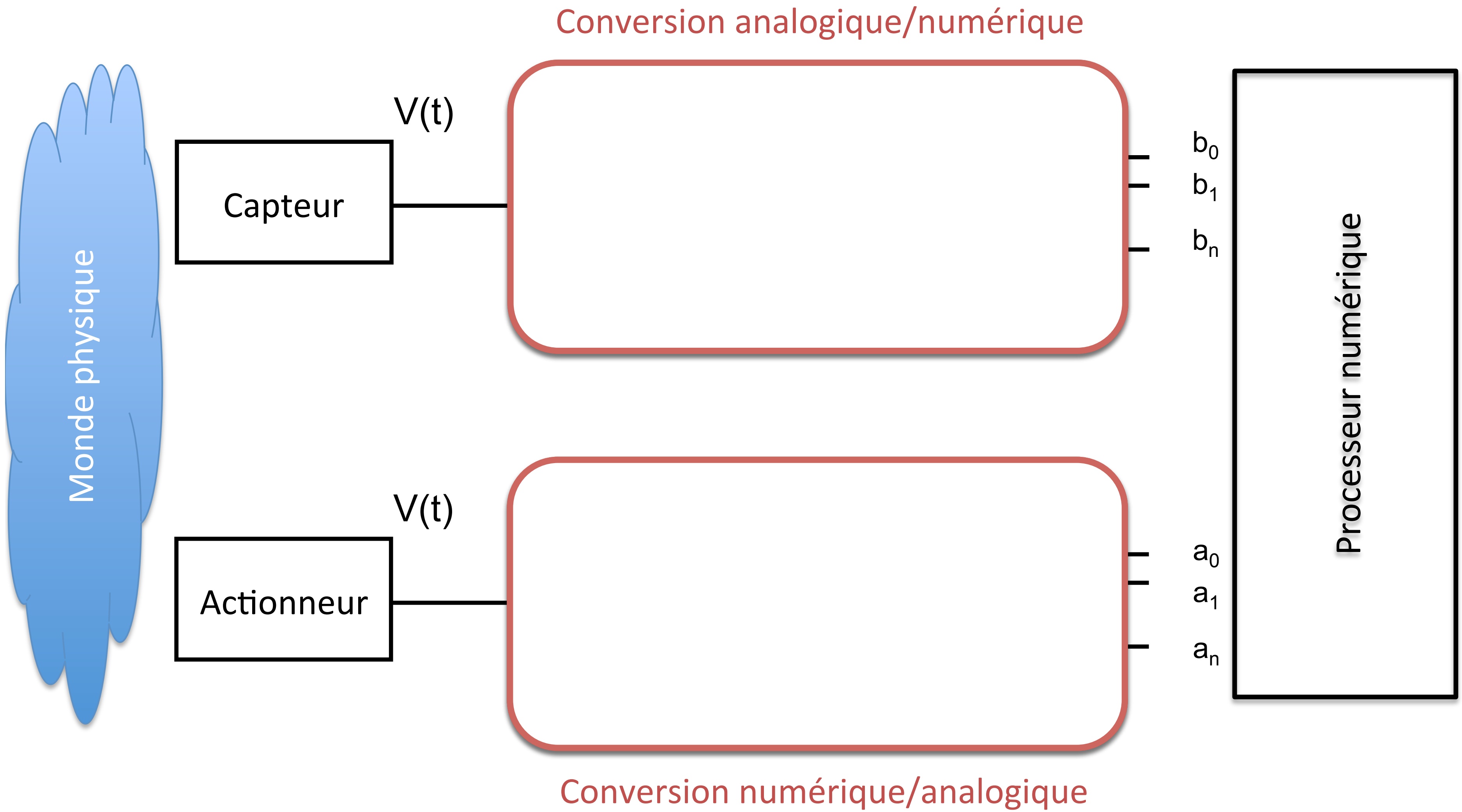
Echantillonnage

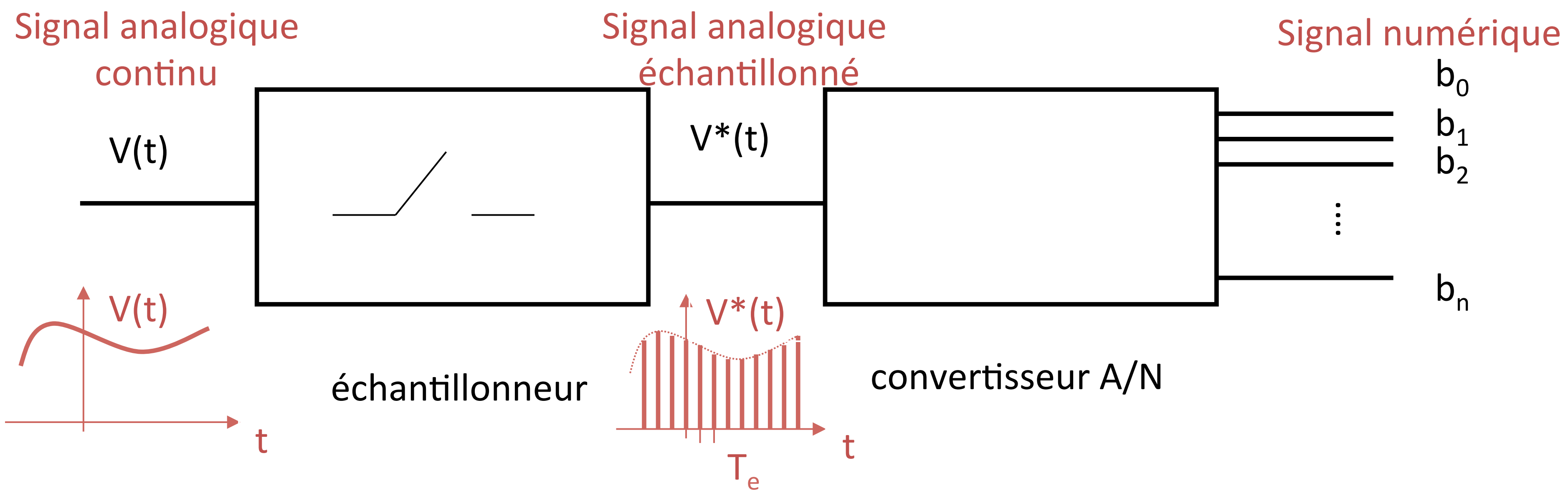
L'électronique moderne est très majoritairement numérique mais le monde réel reste analogique…

Chaine mesure / action



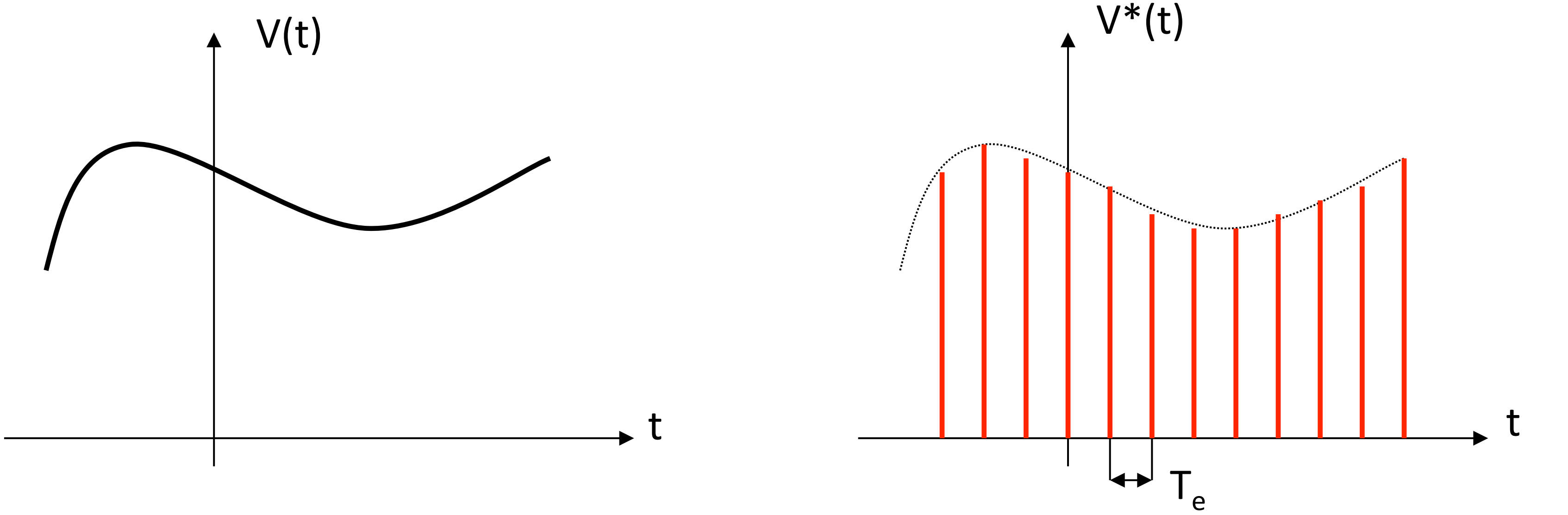
Echantillonnage

L' échantillonnage est la première étape du processus de numérisation des signaux analogiques



Echantillonnage idéal

Cette opération consiste à prendre la valeur instantanée du signal à des instants séparés par un temps constant Te.



$V^*(t) = 0$ si $t \neq kT_e$ et $V^*(t) = v(t)$ si $t = kT_e$

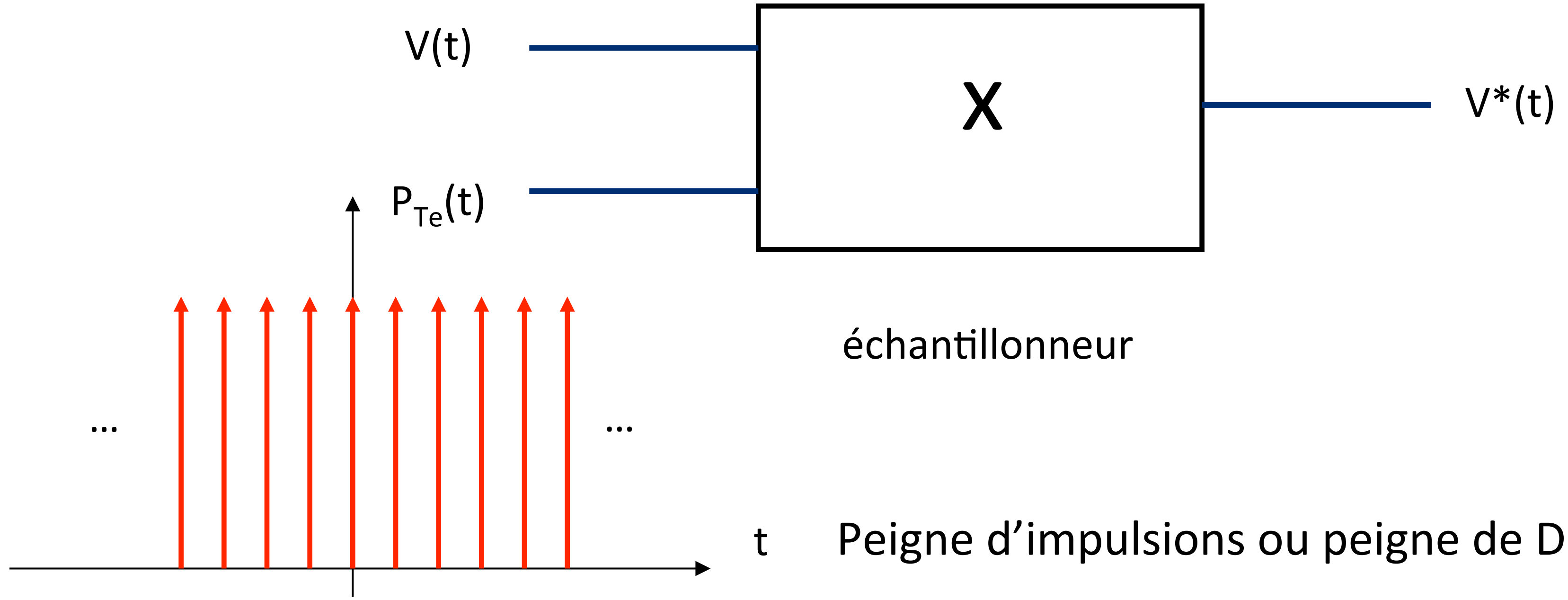
Echantillonnage idéal

T_e est appelée période d' échantillonnage

$F_e = 1/T_e$ est la fréquence d' échantillonnage

Echantillonnage idéal

D'un point de vue mathématique l'échantillonnage idéal correspond à une simple multiplication entre v(t) et une fonction $P_{Te}(t)$.

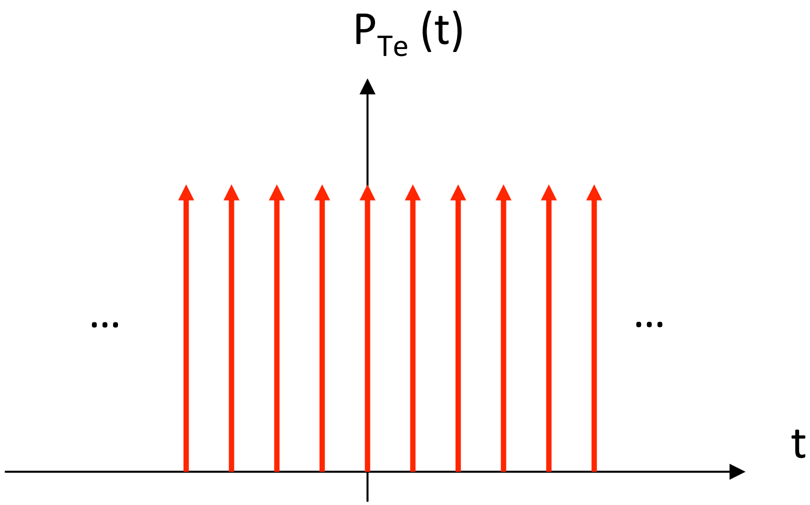


Peigne d'impulsions ou peigne de Dirac

Echantillonnage: notation mathématique

$$v^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} v(t) \times \delta(t - kT_e) = v(t) \times \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$\boxed{v^*(t) = v(t) \times P_{T_e}(t)}$$

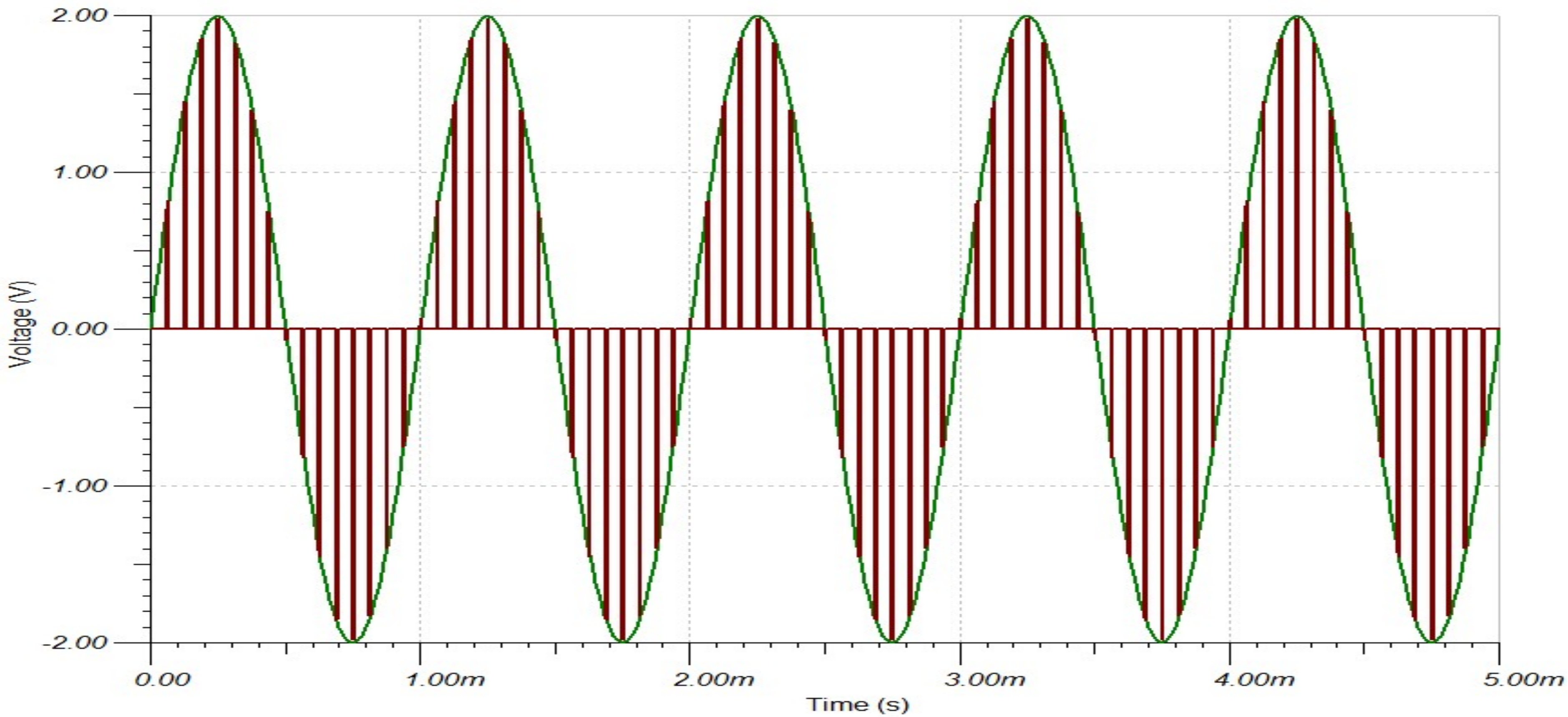


Un signal échantillonné est le produit du signal de départ par une suite périodique d'impulsion (peigne)

Echantillonnage idéal

Un exemple : signal sinusoïdal (f = 1 kHz, F_e = 16 kHz)

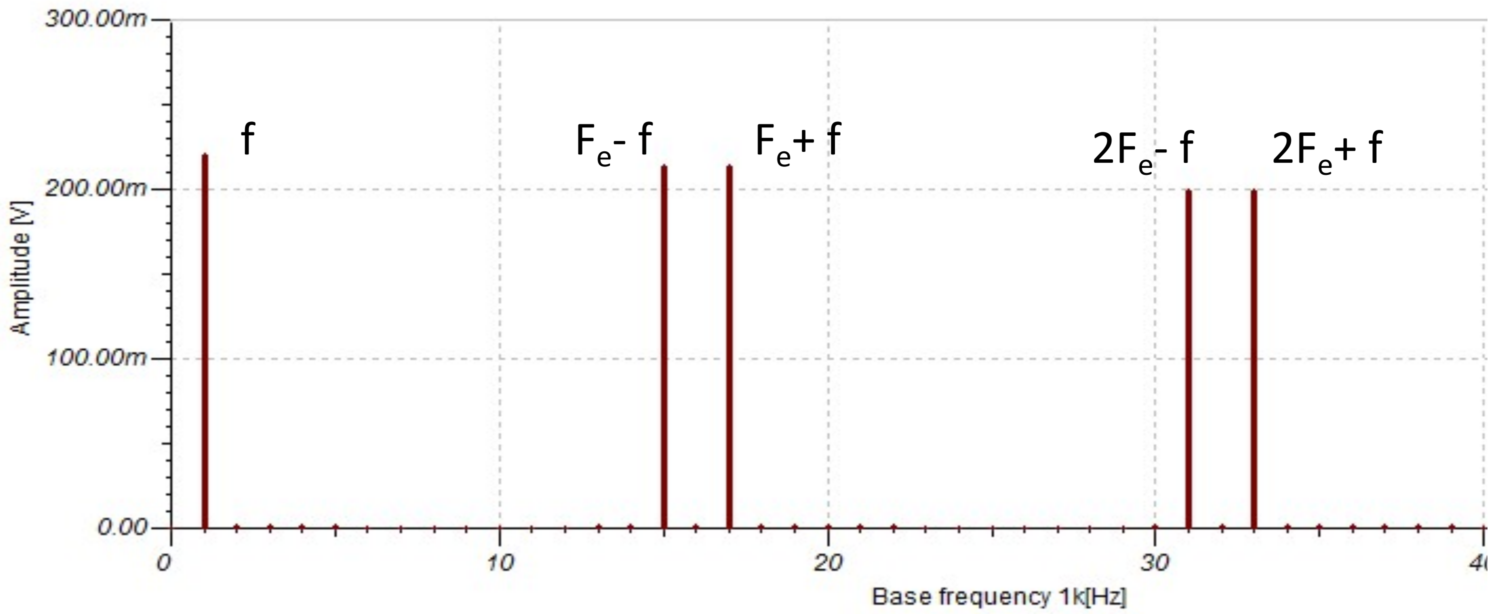
Représentation temporelle



Echantillonnage idéal

Un exemple : signal sinusoïdal ($f = 1$ kHz, $F_e = 16$ kHz)

Représentation fréquentielle



Représentation fréquentielle

On admettra que représentation en fréquence du signal échantillonné est donnée par :

$$\boxed{v^*(f) = f_e \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v(f - nf_e)}$$

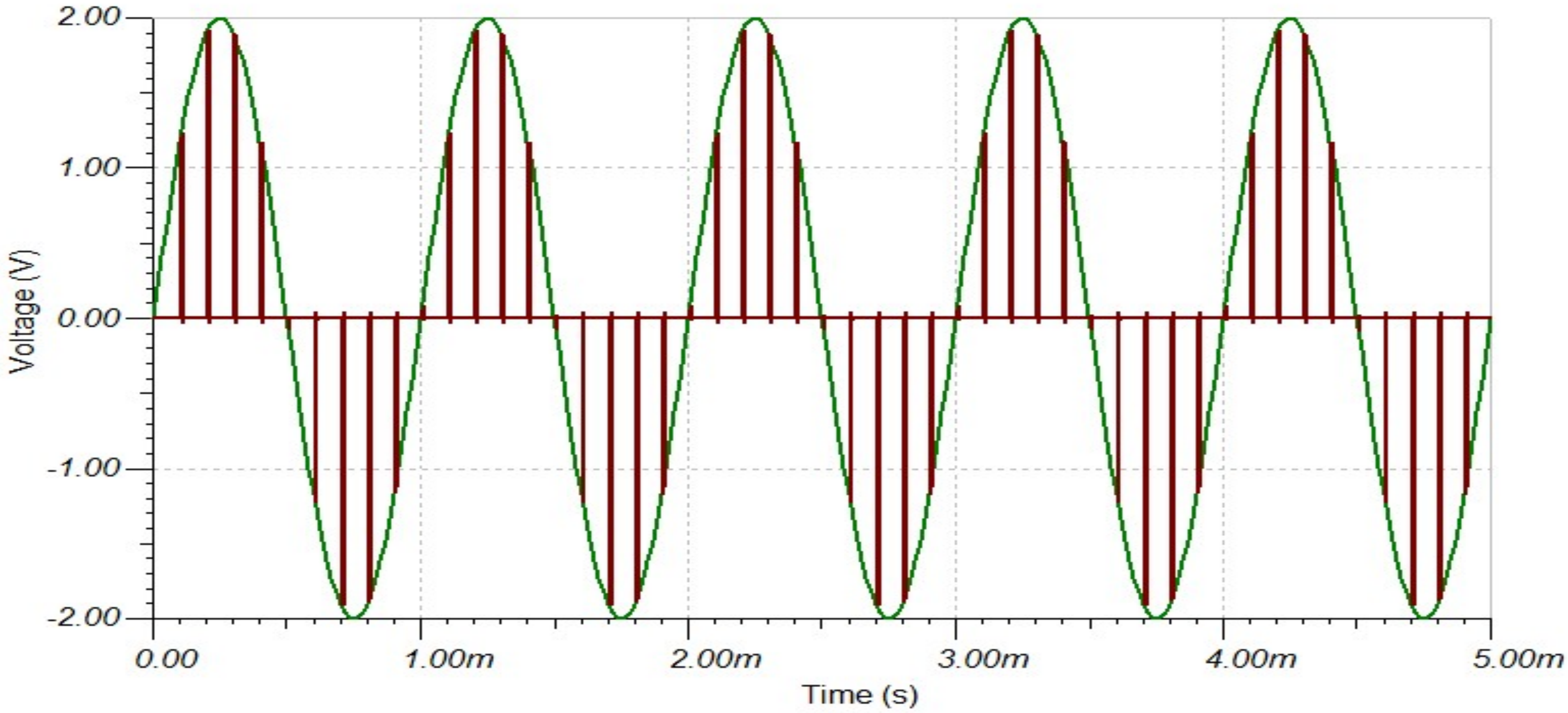
Choix de la fréquence d'échantillonnage

Que se passe-t-il si la
fréquence d'échantillonnage
diminue et se rapproche de f ?

Echantillonnage idéal

Un exemple : signal sinusoïdal (f = 1 kHz, F_e = 10 kHz)

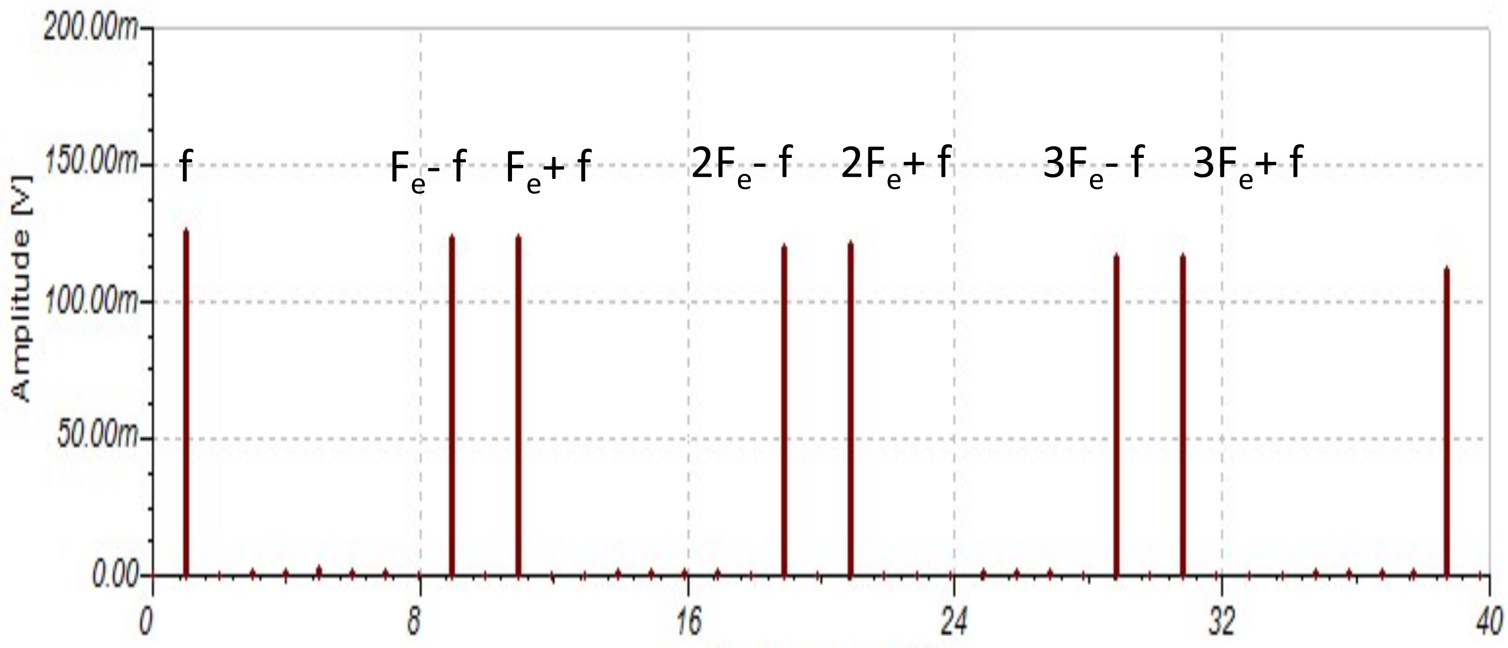
Représentation temporelle



Echantillonnage idéal

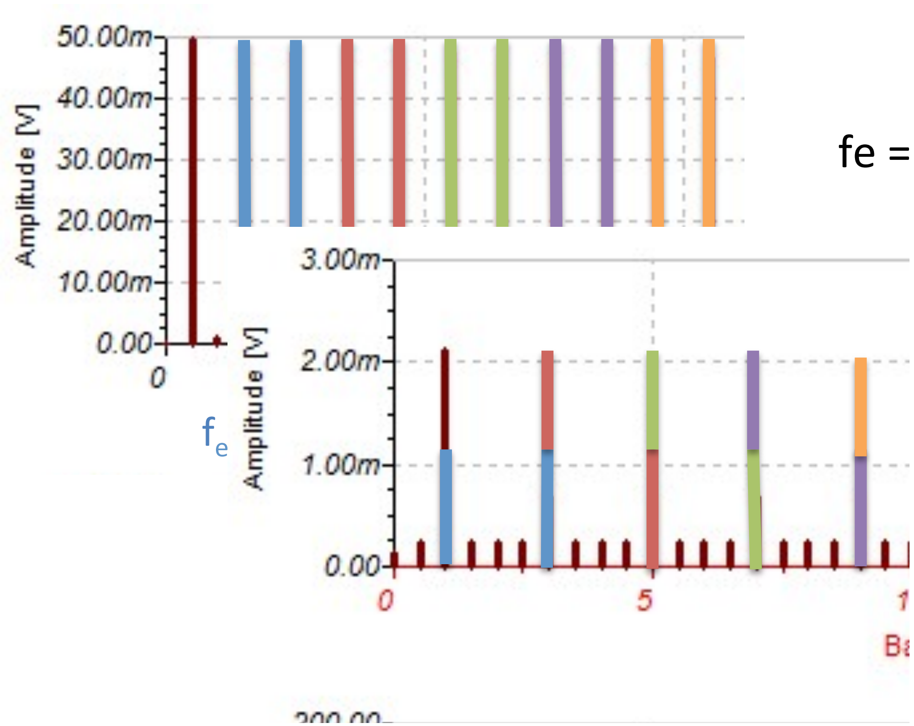
Un exemple : signal sinusoïdal (f = 1 kHz, F_e = 10 kHz)

Représentation fréquentielle



Choix de la fréquence d'échantillonnage

Si on descend encore ?



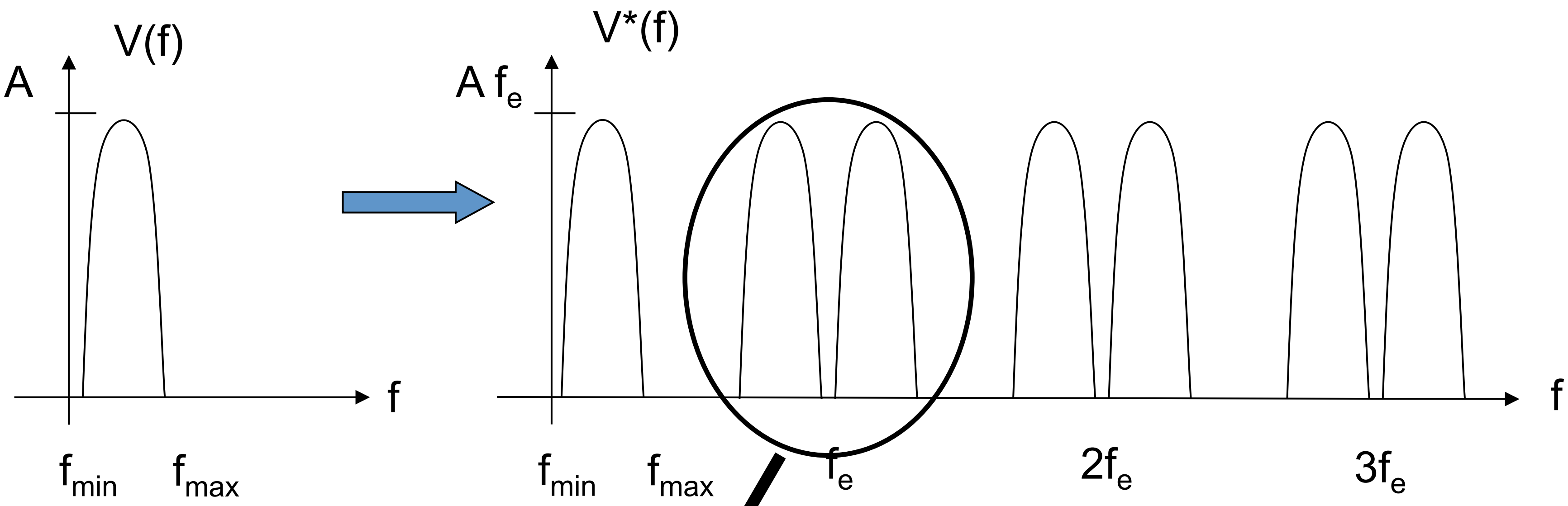
fe = 4 kHz

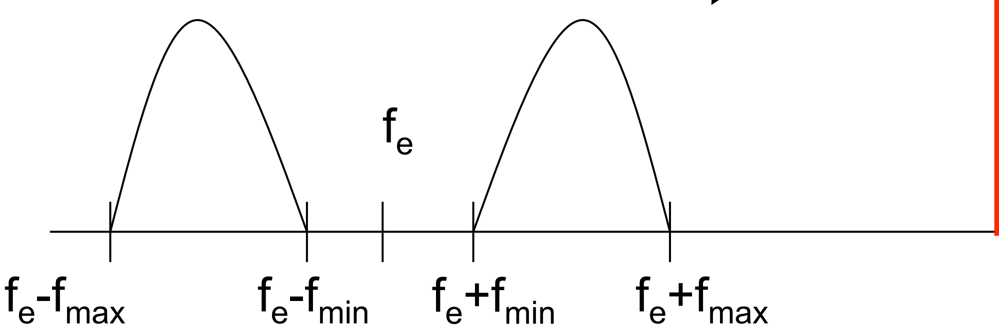
fe = 2 f = 2kHz

On voit apparaître le phénomène de repliement (aliasing en anglais)

Représentation fréquentielle : cas général

$$v^*(f) = f_e \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v(f - nf_e)$$

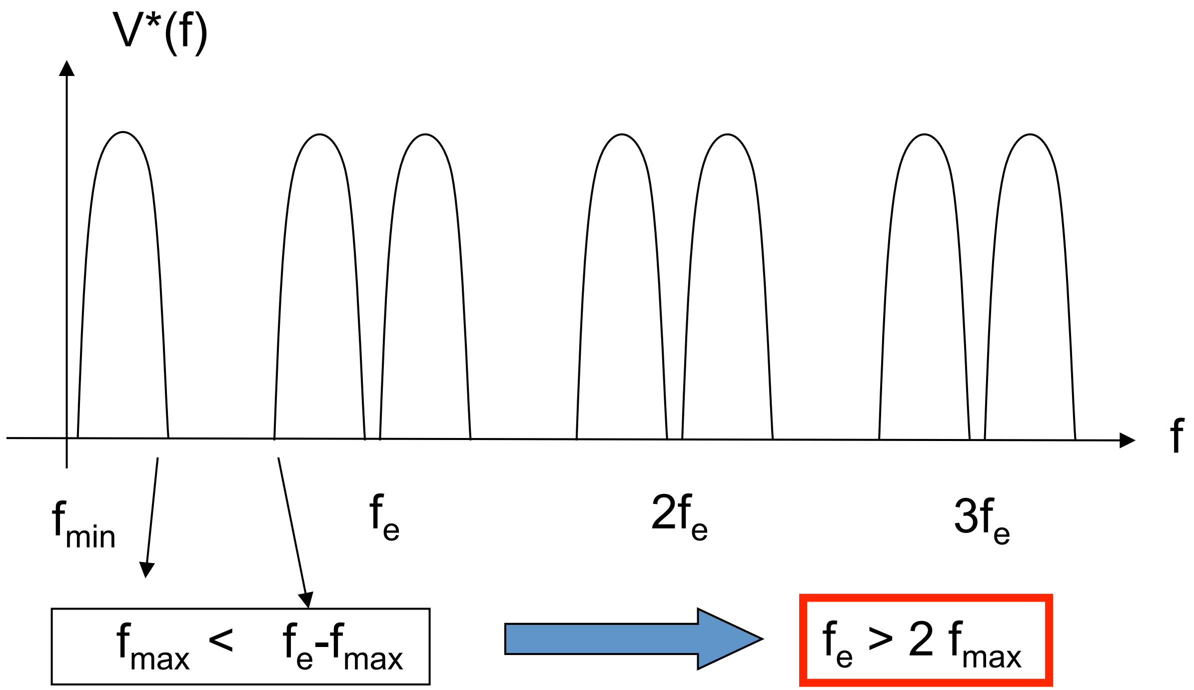




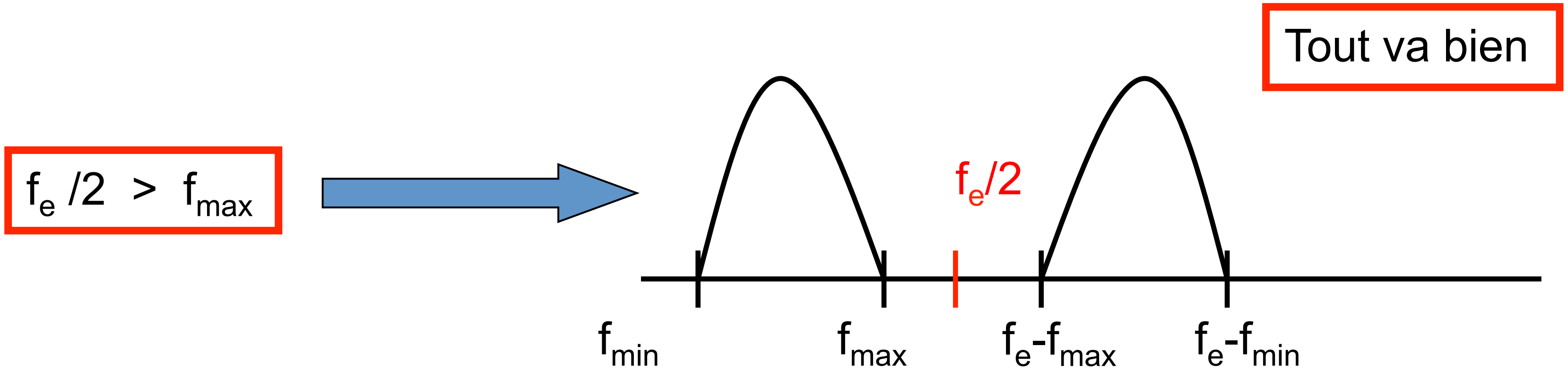
Le spectre du signal échantillonné est la reproduction périodique du spectre du signal de départ

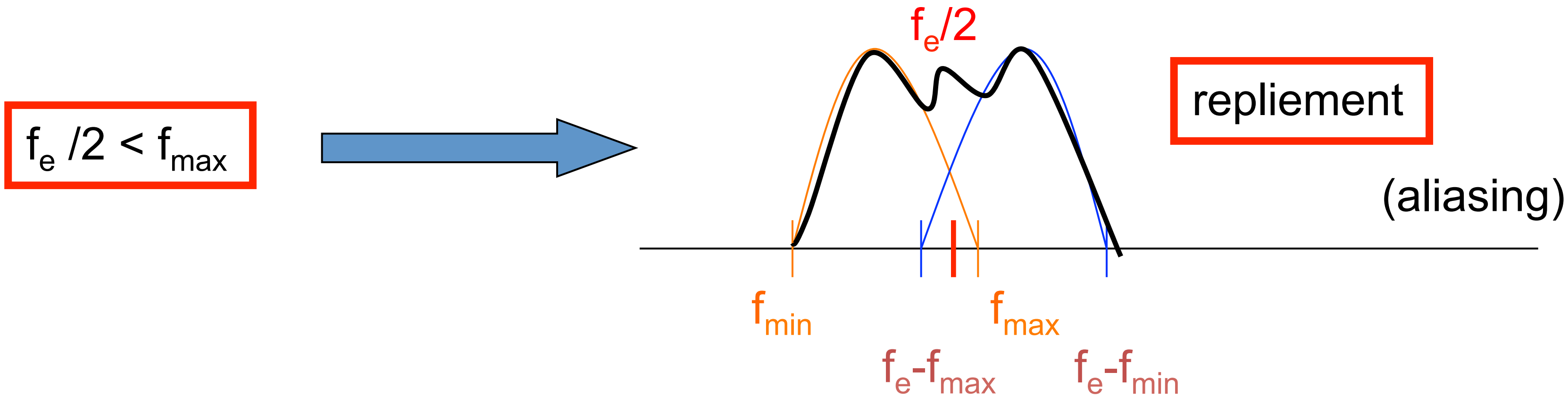
Théorème de Shannon

Le spectre du signal ne reproduit périodiquement le spectre du signal de départ si et seulement si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal de départ.



Phénomène de repliement



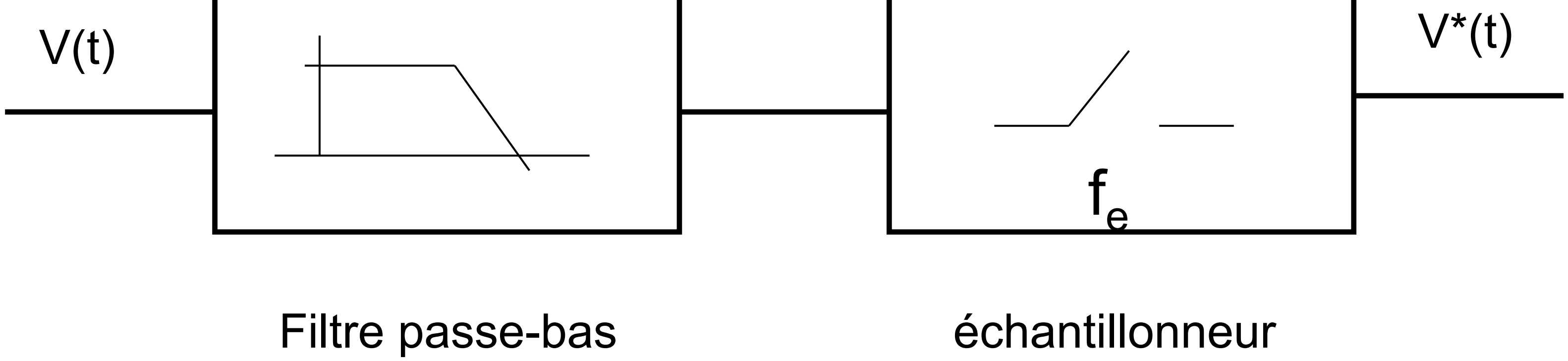


Filtre anti-repliement

Comment se prémunir du repliement ?

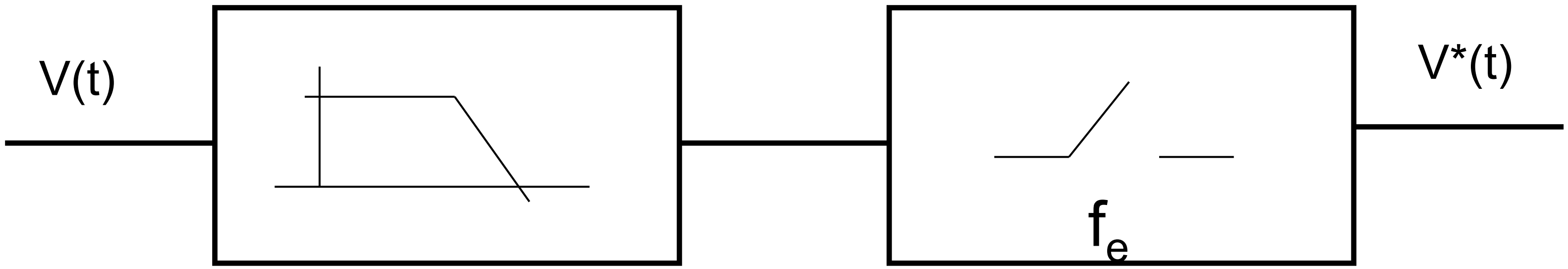
On peut choisir Fe mais on ne connaît pas toujours la fréquence max du spectre du signal que l'on veut échantillonner….

Pour évitre les mauvaises surprises on limite volontairement le spectre du signal en rajoutant avant l'échantillonneur un filtre passe bas appelé filtre anti-repliement



Filtre anti-repliement

Choix de la fréquence de coupure ? :



Filtre passe-bas échantillonneur

$$\boxed{f_c < f_e / 2}$$

Pour être efficace le filtre anti-repliement doit avoir une fréquence de coupure inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage

Téléphonie numérique

fe = 8 khZ, alors que la voix couvre la gamme 20 Hz – 20 kHz

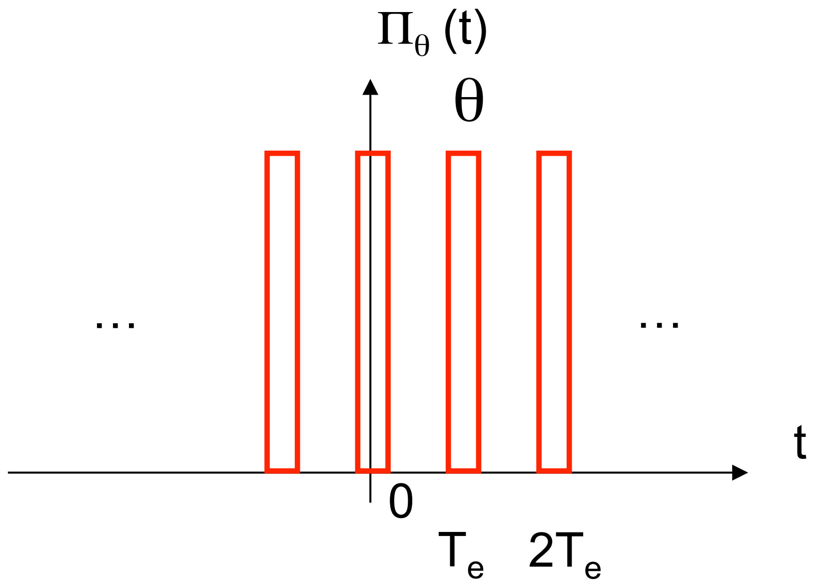
→ fmax = 20 kHz

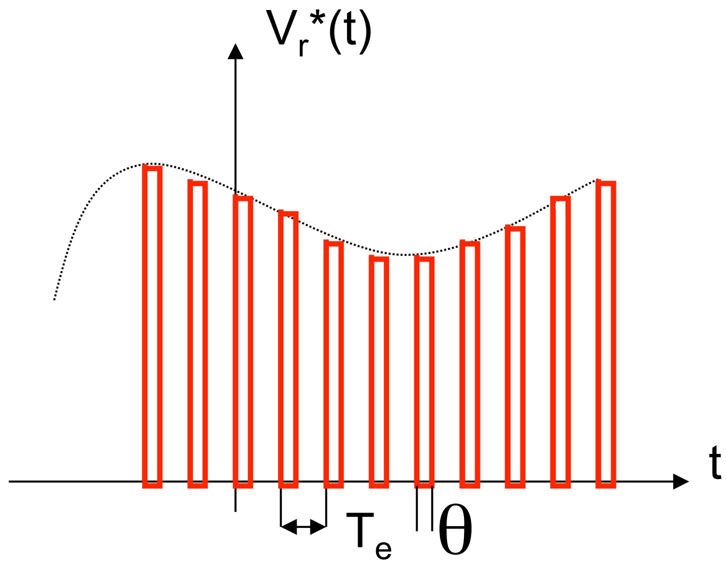
Pour que le système fonctionne on a rajouté un filtre anti-repliement dont la fréquence de coupure est réglée à 3,4 kHz.

Echantillonnage réel

En pratique on ne sait pas réaliser de Dirac !!

Les impulsions d'échantillonnage ont une durée notée θ





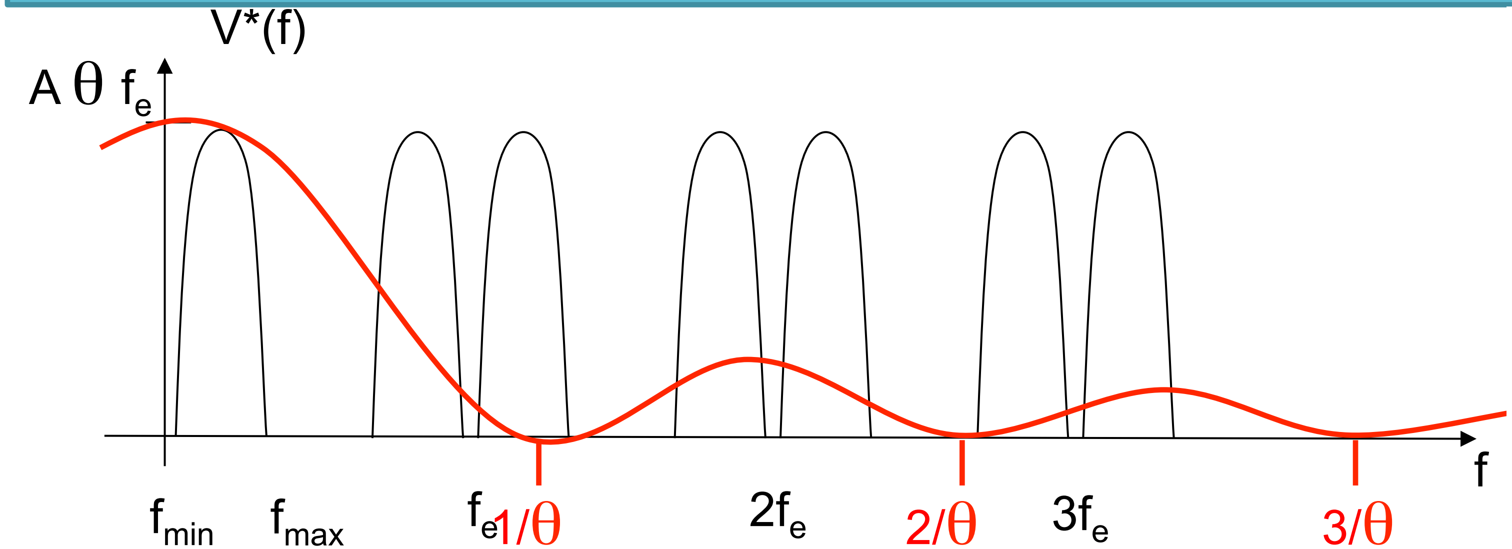
Echantillonnage réel: notation mathématique

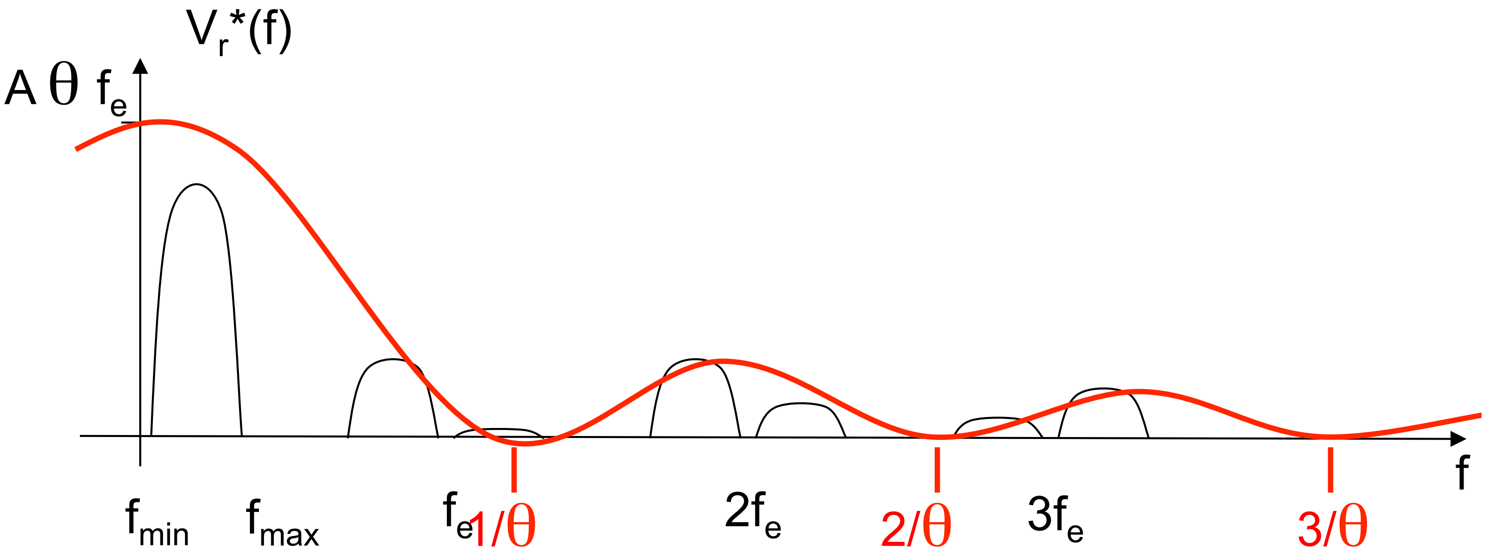
$$v_r{}^*(t) = v(t) \times \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \Pi_\theta(t - kT_e)$$

$$v_r{}^*(f) = f_e \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \theta \times \frac{\sin(\pi\theta n f_e)}{\pi\theta n f_e} \times v(f - nf_e)$$

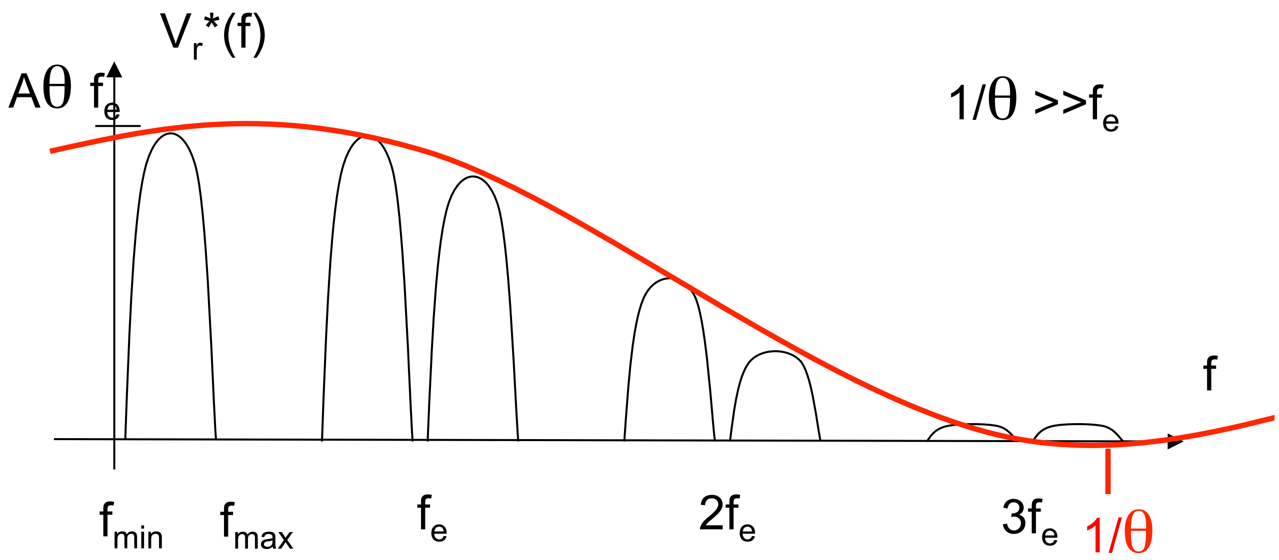
Terme supplémentaire

Spectre du signal échantillonné réel





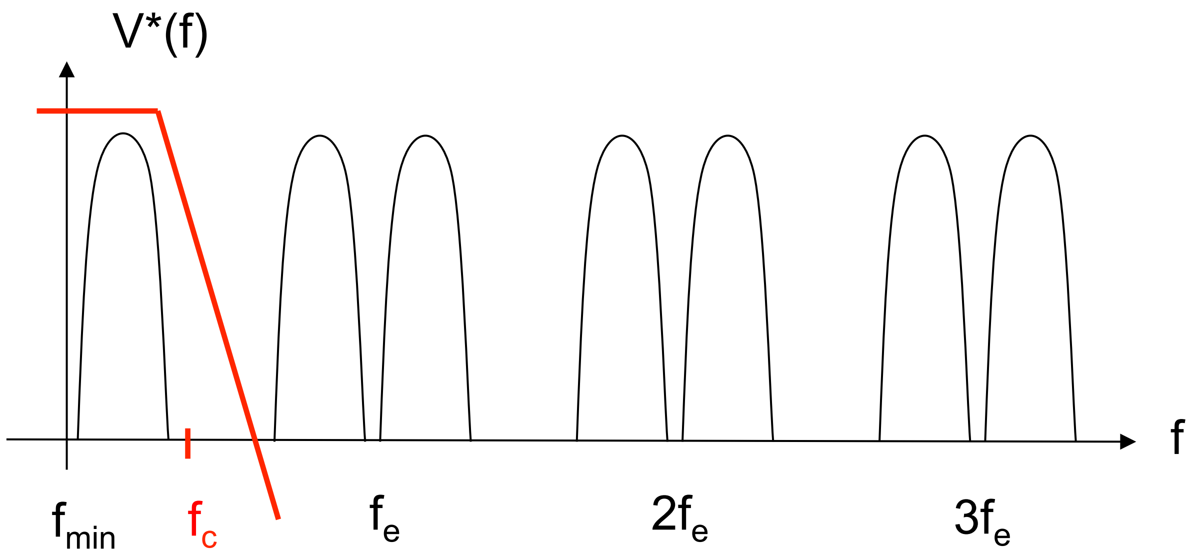
Spectre du signal échantillonné réel



$\boxed{\text{Il faut s'arranger pour avoir } 1/\theta >> f_e}$

Reconstruction

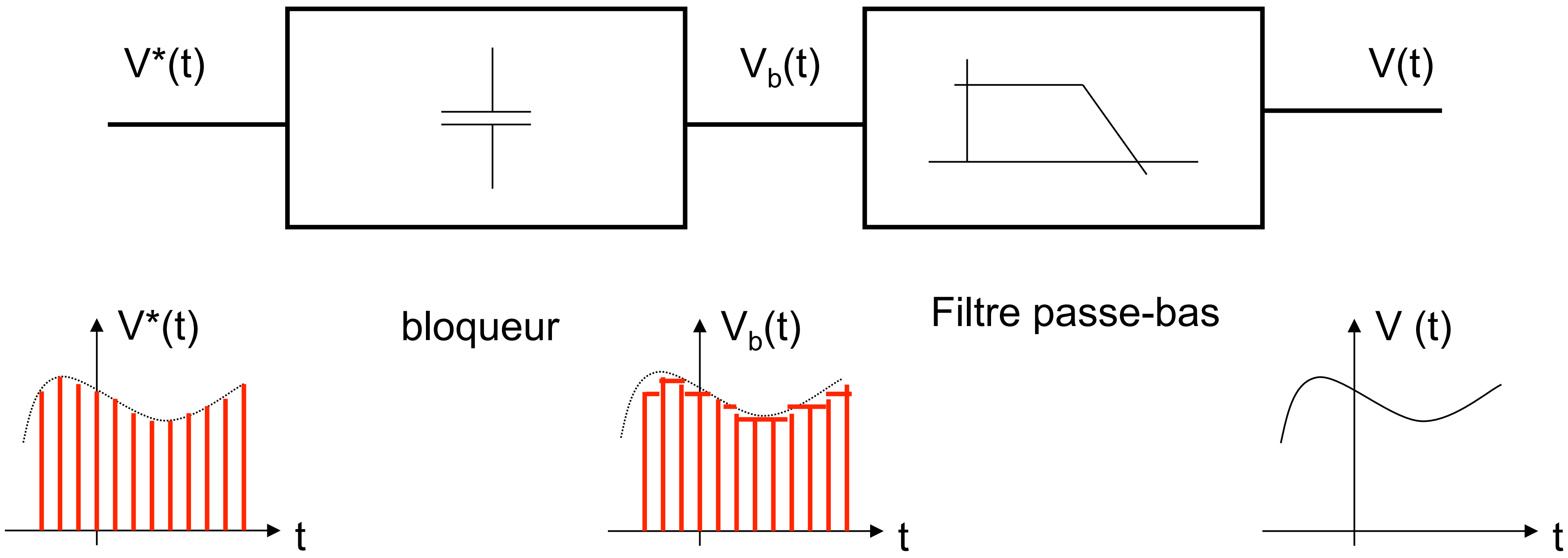
Si on respecté Shannon ($f_e > 2\ f_{max}$), alors un simple filtrage passe bas permet de récupérer le signal de départ.



On choisit une fréquence de coupure telle que : $f_c < f_e/2$
Et on s'impose généralement une atténuation minimum pour (f_e-f_{max})

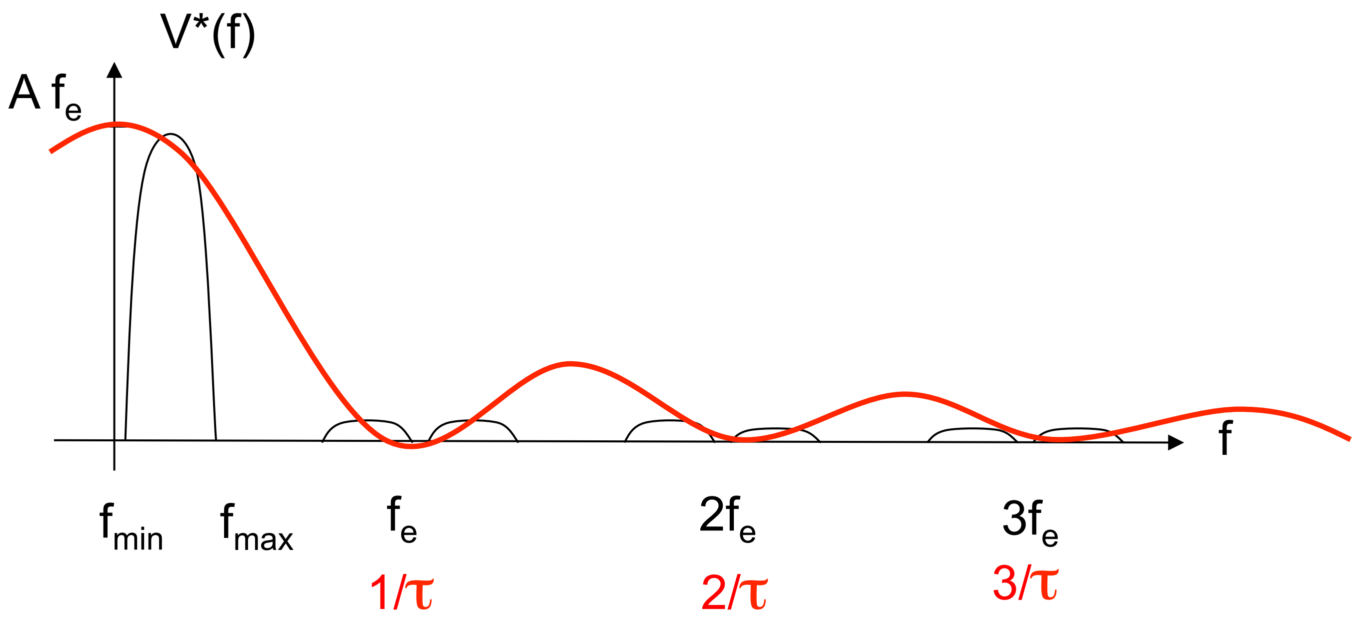
Reconstruction

La plupart du temps on reconstruit le signal à l’aide d’un bloqueur suivi d’un filtrage passe-bas



Reconstruction

Le bloqueur maintient la valeur de l'échantillon entre deux valeurs de T_e, on a donc le même effet qu'un échantillonnage avec des impulsions de durée $\tau = T_e$. D'un point de vue spectral, on atténue très fortement les fréquence aux environs de f_e, 2 f_e, 3 f_e, 4 f_e,…



Le filtrage sera en conséquence plus efficace

Résumé

1. Signal échantillonné dans le domaine temporel : Produit du signal de départ par un peigne d'impulsion

2. Signal échantillonné dans le domaine fréquentiel : reproduction périodique du spectre du signal de départ (période Fe) si $F_e > 2\ f_{max}$, sinon phénomène de repliement.

3. Le filtrage passe-bas du signal échantillonné permet de récupérer le signal de départ si le théorème de Shannon est respecté

http://www.ostralo.net/3_animations/swf/echantillonnage.swf

http://www.ostralo.net/3_animations/animations_phys_signauxnumeriques.htm