Distributions

Exercice 1 *1. Pour $\phi \in \mathscr{S}$, on définit $\|\phi\|_{(n)} = \max_{\{k,h\geq 0,\, k+h\leq n\}} \sup \left|x^k \phi^{(l)}(x)\right|$. Montrer que*

$$d(\phi,\psi) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \max(\|\phi-\psi\|_{(n)}, 1)$$

définit une distance sur $\mathscr{S}$. Montrer que pour $(\phi_k)_k$ une suite de $\mathscr{S}$ et $\phi \in \mathscr{S}$, on a

$$\phi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{d} \phi \;\Leftrightarrow\; \forall p \geq 0, \|\phi_k - \phi\|_{(p)} \to 0.$$

2. Montrer que pour tout ϕ_0 et $r_0 > 0$, il existe $p \geq 0$ et $r' > 0$, telle que la boule $B(\phi_0, r_0)$ contienne l'ensemble

$$\left\{\phi \in \mathscr{S},\, \|\phi-\phi_0\|_{(p)} < r'\right\}.$$

3. Soit T une forme linéaire sur $\mathscr{S}$ muni de d. Montrer que T est continue si et seulement si il existe $p \geq 0$ et $C \geq 0$ tel que pour tout $\phi \in \mathscr{S}$

$$|\langle T, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_{(p)}.$$

Exercice 2 *1. Montrer que si pour un entier $k \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|^k}dx < +\infty$, alors f définit une distribution tempérée.*

2. Montrer que $e^x\cos(e^x)$ définit une distribution tempérée ; puis montrer que la réciproque de (1) est fausse.

Exercice 3 *Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Expliciter les distributions tempérées $f\delta_0''$ et $(f\delta_0)''$.*

Exercice 4 *1. Soit $\varphi \in \mathscr{S}$. On pose $\phi = \int_{-\infty}^x \varphi(u)du$. Montrer que $\phi \in \mathscr{S}$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 0$.*

2. On fixe $\theta \in \mathscr{S}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \theta(x)dx = 1$. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$, il existe une unique fonction $\psi \in \mathscr{S}$ telle que

$$\varphi = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right)\theta + \psi'.$$

Montrer que l'application $\varphi \to \psi$ est continue sur $\mathscr{S}$.

3. Soit maintenant $T \in \mathscr{S}'$. On suppose qu'il existe S distribution tempérée telle que $S' = T$. Montrer que nécessairement,

$$\langle S, \varphi\rangle = C\langle 1, \varphi\rangle - \langle T, \psi(\phi)\rangle.$$

Justifier que la formule ci-dessus définit bien une distribution tempérée puis qu'on a bien $S' = T$ dans $\mathscr{S}'$. Conclure.

4. Soit T une distribution tempérée telle que $T' = 0$. Montrer que T est constante.

Exercice 5 *1. Montrer que $S = \sum_{k\geq 0} k^3\delta_k$ est une distribution tempérée.*

2. *Soit $S = \sum_{k\geq 0} \delta_k^{(k)}$. Soit $\psi \in C_c^\infty(]-1,1[)$ égale à 1 près de 0 et soit $\theta_m(x) = \frac{x^m}{m!}\psi(x)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_m(x) = \theta_m(\lambda(x-m))$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-m}\langle S, \varphi_m\rangle = 1$. En déduire que S n'est pas une distribution tempérée*

Exercice 6 *On note $Y(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$ la fonction de Heaviside. Calculer au sens des distributions*

$$T = \left(\frac{d}{dx} + \lambda\right) Y(x)e^{-\lambda x} \quad et \quad U = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) Y(x)\frac{\sin(wx)}{w}$$

Exercice 7 1. *Montrer que l'application*

$$\phi \in \mathscr{S} \mapsto \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

définit une distribution tempérée (appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$ et notée $vp(\frac{1}{x})$)

2. *On note $T = vp\frac{1}{x}$. Montrer que $xT = 1$. En déduire que $D(\mathcal{F}(T)) = -2i\pi\delta_0$ où $D(\mathcal{F}(T))$ désigne la dérivée de la distribution $\mathcal{F}(T)$.*
3. *Montrer qu'avec $Y = \mathbf{1}_{[0,\infty[}$, on a $Y' = \delta_0$. En déduire que pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{F}(T) = C - 2i\pi Y.$$

4. *On pose $\psi(x) = \phi(-x)$, justifier que $\hat{\psi}(\xi) = \hat{\phi}(-\xi)$ puis que*

$$\langle \mathcal{F}(T), \psi\rangle = -\langle \mathcal{F}(T), \phi\rangle$$

En déduire que $\mathcal{F}\left(vp\frac{1}{x}\right) = -i\pi$ sign avec sign la fonction : sign$(x) = 1$ si $x > 0$ et -1 si $x < 0$.

5. *En déduire que dans $\mathscr{S}'$, quand $\lambda \to +\infty$, $e^{i\lambda x} vp\frac{1}{x} \to i\pi\delta_0$.*

Exercice 8 *Soit $\theta \in \mathscr{S}$ telle que $\theta(0) = 1$ fixée.*

1. *Soit $S \in \mathscr{S}'$, on suppose qu'il existe $T \in \mathscr{S}'$ telle que $xT = S$. Montrer que pour tout $\phi \in \mathscr{S}$,*

$$\langle T, \phi\rangle = \langle S, \Psi(\phi)\rangle + C\langle \delta_0, \phi\rangle$$

avec

$$\Psi(\phi)(x) = \frac{\phi(x) - \phi(0)\theta(x)}{x} \in \mathscr{S}.$$

Justifier que $\phi \to \Psi(\phi)$ est continue de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$. En déduire les solutions de $xT = S$ dans $\mathscr{S}'$.

2. *Montrer que les solutions de $xT = 1$ dans $\mathscr{S}'$ sont les : $vp\frac{1}{x} + C\delta_0, C \in \mathbb{R}$.*

Exercice 9 1. *Soit $f(x)$ la fonction 1 périodique égale à $x - \frac{1}{2}$ pour $0 < x < 1$ et $f(0) = 0$. En calculant sa série de Fourier, montrer que :*

$$f(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}.$$

2. *En dérivant dans $\mathscr{S}'$ l'égalité précédente, montrer que :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nx}.$$

3. *On pose : $\Delta_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ (le peigne de Dirac), montrer que dans $\mathscr{S}'$: $\mathcal{F}(\Delta_1) = \Delta_1$. En déduire que pour tout $\phi \in \mathscr{S}$:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(n)$$