Master 1
Mathématiques Appliquées et Statistiques
Mathématiques et Applications
Année 2022-2023

Espace L^p, analyse de Fourier, distributions

Devoir Maison : à rendre le 2 décembre 2022

Les 3 exercices doivent être rendus sur des feuilles indépendantes (vous pouvez répondre directement sur le sujet)

On rappelle que la transformée de Fourier a été normalisée par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi}\, \mathrm{d}x$$

lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 1. On pose $f_1 := \mathbf{1}_{[-1/2,+1/2]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1/2, +1/2]$.

(1) Calculez $f_1 * f_1$.

Soit $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, continue par morceaux, mais qui peut avoir des discontinuités.

(2) Montrez que $f_1 * g$ est bien définie.

(3) Montrez qu'il existe $M_g > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}$ on a

$$|f_1 * g(x+h) - f_1 * g(x)| \leq 2M_g|h|,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(4) Rappelez la définition d'uniforme continuité et montrez que la fonction $f_1 * g$ est uniformément continue.

(5) Pour $\delta > 0$, on pose $f_\delta(x) := \frac{1}{\delta} f_1(\frac{x}{\delta})$. Tracer le graphe de f_δ et vérifier que $\int_{\mathbb{R}} f_\delta(x)dx = 1$.

(6) Si g est continue en $x \in \mathbb{R}$, montrez que $\lim_{\delta\to 0} f_\delta * g(x) = g(x)$.

(7) Si g est continue sur tout $\mathbb{R}$, montrez que $f_1 * g$ est dérivable (partout) et calculer sa dérivée.

Exercice 2. Dans cet exercice, on établira avec soin toutes les convergences des intégrales considérées.

(1) Soit $a > 0$ et γ_a définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_a(x) = e^{-2\pi a|x|}$. Calculer la transformée de Fourier de φ_a.
Indication: Pour calculer une intégrale contenant une valeur absolue, on découpe l'intégrale en morceaux où ce qui est dans la valeur absolue est constant.

(2) En déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

(3) Calculer $\varphi_a * \varphi_a$.
Indication: On commencera par montrer que la convolution de deux fonctions paires et paires pour se ramener au calcul de $\varphi_a * \varphi_a(x)$ uniquement pour $x \geq 0$.

(4) En déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

(5) En déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 3. Soit α un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|^\alpha$. Calculer la dérivée au sens des distributions de f (*i.e.* de la distribution T_f associée à f).