Master Mathématiques et Applications
Espaces L^p, Distributions

Université de Bordeaux
2022-23

Transformée de Fourier

Exercice 1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ avec $\alpha > 0$.*

1. *Calculer la transformée de Fourier de f.*
2. *En déduire la tranformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.*
3. *Calculer $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.*

Exercice 2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ avec $\alpha > 0$.*

1. *Montrer $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$*
2. *Montrer que $\hat{f}$ est C^1 et vérifie $\hat{f}' = -\frac{\xi}{2\alpha}\hat{f}$.*
3. *En déduire l'expression de $\hat{f}$.*

Exercice 3

1. *Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe des fonctions $p_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ dépendant polyniomalement des $\partial^\gamma \theta$, $\gamma \le \alpha - \beta$ telles que*
$$\partial_x^\alpha(\varphi \circ \theta) = \sum_{\beta \le \alpha} p_{\alpha,\beta} \partial^\beta \varphi \circ \theta$$
2. *En déduire que si $\varphi \in \mathscr{S}^d(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ est linéaire alors $\varphi \circ \theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*
3. *Soit A une matrice symétrique définie positive de taille $d \ge 2$. Soit $f_A(x) = e^{-\langle Ax, x\rangle}$. Montrer que $f_A \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*
4. *Calculer $\hat{f}_A$.*

Exercice 4

1. *Montrer que l'équation $f * f = f$ possède une unique solution dans L^1 et donner cette solution.*
2. *Montrer que l'équation $f * f = f$ possède une infinité de solution dans L^2.*

Exercice 5 *Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$.*

1. *Exprimer $\|\partial_{x_1}\partial_{x_2} f\|_{L^2}$ en fonction de $\|\xi_1\xi_2\hat{f}\|_{L^2}$.*
2. *Montrer qu'il existe une constante C universelle telle que $\|\partial_{x_1}\partial_{x_2} f\|_{L^2} \le C\|\Delta f\|_{L^2}$.*

Exercice 6 *(Principe d'incertitude de Heisenberg) Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles et normalisée dans L^2, $\int f^2 = 1$.*

1. *Montrer que $\int x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$.*

2. *En déduire que* $\|\xi\hat{f}\|_2\|xf\|_2 \geq \frac{1}{2}$
3. *Dans quel cas a-t-on égalité ?*

Exercice 7 *(Espace de Wiener) Soit* $W = L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ *l'espace des fonctions* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *telles qu'il existe* $g \in L^1(\mathbb{R})$ *telle que* $f = \hat{g}$

1. *Montrer que* $f \in W$ *ssi* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$
2. *Montrer que pour tout* $p \in [1, +\infty]$, $W \subset L^p(\mathbb{R})$.
3. *Montrer que* $f \in W \Leftrightarrow \hat{f} \in W$.
4. *Montrer que* $N(f) = \|f\|_1 + \|\hat{f}\|_1$ *est une norme sur* W *et que* W *est complet pour* N.
5. *Montrer que* W *est dense dans* L^p *pour tout* $1 \leq p < +\infty$.
6. *Montrer que* W *est dense dans* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ *(l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers* 0 *à l'infini).*

Exercice 8 *Le but de cet exercice est de démontrer que la transformée de Fourier* $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0$ *n'est pas continue, où* $\mathcal{C}_0$ *désigne l'espace des fonctions continues ayant* 0 *pour l'imite en l'infini. Dans toute la suite, on munit* L^1 *de la norme* $\|.\|_1$ *et* $\mathcal{C}_0$ *de* $\|.\|_\infty$. *On "rappelle" le théorème de l'application ouverte (qui sera vu au S2) : si* T *est un isomorphisme entre deux Banach et si* T *est continu, alors* T^{-1} *est aussi continue.*

1. *Soient* $g_n = 1_{[-n,n]}$ *et* $h = g_1$. *Calculer* $g_n * h$.
2. *Calculer* $f_n := \mathcal{F}(g_n * h)$.
3. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = +\infty$
4. *Montrer que* $\mathcal{F}$ *n'est pas surjective.*

Exercice 9 *(Espaces de Sobolev). Dans cet exercice, on note* $\langle\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$. *Pour tout* $s \geq 0$ *on définit l'espace* $H^s(\mathbb{R}) := \{u \in L^2(\mathbb{R}),\ \langle\xi\rangle^s\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})\}$. *On munit* H^s *du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi.$$

1. *Identifier l'espace* H^0
2. *Montrer que* $(H^s, \langle ., .\rangle_s)$ *est un espace de Hilbert*
3. *Montrer que* $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ *pour tout* $s > 0$.
4. *Montrer que pour* $s > \frac{1}{2}$, H^s *s'injecte continument dans* L^∞.
5. *Montrer que* $u \in H^1$ *si et seulement si il existe une fonction* $v \in L^2$ *telle que pour tout* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\int u\varphi' = -\int v\varphi$. *Que vaut* v *lorsque* $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *? On notera par la suite* $v = \delta u$. *Que vaut* $\widehat{\delta u}$ *?*
6. *Soit* $f \in L^2$. *On cherche à résoudre l'équation*
$$u - \partial_x^2 u = f. \tag{1}$$
   (a) *On pose* $u(x) = \int e^{ix\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{1+\xi^2}d\xi$. *Montrer que* $u \in H^2$ *et que* $u - \delta\delta u = f$.
   (b) *Montrer que si* $f \in H^1$ *alors* $u \in C^2$ *est solution de* (1)