

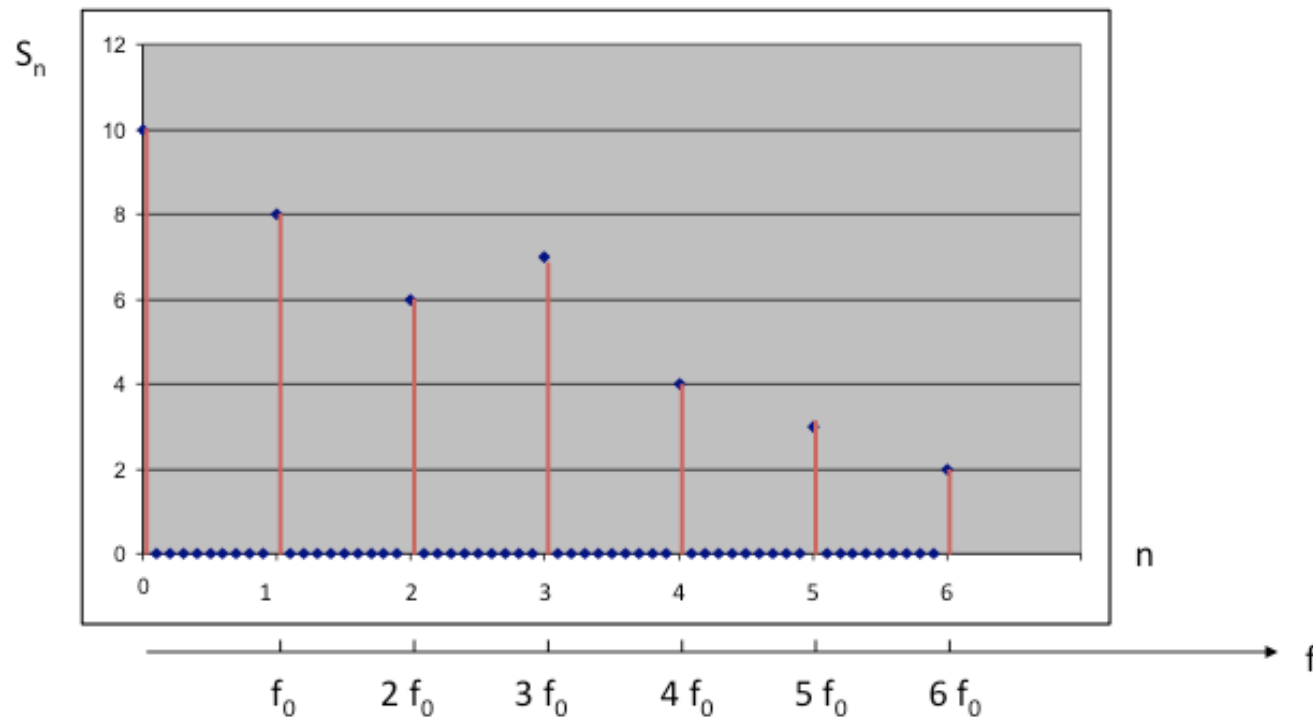
FFT et applications

On peut mesurer à l'analyseur de spectre une représentation en fréquence mais on peut également la calculer à partir d'échantillons du signal...

Rappels sur les transformées de Fourier

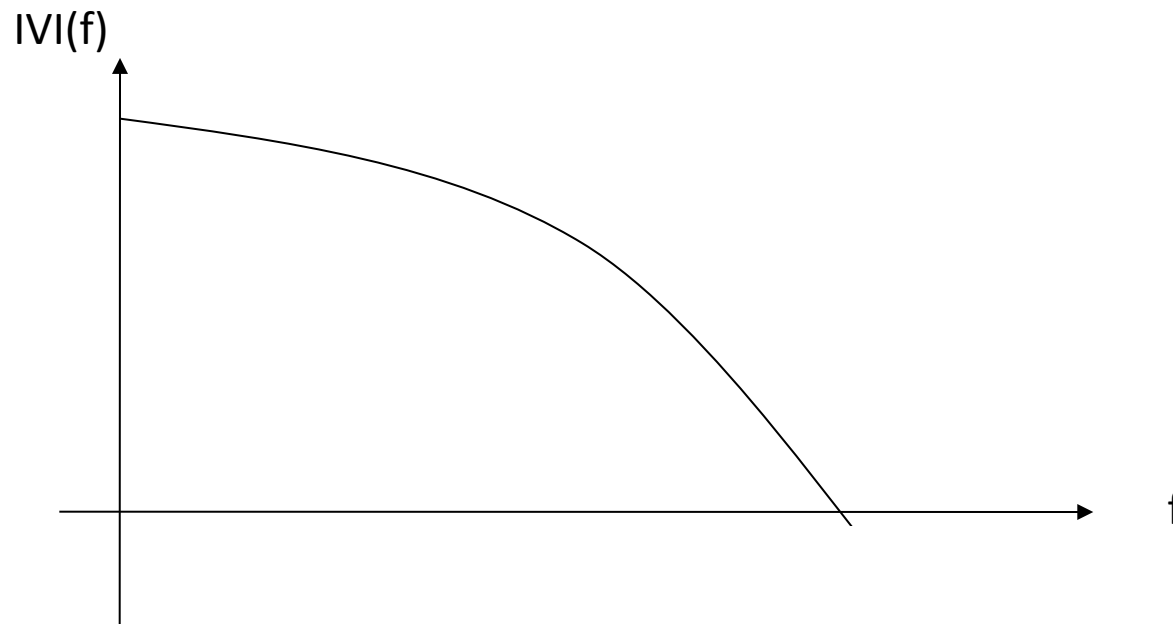
A retenir (1/3)

- Signal périodique (période $T_0 = 1/f_0$) :
 - On utilise les séries de Fourier
 - Spectre du signal est une succession de raies ($0, f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$)



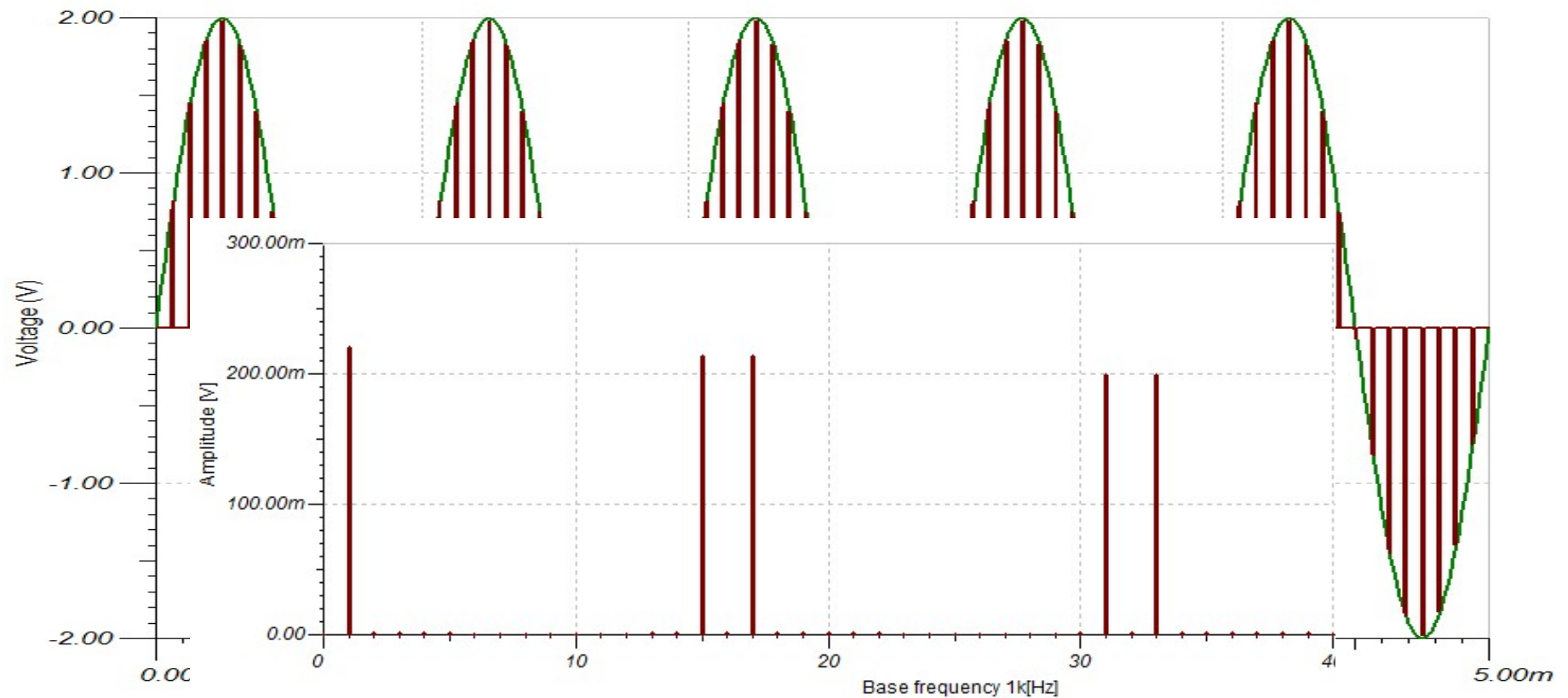
A retenir (2/3)

- Signal continu :
 - On utilise la transformée de Fourier
 - Spectre du signal est une fonction continue dont le module tend vers 0 pour les fréquences élevées



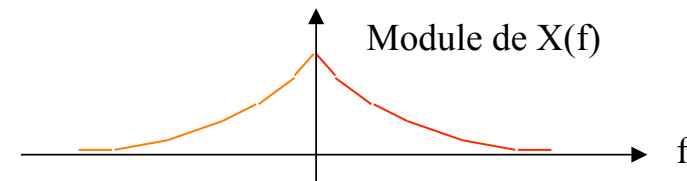
A retenir (3/3)

1. Signal échantillonné dans le domaine tempore : Produit du signal de départ par un peigne d'impulsion



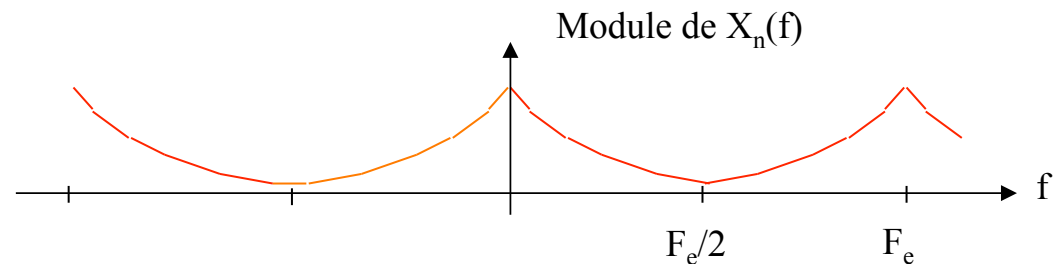
1- $X(f)$ transformée de Fourier d'une fonction $x(t)$ continue dans le temps

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$



Que devient cette transformée de Fourier pour un signal échantillonné ?

$$X_n(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)e^{-j2\pi fkT_e}$$



NB : $X_n(f)$ est devenue une fonction périodique de la fréquence. La période est égale à F_e : la fréquence d'échantillonnage.

Pour les transformées de Fourier numériques on ne s'intéresse qu'à l'intervalle $0 - F_e$

Calcul numérique d'une TF

1. On part d'un signal échantillonné

Donc on ne fera le calcul que sur l'intervalle de fréquence $0, F_e$

2. Le nombre d'échantillon est fini (k varie de 0 à $(N-1) \times T_e$ où N est le nombre d'échantillons

On parle de fenêtrage temporel

3. De la même manière on ne peut pas calculer la TF pour une infinité de valeurs de f . On choisit de calculer la TF pour le même nombre de valeurs de f que d'échantillons dans le temps

On parle de transformée de Fourier Discrète

3- $Z_n(f)$ transformée de Fourier discrète d'une fonction $x(t)$ échantillonnée avec une période T_e

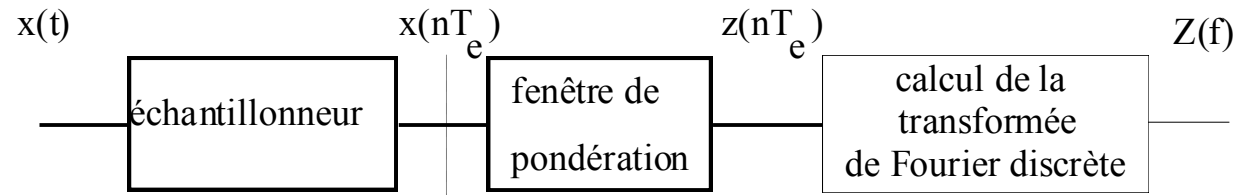
On ne peut pas avec un ordinateur calculer une somme infinie !
En pratique on ne dispose que d'un nombre fini d'échantillons N

$$Z(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

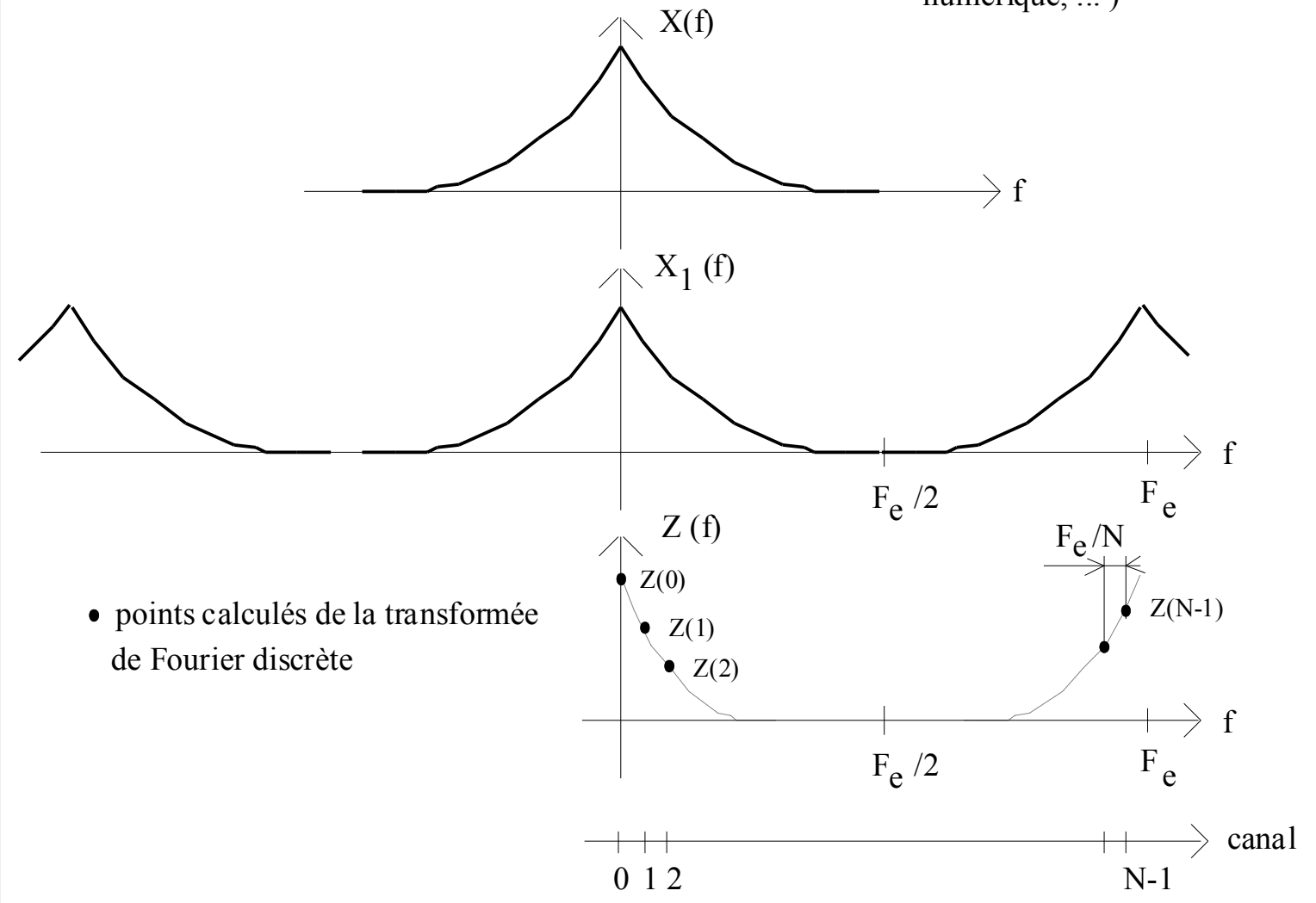
De la même façon, en fréquence on ne calcule pas $Z(f)$ pour toutes les fréquences mais uniquement en un nombre fini de points et en général on choisit le même nombre d'échantillons en fréquence que dans le temps : N (on divise l'intervalle $0 - f_e$ en N morceaux)

$$Z_n = Z\left(n \frac{f_e}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

On calcule donc $Z(f)$ pour les fréquences $0, 1/Nf_e, 2/Nf_e, \dots, k/Nf_e, \dots, (N-1)/Nf_e$



← calculateur (ordinateur, oscilloscope numérique, ...)



• points calculés de la transformée de Fourier discrète

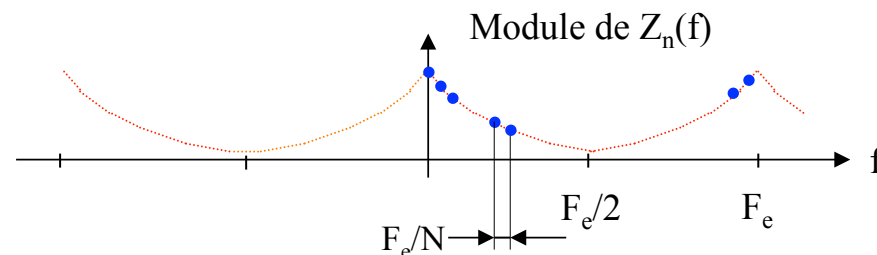
Quand ça se complique ...c'est le moment de s'accrocher ...

1- La somme sur l'indice k dans $X_n(f) = \sum_k x(kT_e)e^{-j2\pi f k T_e}$ ne peut être infinie

2- Un ordinateur ne peut pas calculer $X_n(f) \forall$ la fréquence f

Les échantillons $x(kT_e)$ sont multipliés par les échantillons $y(kT_e)$ d'une fenêtre de pondération, avec $y(kT_e)=0$ pour $k \neq 0, 1, 2, \dots, N-1$, soit $z(kT_e)=x(kT_e)y(kT_e)$

$Z_n(f)$, transformée de Fourier numérique des $z(kT_e)$, est encore périodique de période F_e . On découpe alors l'intervalle $[0, F_e]$ en N intervalles égaux à F_e/N et on ne calcule $Z_n(f)$ que pour les fréquences $f=nF_e/N$ avec $n=0, 1, 2, \dots, N-1$



• points calculés


Les $Z(nF_e/N)$ sont les composantes de la transformée de Fourier discrète. Pour simplifier l'écriture, les échantillons $z(kT_e)$ et les composantes $Z(nF_e/N)$ sont écrits simplement $z(k)$ et $Z(n)$. En conclusion, la transformée de Fourier discrète s'écrit :

$$Z(n) = \sum_{k=0}^{k=N-1} z(k)e^{-j2\pi nk/N}$$

... évidemment il y a un prix à payer ... les $Z(n)$ sont en général différents des $X(n)$... puisque ...

$$Z_n(f) = X_n(f) \otimes Y_n(f)$$

Résultat bien connu des mathématiques : multiplication dans le temps
 \Rightarrow convolution dans le domaine des fréquences. Le produit de convolution des transformées de Fourier numérique s'écrit :



A cartoon illustration of a wizard with a long white beard, wearing a purple robe and a pointed purple hat with a crescent moon and a star. He is sitting on a small wooden stool and looking through a telescope. The telescope is mounted on a tripod and is pointed towards the upper right. There are three stars in the sky above the telescope.

$$Z_n(f) = T_e \int_{-F_e/2}^{F_e/2} X_n(u) Y_n(f - u) du$$

Transformée de Fourier Rapide Fast Fourier Transform : FFT

Pourquoi FFT (Fast Fourier Transform) ?

D'après la relation : $Z(n) = \sum_{k=0}^{k=N-1} z(k)e^{-j2\pi nk/N}$, il faut réaliser N^2

multiplications complexes et $N(N-1)$ additions complexes pour obtenir les N composantes $Z(n)$. Les multiplications complexes ont une durée d'exécution bien supérieure à celle des additions complexes. Si N est quelconque, on utilise un algorithme de DFT (*Direct Fourier Transform*) pour calculer les $Z(n)$.

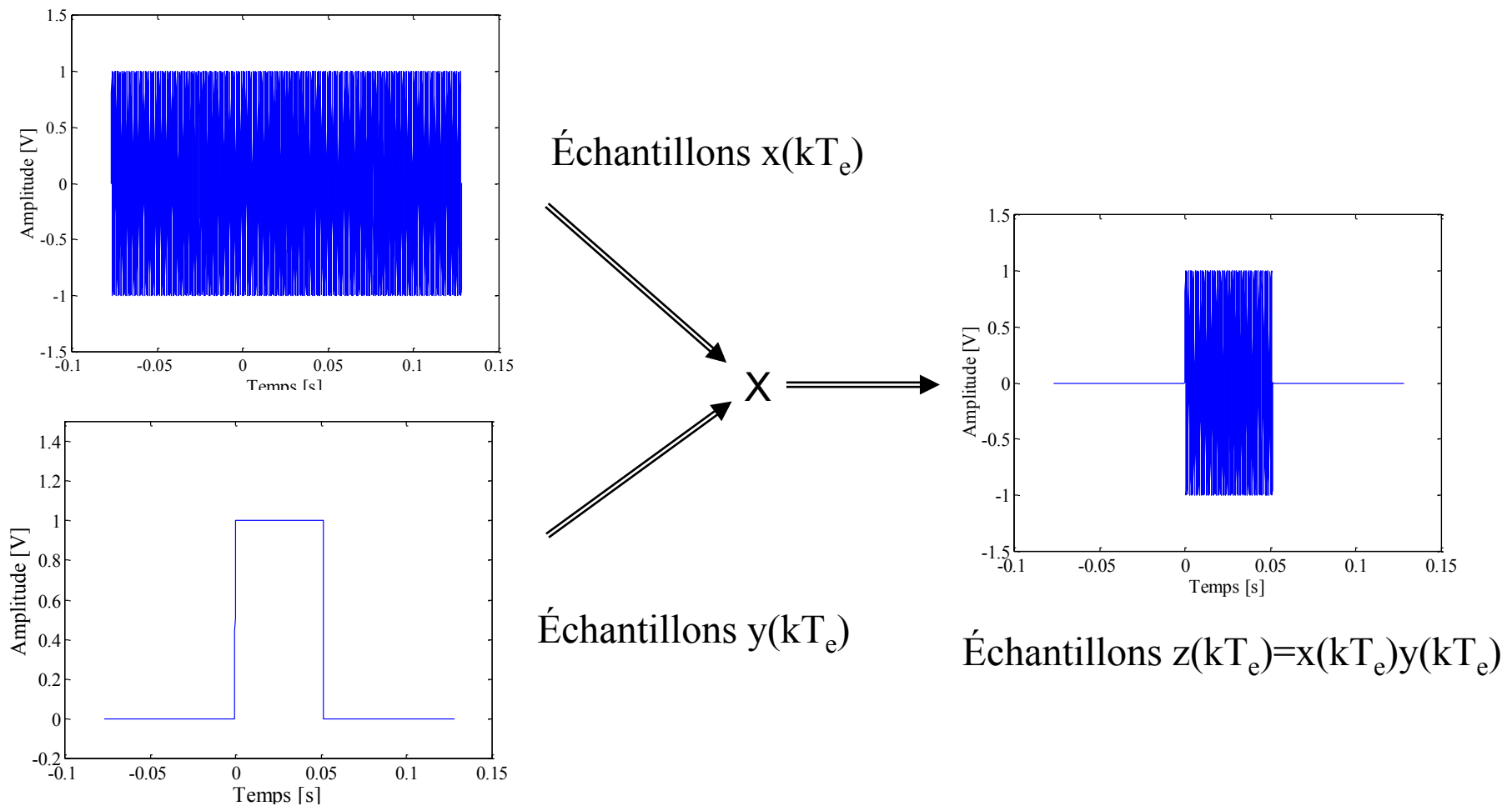
En 1965, J. W. Cooley et J. W. Tukey ont montré que, si N était une puissance de deux, le nombre de multiplications complexes pouvait être ramené à $(N/2)\log_2 N$. Si $N=2^n$, alors on peut utiliser un algorithme de FFT.

Nbre de points	Nbre de multiplications complexes en DFT	Nbre de multiplications complexes en FFT
1024	1 048 576	5120
4096	16 777 216	24 576

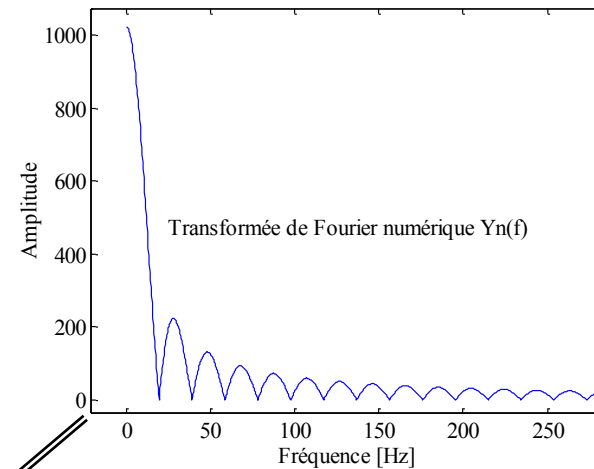
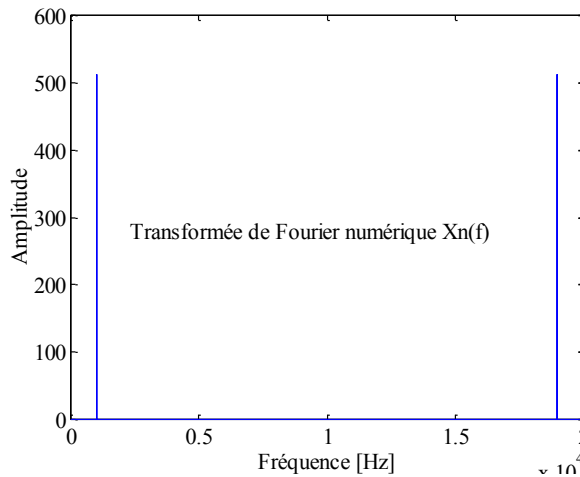
Comparaison du nombre de multiplications complexes en DFT et FFT

pas de panique ... voyons ça par l'exemple ...

Exemple n°1 : FFT d'un signal sinusoidal de fréquence $F=1015.625\text{Hz}$ et échantillonné à la fréquence $F_e=20\text{kHz}$. Les échantillons $x(kT_e)$ sont tronqués par les échantillons $y(kT_e)$ d'une fenêtre rectangulaire de 1024 points.



pas de panique ...résultat du calcul de la FFT ...

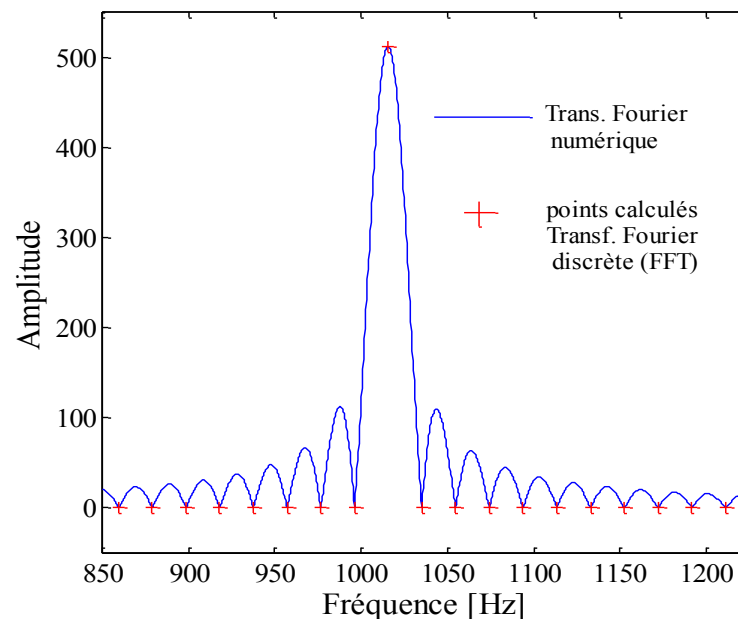


$$Z_n(f) = X_n(f) \otimes Y_n(f)$$

Convolver : c'est 'accrocher' le motif de $Y_n(f)$ autour de $X_n(f)$

On observe une seule raie à la fréquence de 1015.625Hz (canal 52=1024*1015.625/20000)

Pourquoi ? Parce que la fréquence F est un multiple de F_e/N et que la transformée de Fourier numérique $Y_n(f)$ est nulle pour les multiples de F_e/N .



Transformée de Fourier numérique et discrète des $z(kT_e)$

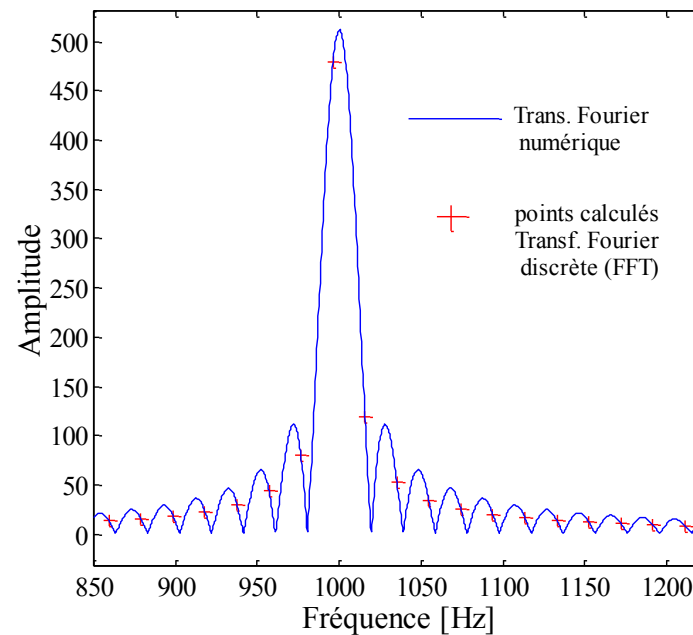
On croit avoir compris ... et ...

Exemple n°2 : FFT d'un signal sinusoïdal de fréquence $F=1000\text{Hz}$ et échantillonné à la fréquence $F_e=20\text{kHz}$. Les échantillons $x(kT_e)$ sont tronqués par les échantillons $y(kT_e)$ d'une fenêtre rectangulaire de 1024 points.

On observe une raie principale et d'autres raies ...

Pourquoi ? Parce que la fréquence F n'est pas un multiple de F_e/N , il y a apparition de fuites spectrales dues aux lobes secondaires de la fenêtre, ...

Que faire ???

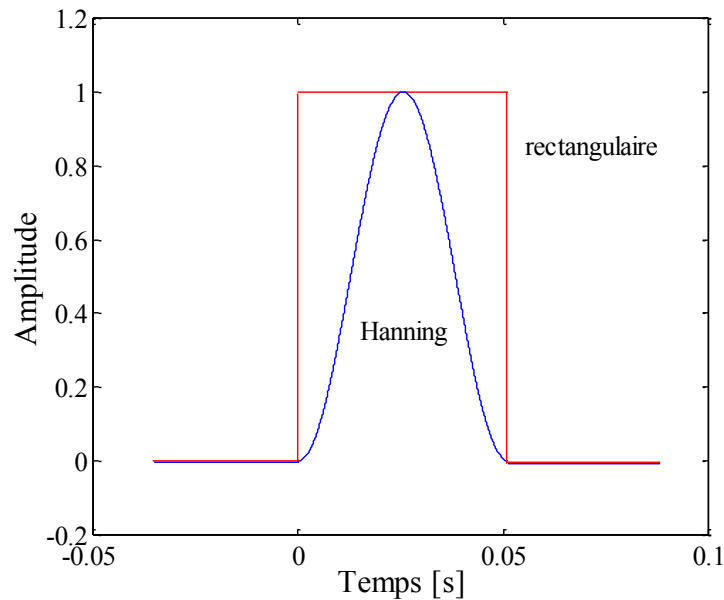


Transformée de Fourier numérique et discrète des $z(kT_e)$

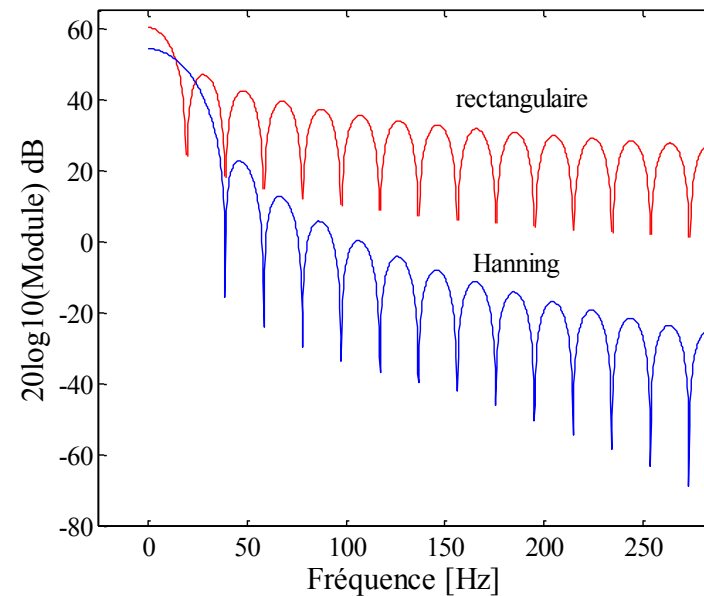
$F \neq K(F_e/N)$ avec K entier \Rightarrow fuites spectrales



Pour 'tuer' les fuites spectrales, il faut chercher des fenêtres avec des lobes secondaires de très faibles amplitudes ... , pourquoi n'y avais-je pas pensé plus tôt ??? C'est ainsi que l'on construit les fenêtres de Hanning, Hamming, ...



Échantillons $y(kT_e)$ des fenêtres rectangulaire et Hanning



Transformées de Fourier numériques $Y_n(f)$ des fenêtres rectangulaires et Hanning



Y a un truc la dedans ... alors pourquoi des fenêtres rectangulaires ??? ... et oui il y a un prix à payer ...

Les lobes secondaires de la fenêtre de Hanning ont des amplitudes beaucoup plus faibles que celles de la fenêtre rectangulaire mais la largeur du lobe principal est deux fois plus grande (retourner à la diapositive précédente pour le vérifier)

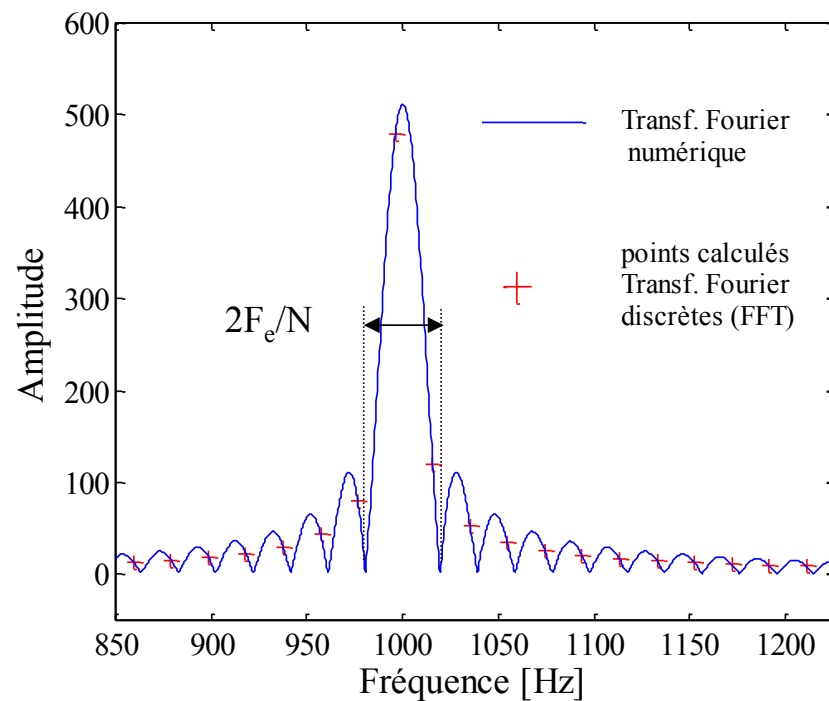
Une fenêtre est donc caractérisée par :

- **la largeur du lobe principal** : la largeur fixe la résolution de l'analyse, c-à-d l'aptitude à séparer deux fréquences proches
- **l'amplitude des lobes secondaires** : l'amplitude fixe la dynamique, c-à-d l'aptitude à discerner deux composantes de fréquences relativement éloignées mais d'amplitudes très différentes

vérifions cela sur un exemple ...

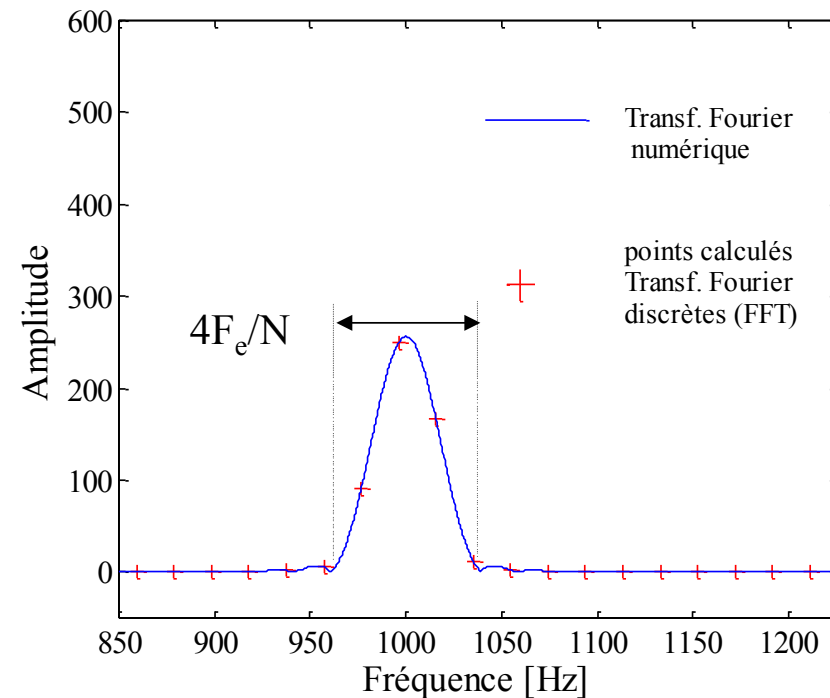
Exemple : FFT d'un signal sinusoïdal de fréquence $F=1000\text{Hz}$ et échantillonné à la fréquence $F_e=20\text{kHz}$. Les échantillons $x(kT_e)$ sont tronqués successivement par les échantillons $y(kT_e)$ des fenêtres rectangulaire et de Hanning de 1024 points.

Fenêtre rectangulaire



Transformée de Fourier numérique
et discrète des $z(kT_e)$

Fenêtre de Hanning



Transformée de Fourier numérique
et discrète des $z(kT_e)$

Et pourquoi toutes ces fenêtres, Hamming, Hanning, Blackman, ...

*réponse : tout dépend de la dynamique recherchée, voyons cela sur un exemple ...
et finalement si vous vous mettiez au travail*

Question : Quelle est la fenêtre la mieux adaptée entre Hanning et Hamming pour faire apparaître les deux fréquences F_1 et F_2 du signal échantillonné $x(kT_e)$ suivant :

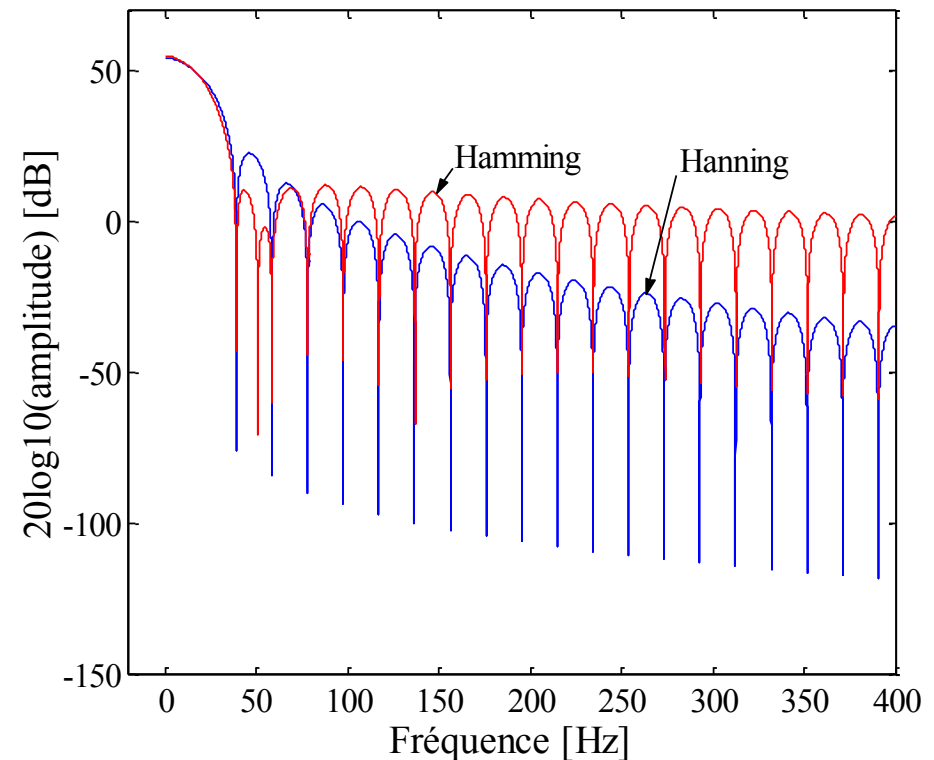
$$x(kT_e) = A_1 \sin(2\pi F_1 kT_e) + A_2 \sin(2\pi F_2 kT_e)$$

$F_e = 20\text{kHz}$, $F_1 = 1025\text{Hz}$, $F_2 = 1250\text{Hz}$, $A_2/A_1 = 10^{-3}$, N^{bre} de points de calcul de la FFT : $N = 1024$

Pour vous aider dans votre choix, les transformées de Fourier numériques des fenêtres de Hanning et de Hamming sont données à droite. Elles sont calculées pour une fréquence d'échantillonnage $F_e = 20\text{kHz}$

[Choix 1 : Hamming](#)

[Choix 2 : Hanning](#)

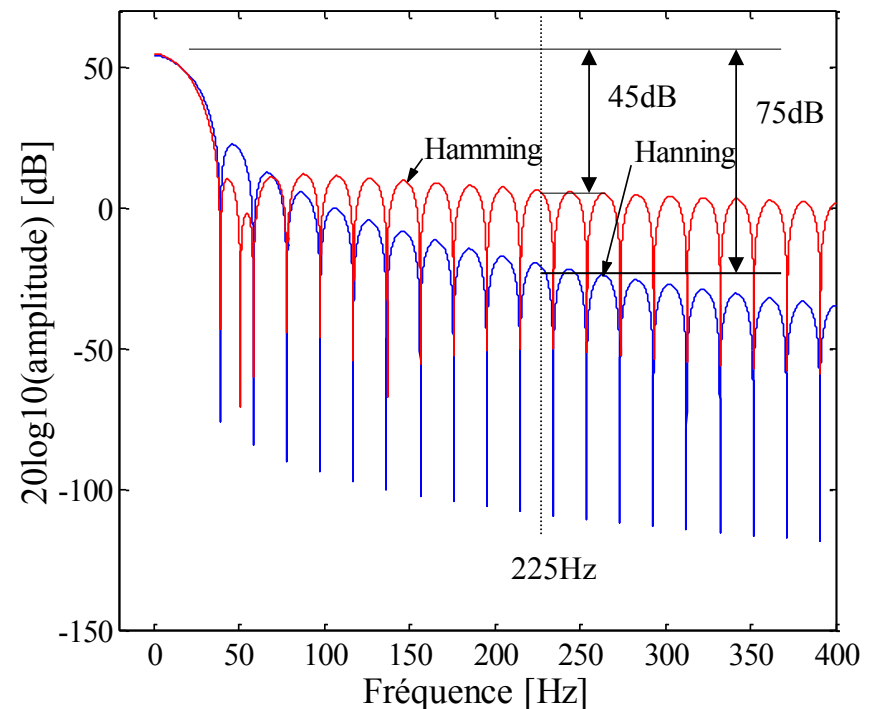
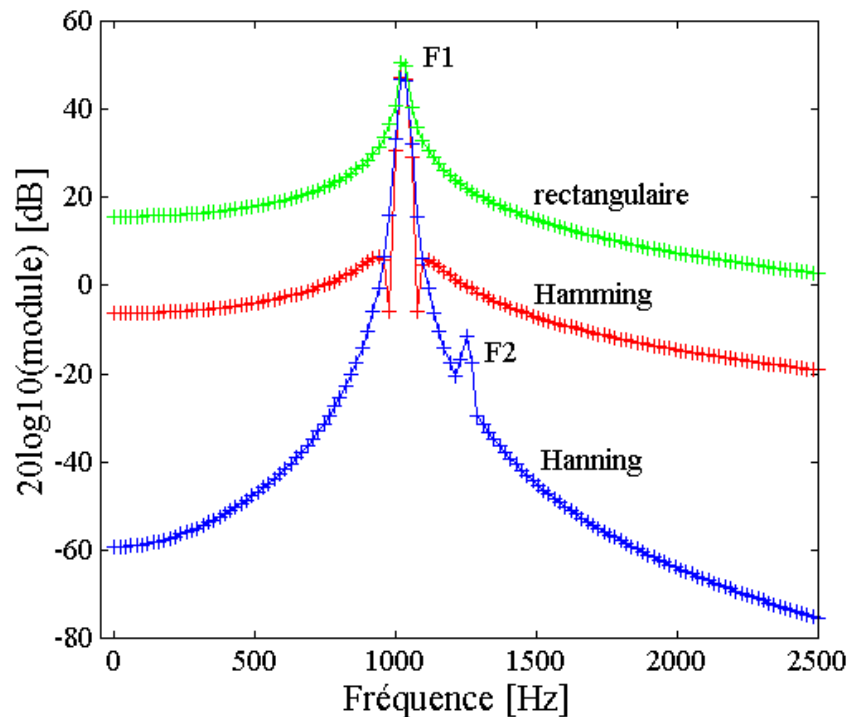


Et non, vous avez fait le mauvais choix, [retournez à la diapositive précédente](#)

Explications :

- 1) le rapport des amplitudes $A_2/A_1=10^{-3}$ soit 60 dB
- 2) l'écart de fréquences $(F_2-F_1)=225\text{Hz}$

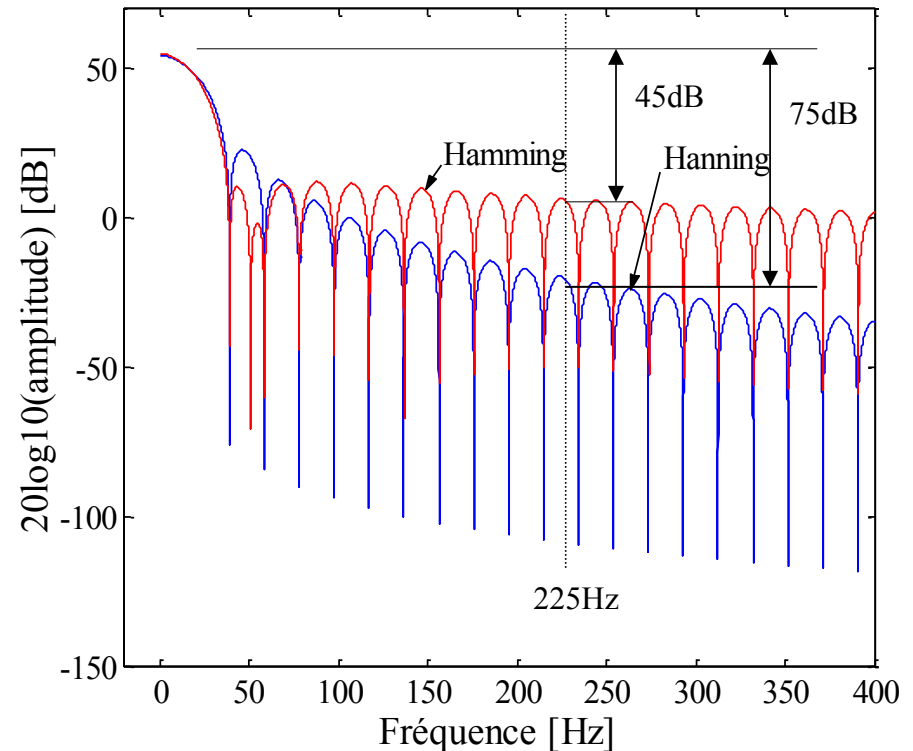
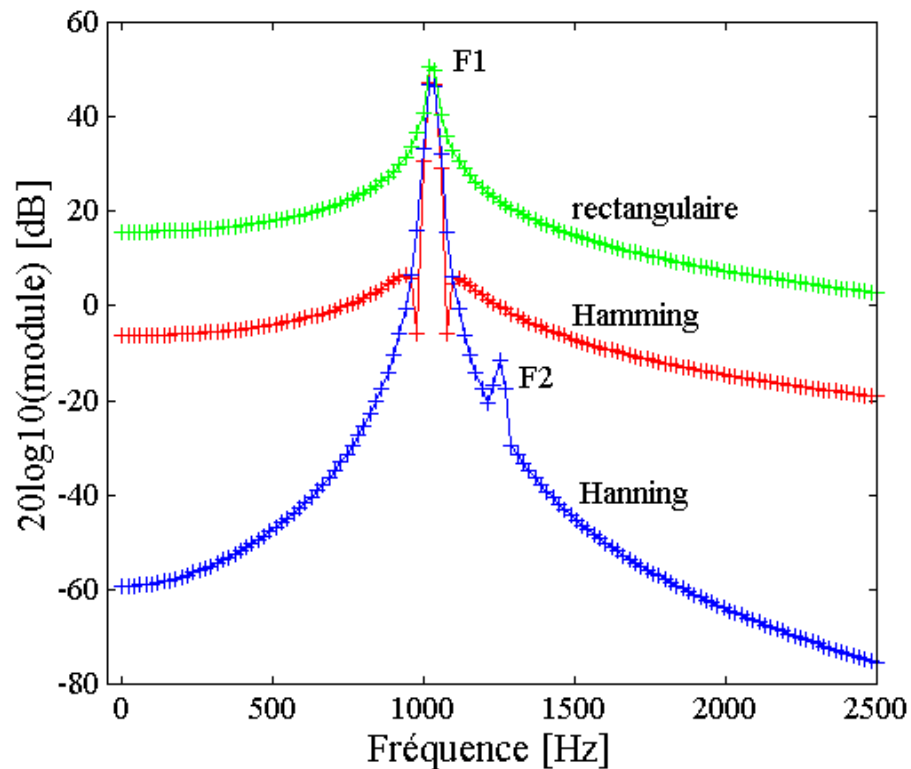
En conséquence, il faut choisir une fenêtre telle que l'amplitude du lobe secondaire à $225\text{Hz} = F_2 - F_1$ soit inférieure de 60 dB à celle du lobe principal.



vous avez fait le bon choix

Explications :

L'amplitude du lobe secondaire à 225Hz de la fenêtre de Hanning est à -75dB de l'amplitude du lobe principal, en conséquence la fréquence F_2 est observable car le rapport $A_2/A_1=10^{-3}$ soit 60dB donc inférieur à 75dB.



[retour](#)

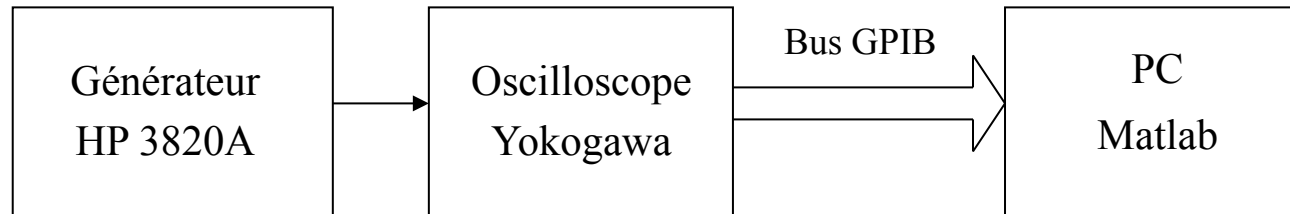
Choix d'une fenêtre de pondération

Les expériences proposées permettent de mettre en évidence :

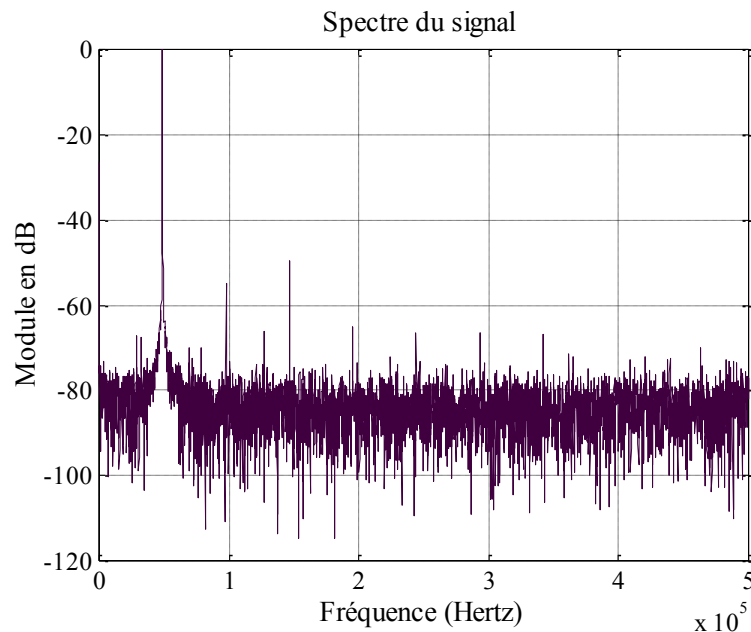
- les fuites spectrales d'une fenêtre de pondération*
- de comparer les résolutions des fenêtres rectangulaire et de Hanning*
- de comparer les dynamiques des fenêtres rectangulaire et de Hanning*

Expérience de mise en évidence des fuites spectrales

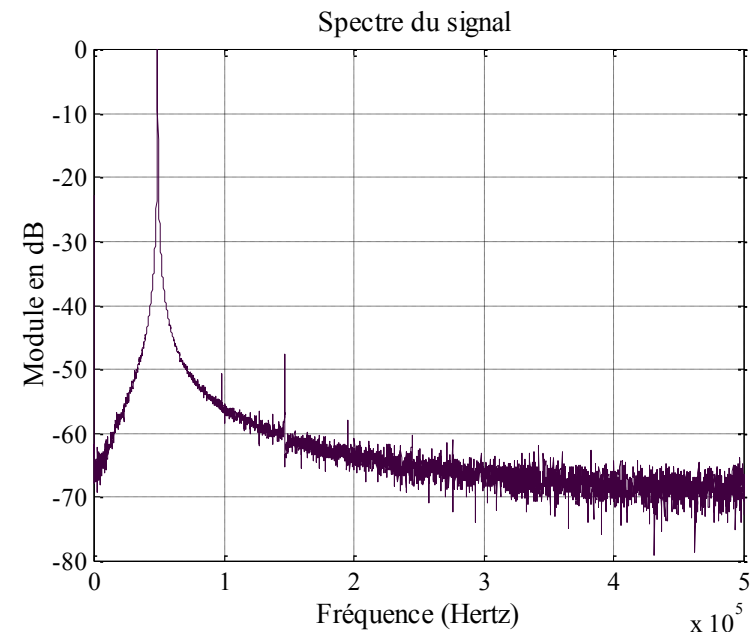
L'expérience



Résultat



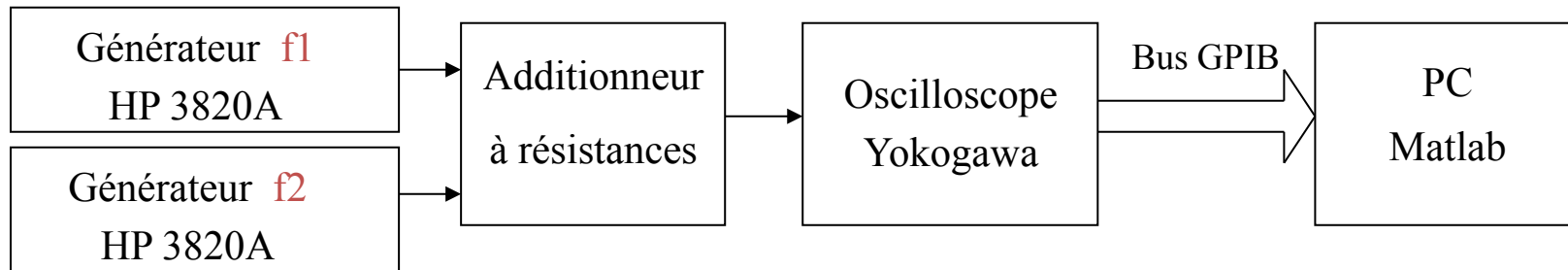
*Durée d'enregistrement
= multiple de la période
plancher de bruit = bruit de quantification*



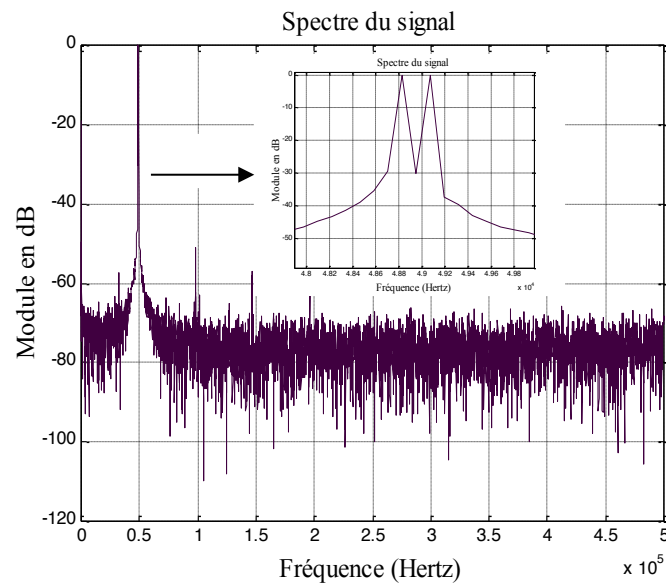
*Durée d'enregistrement
 \neq multiple de la période
observation des lobes secondaires*

Expérience mettant en évidence la résolution d'une fenêtre de pondération

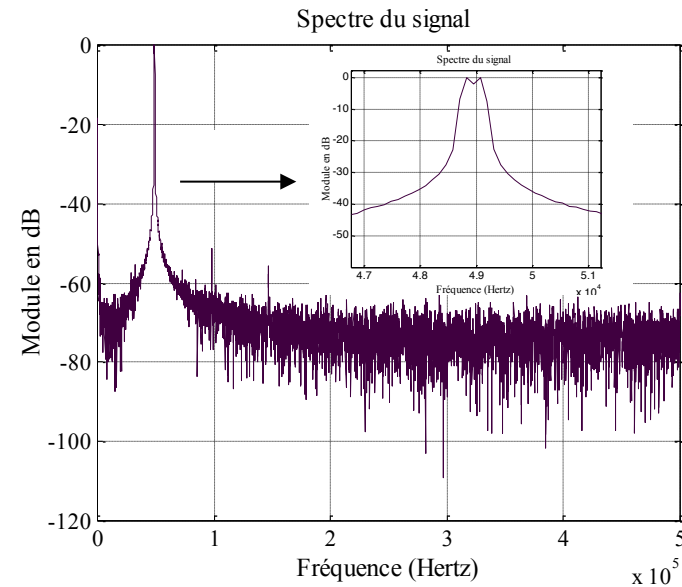
L'expérience



Résultat



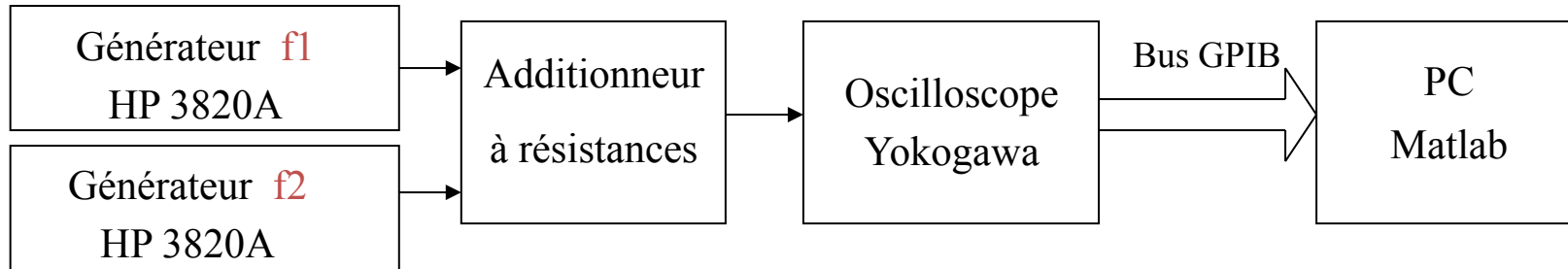
Fenêtre rectangulaire



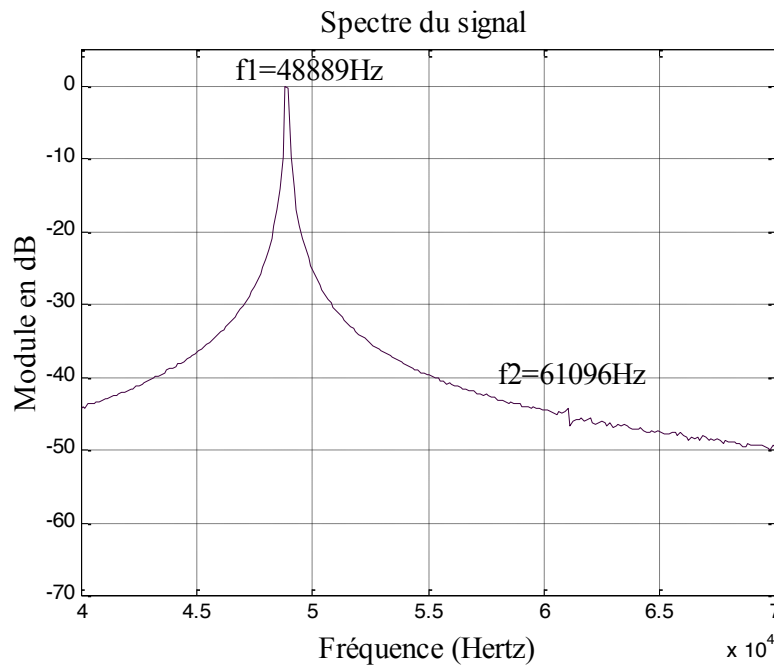
Fenêtre de Hanning

Expérience mettant en évidence la dynamique d'une fenêtre de pondération

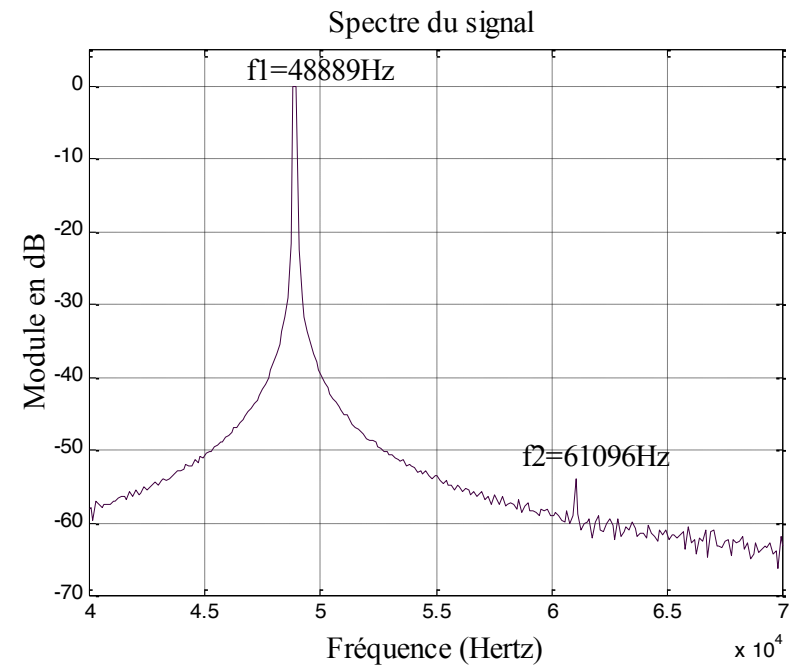
L'expérience



Résultat



Fenêtre rectangulaire



Fenêtre de Hanning

[retour](#)

Réponse en fréquence d'un système linéaire

La réponse en fréquence d'un système linéaire peut être obtenue à partir de :

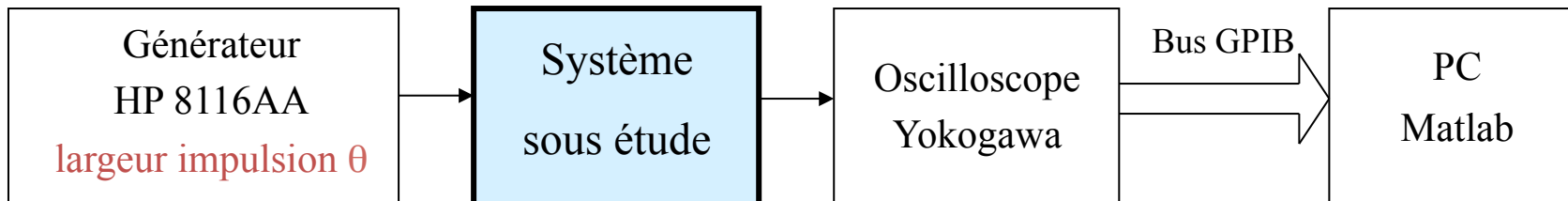
*- la réponse à une excitation sinusoïdale (étude harmonique) -
la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle - la
dérivée de la transformée de Fourier de la réponse indicielle*

Les expériences proposées permettent de mettre en évidence les limites de l'analyse de Fourier dans l'identification des systèmes linéaires à partir des réponses impulsionnelle et indicielle.

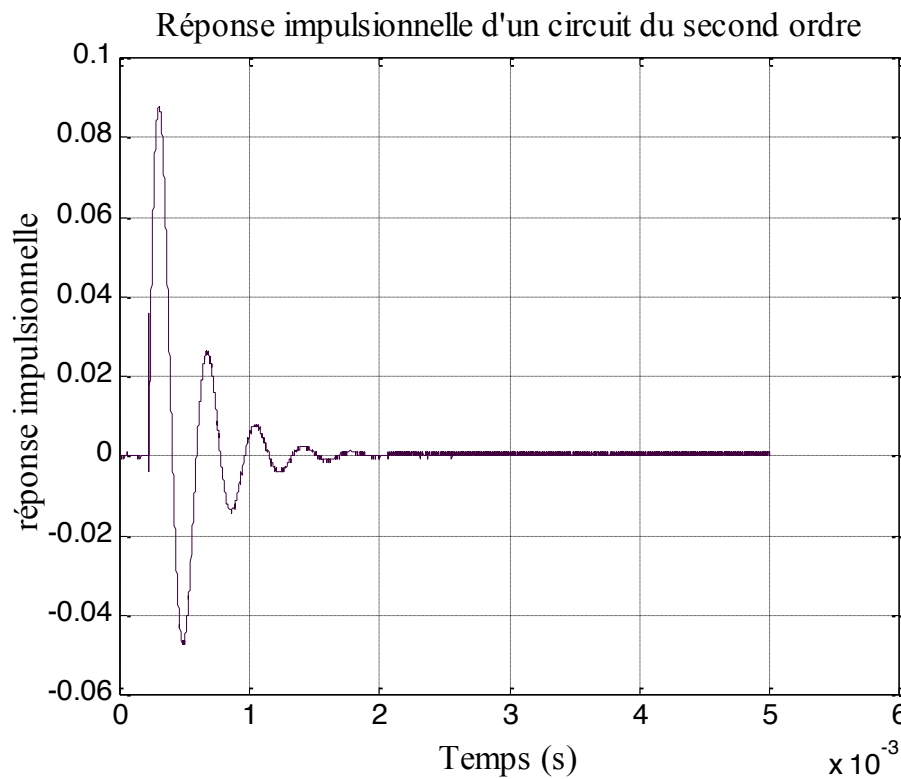
- Choix de la largeur de l'impulsion d'excitation*
- influence du bruit de quantification*

Réponse en fréquence à partir de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle

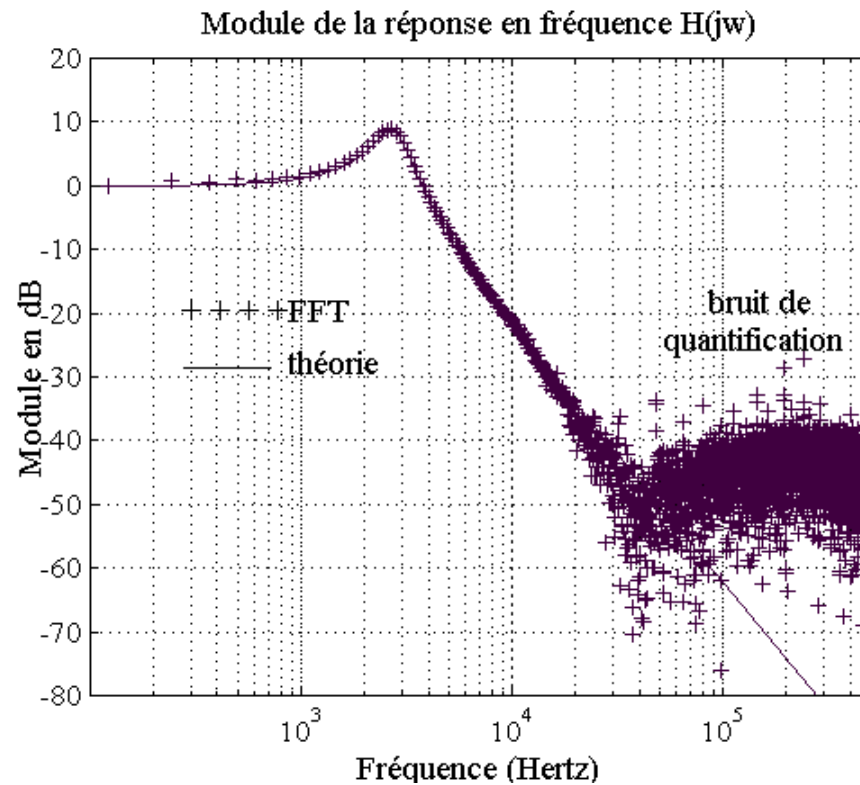
L'expérience



Résultat



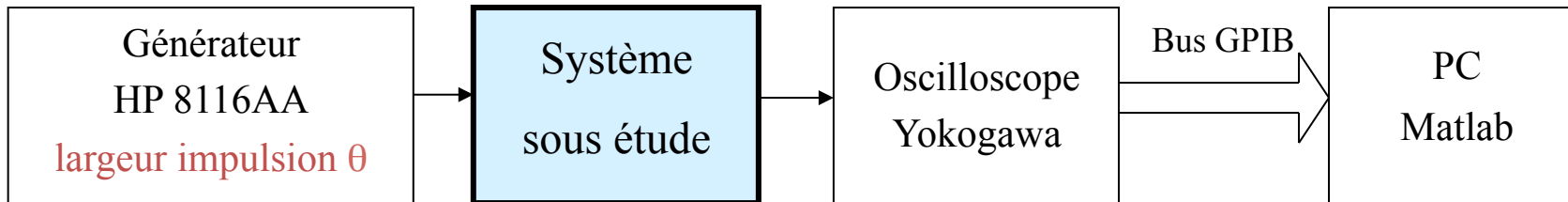
Réponse impulsionnelle $\theta = 1 \mu\text{s}$



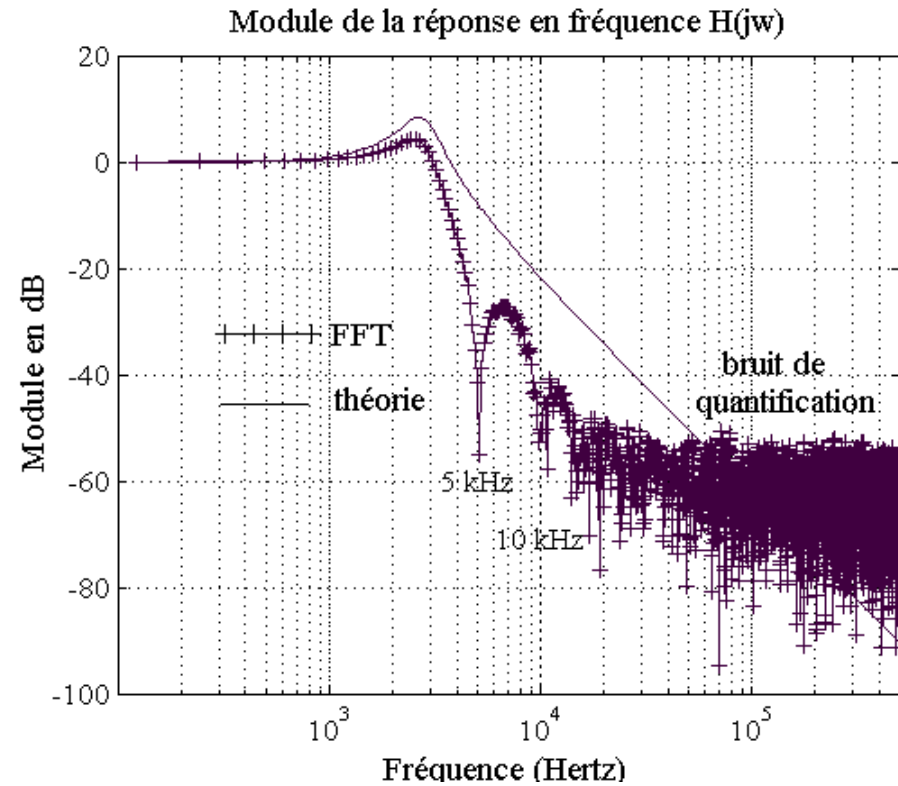
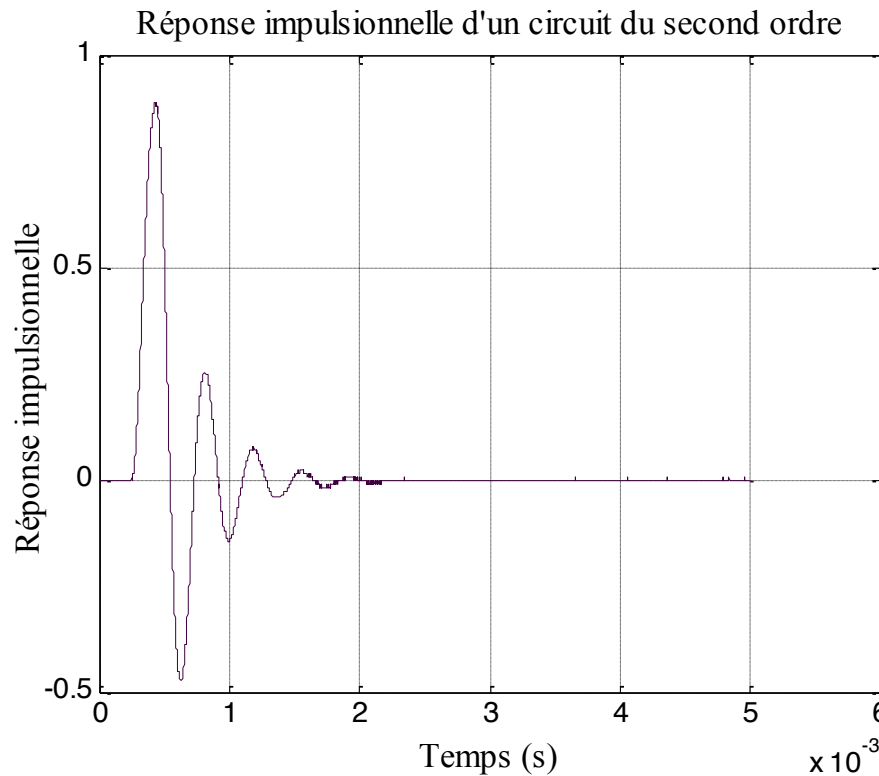
FFT

Réponse en fréquence à partir de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle : influence de la largeur de l'impulsion d'excitation

L'expérience



Résultat

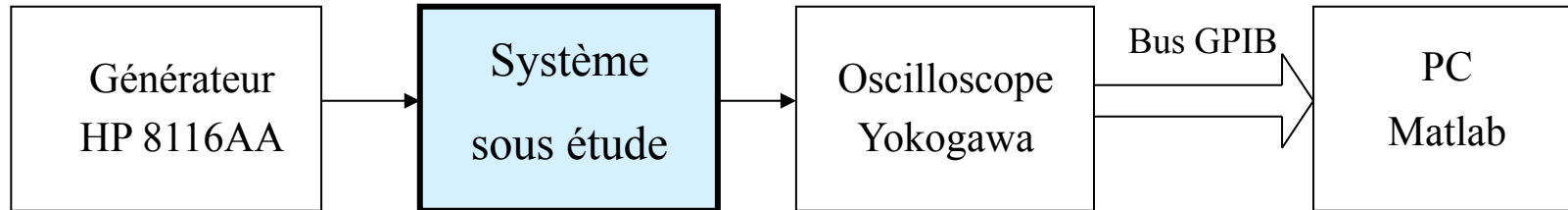


Réponse impulsionnelle $\theta = 200\mu\text{s}$

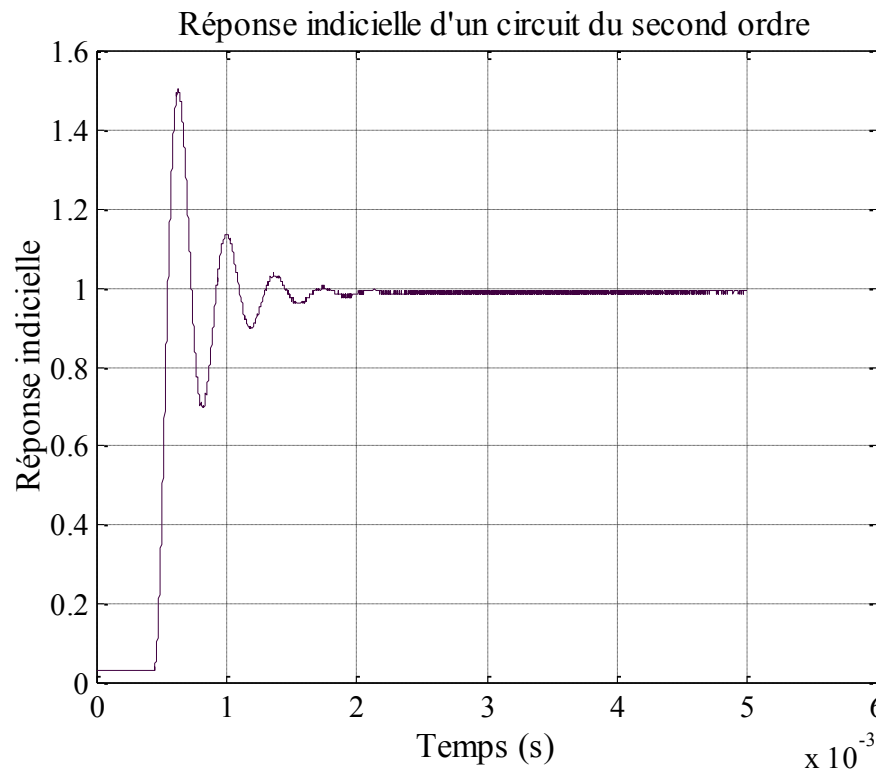
FFT

Réponse en fréquence à partir de la transformée de Fourier de la dérivée réponse indicielle

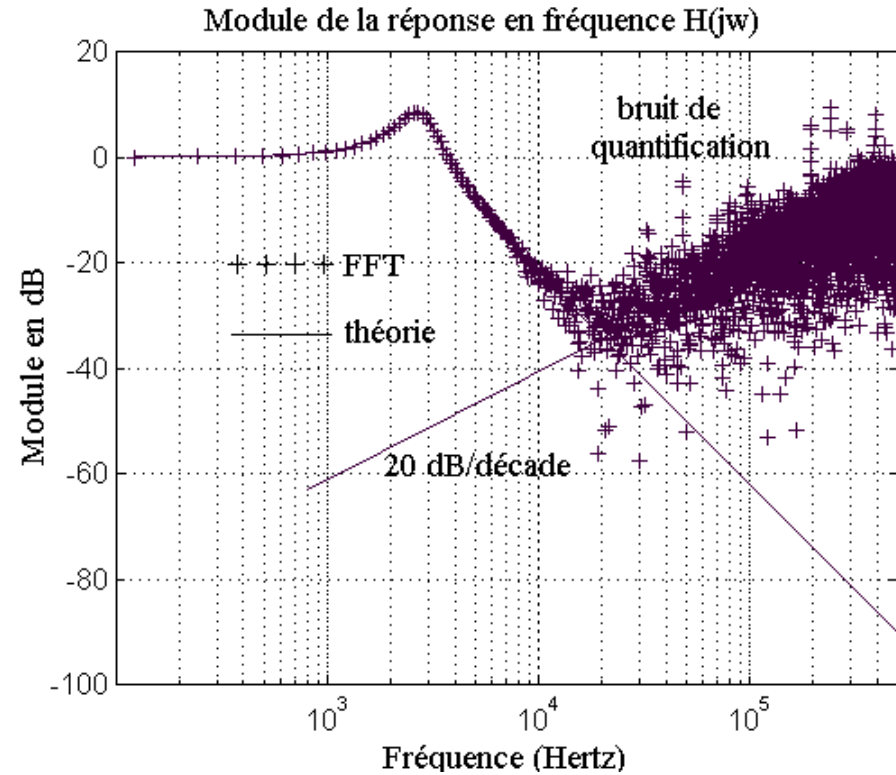
L'expérience



Résultat



Réponse indicielle



FFT de la dérivée de la réponse indicielle