Convolution

Exercice 1 *Soit* $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$*. Calculer* $f * f$*.*

Exercice 2 *Soit* $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$*. Calculer* f^{*n}*.*

Exercice 3 *Pour toute fonction* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$*, on définit le support de* f *par*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) \neq 0\}}.$$

On note $C_c(\mathbb{R}^d)$ *l'espace des fonctions continues à support compact. Montrer que si* $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ *alors* $f * g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ *et* $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$*.*

Exercice 4 *Soient* $a \in \mathbb{R}$*,* $g = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq a$*,* $f_n = \mathbf{1}_{[a,n]}$*. Calculer* $f_n * g$*. Etudier* $\lim_{n\to+\infty} f_n * g(x)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$*. Mêmes questions en remplacant* f_n *par* $h_n = \mathbf{1}_{[-n,a]}$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exercice 5 *Soient* $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ *et* $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$*. Montrer que*

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Exercice 6 *Soit* $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *une fonction positive telle que* $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$*. Pour* $h > 0$*, on pose* $\rho_h(x) = h^{-d}\rho(\frac{x}{h})$*. Le but de cet exercice est de montrer que pour tout* $f \in L^p$*,* $1 \leq p < \infty$*, on a* $\rho_h * f \to f$ *dans* L^p *quand* $h \to 0$*.*

1. *Montrer que pour tout* $h > 0$*, on a*

$$\rho_h * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_h(y)\big(f(x-y) - f(x)\big)dy.$$

2. *Montrer que pour tout* $\delta > 0$*, on a* $\lim_{h\to 0} \int_{|x|\geq\delta} \rho_h(x)dx = 0$*.*
3. *Montrer que* $\lim_{h\to 0} \|\rho_h * f - f\|_p = 0$
4. *Montrer que* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *est dense dans* L^p*.*

Exercice 7 *Soit* $p, q \in [1,\infty]$ *deux exposants conjugués :* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$*.*

1. *Montrer que la fonction* $f * g$ *est bien définie, vérifie*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

et que c'est une fonction uniformément continue.

2. *Montrer de plus, que si* $1 < p < +\infty$ *alors* $\lim_{|x|\to+\infty} f * g(x) = 0$.
3. *Que se passe-t-il pour* $p = 1$ *et* $q = +\infty$ *?*

Exercice 8 *Soient* $p, q, r > 0$. *On suppose qu'il existe* $C > 0$ *tel que pour toutes fonctions* f *et* g *continues à support compact on a*

$$\|f * g\|_r \leq C\|f\|_p\|f\|_q.$$

En considérant des fonctions de la forme $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ *avec* $\lambda > 0$, *montrer qu'on a nécessairement* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

Exercice 9 *Le but de cette exercice est de démontrer l'inégalité de Young. On suppose que* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ *sont tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. *On veut montrer que pour tout* $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, *on a*

$$\|f * g\|_r \leq, \|f\|_p\|g\|_q. \tag{1}$$

1. *On suppose* $r = 1$. *Montrer que* $p = q = 1$ *et démontrer* (1).
2. *On suppose que* $r = +\infty$. *Démontrer* (1).
3. *On suppose désormais que* $1 < r < \infty$.
   (a) *On suppose que* $p = 1$. *En appliquant l'inégalité de Holder aux fonctions* $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{q-1}{q}}$ *et* $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{q}}||g(y)|$, *montrer que*

   $$\int |f(x-y)g(y)|dy \leq \|f\|_1^{1-\frac{1}{q}}\Big(\int |f(x-y)||g(y)|^q dy\Big)^{\frac{1}{q}}$$

   En déduire que $f * g \in L^q$ *et que* (1) *est valide.*

   (b) *On suppose maintenant que* $1 < p, q < \infty$.
      i. *Montrer que pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^d$, *on a*

      $$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{p}{r}}|g(y)|^{\frac{q}{r}} \times |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \times |g(y)|^{\frac{r-q}{r}}.$$

      ii. *En appliquant l'inégalité de Holder à trois termes aux fonctions ci-dessus, montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$, *on a*

      $$\Big(\int |f(x-y)g(y)|dy\Big)^r \leq (|f|^p * |g|^q(x))\|f\|_p^{r-p}\|g\|_q^{r-q}$$

      iii. *Conclure à l'aide de la question 1).*