure 6 : Quadripôle équivalent à un tronçon de ligne de transmission sans pertes de longueur ℓ dans le cas où $\ell < \lambda$. La ligne a une impédance caractéristique Z_c et une vitesse de transmission v .

On s'intéresse qu'au **passage de $V_e = '1'$ à $V_e = '0'$** pour répondre aux questions suivantes.

Question 6 : Quelles sont, juste avant la transition, les valeurs des tensions V_{DD} et V_s et du courant dans l'inductance L_c du circuit de la figure 4. On suppose que $V_e = '1'$ est appliqué depuis très longtemps.

Question 7 : L'inductance L_c s'oppose aux variations du courant et **faisons l'hypothèse que le courant dans L_c ne varie pas**. En vous aidant des réponses aux questions précédentes, tracer alors l'évolution de V_{DD} et V_s en fonction du temps. Vers quelle valeur tendent V_{DD} et V_s pour $t \rightarrow \infty$?

Application numérique : On donne $C_c = 20$ pF et $C = 10$ pF



Question 8 : En pratique, le courant dans l'inductance varie. De façon qualitative, dessiner alors l'allure plus réaliste de V_{DD} et V_s .

Pour qu'un circuit CMOS fonctionne correctement, il est recommandé que les fluctuations de la tension d'alimentation restent inférieures à 25% de la marge de bruit car au-delà, les états haut et bas en sortie ne sont plus assurés. Pour un circuit classiquement alimenté sous 5V, les fluctuations doivent donc rester inférieures à 250mV.

Question 9 : Pour réduire les fluctuations de la tension d'alimentation V_{DD} , on place aux bornes du circuit intégré, comme le montre le schéma de la figure 7, un **condensateur de découplage** C_D de forte valeur, quelques μF par exemple, C_D est tel que $C_D \gg C$. En s'appuyant sur le résultat de la question 7, montrer que C_D permet de réduire très fortement les fluctuations de la tension V_{DD} .

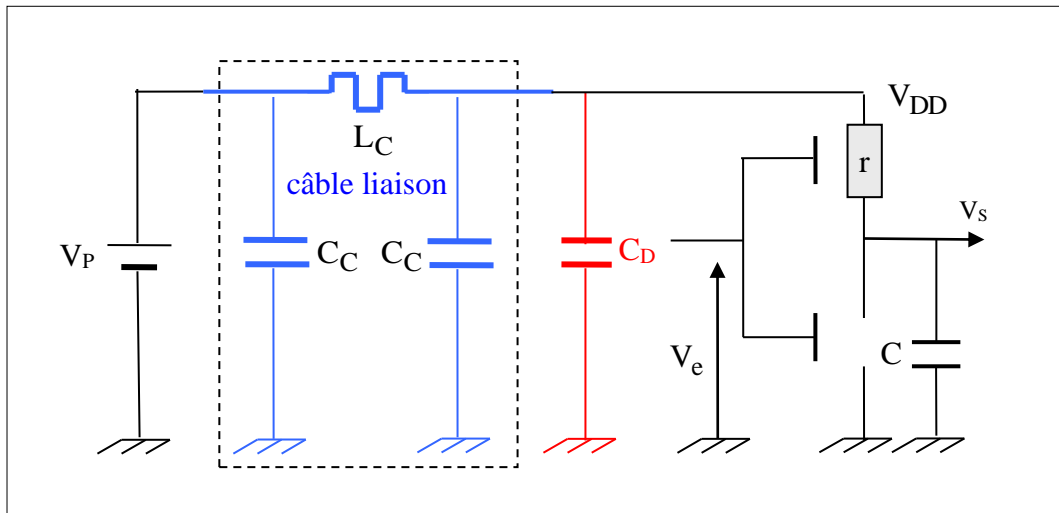


Figure 7 : Le condensateur de découplage C_D permet de réduire les fluctuations de la tension d'alimentation V_{DD}

A RETENIR : On peut maintenant généraliser le résultat obtenu à tout type de circuit intégré, logique et analogique. Pour maintenir une tension d'alimentation constante des circuits, il faut disposer aux bornes de ceux-ci d'un « **gros** » **réservoir d'électrons**, c'est le **rôle joué par le condensateur de découplage**.

On peut également dire que pour que les fluctuations de la tension d'alimentation soient les plus faibles possibles il faut que l'impédance aux variations du circuit d'alimentation soit la plus faible possible. L'impédance aux variations sera d'autant plus faible que C_D sera grand, puisque le module de l'impédance est égal à $\frac{1}{C_D \omega}$.

Pour obtenir une fluctuation de tension d'alimentation inférieure à ΔV par exemple, quand le courant I consommé par le circuit est de la forme $I = I_0 + \Delta I \cos(\omega t)$ où I_0 est le courant moyen et ΔI l'amplitude du courant à la fréquence ω , il faut satisfaire l'inégalité :

$$C \gg \frac{\Delta I}{\omega \Delta V} \quad (1)$$

Question 10 : On considère un circuit alimenté sous 5V fonctionnant à 1kHz et dont les fluctuations maximales en courant et en tension sont respectivement égales à 1 μ A et 1mV. Calculer la valeur de la capacité de découplage appropriée.

NB : En pratique pourtant quand on met un « gros » condensateur de découplage, on n'obtient pas vraiment le résultat attendu. Il y a encore des fluctuations de tension et cela d'autant plus que les appels de courant du circuit sont à hautes fréquences. En effet, **les condensateurs présentent des défauts**, c'est ce que nous nous proposons d'étudier maintenant.

III- Etude du comportement en fréquence d'un condensateur

III-1. Modèle électrique équivalent

L'impédance complexe d'un condensateur de capacité C ne se résume pas seulement au terme $\frac{1}{jC\omega}$. De part sa constitution, l'impédance d'un condensateur fait apparaître une **inductance**. Cette inductance a deux origines :

- i) une origine interne liée à la structure du condensateur,
- ii) l'autre origine est liée à la longueur des fils de connexion.

Un condensateur « single ended », ou encore à insertion, possède une inductance plus élevée qu'un condensateur CMS (Composant Monté en Surface) de même valeur (figures 8-a et 8-b). Par ailleurs, le matériau diélectrique de permittivité ϵ_r situé entre les deux électrodes métalliques ne se polarise pas instantanément dans le champ électrique résultant de l'application de la tension aux bornes du condensateur et cela se traduit par l'apparition d'une **résistance** caractérisant les **pertes diélectriques**. Une partie de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur.

La figure 9 montre le schéma électrique série équivalent d'un condensateur, l'inductance est notée ESL (Equivalent Serie Inductance) et la résistance ESR (Equivalent Serie Resistor).

La figure 10 montre le graphe du module de Z en fonction de la fréquence.

Question 11 : Ecrire l'impédance complexe Z du circuit équivalent de la figure 9. Quel est le comportement de Z pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$?

La fréquence de résonance série F_R correspond au minimum du module de Z, donner l'expression de cette fréquence en fonction de C_S et ESL. Tracer l'allure de $\log_{10}(\text{module de Z})$ en fonction de $\log_{10}(\text{fréquence})$.

Question 12 : Déterminer, d'après le graphe en figure 10, pour un condensateur de valeur nominale 100 pF, les valeurs de C_S , ESR et ESL.

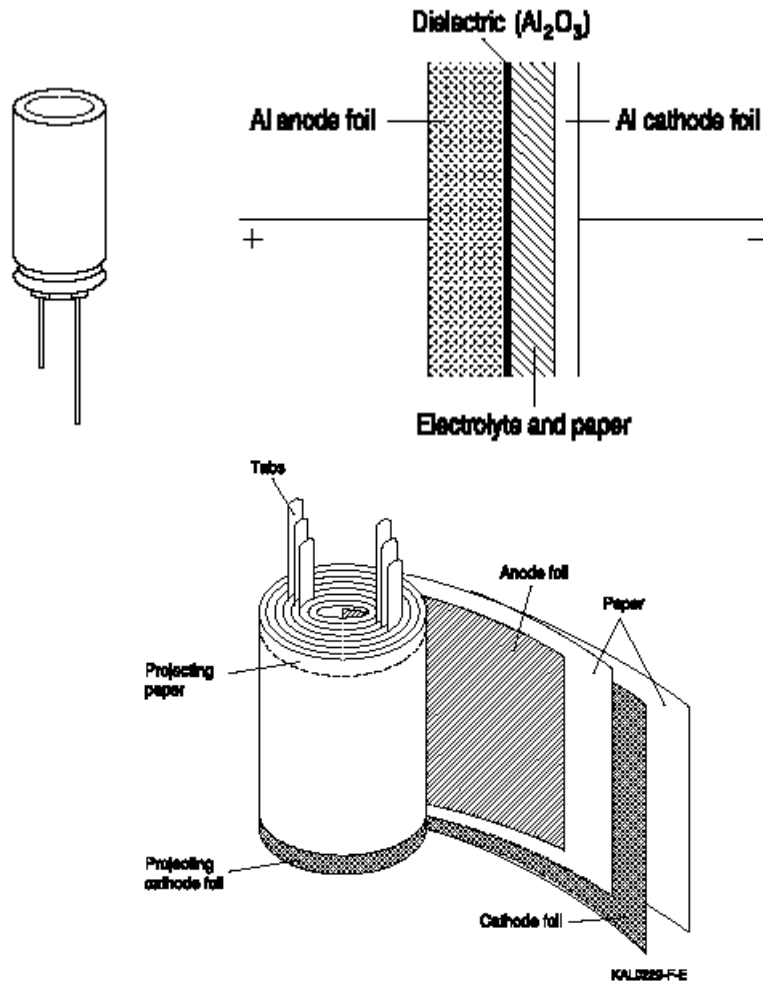


Figure 8-a : Condensateur électrochimique aluminium single ended (www.epcos.com)

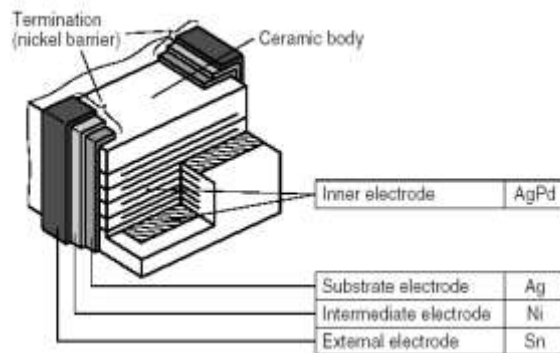


Figure 8-b : Condensateur céramique CMS (www.epcos.com)

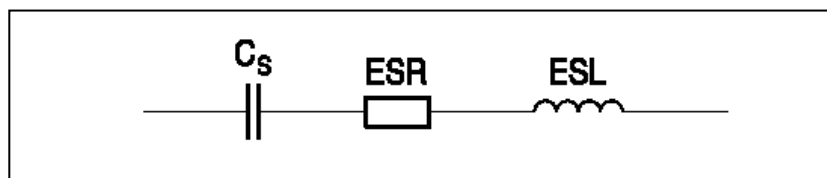


Figure 9 : Modèle électrique équivalent d'un condensateur (www.epcos.com)

Impedance |Z| versus
frequency f

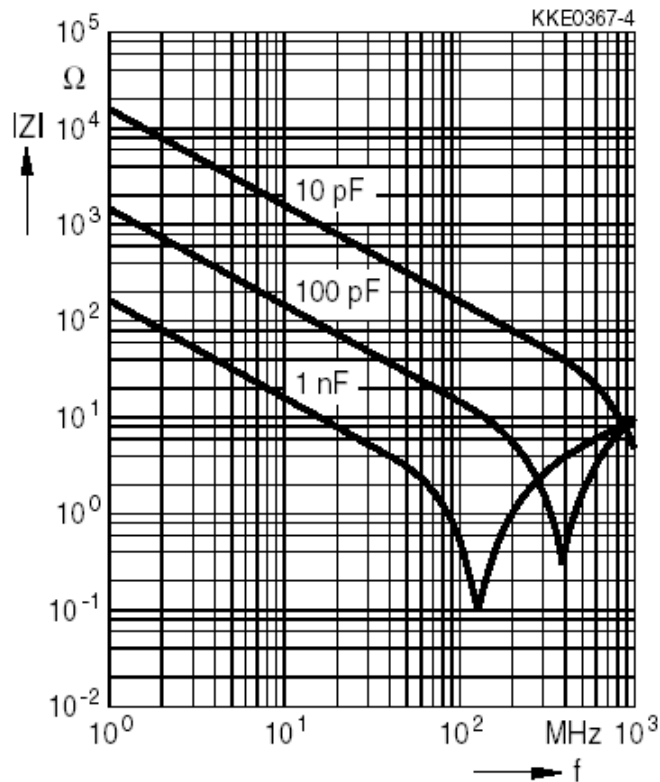


Figure 10 : Impédance Z en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de condensateurs céramiques CMS (www.epcos.com)

Les fabricants de condensateurs privilégient de caractériser les **pertes diélectriques** par une grandeur appelée $\tan(\delta)$ et qui est l'inverse du coefficient de qualité Q du circuit en figure 9 :

$$\tan(\delta) = \frac{1}{Q} = \text{ESR} \cdot C_S \cdot \omega \quad (2)$$

La figure 11 montre, pour un condensateur électrochimique aluminium de 63 μF , la variation de $\tan(\delta)$ en fonction de la fréquence pour différentes températures de fonctionnement. Ce graphe montre que le produit $\text{ESR} \cdot C_S$ dépend de la fréquence sinon on obtiendrait une droite de pente 1 dans un tracé $\log(\tan(\delta))$ fonction de $\log(f)$.

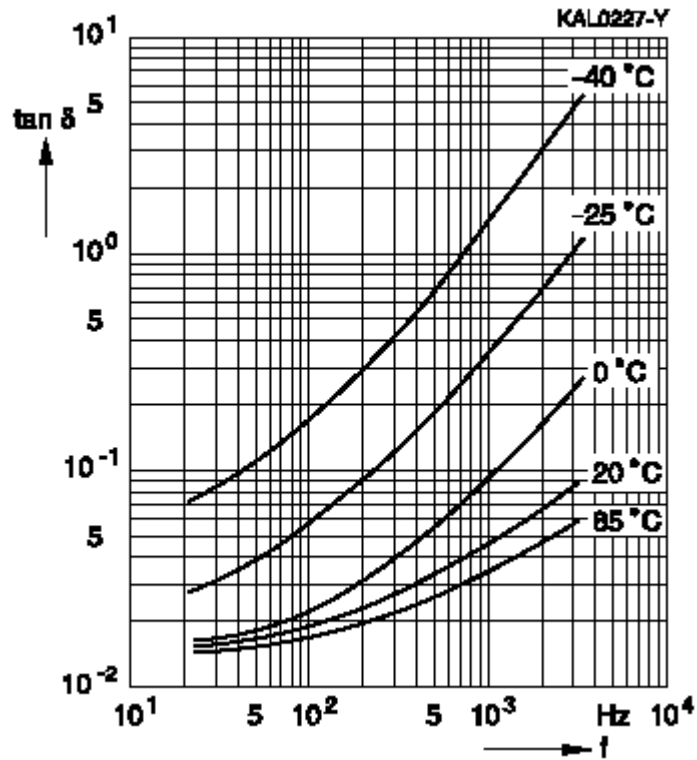


Figure 11 : Variation de $\tan \delta$ d'un condensateur électrochimique de $63 \mu\text{F}$ en fonction de la fréquence et pour différentes températures de fonctionnement (www.epcos.com)

Question 13 : L'inductance ESL d'un condensateur de $3,3 \mu\text{F}$ est égale à 20 nH (www.epcos.com). Calculer la fréquence de résonance F_R .

La conductivité électronique des isolants des condensateurs n'est pas rigoureusement nulle et il existe donc un courant dit de fuite (*leakage current*) qui dépend de la tension appliquée (figure 12). Il ne faut pas confondre le **courant de fuite** avec les **pertes diélectriques** mentionnées précédemment. Dans le premier cas, il s'agit d'électrons qui vont d'une électrode à l'autre alors que dans le second cas ce sont des dipôles électriques qui ne réagissent pas instantanément dans le champ électrique alternatif. A la place de courant de fuite, on parle également de résistance d'isolement.

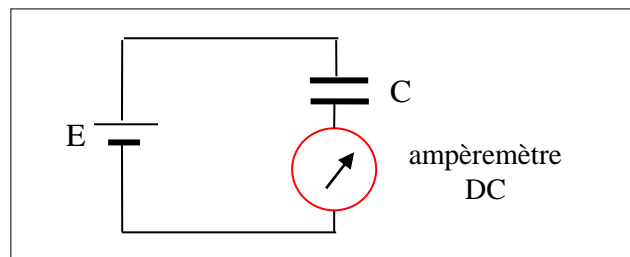


Figure 12 : Mesure du courant de fuite d'un condensateur en DC

Pour un condensateur électrochimique de $63 \mu\text{F}$ soumis à une tension de 15V par exemple, le courant de fuite est égale à $43 \mu\text{A}$ (www.epcos.com), ce qui donne une résistance d'isolement d'environ $350 \text{k}\Omega$. Pour un condensateur céramique CMS, de plus faible valeur, la résistance d'isolement est plus élevée, de l'ordre de $10^7 \Omega$.

III-2. Influence sur le découplage

Nous venons de voir que le but du découplage est de maintenir une tension quasi-constante aux bornes des circuits logiques et analogiques. Pour cela, il faut que l'impédance aux variations soit la plus faible possible. Si on disposait de condensateurs parfaits, sans défaut, il suffirait de placer, aux bornes du circuit à découpler, un condensateur de forte valeur (voir Eq. 1). Ce n'est pas le cas, donc comment procéder ?

Soit un circuit à découpler dont le courant d'alimentation comprend une composante continu I_0 et deux composantes alternatives, d'amplitude 10mA , à 10kHz et 80MHz . La tolérance sur les fluctuations de la tension d'alimentation est de l'ordre de 100mV .

- Pour découpler à 10kHz , il faut choisir un condensateur avec une fréquence de résonance supérieure à 10kHz et un condensateur électrochimique de quelques μF doit convenir. Prenons, par exemple, un condensateur de $3,3 \mu\text{F}$ de fréquence de résonance égale à 620kHz . A 10kHz , il présente une impédance de $4,8 \Omega$, ce qui conduit à une variation de tension de $\approx 48 \text{mV}$. A la fréquence de 80MHz , le condensateur de $3,3 \mu\text{F}$ ne se comporte plus comme un condensateur mais comme une inductance.
- Pour découpler le 80MHz , un condensateur de 1nF avec une fréquence de résonance de $\approx 120 \text{MHz}$ doit convenir. Il présente une impédance de $\approx 2 \Omega$ ce qui conduit à une variation de tension de $\approx 20 \text{mV}$.

Pour découpler correctement le circuit, il faut placer les deux condensateurs en parallèle comme le montre le schéma de la figure 13 et le plus près possible du circuit pour réduire les inductances de connexion.

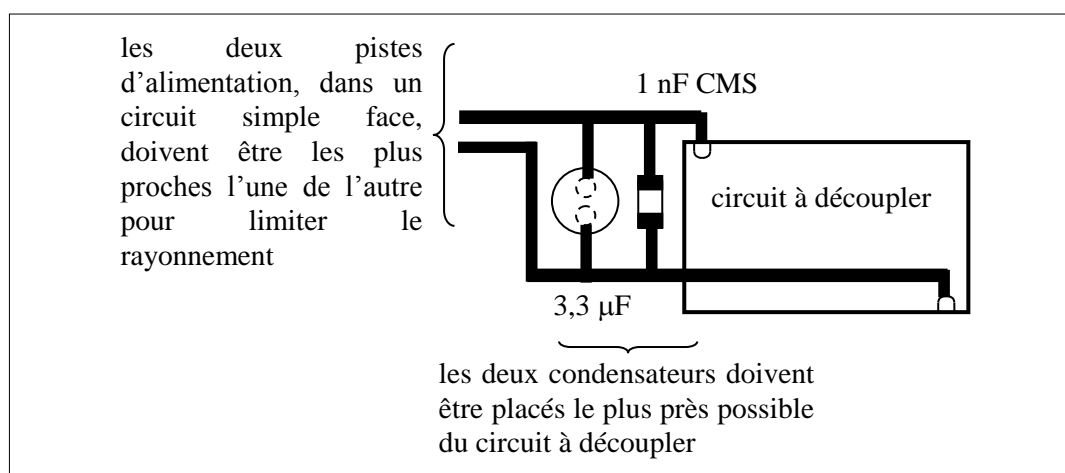


Figure 13 : *Découplage d'un circuit à l'aide de deux condensateurs*

Question 14 : Pourquoi ne peut-on pas uniquement utiliser le condensateur de 1 nF ?

Question 15 : On découple donc le circuit avec les deux condensateurs en parallèle. Le module et la phase de l'impédance Z des deux condensateurs mis en parallèle sont donnés en figure 14. On constate un phénomène d'anti-résonance ($|Z| \rightarrow \infty$) à 35MHz.

- Expliquer la raison de cette anti-résonance.
- En considérant les admittances de chaque condensateur, retrouver la valeur par le calcul.

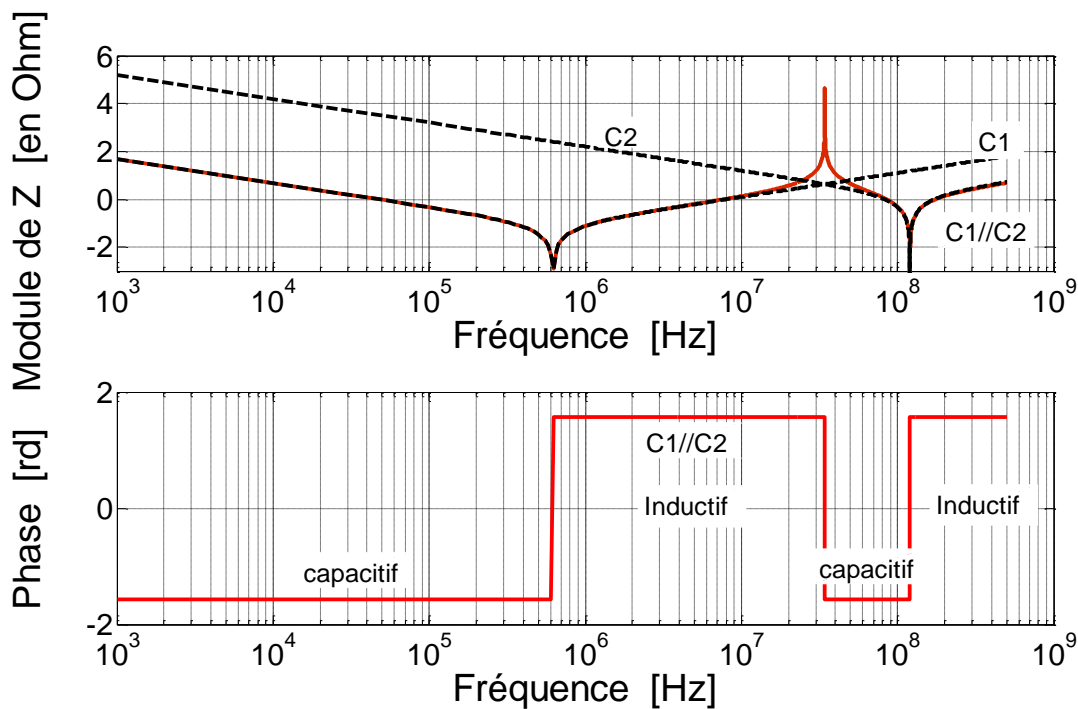


Figure 14 : Module et phase de l'impédance Z des deux condensateurs C_1 et C_2 mis en parallèle

Le dernier point aborde la problématique des fils de liaison et de leur influence sur le comportement fréquentiel d'un condensateur. On suppose le condensateur dont les caractéristiques sont présentées en figure 15. Le module et la phase de l'admittance de ce condensateur sont donnés à la figure 16.

Question 15 : Calculer la valeur approchée des éléments du modèle électrique équivalent du condensateur avec fils.

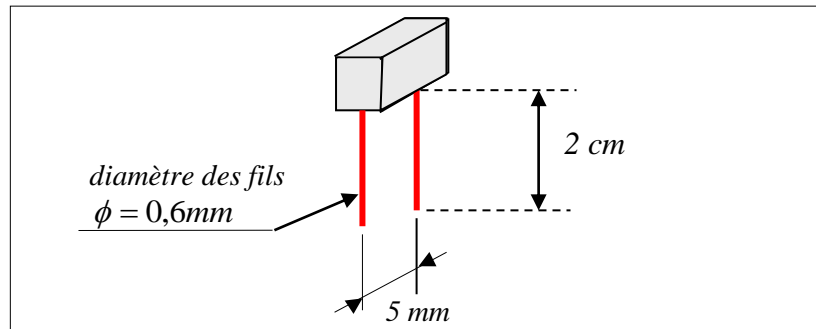


Figure 15 : Dimensions du condensateur.

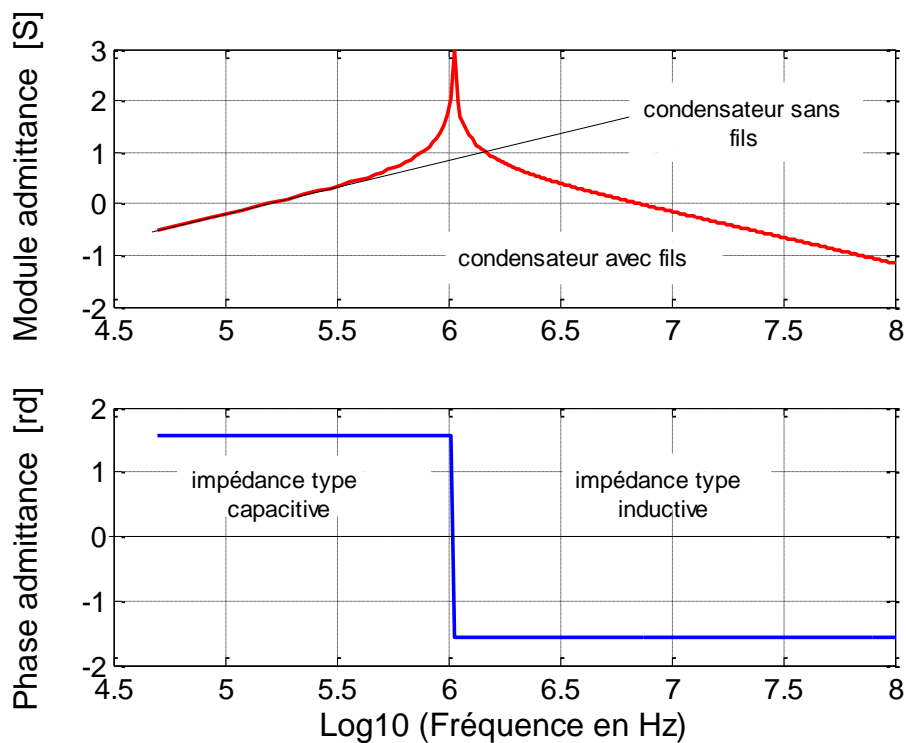


Figure 16 : Module et phase de l'admittance du condensateur.

A RETENIR : Il faut donc retenir qu'un condensateur (comme les autres composants passifs) possède son propre modèle électrique équivalent qui intègre les effets capacitifs mais également parasites (pertes diélectriques du matériau isolant et effets de connectique selfique prépondérants à hautes fréquences). Ces éléments peuvent être déterminées à partir du tracé de la variation du module de l'impédance (ou de l'admittance) en fonction de la fréquence. Ces éléments parasites influencent fortement la fonction « découplage » d'un condensateur notamment car ils contribuent à diminuer sa fréquence de résonance.

IV- Exercice d'application (extrait d'un partiel de S3)

Q1- Dessiner le modèle électrique d'un condensateur en justifiant les différents éléments.

Q2- Quel est l'intérêt d'un condensateur CMS par rapport à un condensateur à insertion ?

Q3- Donner le modèle électrique d'une bobine en justifiant les différents éléments.

Q4- On a relevé le graphe en fréquence d'un composant inconnu. La courbe est donnée en figure 1.

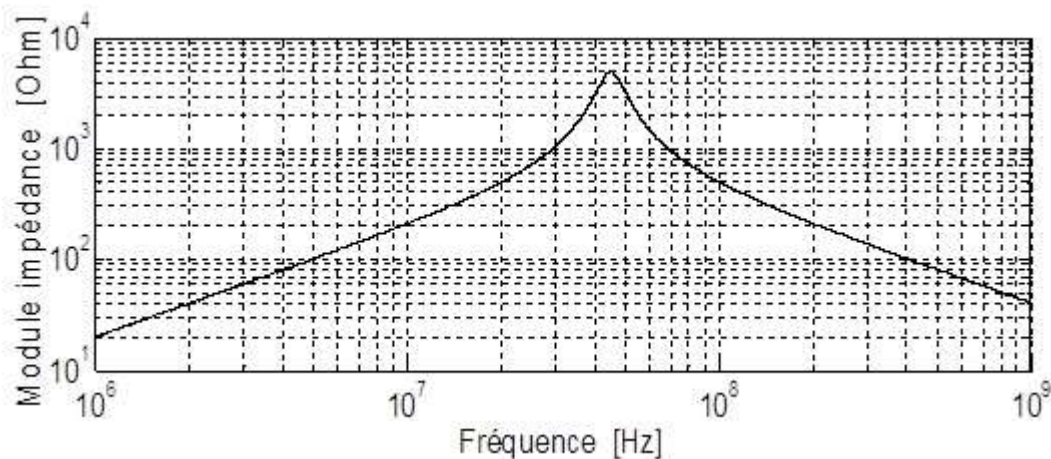
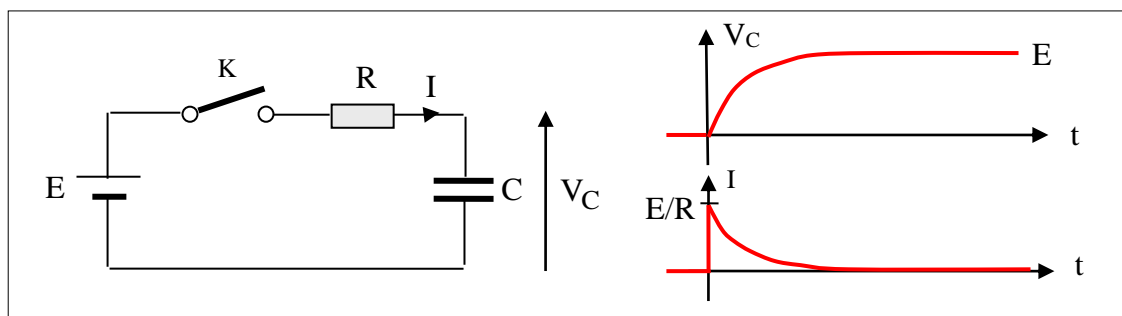


Figure 1 : Courbe d'impédance d'un composant inconnu

Q4-a) De quel type de composant (résistance, bobine ou condensateur) s'agit-il a priori ? Justifier votre réponse.

Q4-b) A partir de cette courbe, calculer les valeurs de la résistance R, de la capacité C et de l'inductance L qui apparaissent dans le schéma équivalent de ce composant. On fera un dessin du schéma du composant.

Annexe I : Rappel des équations du circuit R – C



- Tension V_C aux bornes du condensateur

$$V_C = V_\infty - (V_\infty - V_{\text{init}}) e^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = RC, V_\infty = E \text{ et } V_{\text{init}} = 0$$

$$\text{d'où : } V_C = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad (1)$$

- Courant I de charge du condensateur

$$I = I_\infty - (I_\infty - I_{\text{init}}) e^{-t/\tau} \text{ avec } I_\infty = 0 \text{ et } I_{\text{init}} = E/R \text{ d'où : } I = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \quad (2)$$

- Energie W_E fournie par la source E

$$W_E = \int_0^\infty EI(t)dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = \frac{E^2}{R} \left[\frac{e^{-t/\tau}}{-\frac{1}{\tau}} \right]_0^\infty = E^2 C \quad (3)$$

- Energie W_R dissipée par la résistance R

$$W_R = \int_0^\infty RI^2(t)dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{E^2}{R} \left[\frac{e^{-2t/\tau}}{-\frac{2}{\tau}} \right]_0^\infty = \frac{E^2 C}{2} \quad (4)$$

- Energie W_C stockée dans le condensateur

$$W_C = W_E - W_R = \frac{E^2 C}{2} \quad (5)$$

- Charge Q_C stockée dans le condensateur

$$Q_C = \int_0^\infty Idt = \int_0^\infty \frac{E}{R} e^{-t/\tau} dt = \frac{E}{R} \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = \frac{E}{R} \left[\frac{e^{-t/\tau}}{-\frac{1}{\tau}} \right]_0^\infty = EC \quad (6)$$

Thème 5 :

Propagation dans un câble coaxial

I- Atténuation dans un câble coaxial : régime continu et harmonique

I-1. Pertes en régime continu

I-2. Pertes en régime harmonique

I-3. Phénomène de l'effet de peau

II- Adaptation d'impédance – Puissance dans la charge

III- Propagation en régime impulsionnel

III-1. Coefficient de réflexion

III-2. Régime impulsionnel

IV- Propagation en régime harmonique

IV-1. Cas de l'onde progressive

IV-2. Cas de l'onde stationnaire – Notion de ROS

V- Exercice d'application (*extrait d'un partiel de S3*)

Objectifs :

L'objectif de ce TD est de comprendre ce qu'est une **ligne de transmission** formée par un câble coaxial de manière à éviter une mauvaise utilisation. Evaluer la **limitation de ses performances (pertes)** et son comportement en **régime impulsionnel et régime harmonique** (en fonction de la fréquence).

Pré-requis :

Cours de physique de S3. Cours d'optique géométrique (réflexion dans un miroir). Cours de mathématique sur les fonctions à deux variables.

L'usage du câble coaxial s'étend à toute application dans laquelle un signal doit être transporté d'un point à un autre en subissant un minimum de déformation et d'affaiblissement, le tout en étant protégé des interférences extérieures. L'avantage d'un câble coaxial sur une ligne bifilaire (constituée de deux conducteurs parallèles séparés par un diélectrique) réside dans la création d'un écran (cage de Faraday) qui protège le signal des perturbations électromagnétiques et qui évite que les conducteurs ne produisent eux-mêmes des perturbations. Un câble coaxial peut être placé le long des murs, gouttières ou enfoui car la présence d'objets à proximité n'influence pas la propagation du signal dans la ligne.

Le câble coaxial ou ligne coaxiale est une ligne de transmission, composée d'un câble à deux conducteurs. L'âme centrale, qui peut être mono-brin ou multi-brins (en cuivre ou en acier cuivré ou en cuivre argenté), est entourée d'un matériau diélectrique (isolant). Le diélectrique est entouré d'une gaine conductrice tressée (ou feuille d'aluminium enroulée), appelée blindage, puis d'une enveloppe de matière plastique (PVC).

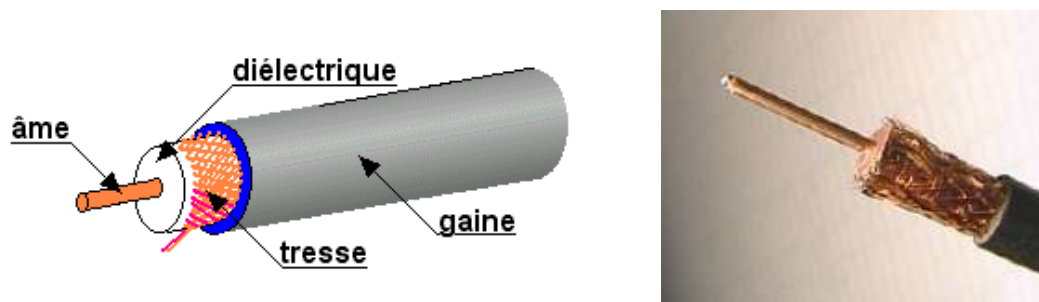


Figure 1 : Structure d'un câble coaxial

La connexion à un câble coaxial doit être réalisée par l'utilisation de connecteurs coaxiaux adaptés au câble et montés en respectant les indications fournies pour conserver à l'ensemble les caractéristiques souhaitées en termes de qualité de transmission (par exemple le connecteur BNC).



Figure 2 : Connecteurs BNC (Baby Neill-Concelman)

Durant ce TD, nous allons étudier deux principaux paramètres qui doivent être pris en compte lors de l'utilisation d'un câble coaxial comme ligne de transmission :

- l'atténuation dans le câble coaxial,
- la nécessité d'adapter la ligne de transmission (adaptation d'impédance) permettant de transmettre le maximum de puissance à une charge placée à l'extrémité de la ligne.

I- Atténuation dans un câble coaxial : régime continu et harmonique

Un tronçon de longueur dx d'un câble coaxial peut être modélisé par le schéma de la figure 3 où l , r , C et g sont respectivement l'inductance, la résistance, la capacité et la conductance par unité de longueur du câble, également appelées constantes linéiques. On rappelle que pour un câble faible perte, l'impédance caractéristique Z_c et la vitesse de propagation v sont respectivement données par : $Z_c \approx \sqrt{\frac{l}{C}}$ et $v = \frac{1}{\sqrt{lC}}$.

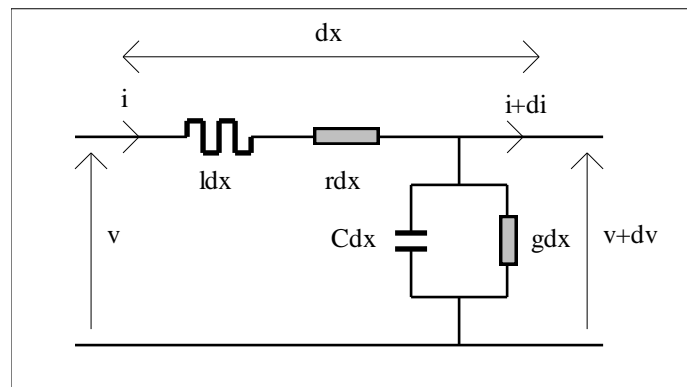


Figure 3 : *Modèle électrique équivalent d'un tronçon de ligne de longueur dx*

Question 1 : Placer, sur la figure 4, les éléments électriques l , r , C et g .

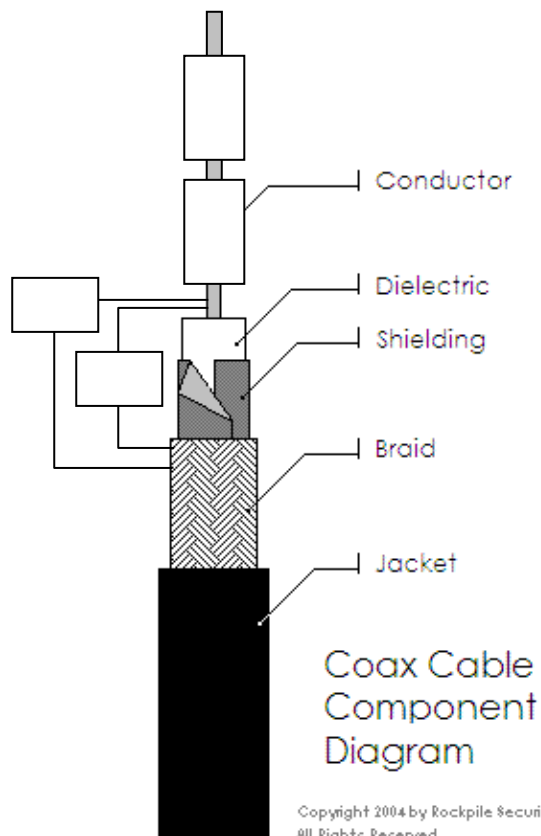


Figure 4 : *Schéma d'un câble coaxial avec emplacement pour y faire figurer les éléments électrique de sa modélisation.*

I-1. Pertes en régime continu

La perte de signal dans un câble coaxial est principalement due à la résistivité électrique des conducteurs utilisés (généralement en cuivre).

Question 2 : Si ce matériau est du cuivre de résistivité $\rho = 1,72 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ à température ambiante, déterminer la résistance de 100m de câble de type RG58 supposé cylindrique avec un diamètre d'âme de 0.81mm. Pour ce calcul, on négligera la résistance de la tresse.

Question 3 : Quelle sera alors l'atténuation A_{tt} d'une tension continue sur une distance de 100m si on ne prend en compte que la résistance du câble et si ce dernier est terminé par une charge de 50Ω ? Exprimer le résultat en dB.

I-2. Pertes en régime harmonique

Les documentations fournies par les constructeurs de câbles RG58, dont l'impédance caractéristique est égale à 50Ω , montrent que les pertes sont plus grandes que celles que vous venez de calculer, et surtout, qu'elles **dépendent de la fréquence** du signal appliqué (tableau 1).

Fréquence	1MHz	10MHz	100MHz	1GHz
Atténuation (dB/100m)	1.1	3.9	12.5	39.4

Tableau 1 : Atténuation d'un câble RG58 pour différentes fréquences de signal appliqué

Nous allons à présent tenter de justifier l'origine de ces pertes.

Question 4 : D'après les connaissances acquises en S1 et S2, les pertes résistives (pertes Joule) ne dépendent à priori pas de la fréquence du courant traversant le conducteur. Néanmoins expérimentalement, on observe une dépendance à la fréquence de ces pertes. Un conducteur parcouru par un courant est le siège d'un champ magnétique (théorème d'Ampère), à partir de ce constat, essayer d'expliquer, sans calcul, ce qui peut se passer dans un conducteur soumis à un courant alternatif (pensez à la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt}$).

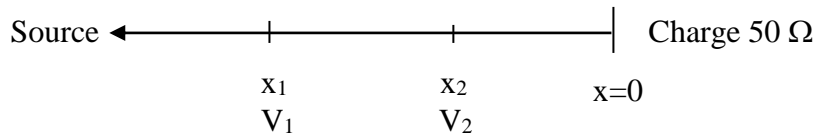
Dans le cas des lignes à faibles pertes, on montre que le **coefficient d'atténuation** α (en m^{-1}) ou encore en Neper (Np comme Neper, Mathématicien Ecossais (1556-1617), inventeur des logarithmes) dépend des éléments du modèle électrique équivalent et s'écrit :

$$\alpha(\text{en } m^{-1}) = \frac{1}{2} \left(r \sqrt{\frac{c}{l}} + g \sqrt{\frac{l}{c}} \right) \quad (1)$$

Soient V_1 et V_2 les amplitudes des tensions mesurées aux point x_1 et x_2 d'une ligne adaptée, c-à-d terminée par une charge égale à l'impédance caractéristique. Les tensions V_1 et V_2 s'écrivent :

En x_1 : $V_1 = Ke^{\alpha x_1}$

En x_2 : $V_2 = Ke^{\alpha x_2}$ avec $V_2 < V_1$ et $x_1 > x_2$



$$\frac{V_1}{V_2} = e^{\alpha(x_1 - x_2)} \text{ d'où : } \ln \frac{V_1}{V_2} = \alpha(x_1 - x_2) \text{ et } \alpha(\text{en } m^{-1}) = \frac{1}{(x_1 - x_2)} \ln \frac{V_1}{V_2}$$

De façon à analyser si l'origine physique des pertes d'un câble coaxial peut être modélisée par l'équation (1), il nous faut établir la correspondance entre α et les pertes en dB pour une longueur de 100m.

Question 5 : A partir de l'équation (1) et sachant que $\log_{10}(x) = \frac{1}{\ln 10} \ln(x)$, écrire l'expression de l'**atténuation** pour 100m de câble, en montrant que :

$$20 \log \frac{V_1}{V_2} \text{ (en dB)} = \frac{2000}{\ln(10)} \cdot \alpha = 868,58 \cdot \alpha \quad (\alpha \text{ en } m^{-1}) \quad (2)$$

Question 6 : En se rappelant que l'impédance caractéristique Z_c d'un câble coaxial est égale à : $Z_c = \sqrt{\frac{l}{C}}$ et si on néglige la conductance g de l'isolant entre l'âme du câble et la tresse de masse, calculer l'**atténuation** (en dB/100m) d'un câble RG58 d'impédance caractéristique 50Ω . Comparer la valeur trouvée à l'atténuation en régime continu et aux valeurs du tableau 1. Quelles sont vos conclusions ?

I-3. Phénomène de l'effet de peau

- En courant continu, la densité de courant dans un conducteur est uniforme et le courant passe dans toute la section $S = \pi r_0^2$ du conducteur, r_0 étant le rayon du conducteur.
- En courant alternatif, la densité de courant n'est plus uniforme, le courant ne circule qu'à la périphérie du conducteur dans une couronne d'épaisseur δ : c'est l'effet de peau (figure 5). En conséquence, la surface offerte au courant diminue et la résistance augmente. L'effet de peau est d'autant plus prononcé que la fréquence est élevée. L'épaisseur de peau δ est donnée par :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma \mu f}} \quad \text{si } \frac{r_0}{2} \sqrt{\pi f \sigma \mu} > 1 \quad (3)$$

où σ est la conductivité du matériau, $\sigma = 1/\rho$ (en Sm^{-1}), $\mu = \mu_0 \mu_r$ (en Hm^{-1}) est la perméabilité magnétique du conducteur et f est la fréquence en Hz.

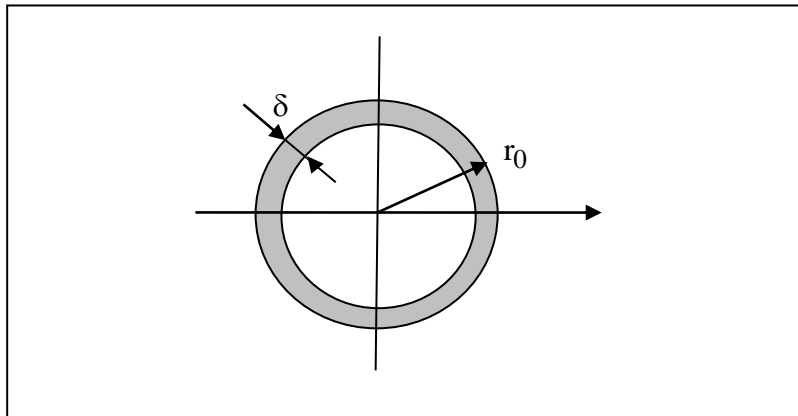


Figure 5 : Effet de peau et passage du courant dans la zone grisée d'épaisseur δ

Question 7 : Exprimer alors la section effective à travers laquelle le courant passe en fonction de r_0 , le rayon du conducteur, et de δ .

Question 8 : Compléter le tableau suivant pour 100m de câble RG58. Comparer vos valeurs au tableau 1.

Fréquence f	1MHz	10MHz	20MHz	100 MHz
Epaisseur de peau δ (en mm)				
Section effective (m^2)				
r (Ω/m)				
atténuation (dB/100m)				

II- Adaptation d'impédance – Puissance dans la charge

En TD S3 de physique, nous avons montré que lorsque la condition d'adaptation d'impédance est réalisée, la puissance transmise par la ligne de transmission à la charge est maximale. En effet, dans ce cas, le coefficient de réflexion est nul et il n'y a pas d'onde réfléchie. Considérons un circuit électrique constitué d'un émetteur : un générateur de tension **continu** (une tension à vide E et une résistance de source R_s) et une charge de résistance R (Fig. 6).

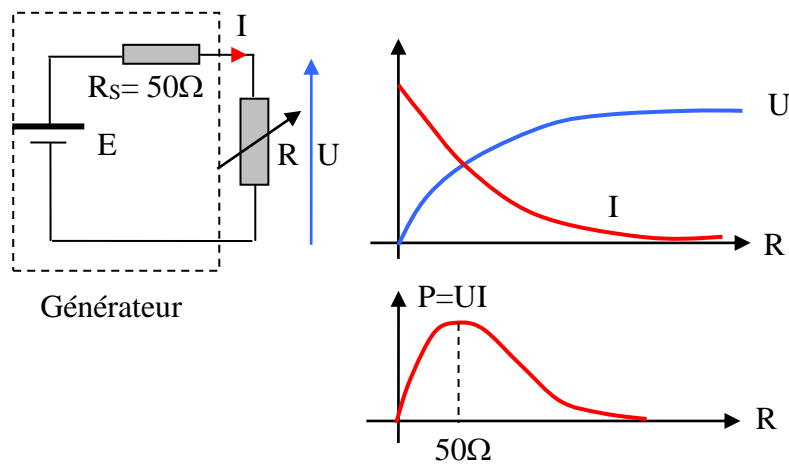


Figure 6 : Schéma illustrant l'adaptation de transmission de puissance

Question 9 : On dispose d'un générateur sinusoïdal délivrant une tension efficace de 2 V à vide et ayant une résistance interne de 50Ω . On étudie les deux situations suivantes :

- le générateur est chargé par une résistance de 50Ω , quelle est la puissance (en W) dissipée dans la charge ?
- la charge du générateur correspond maintenant à un câble d'impédance caractéristique 50Ω , supposé sans perte, terminé par une charge de 50Ω , quelle est la puissance dissipée dans la charge de 50Ω ? Justifier votre résultat.

III- Propagation en régime impulsionnel

III-1. Coefficient de réflexion

Si on reprend le modèle équivalent d'un câble coaxial proposé en figure 3, on montre que la tension complexe $\underline{V}(x, t)$ et le courant complexe $\underline{I}(x, t)$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\underline{V}(x, t) = V' e^{\alpha x} e^{j\beta x} e^{j\omega t} + V'' e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{j\omega t} = \underline{V}_i + \underline{V}_r \quad (4)$$

$$\underline{I}(x, t) = \frac{1}{Z_c} (V' e^{\alpha x} e^{j\beta x} e^{j\omega t} - V'' e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{j\omega t}) = \frac{1}{Z_c} (\underline{V}_i - \underline{V}_r)$$

En d'autres termes, en tout point x de la ligne et quelque soit l'instant t , la tension $V(x, t)$ et le courant $I(x, t)$ correspondent toujours **à la somme** (figure 7) :

- d'une onde incidente circulant de la source vers la charge,
- d'une onde réfléchie circulant de la charge vers la source.

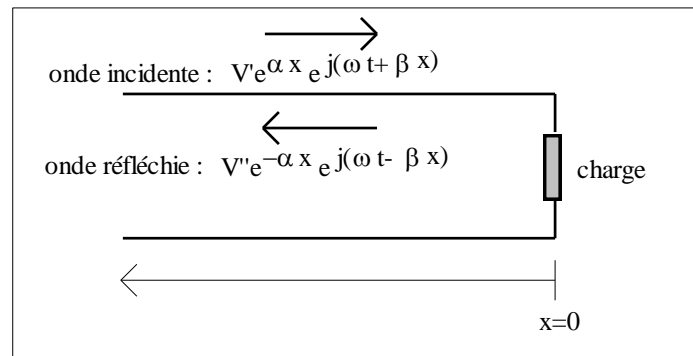


Figure 7 : Ondes incidente et réfléchie sur une ligne de transmission

En un point x quelconque de la ligne, le coefficient de réflexion $\Gamma(x)$, rapport de l'onde réfléchie sur l'onde incidente, s'écrit dans le cas d'une ligne sans perte :

$$\Gamma(x) = \frac{V''e^{-j\beta x}}{V'e^{j\beta x}} = \frac{V''}{V'}e^{-2j\beta x} \quad (5)$$

Le coefficient de réflexion $\Gamma(x=0)$ en $x=0$, est égal au coefficient de réflexion de la charge Z_1 :

$$\Gamma(x=0) = \Gamma_1 = \frac{V''}{V'} \quad (6)$$

Γ_1 peut s'écrire en fonction de Z_1 et Z_c , pour cela écrivons la tension et le courant en $x=0$:

$$\begin{cases} \underline{V(0,t)} = V'e^{j\omega t} + V''e^{j\omega t} \\ \underline{I(0,t)} = \frac{1}{Z_c} (V'e^{j\omega t} - V''e^{j\omega t}) \end{cases} \quad \text{et} \quad Z_1 = \frac{\underline{V(0,t)}}{\underline{I(0,t)}} = Z_c \frac{V'+V''}{V'-V''} = Z_c \frac{1 + \frac{V''}{V'}}{1 - \frac{V''}{V'}}$$

$$\text{d'où } \Gamma_1 = \frac{V''}{V'} = \frac{Z_1 - Z_c}{Z_1 + Z_c} \quad (7)$$

Question 10 : Si à l'extrémité de la ligne en $x=0$, on connecte une charge Z_1 égale à l'impédance caractéristique Z_c . Quelle est la valeur du coefficient de réflexion ? Préciser les valeurs de l'amplitude et de la phase.

Question 11 : Si l'extrémité d'un câble est laissée ouverte, quelle est la valeur du coefficient de réflexion, précisez les valeurs de l'amplitude et de la phase ?

Question 12 : Si l'extrémité d'un câble d'impédance caractéristique 50Ω est chargée par une impédance $Z_1 = (50+j25)\Omega$, quelle est la valeur du coefficient de réflexion (préciser les valeurs de l'amplitude et de la phase) ? Comment modifieriez-vous la charge pour éviter la naissance d'une onde réfléchie en bout de ligne ?

III-2. Régime impulsionnel

Un générateur, d'impédance de source 50Ω , injecte une impulsion périodique d'amplitude $4V$, de largeur $\theta = 300\text{ ns}$ dans une ligne de d'impédance caractéristique 50Ω dont l'extrémité est laissée ouverte (figure 8). **Le régime de fonctionnement est considéré comme impulsionnel** quand $\theta \ll T$ (très faible rapport cyclique) et $\theta \ll L/v$ où T est la période des signaux, L la longueur de la ligne et v la vitesse.

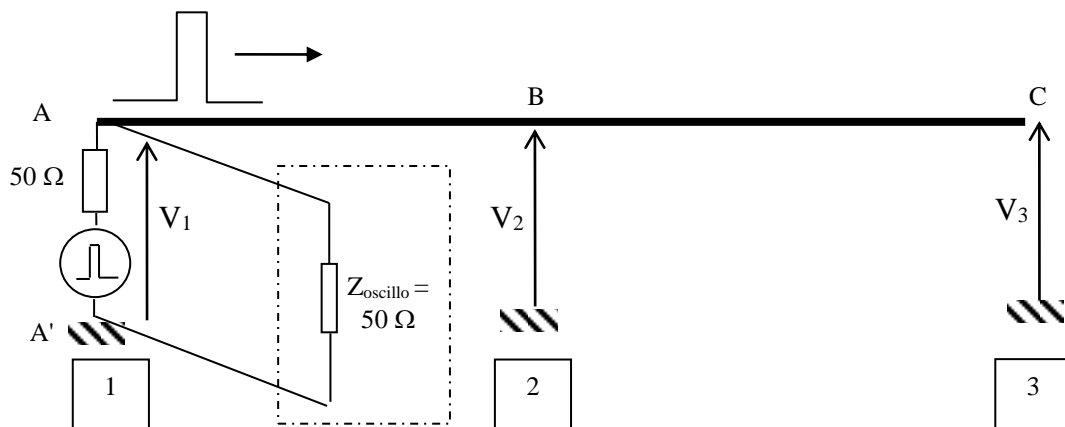


Figure 8 : Propagation d'une impulsion sur une ligne en circuit ouvert

On souhaite vérifier l'amplitude des impulsions au point A en utilisant un oscilloscope d'impédance d'entrée 50Ω , branché entre les points A et A' par l'intermédiaire d'un câble coaxial d'impédance caractéristique 50Ω .

Question 13 : Dessiner le schéma équivalent entre les points A et A' en justifiant votre raisonnement.

Pour vous aider : chercher, dans un premier temps, l'impédance entre les points A et A' due au câble et à l'oscilloscope.

Question 14 : En utilisant le résultat précédent, compléter alors le schéma de réflexion ci-dessous. Calculer la valeur de l'amplitude du pulse à $t = 0^+$ entre les points A et A'.

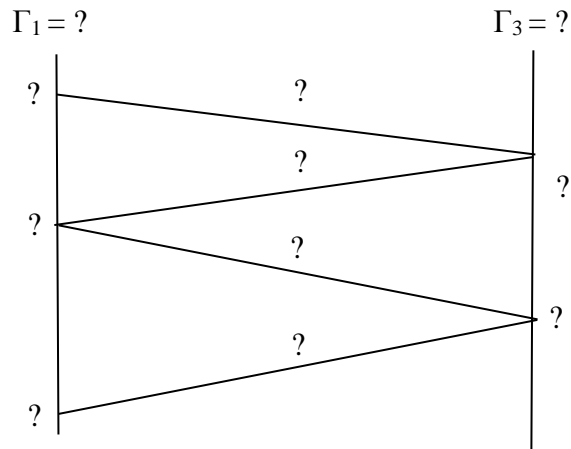


Figure 9 : Schéma de réflexion de la ligne en **circuit ouvert**

Question 15 : Refaites le même exercice, mais avec cette fois la ligne mise en court circuit (Fig. 10).

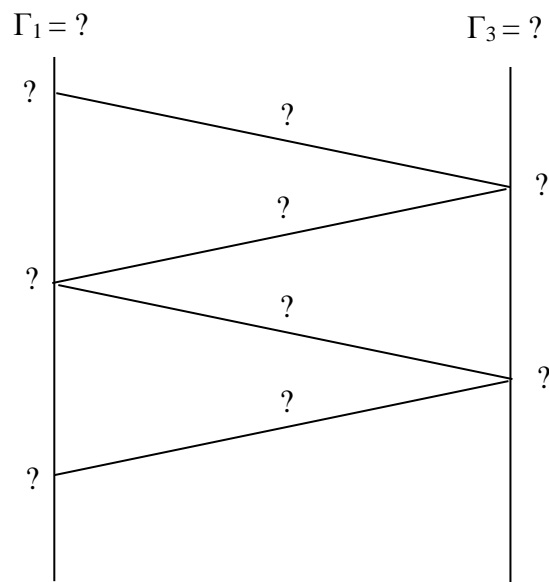


Figure 10 : Schéma de réflexion de la ligne en **court-circuit**

Question 16 : Refaites le même exercice, mais avec cette fois la ligne terminée par 50Ω (Fig. 11).

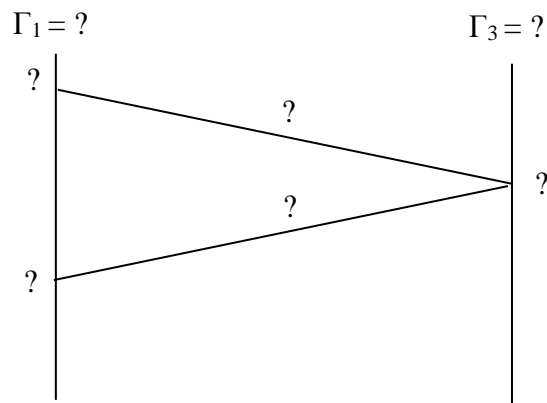


Figure 11 : Schéma de réflexion de la ligne terminée par **50Ω**

Pour calculer les amplitudes des pulses, vous avez fait implicitement l'hypothèse que la vitesse de propagation des ondes $v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}}$ était indépendante de la fréquence. En réalité, l'inductance dépend de la fréquence à cause de l'effet de peau et en conséquence, la vitesse v dépend de la fréquence

Question 17 : Quelle conséquence cet effet peut-il avoir sur la forme des impulsions ?
Pour vous aider : penser qu'une impulsion périodique se décompose en une infinité de fréquences (décomposition en série de Fourier).

IV- Propagation en régime harmonique

IV-1. Cas de l'onde progressive

Le cas le plus simple d'onde progressive périodique est une onde dite "monochromatique" de fréquence f unique. Un observateur placé à une abscisse x voit uniquement une onde incidente, il n'y a pas d'onde réfléchi. La tension complexe s'écrit alors :

$$\underline{V}(x, t) = V' e^{j\beta x} e^{\alpha x} e^{j\omega t} \quad (8)$$

avec : α le coefficient d'atténuation de la ligne (m^{-1}), β la constante de phase ($radm^{-1}$) et ω : la pulsation ($rads^{-1}$)

NB : l'origine $x = 0$ est prise au niveau de la charge.

La tension réelle mesurable correspond à la partie réelle de $\underline{V}(x, t) = V' e^{j\beta x} e^{\alpha x} e^{j\omega t}$ soit :

$$|V'| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi) \text{ où } V' = |V'| e^{j\phi} \quad (9)$$

Question 18 : On considère la ligne coaxiale de la figure 12. Donner l'allure de la tension relevée aux points A, B et C si $\alpha = 0$. Conclusion ?

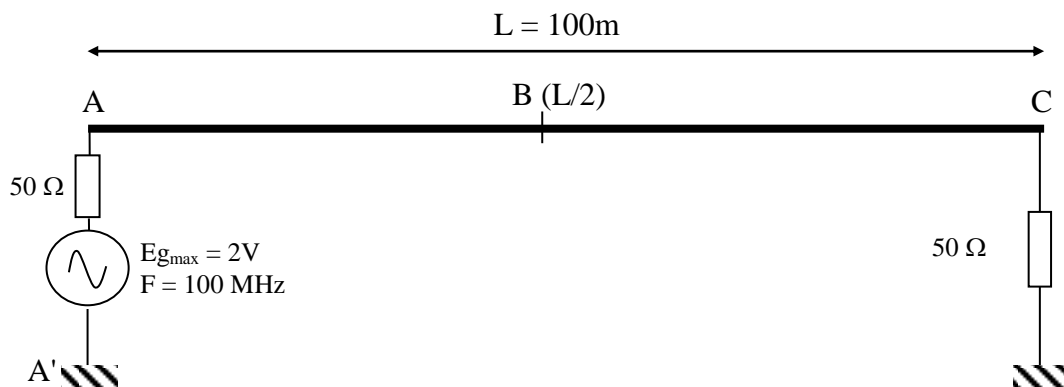


Figure 12 : Exemple de ligne en régime d'onde progressive

IV-2. Cas de l'onde stationnaire – Notion de ROS

La création d'une onde stationnaire est liée à la propagation de deux ondes de même pulsation mais se propageant en sens inverse. Ce type d'ondes est différent d'une onde progressive. Elle se caractérise par le fait que l'amplitude de l'onde dépend maintenant de la variable d'espace x . On définit ainsi :

- les nœuds d'onde : points où l'amplitude est minimale (v_{\min})
- les ventres d'onde : points où l'amplitude sera maximale (v_{\max})

On définit le rapport d'onde stationnaire (ROS) comme étant :

$$\text{ROS} = \frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_1|}{1 - |\Gamma_1|} \quad (10)$$

Remarque :

- Dans la cas d'une ligne adaptée, $\text{ROS} = 1$
- Dans la cas d'une ligne désadaptée, $\text{ROS} \gg 1$

En pratique, une onde stationnaire est générée en désadaptant la ligne de transmission. On étudie ici le cas où la charge $Z_1 \rightarrow \infty$, c'est-à-dire une ligne ouverte. On fait l'hypothèse d'une ligne sans perte.

Question 19 :

- Calculer la valeur du rapport d'ondes stationnaires (ROS).
- Si la charge est infinie**, le courant $I(x=0, t) = 0$, déduire alors des équations de la tension et du courant la relation simple entre V' et V'' .

$$\begin{aligned} \underline{V}(x, t) &= V' e^{j\beta x} e^{j\omega t} + V'' e^{-j\beta x} e^{j\omega t} \\ \underline{I}(x, t) &= \frac{1}{Z_c} \left(V' e^{j\beta x} e^{j\omega t} - V'' e^{-j\beta x} e^{j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

- Donner alors l'expression de la tension $\underline{V}(x, t)$ à une abscisse x et à un instant t .

Question 20 : La tension V' est complexe, elle peut s'écrire par exemple : $|V'|e^{j\phi}$, en déduire alors que la tension $v(x, t)$ mesurée (partie réelle de $\underline{V}(x, t)$) à une abscisse x et à un instant t se met sous la forme :

$$v(x, t) = 2|V'| \cos(\beta x) \cos(\omega t + \phi) \quad (12)$$

On vérifie bien que l'amplitude de la tension dépend de la position sur la ligne.

A RETENIR : Il faut donc retenir que la propagation dans un câble coaxial est régie par les phénomènes physiques relatifs à la propagation d'ondes : somme d'une onde incidente et onde rétrograde. La superposition de ces deux ondes forment une onde qui dépend du temps t mais également de l'abscisse x . Ces effets sont visibles dès que la longueur d'onde est inférieure à la longueur du câble. On mesure les effets de cette onde par l'intermédiaire de la tension $V(x,t)$ et/ou du courant $I(x,t)$. Trois grands paramètres sont généralement caractérisés sur un câble coaxial :

- Atténuation (en m^{-1} ou en dB/100m) :
 - en régime continu : uniquement dépendante des éléments résistifs du montage (résistance du câble et partie résistive de la charge)
 - en régime harmonique : dépendant principalement de l'effet de peau
- Coefficient de réflexion qui impose le rapport entre l'amplitude de la tension réfléchie et la tension incidente (indépendant de l'abscisse) et dont la phase dépend de l'abscisse.
- Rapport d'ondes stationnaires (ROS) : caractérise en régime harmonique le taux de désadaptation d'un câble coaxial fermé sur une charge d'impédance Z_{load} .

V- Exercice d'application (extrait d'un partiel de S3)

On considère un câble coaxial dont les constantes linéiques sont respectivement égales à :
 $\ell = 325 \text{ nH.m}^{-1}$ et $C = 57,75 \text{ pF.m}^{-1}$.

Q1- Calculer l'impédance caractéristique Z_C du câble ainsi que la vitesse de propagation V_ϕ des ondes.

On considère le montage de la figure 1, similaire à celui du TP sur le câble coaxial.

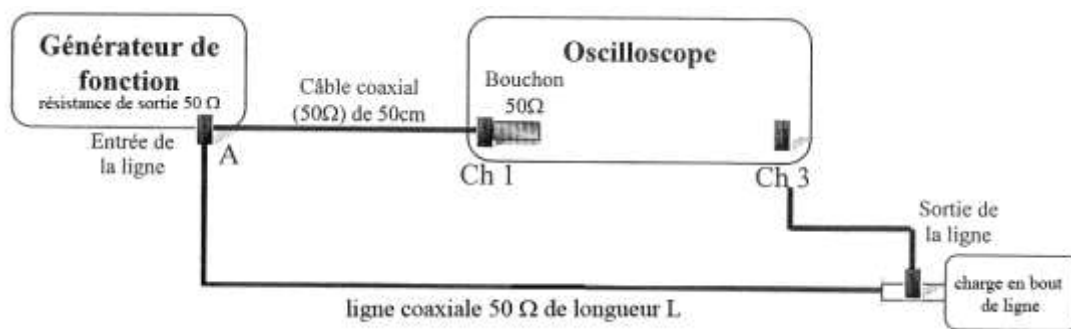


Figure 1

Q2- Calculer l'impédance vue par la ligne à son entrée (impédance équivalente au générateur + oscilloscope). En déduire le coefficient de réflexion (Γ_g) en entrée.

Q3- Dans un premier temps, on branche une charge adaptée en extrémité de ligne. On relève en sortie de ligne le chronogramme de la figure 2.

On mesure $E = 1V$, $\Theta = 90\text{ ns}$ et $t_1 = 326\text{ ns}$.

En déduire la longueur (L) du câble.

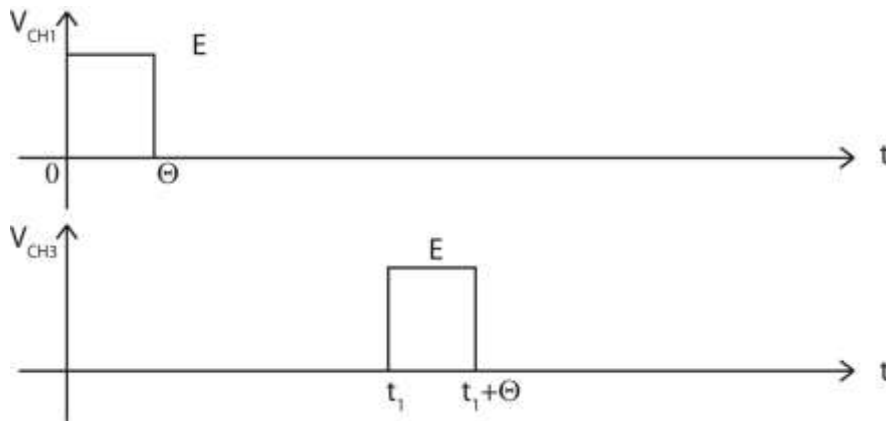


Figure 2

Q4- On branche maintenant une charge de $50\ \Omega$ en bout de ligne sans modifier les réglages du générateur :

Q4-a) Calculer le coefficient de réflexion (Γ_1) en bout de ligne.

Q4-b) Faire un schéma, coté au niveau du temps et des amplitudes, des chronogrammes des tensions que l'on mesure à l'entrée et à la sortie de la ligne dans l'intervalle $[0-1,5\mu s]$ sur la figure 3.

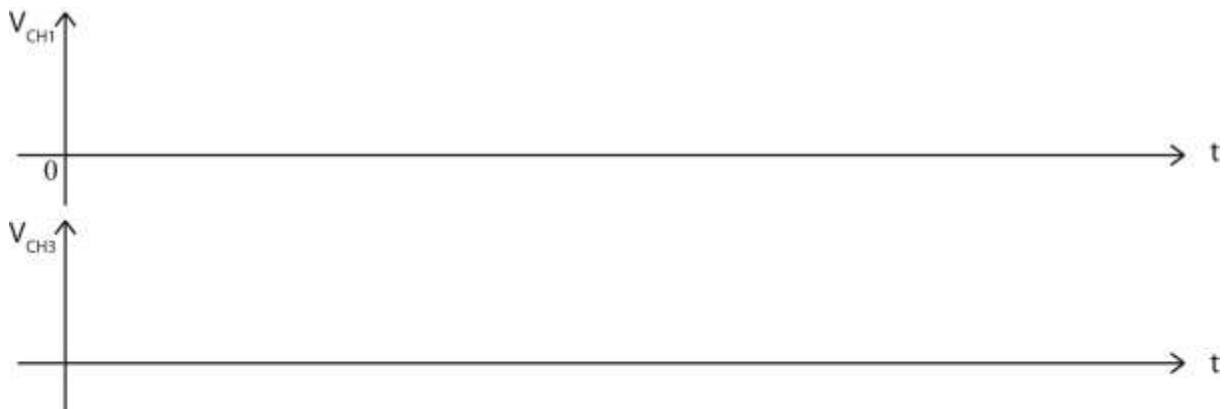


Figure 3

Thème 6 :

Propagation guidée d'ondes électromagnétiques

I- Généralités sur les guides d'ondes

I-1. Génération d'une onde électromagnétique

I-2. Intérêt des guides d'ondes

I-3. Champ électrique et longueur d'onde guidée dans un guide d'ondes

I-3-a. Distribution du champ électrique

I-3-b. Longueur d'onde guidée

II- Etude de quelques instruments de mesure

II-1. Etude de l'ondemètre

II-2. Mesure d'une longueur d'onde - Relation entre coefficient de réflexion et ROS

II-3. Etude d'un coupleur latéral

III- Exercice d'application (*extrait d'un partiel de S3*)

Objectifs :

L'objectif de ce TD est de :

- comprendre le fonctionnement d'un **guide d'ondes** et son intérêt dans l'étude de la **propagation d'une onde électromagnétique**,
- de savoir **mettre en œuvre et utiliser quelques instruments hyperfréquences** pour mesurer une longueur d'onde (**ondemètre**), comprendre le fonctionnement d'un **coupleur latéral** afin de mesurer un coefficient de réflexion, mesurer un rapport d'onde stationnaire (ROS) avec une **ligne fendue** et utiliser **l'abaque de Smith**.

Pré-requis :

Cours d'électromagnétisme de S1 et S2. Cours-TD de propagation de S3.

I- Généralités sur les guides d'ondes

Dans les enseignements de Physique en S3, nous nous sommes attachés à décrire, dans le cas d'une **ligne de transmission** (câble coaxial), les équations régissant l'évolution de la tension et du courant en fonction du temps t et de la seule coordonnée d'espace x . Nous avons obtenu, dans le cas des lignes sans perte :

$$\begin{cases} \underline{V}(x, t) = (\underline{V}'e^{j\beta x} + \underline{V}''e^{-j\beta x})e^{j\omega t} \\ \underline{I}(x, t) = \frac{1}{Z_0}(\underline{V}'e^{j\beta x} - \underline{V}''e^{-j\beta x})e^{j\omega t} \end{cases} \quad (1)$$

avec $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ la constante de phase et $\lambda = \frac{v}{f}$ la longueur d'onde. Les constantes V' et V'' , grandeurs complexes, dépendent de la charge en bout de ligne et de la source ; la source étant un générateur de tension de résistance interne R_s .

En pratique, les lignes de transmission présentent des **pertes** :

- les **pertes « cuivre »** dues à la résistivité des conducteurs,
- les **pertes diélectriques** dues au matériau isolant qui se trouve entre les deux conducteurs.

Pour réduire voire supprimer les pertes diélectriques, il faudrait pouvoir retirer l'isolant. Dans un **guide d'ondes**, il n'y a pas d'isolant puisqu'un guide est généralement creux et rempli d'air.

L'**onde électromagnétique** caractérisée par un **champ électrique** et un **champ magnétique** est guidée par réflexions successives sur les plans métalliques du guide. La génération des ondes est assurée par une antenne. Intéressons-nous dans un premier temps à la génération d'une onde électromagnétique.

I-1. Génération d'une onde électromagnétique

Le montage de la figure 1, dans lequel un générateur de tension continue est chargé par deux fils AB et BC ne crée pas de champ magnétique. En effet, les conducteurs aller (AB) et retour

(BC) sont confondus. Or d'après le théorème d'Ampère $\left(\oint \vec{B} d\ell = \mu_0 \sum_i I_i \right)$, on en déduit que

le champ magnétique est effectivement nul à l'extérieur des conducteurs.

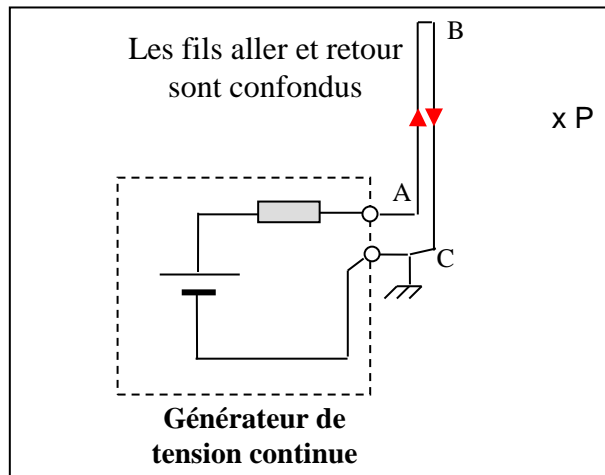


Figure 1 : Les fils aller et retour sont confondus, en conséquence il n'y a pas de champ magnétique magnétique créé : c'est le théorème d'Ampère

Question 1 : Comment réagit l'aiguille d'une boussole placée au point P de la figure 1 ?

Pour produire un champ magnétique statique, il suffit d'éloigner les conducteurs aller et retour comme le montre le schéma de la figure 2.

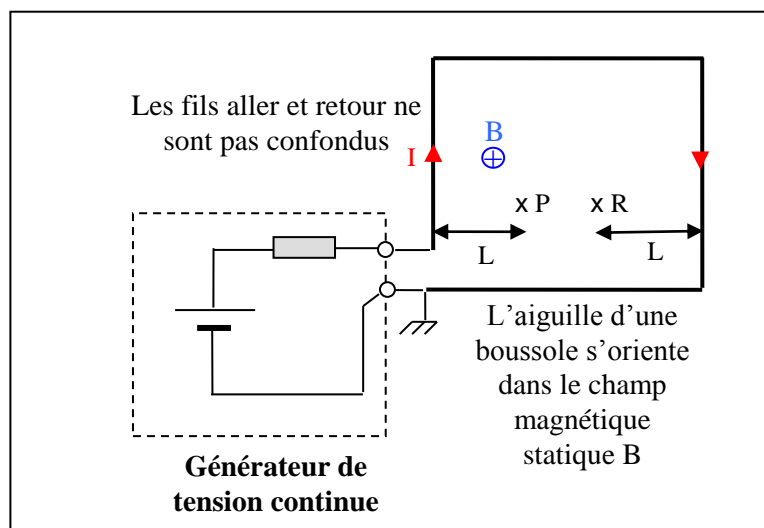
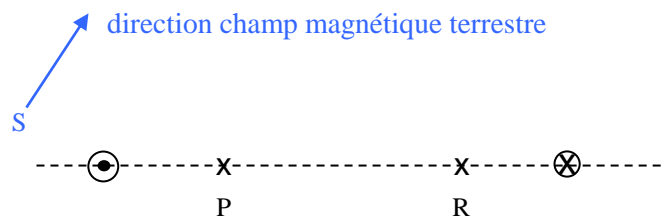


Figure 2 : Les conducteurs aller et retour ne sont pas confondus, il y a apparition d'un champ magnétique statique

Question 2 : Indiquer, dans la figure ci-dessous, la position de l'aiguille d'une boussole placée successivement en P et R ? Justifier votre réponse. On suppose que les champs créés en P et R sont très supérieurs au champ magnétique terrestre.



Le champ magnétique, ainsi créé, est **statique**. Cela signifie qu'il ne dépend pas de la variable temps et qu'il ne se propage pas. Pour créer un champ variable dans le temps, il faut remplacer le générateur de tension continue par un générateur de tension variable dans le temps comme indiqué en figure 3. Si un tel générateur est chargé par un câble coaxial, un champ magnétique ne peut pas être créé puisque les conducteurs aller et retour sont confondus.

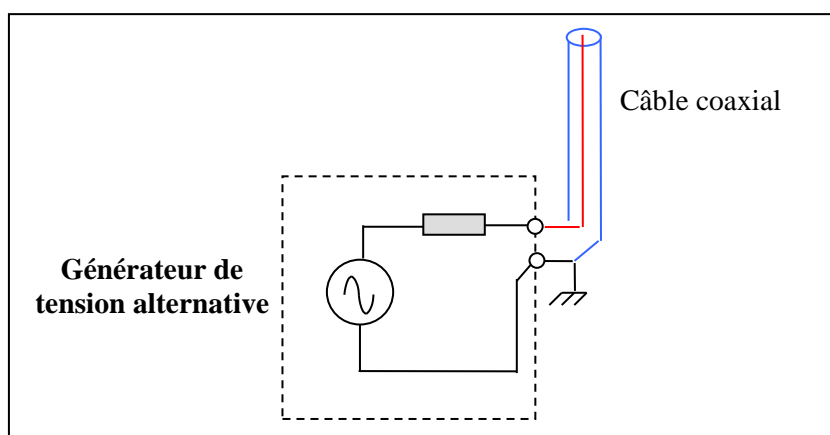


Figure 3 : Dans le câble coaxial, les conducteurs aller et retour sont confondus, en conséquence il n'y a pas de champ électromagnétique rayonné à l'extérieur du câble

Pour générer un rayonnement électromagnétique il suffit, comme dans le cas du schéma de la figure 2, d'éloigner le conducteur aller et retour comme le montre la figure 4. Le fil isolé est parcouru par un courant $I(t)$ variable dans le temps. Le courant crée un champ magnétique $\vec{B}(t)$ variable dans le temps, il ne s'agit plus d'un champ statique. Au champ magnétique $\vec{B}(t)$ (en Tesla) est associé un champ électrique $\vec{E}(t)$ (en Volt/mètre). On peut comprendre cela en se rappelant la loi de Faraday ($e = -\frac{d\phi}{dt}$) : une variation du flux, donc de \vec{B} , produit une f.e.m. donc un champ électrique \vec{E} .

Une **onde électromagnétique (OEM)** est constituée d'un **champ magnétique** et d'un **champ électrique**. Le fil, appelé **antenne filaire** dans ce cas particulier d'antenne, rayonne de l'énergie. L'énergie rayonnée est perdue pour la source. On peut modéliser la dissipation d'énergie par une résistance R_a appelée **résistance de rayonnement**.

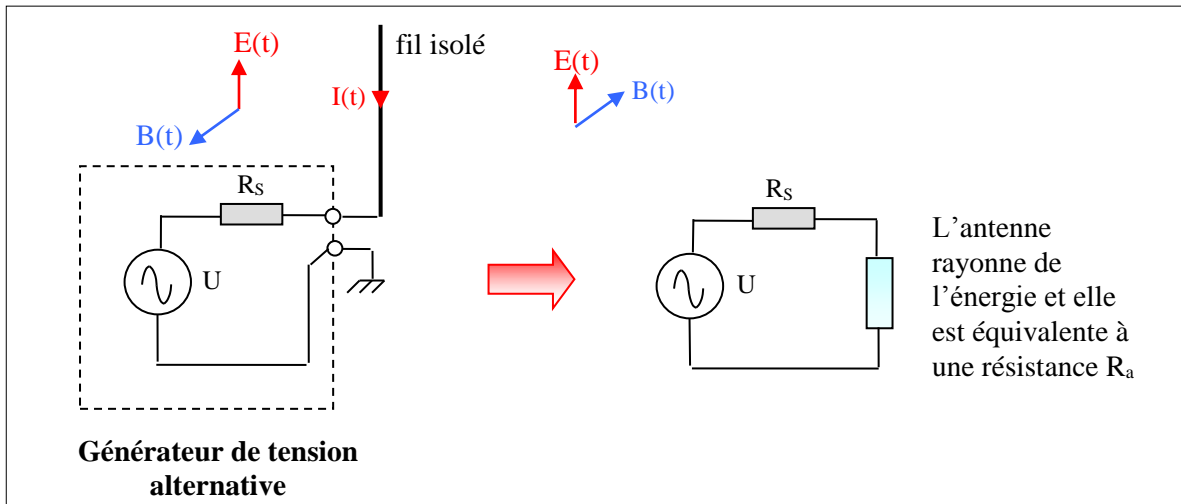
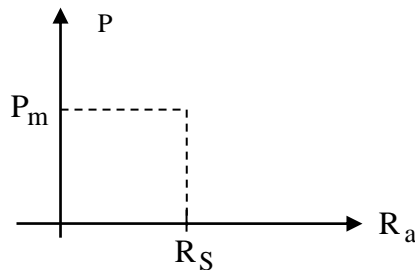


Figure 4 : Le fil isolé est traversé par un courant $I(t)$ variable dans le temps, il y a création d'un champ magnétique $B(t)$ variable dans le temps. Au champ magnétique $\vec{B}(t)$ est associé un champ électrique $\vec{E}(t)$. Le fil, appelé dans ce cas antenne, rayonne de l'énergie. C'est de l'énergie dissipée vers le milieu extérieur et l'antenne est donc équivalente à une résistance R_a . On a tout intérêt à avoir $R_a = R_S$ pour émettre le maximum d'énergie

Question 3 : Pourquoi une antenne rayonnante est-elle équivalente à une résistance R_a ? Quelle est, en fonction de U_{eff} et de R_a , la puissance P_m rayonnée quand $R_S = R_a$. Tracer l'allure de la puissance P en fonction de R_a .



L'énergie est émise dans tout l'espace mais elle n'est pas rayonnée d'une manière **isotrope** (propriétés physiques identiques dans toutes les directions). L'énergie est par exemple :

- nulle à la verticale de l'antenne,
- maximale dans une direction perpendiculaire à l'antenne.

On démontre, qu'à une distance r de l'antenne telle que $r > \frac{\lambda}{2\pi}$ où $\lambda = \frac{c}{f}$ avec $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ et f la fréquence émise, les champs rayonnés $\vec{E}(t)$ et $\vec{B}(t)$ sont orthogonaux à la direction de propagation.

- Pour $r > \frac{\lambda}{2\pi}$, on utilise le terme « **champ lointain** » et on dit que l'onde est de **TEM** (Transverse ElectroMagnétique).

- Pour $r < \frac{\lambda}{2\pi}$, on utilise le terme « **champ proche** » et l'onde n'est pas de type TEM.

Question 4 : A quelle distance de l'émetteur France Inter à 89,7 MHz en modulation de fréquence en région Bordelaise faut-il se trouver pour que l'OEM soit TEM, c'est-à-dire avec des champs magnétique et électrique perpendiculaires à la direction de propagation ?

Si à une distance D de l'antenne émettrice, on place un fil comme le montre la figure 5, on récupère de l'énergie dans la résistance d'entrée R_E du récepteur.

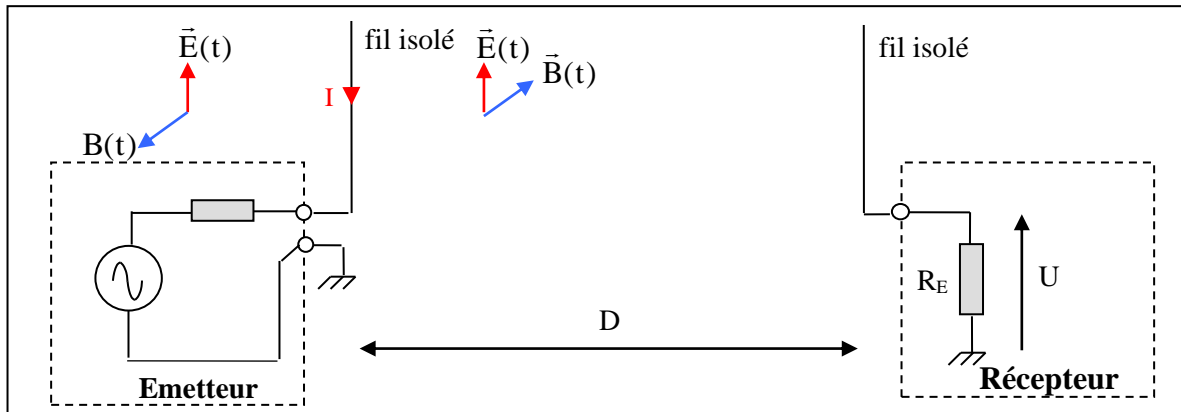


Figure 5 : Le récepteur reçoit une fraction de l'énergie émise par l'émetteur d'autant plus faible que la distance D est grande

Bien entendu, le récepteur ne récupère qu'une fraction de l'énergie émise par l'émetteur et cette fraction est d'autant plus grande que D est faible. **On peut démontrer que l'énergie récupérée varie en $1/D^2$.** Un point important à comprendre : l'onde électromagnétique se propage dans l'air et l'air sec n'absorbe pas le rayonnement électromagnétique. L'énergie est diffusée mais non absorbée. Si le milieu qui sépare l'émetteur du récepteur est le vide ou l'air sec, on parle de **propagation en espace libre**.

Question 5 : Si une antenne réceptrice, placée à 10 km d'une antenne émettrice, permet de récupérer une tension $U = 10\mu V$, quelle serait la tension récupérée par une antenne identique placée à 50 km de l'émetteur ?

I-2. Intérêt des guides d'ondes

Intéressons nous de plus près à un émetteur (radio, télévision). Une antenne est généralement distante du local technique où se trouve l'amplificateur de puissance. Il faut donc utiliser un support de transmission, un câble par exemple, pour transmettre l'énergie entre l'amplificateur et l'antenne comme le montre la figure 6.

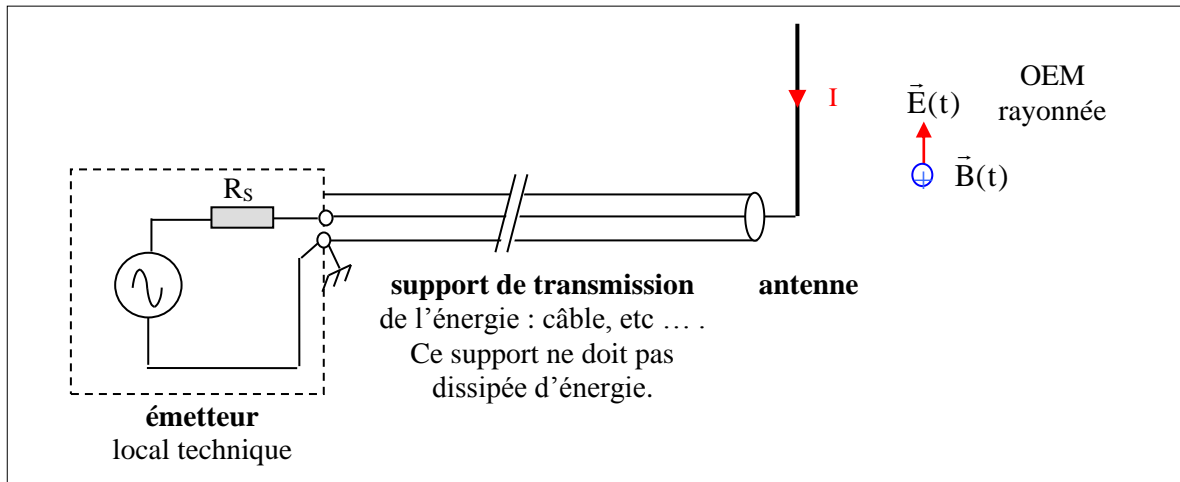


Figure 6 : L'antenne est reliée à l'amplificateur de puissance par un support de transmission, un câble par exemple

Quelles doivent être les caractéristiques du support de transmission ?

- il ne doit pas rayonner, sinon une partie de l'énergie est perdue,
- il doit présenter une impédance caractéristique égale à la résistance de source R_S et à la résistance R_a équivalente à l'antenne,
- il doit présenter le minimum de pertes pour transmettre le maximum de puissance à l'antenne. En fait, tout doit se passer comme si l'antenne se trouvait connectée juste en sortie de l'émetteur.

Les pertes dans les câbles coaxiaux sont, comme mentionné précédemment, de deux types :

- les **pertes « cuivre »**, dues à la **résistivité électrique** du matériau cuivre. Les pertes « cuivre » augmentent avec la fréquence : c'est l'**effet de peau**. En effet, aux hautes fréquences, le courant est rejeté à la périphérie des conducteurs, comme le montre la figure 7-a, ce qui diminue la section utile au passage du courant et donc augmente la résistance ($R = \rho \frac{L}{S}$). L'idéal serait d'avoir des supraconducteurs, c'est-à-dire des matériaux présentant une résistivité nulle.
- Les **pertes diélectriques** dues à la présence du diélectrique qui maintient le conducteur central au milieu du câble. Ces pertes sont de même nature que les pertes dans les condensateurs. L'origine physique est liée au fait que les dipôles donnant naissance à la polarisation ne vibrent pas en phase avec le champ électrique qui leur donne naissance.

Question 6 : Pourquoi peut-on remplacer, en hautes fréquences, les conducteurs pleins par des conducteurs creux ?

Un tronçon de câble de longueur dx (en m) est modélisé par le schéma électrique de la figure 7-b, où L (en Hm^{-1}) et C (en Fm^{-1}) sont respectivement l'inductance et la capacité linéique, r (en Ωm^{-1}) et g (en Sm^{-1}) sont respectivement la résistance (pertes « cuivre ») et la conductance (pertes diélectriques) linéique.

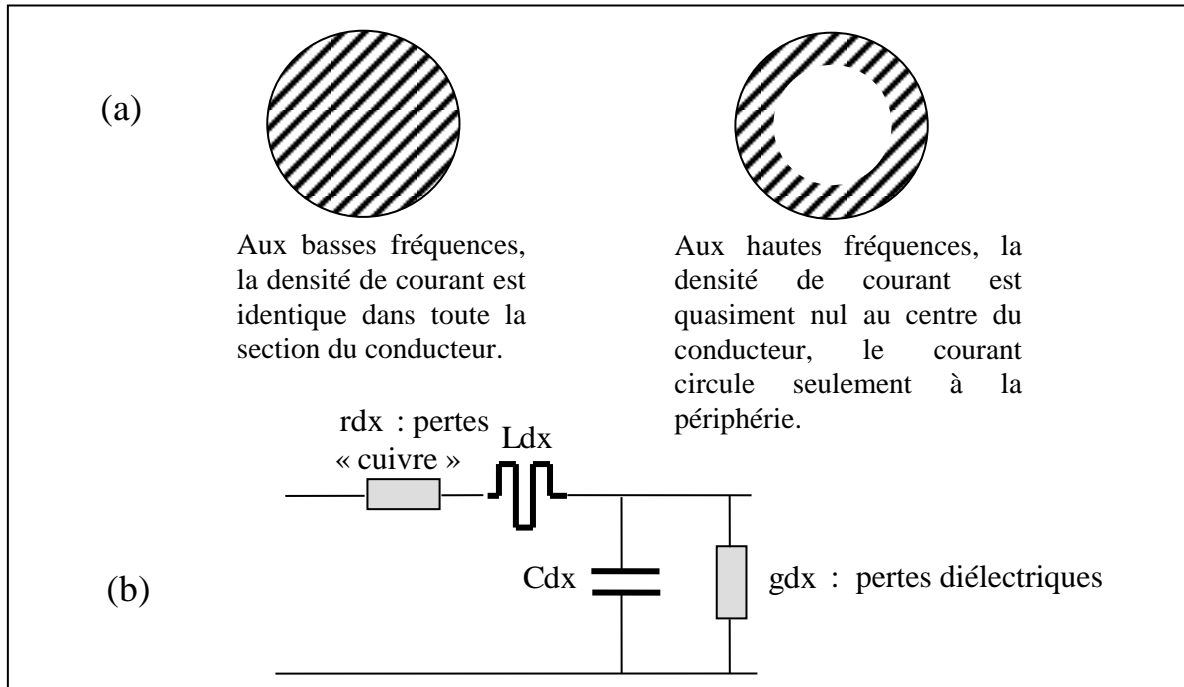


Figure 7 : (a)- Effet de peau, (b)- Modélisation électrique d'un tronçon de câble de longueur dx

Les pertes « cuivre » et diélectriques dissipent donc une partie de l'énergie et transforment de **l'énergie électromagnétique en chaleur**. Un câble chauffe en transportant de l'énergie. L'intérieur du guide d'ondes contient de l'air, il n'y a pas de matériau diélectrique donc pas de perte diélectrique comme dans un câble. De plus, l'air sec a quasiment les mêmes propriétés électriques que le vide : conductivité électrique nulle et permittivité relative égale à l'unité.

Question 7 : Quel est l'avantage d'un guide d'onde comparé à un câble coaxial ?

I-3. Champ électrique et longueur d'onde guidée dans un guide d'ondes

I-3-a. Distribution du champ électrique

Le guide d'ondes le plus simple est constitué de 2 plans conducteurs Σ et Σ' parallèles séparés d'une distance a comme le montre la figure 8.

Si on envoie, entre les plans conducteurs, une **OEM plane progressive** dont la direction de propagation est oblique par rapport à ces plans, elle se propage en se réfléchissant alternativement sur chacun d'eux.

Techniquement le guide est excité à une extrémité par une **source plus ou moins ponctuelle** (ex. une antenne), laquelle envoie une **onde plus ou moins sphérique** qui se réfléchit sur les 2 parois. Après une certaine distance, il s'installe dans le guide une onde résultante provenant de la **superposition** permanente en tout point M de **deux ondes planes** obliques.

Une **onde plane** est une onde dont les **plans de phase** sont des **plans** par opposition à une **onde sphérique** où les plans de phase sont des sphères. Un plan de phase est le lieu où tous les points vibrent en phase.

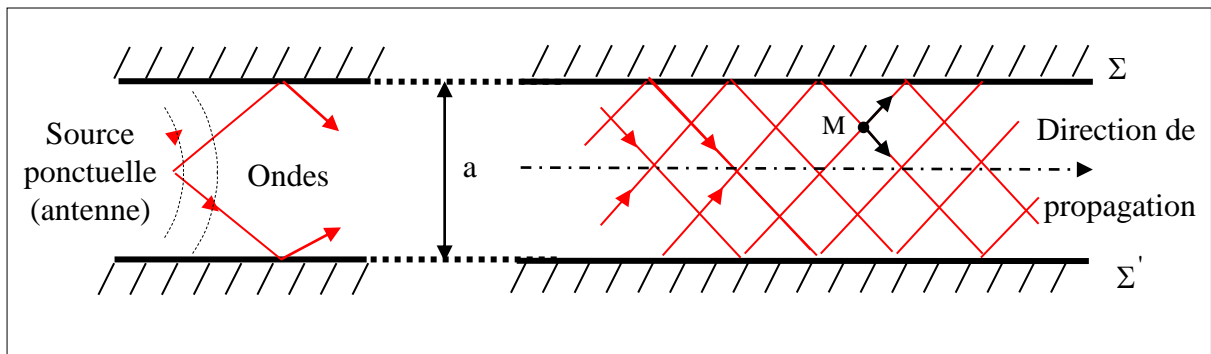


Figure 8 : Loin de la source, en un point M, l'OEM est la somme de deux ondes planes

Question 8 : Quelle forme géométrique devrait avoir une antenne pour émettre une onde sphérique ?

L'onde se propageant a une structure complexe, il est toutefois possible de comprendre quelques principes fondamentaux :

- Sur les parois métalliques, donc conductrices, le champ électrique E est nul, c'est la propriété d'un conducteur. Ceci impose **la distribution du champ électrique** de la figure 9-a par exemple. Ce mode de propagation est appelé mode TE_{01} . Mais d'autres modes de propagation sont également possibles, la figure 9-b montre par exemple la distribution du champ électrique pour le mode TE_{02} , etc. On parle ici d'onde TE (Transverse Electrique), en effet l'onde n'est plus TEM car le champ magnétique a maintenant deux composantes dont une dans la direction de propagation.
- A l'interface air/conducteur métallique, c'est la **composante tangentielle** du champ électrique qui doit être nulle. En dehors de cette interface, il peut prendre des valeurs différentes de zéro à condition qu'il soit perpendiculaire aux parois. C'est pour cette raison que l'on peut mettre deux parois Π et Π' perpendiculaires aux parois Σ et Σ' comme le montre la figure 10. L'ensemble constitue alors un guide d'ondes.

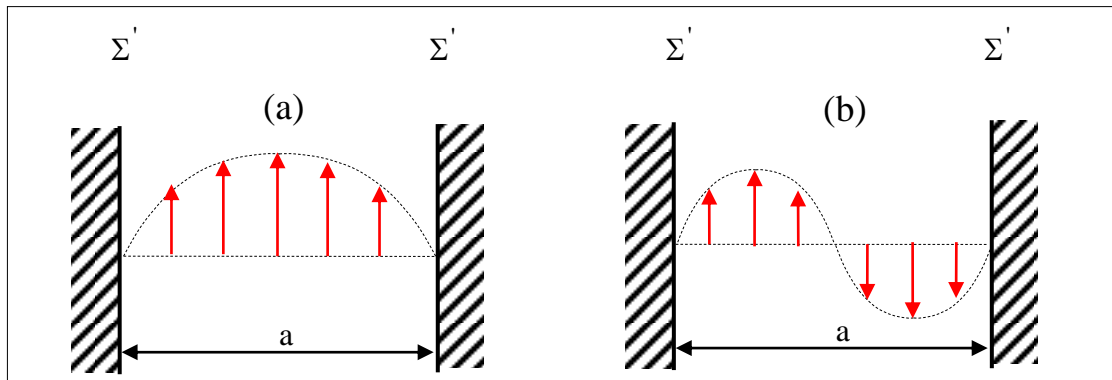


Figure 9 : Instantané du champ électrique dans une section droite du guide, (a)-mode TE_{01} , (b)- mode TE_{02}

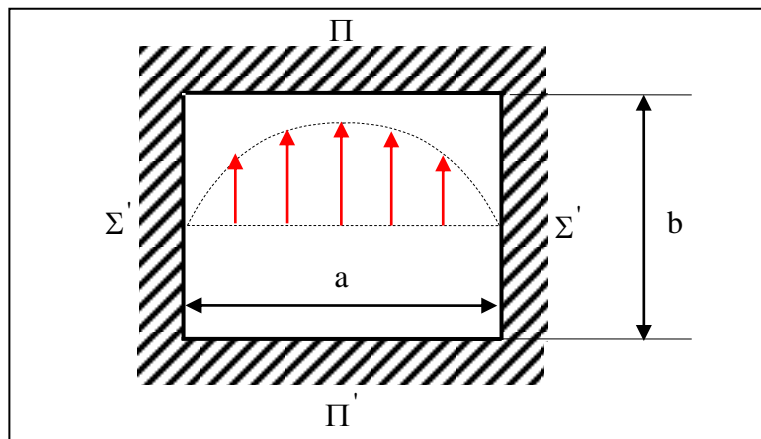


Figure 10 : Section droite d'un guide d'ondes rectangulaire de dimension $a \times b$ et instantané du champ électrique du mode TE_{01}

I-3-b. Longueur d'onde guidée

Dans un guide d'onde, on distingue :

- la **longueur d'onde libre** $\lambda = \frac{c}{f}$ que l'on calcule en **propagation libre (hors guide)**
- la **longueur d'onde guidée** λ_g différente de la précédente. *On rappelle que la longueur d'onde est la distance à parcourir pour retrouver la même valeur du champ électrique.*

La figure 11 montre, pour le mode TE_{01} , à un instant t donné, le champ électrique E au milieu du guide, dans le plan Γ parallèle aux plans Σ et Σ' , en fonction de la **direction de propagation**.

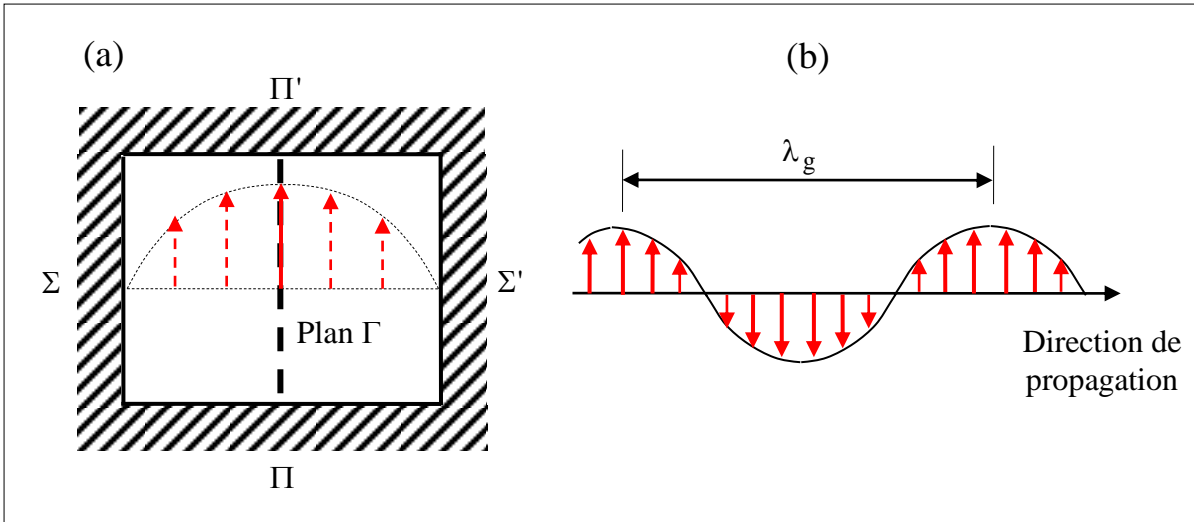


Figure 11 : (a)- Distribution du champ électrique d'une OEM progressive dans une section droite du guide à un instant t donné et (b)- Variation du champ au milieu du guide, dans le plan Γ , en fonction de la direction de propagation

On montre que la longueur d'onde guidée λ_g est reliée à la longueur d'onde libre λ par la relation :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_C^2} \quad (2)$$

avec $\lambda_C = 2a$. λ_C est appelée la **longueur d'onde de coupure**.

La longueur d'onde guidée est plus grande que la longueur d'onde libre.

En un point donné du guide, par exemple le point P dans la figure 12, le champ électrique varie en fonction du temps, la période $T = 1/f$ est le temps nécessaire pour que le champ E retrouve la même valeur.

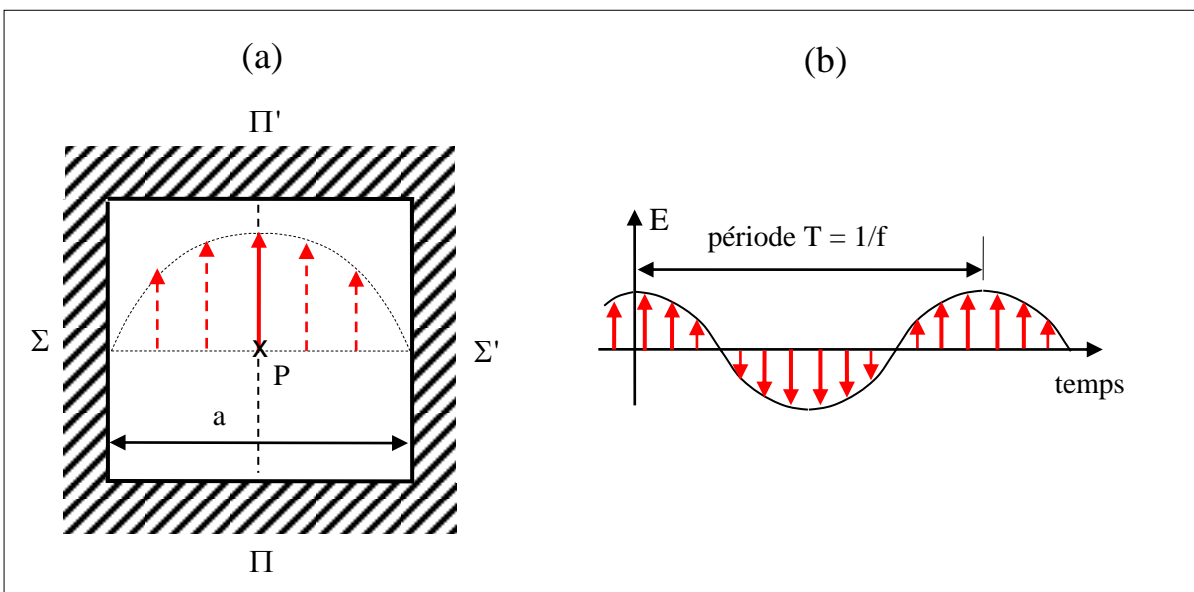


Figure 12 : (a)- Distribution du champ électrique dans une section droite du guide à un instant t et (b)- Variation dans le temps du champ électrique au point P du guide

On montre également (voir annexe I) que l'angle α de réflexion, en figure 13-a, est lié à la longueur d'onde libre par :

$$\cos \alpha = \frac{\lambda}{2a} \quad (3)$$

En pratique, **la fréquence f de l'onde est imposée par la source d'excitation**. La longueur d'onde λ est égale à : $\lambda = \frac{c}{f}$, l'angle α est donc une conséquence, il s'ajuste en fonction de f .

- Quand la fréquence f diminue à partir d'une valeur élevée, la longueur d'onde λ augmente, le cosinus également et l'angle α diminue (figure 13-b).
- Pour une certaine fréquence $f_c = \frac{c}{2a}$, appelée **fréquence de coupure** ($\alpha = 0$), l'OEM ne se propage plus (figure 13-c). Le guide d'onde se comporte donc comme un **filtre passe haut**.

Question 9 : Un guide d'onde ne peut pas transmettre des fréquences inférieures à une certaine fréquence, si $a = 22,86\text{mm}$ calculer sa fréquence de coupure f_c .

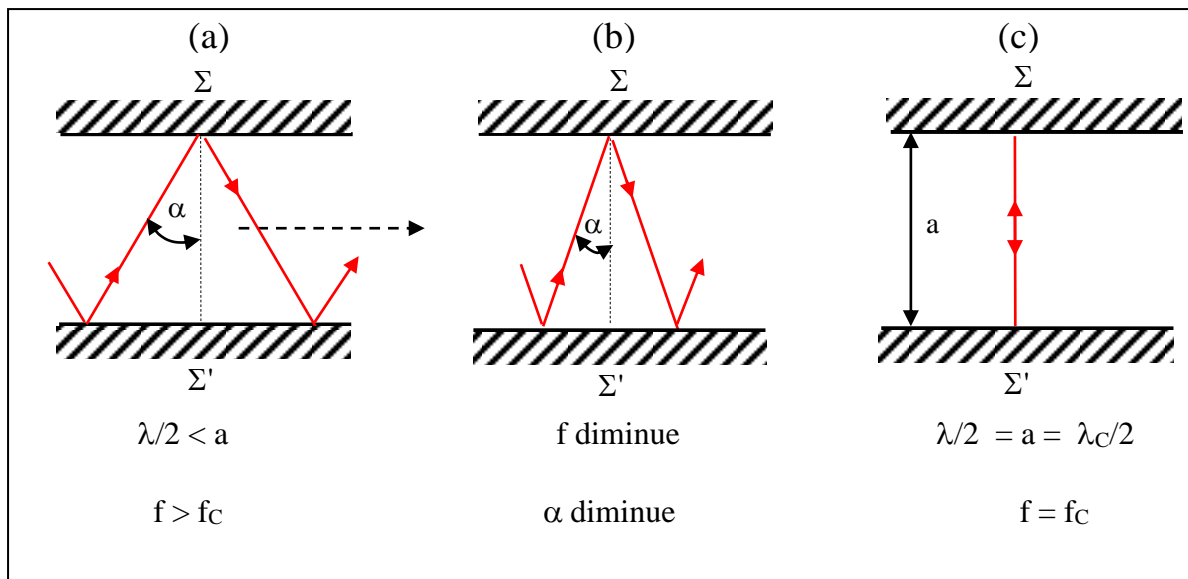


Figure 13 : Le guide d'ondes se comporte comme un filtre passe-haut et seules les fréquences supérieures à $f_c = c/2a$ peuvent se propager

Contrairement au câble coaxial, dans les guides d'ondes on ne parle plus de **tension** et de **courant** mais de **champs électriques et magnétiques**. Si x est la direction de propagation, l'équation régissant l'évolution du champ électrique dans le mode TE_{01} s'écrit :

$$\underline{E}(x,t) = (E' e^{j\beta x} + E'' e^{-j\beta x}) e^{j\omega t} \quad \text{avec } \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (4)$$

D'après le graphe de la figure 14, le champ électrique, dans le mode TE_{01} , a une seule composante suivant l'axe y mais cette composante dépend de z , autrement dit les valeurs de E' et E'' de l'équation (4) dépendent de z .

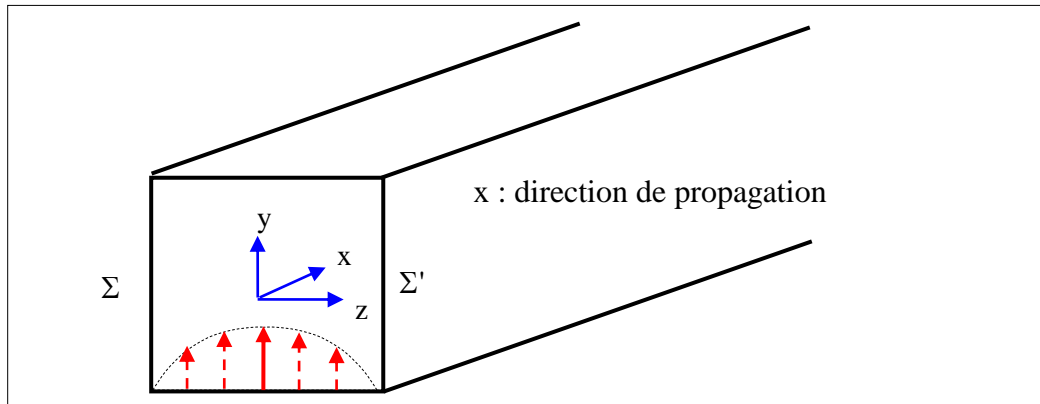


Figure 14 : Dans le mode TE_{01} le champ électrique est transverse à la direction de propagation x , il a une seule composante suivant l'axe des y , cette composante dépend de l'abscisse z .

Si un guide d'ondes n'a pas de perte diélectrique, il a par contre des pertes « cuivre » car des courants circulent dans les parois métalliques et comme ces parois présentent une résistivité non nulle, il y a des pertes Joule. Le guide s'échauffe donc.

Il faut savoir que les guides d'ondes ne sont pas uniquement utilisés qu'en propagation pour les télécommunications mais également dans de nombreuses applications industrielles comme par ex. le séchage de produits manufacturés ou agroalimentaires.

Dans ce cas, le guide d'ondes est terminé par un **applicateur** : un **cornet rayonnant** comme le montre la figure 15. Le rôle du cornet est d'assurer la transition entre le guide d'ondes et l'espace libre. L'énergie doit être transférée au milieu extérieur et non retournée vers la source. Le cornet réalise une adaptation d'impédance (coefficient de réflexion très faible).

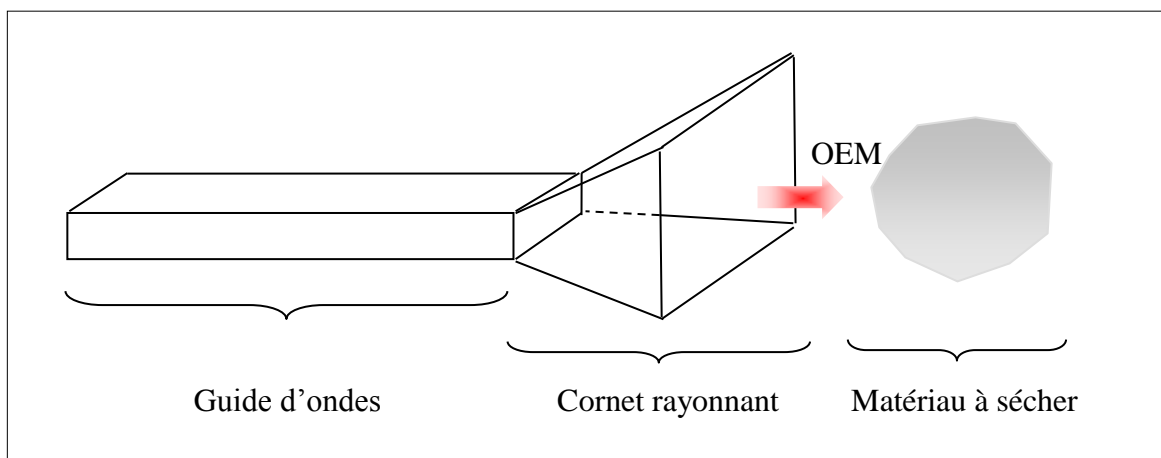


Figure 15 : Guide d'ondes terminée par un cornet rayonnant assurant la transition vers l'espace libre

II- Etude de quelques instruments de mesure

Le synoptique du banc de mesures hyperfréquences sur lequel vous ferez les expériences de TP est détaillé en figure 16. Il est constitué des sous ensembles suivants :

- Un oscillateur à diode dite « Gunn » (source classique d'OEM) et son alimentation
- Un isolateur à ferrite éliminant l'onde réfléchie susceptible de détruire la diode Gunn
- Un ondemètre à cavité pour mesurer la fréquence de l'OEM
- Une diode de détection et un millivoltmètre continu
- Un atténuateur variable 0-60dB
- Une ligne fendue pour mesurer la **longueur d'onde guidée** et le **ROS**
- Un coupleur latéral pour mesurer le **coefficient de réflexion**
- Un wattmètre
- Diverses charges : un court-circuit (plan métallique), une fente et un cornet rayonnant

NB : Pour information, les hyperfréquences, ou micro-ondes, se trouvent dans la bande 300MHz-300GHz et sont séparées en bandes. Le TP se fait en « bande X » (5-10GHz) au voisinage de 9,5GHz.

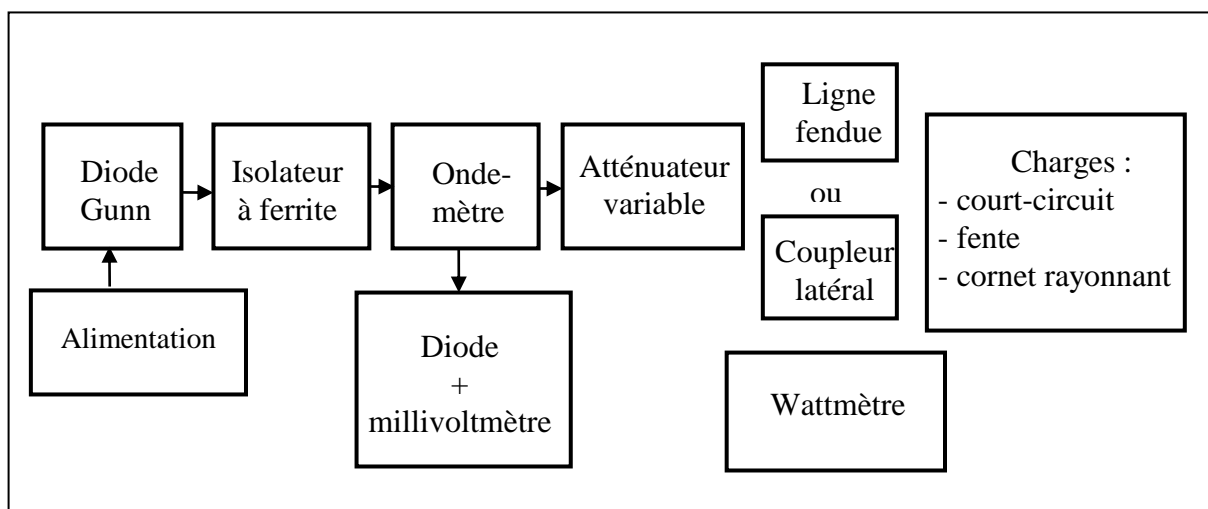


Figure 16 : Sous-ensembles du banc de mesure hyperfréquence de TP

II-1. Etude de l'ondemètre

L'ondemètre est couplé au guide d'ondes par un petit trou, la cavité de l'ondemètre est un cylindre creux dont la longueur L dépend de la position du piston amovible comme le schématise la figure 17. L'ondemètre est couplé à un tronçon de guide dans lequel une petite antenne prélève de l'énergie. L'antenne, la diode, le circuit R-C et le millivoltmètre continu constituent **un détecteur quadratique**. Pour une fréquence donnée, la tension affichée par le millivoltmètre passe par un maximum pour une longueur L donnée. On cherche à comprendre pourquoi.

L'ondemètre couplé au guide est **modélisé** par un tronçon de ligne, de longueur L variable, terminé par un court-circuit comme le montre la figure 18.

La dépendance en x , $\underline{V}(x)$, de la tension $\underline{V}(x, t)$ de l'équation (1) s'écrit :

$$\underline{V}(x) = V'e^{j\beta x} + V''e^{-j\beta x} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v} f \quad (5)$$

f est la fréquence de l'onde à mesurer et $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}}$ la vitesse de propagation, supposée connue, des ondes. L'équation (5) suppose une origine des abscisses en bout de ligne.

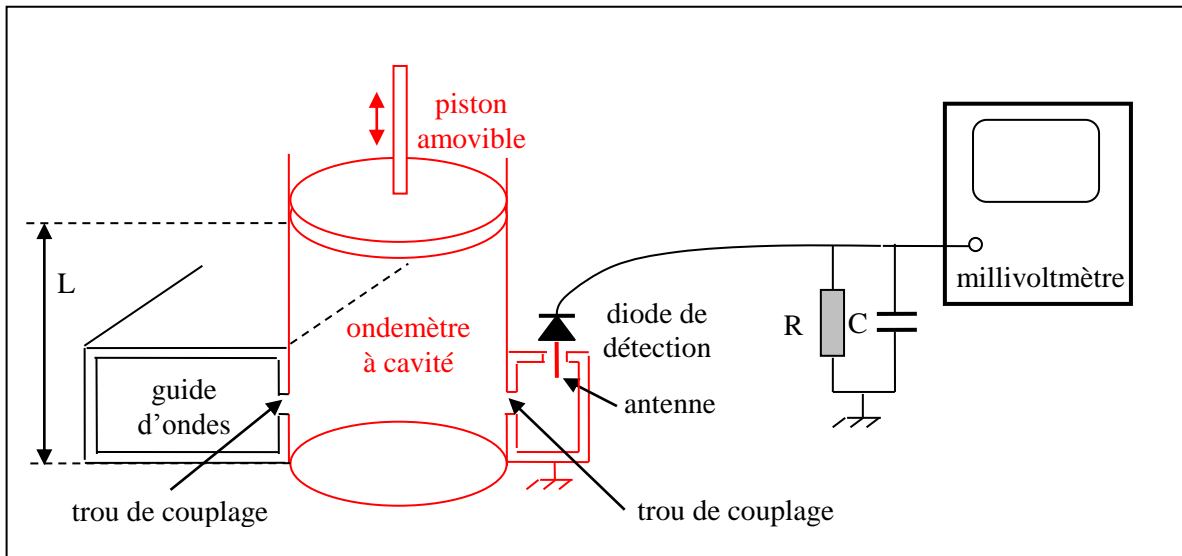


Figure 17 : La cavité de l'ondemètre est couplée au guide d'ondes, la détection est réalisée au moyen d'une antenne reliée à une diode de détection

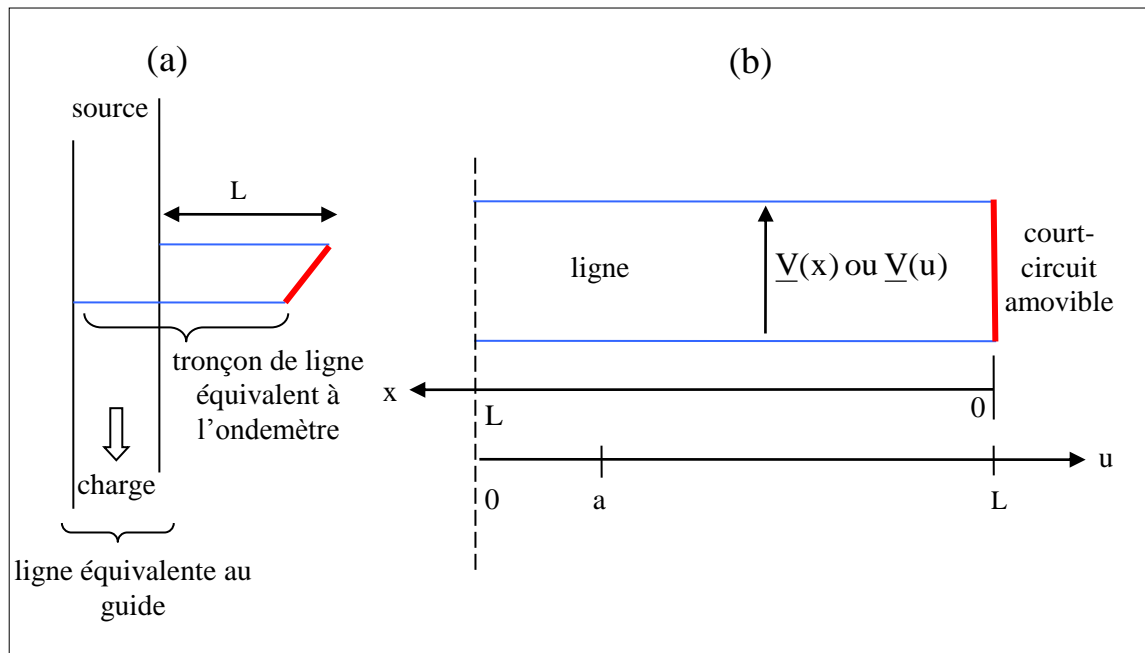
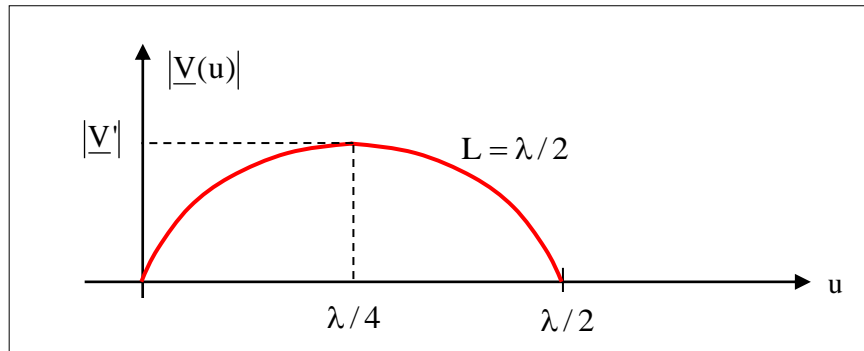


Figure 18 : (a) Modélisation du guide d'onde et de l'ondemètre par deux tronçons de ligne, (b) tronçon de ligne de l'ondemètre.

D'après les cours-TD de propagation, la tension $\underline{V}(x)$ de l'équation (5), se met sous la forme $\underline{V}(x) = 2jV' \sin(\beta x)$ quand la ligne équivalente à l'ondemètre est terminée par un **court-circuit**. Par un changement de variable $u = L - x$, la tension le long de la ligne s'écrit : $\underline{V}(u) = 2jV' \sin(\beta(L - u))$.

Question 10 : Compléter la figure ci-dessous en traçant l'allure de $|\underline{V}(u)|$ pour deux autres valeurs de L : $(\lambda/2) + \varepsilon$ et $(\lambda/2) - \varepsilon$. On suppose que $|V'|$ est une constante.



Question 11 : L'antenne de mesure reliée à la diode de détection et au circuit $R - C$ est à une distance $a = 5,263 \text{ mm}$ de l'origine, c'est-à-dire de $u = 0$. Pour quelle fréquence d'OEM obtient-on alors un maximum de tension ? La vitesse des OEM est égale à $2 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$.

La ligne équivalente à l'ondemètre ramène en parallèle sur la ligne équivalente au guide d'ondes une impédance Z_e égale à :

$$Z_e = Z_{(x=L)} = Z_0 \frac{Z_1 + jZ_0 \tan(\beta L)}{Z_0 + jZ_1 \tan(\beta L)} = jZ_0 \tan(\beta L) \quad (6)$$

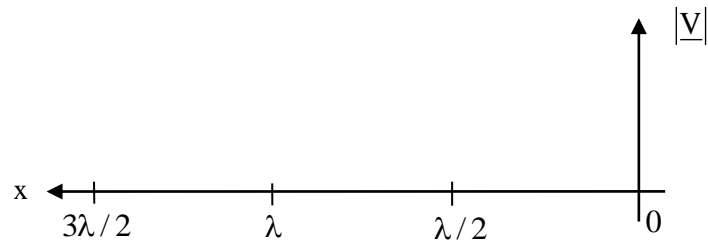
car l'impédance de charge est un court-circuit $Z_1 = 0$

Question 12 : Calculer la valeur de l'impédance ramenée quand $L = \frac{\lambda}{2}$.

Question 13 : Tracer l'allure à main levée du module de Z_e en fonction de L au voisinage de $\lambda/2$. En déduire pourquoi il faut désaccorder l'ondemètre, c'est à dire faire $L \neq \frac{\lambda}{2}$, pour disposer de l'énergie dans la charge. Que se passe-t-il si L prend la valeur particulière $\frac{\lambda}{4}$?

II-2. Mesure d'une longueur d'onde, relation entre coefficient de réflexion et ROS

Question 14 : A partir de l'expression de la tension le long d'une ligne (équation 5), tracer le module $|V(x)|$ de la tension en fonction de x quand la ligne est terminée par un court-circuit. En déduire une méthode de mesure de la longueur d'onde avec une ligne fendue dont le schéma est donné à la figure 19.



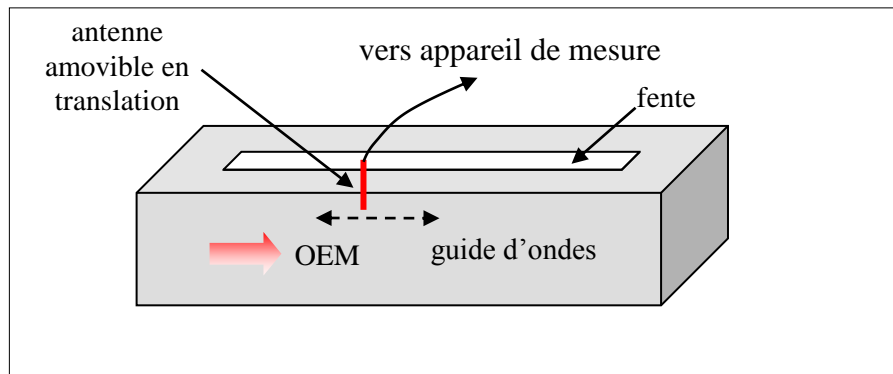


Figure 19 : Ligne fendue avec antenne amovible

Question 15 : Montrer, à partir de l'équation (5), que le ROS, rapport entre le maximum du module de la tension et le minimum du module de la tension, se met sous la forme :

$$\text{ROS} = \frac{|V'| + |V''|}{|V'| - |V''|}$$
 (consulter le cours-TD de propagation). En introduisant le coefficient de

réflexion $\rho = \frac{V''}{V'}$ de la charge en $x = 0$, on obtient la relation entre ROS et ρ :

$$\text{ROS} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

II-3. Etude d'un coupleur latéral

Pour mesurer le coefficient de réflexion d'une charge, on utilisera en TP un coupleur latéral constitué de deux guides d'ondes couplés comme le montre la figure 20. Le but d'un coupleur latéral est de séparer les **ondes incidente et réfléchie**.

On étudie ici une version simplifiée du coupleur dans lequel le couplage est effectué seulement par deux ouvertures **a** et **b** distantes de $\lambda/4$. On suppose que, par les ouvertures **a** et **b**, ne passe qu'une fraction k de l'amplitude de l'onde.

La constante k du coupleur, utilisé en TP, est égale à $1/\sqrt{10}$.

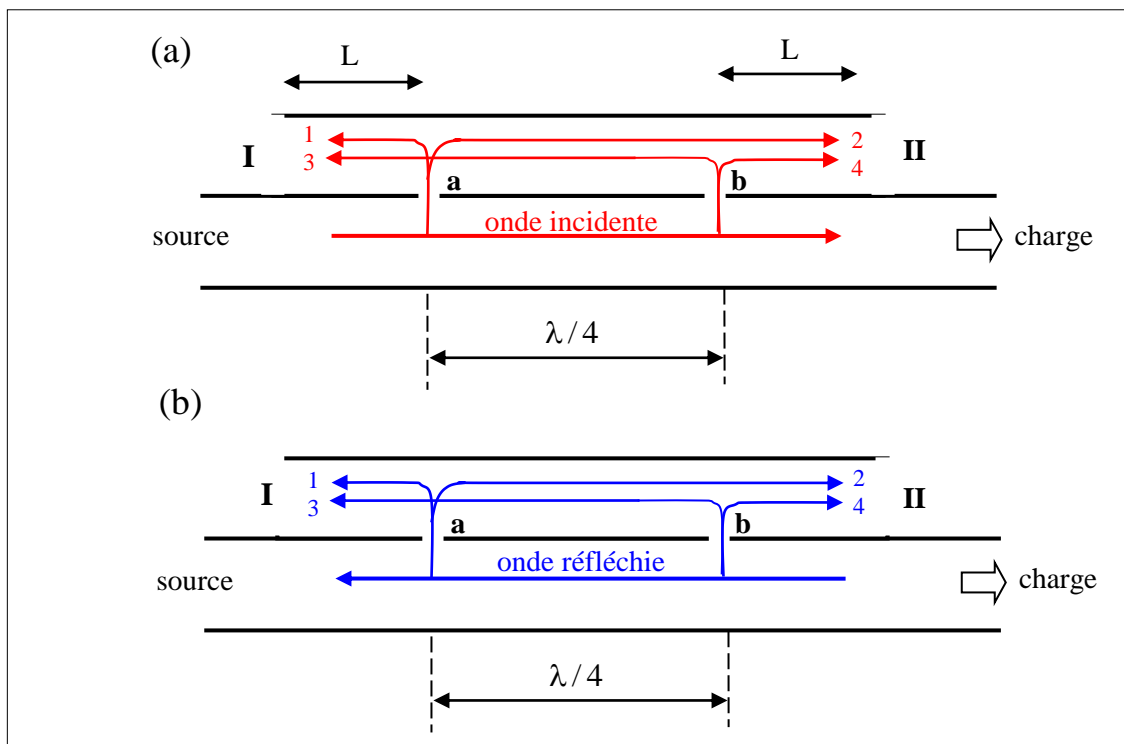


Figure 20 : (a)- Ondes incidente et (b)- réfléchie dans le coupleur latéral

L'onde incidente de la figure 20-a pénètre dans l'ouverture **a** pour donner naissance aux deux ondes notées 1 et 2 mais elle pénètre aussi dans l'ouverture **b** pour donner naissance aux deux ondes notées 3 et 4.

Question 16 : Soit $A \cos(\omega t)$, l'onde incidente au niveau de l'ouverture **a**.

- Ecrire l'onde incidente au niveau de l'ouverture **b**.
- Ecrire les expressions des ondes 1 et 3 et montrer que la somme $1+3$ est nulle en sortie I du coupleur.
- Ecrire les expressions des ondes 2 et 4 et montrer que la somme $2+4$ est différente de zéro en sortie II du coupleur.

Question 17 : Soit $B \cos(\omega t - \varphi)$ l'onde réfléchie au niveau de l'ouverture **b** (figure 20-b), la phase φ dépend de la longueur de la ligne et de l'impédance de la charge. Montrer alors que la somme des ondes 2 + 4 en sortie II est nulle alors que la somme 1 + 3 en sortie I est différente de zéro.

NB : On rappelle que $\cos(\omega t) + \cos(\omega t - \pi) = 0$

Question 17 : Quelle modification structurelle faut-il apporter au coupleur latéral pour que sa sortie I soit proportionnelle à l'onde réfléchie ?

A RETENIR : Il faut donc retenir que l'utilisation d'un guide d'ondes permet de réduire les pertes diélectriques (généralement présentes dans un câble coaxial) puisqu'il est formé de parois conductrices et d'air à l'intérieur (milieu de propagation). Un guide d'ondes est le support d'une onde électromagnétique caractérisée par la propagation d'un champ électrique (\vec{E}) et d'un champ magnétique (\vec{B}). Cette onde naît d'une source assimilable à une source quasi-ponctuelle (antenne) qui génère d'abord une onde sphérique devenant plane à longue distance dans le guide.

Dans un guide, une longueur d'onde λ_g se propage dépendante de la vitesse de l'onde dans le milieu et de la fréquence d'excitation. Elle est reliée à la longueur d'onde libre (hors guide) et la longueur d'onde de coupure (λ_c). Le guide d'onde se comporte comme un filtre passe haut.

Les guides d'ondes ne sont pas uniquement utilisés qu'en télécommunication mais également dans de nombreuses applications industrielles comme le séchage de produits manufacturés ou agroalimentaires. Dans ce cas, le guide d'ondes est terminé par un cornet rayonnant.

L'utilisation d'un guide d'ondes nécessite d'utiliser des moyens de mesure spécifique car, à la différence d'un câble coaxial, on ne mesure pas directement $V(x,t)$ et $I(x,t)$. On s'attache à mesurer des puissances (wattmètre) mais également des coefficients de réflexion en fonction de charges placées en bout de guide et de ROS. Le régime utilisé est le régime harmonique.

Les instruments classiquement utilisés sont:

- un ondemètre à cavité pour mesurer la fréquence de l'onde électromagnétique se propageant dans le guide,
- un coupleur latéral pour mesurer le coefficient de réflexion d'une charge,
- une ligne fendue pour mesurer la longueur d'onde guidée et le ROS.

III- Exercice d'application (extrait d'un partiel de S3)

On considère le montage expérimental décrit par la figure 1. Il est identique à celui utilisé en TP.

Q1- Dans un premier temps, on place un court-circuit à la place de la charge en bout de ligne fendue.

Q1-a) Quelle est la valeur de la puissance dissipée dans le court circuit ?

Q1-b) On relève la répartition de puissance le long de la ligne fendue. Le résultat est affiché sur la figure 2. On mesure $x_1 = 34,88$ mm et $x_2 = 54,76$ mm.

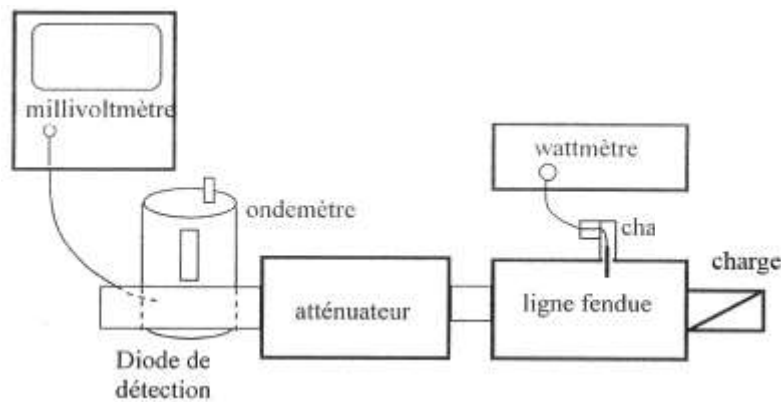


Figure 1

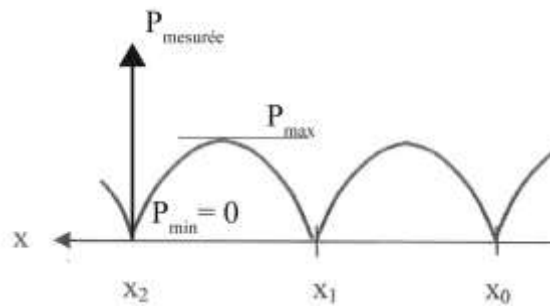


Figure 2

Q2- Quelle relation relie la distance $(x_2 - x_1)$ et la longueur d'onde guidée λ_g dans le guide ?

Q2-a) Calculer, à partir des mesures, la longueur d'onde guidée λ_g .

Q2-b) Sachant que la section du guide présente un grand côté $a = 22,86$ mm, en déduire :

- la longueur d'onde de coupure du guide λ_c
- la longueur d'onde libre λ ,
- la fréquence de l'onde.

Q3- On cherche à déterminer le coefficient de réflexion d'une charge inconnue Z_X . Pour ce faire, on utilise un coupleur latéral mesurant 1/10 de la puissance réfléchie comme le montre la figure 3. Voici les résultats des mesures effectuées :

- Avec $Z_\ell = 0$, le wattmètre affiche 5 dBm .
- Avec la charge inconnue $Z_\ell = Z_X$, le wattmètre affiche alors 2 dBm .

Q3-a) Déterminer le **module** du coefficient de réflexion Γ_X de la charge Z_X , expliquer la méthode utilisée

Q3-b) En déduire la valeur du ROS

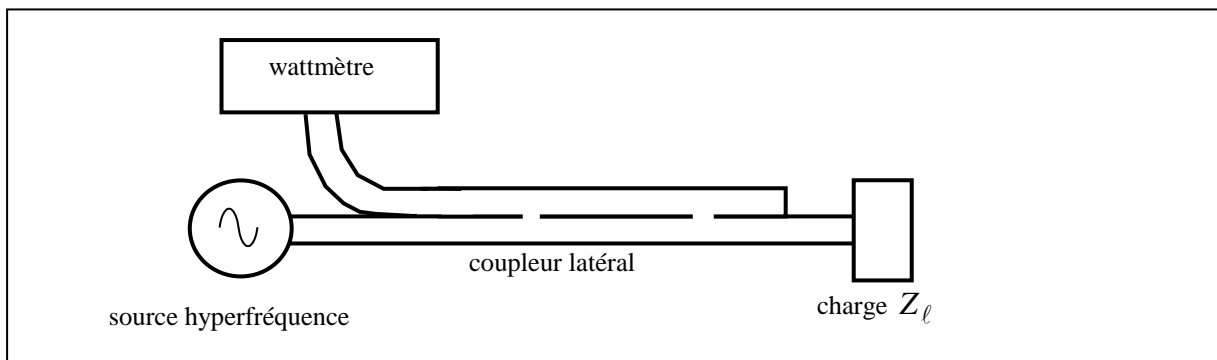


Figure 3 : *Mesure du coefficient de réflexion avec un coupleur latéral*

Annexe I : Démonstration de la relation $\cos \alpha = \frac{\lambda}{2a}$

Les plans de phase sont perpendiculaires à la direction de propagation. On rappelle qu'un plan de phase est le lieu des points vibrant en phase. Compte tenu des parois métalliques le champ est nul en A et B, en conséquence la distance $CB = \frac{\lambda}{2}$.

Relations trigonométriques dans le triangle ABC :

$$\sin(\varphi) = \frac{CB}{AB} = \frac{\lambda/2}{a}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi \Rightarrow \cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin(\varphi)$$

$$\text{d'où la relation : } \cos(\alpha) = \frac{\lambda}{2a}$$

