

IUT de Bordeaux, Département GEII  
Automatique, Semestre 3

# *Les systèmes dynamiques (4h)*

**Par David GUCIK-DERIGNY**

*Email: david.gucik-derigny@u-bordeaux.fr  
IUT de Bordeaux, Département GEII  
15 rue de Naudet, CS 10207, 33175 Gradignan*

# Bibliographie du cours

## **La bibliographie utilisée en support de ce cours est:**

- Cours de prépa intégrée et école d'ingénieurs UTBM : UE SY20/SY46 de Daniel Hissel
- Automatique de Yves Granjon, Dunod, Edition 2003

# Plan du cours

*Introduction à la commande en boucle fermée*

*Cours 1: Calcul de transmittances et schémas fonctionnels*

*Cours 2: Etude fréquentielle des systèmes*

*Cours 3: Analyse transitoire et stabilité des systèmes dynamiques*

*Cours 4: Identification des systèmes dynamiques*

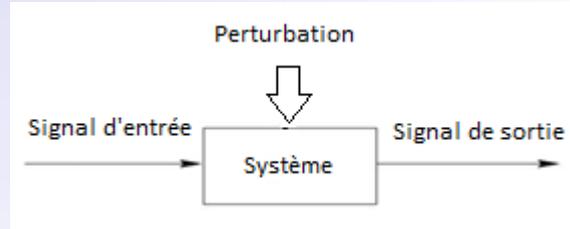
A decorative border composed of intricate, symmetrical scrollwork and floral motifs, rendered in a classic woodcut or engraved style. The border frames the central text.

*Introduction au concept de  
commande en boucle fermée*

# Introduction aux systèmes de commande

## 1) Terminologie

### 1.1 Signaux et perturbations



On appelle **signal d'entrée** l'excitation ou stimulus appliqué au système de commande à partir d'une source d'énergie extérieure, afin de provoquer une réponse spécifique.

On appelle **signal de sortie** la réponse effective obtenue à partir d'un système de commande.

Une **perturbation** est une grandeur d'entrée autre que le signal d'entrée provoquant un effet non désiré sur le système. Elle peut être mesurable ou non, stochastique (faisant intervenir les lois du hasard) ou déterministe (parfaitement connue).

Un **système de commande** est un ensemble de constituants branchés ou reliés les uns aux autres de telle sorte qu'il puisse se commander ou commander un autre système.

# Introduction aux systèmes de commande

## 1.2 Classification des systèmes de commande

Les systèmes de commande sont divisés en deux catégories:

- En boucle ouverte
- En boucle fermée

Un **système de commande en boucle ouverte** est un système où le signal de commande est indépendant de la sortie.

Un **système de commande en boucle fermée** est un système où le signal de commande dépend directement ou indirectement du signal de sortie

*Ex. de la douche à commande manuelle: la température de l'eau comme signal de sortie et l'angle d'ouverture du mitigeur chaud/froid comme signal d'entrée*

- Si le réglage de la température d'entrée est fixé à priori, alors la personne prenant sa douche n'a pas d'information sur la température et ne peut pas agir sur le mitigeur => **commande en boucle ouverte**

- Si le réglage de la température est réglable, alors la personne prenant sa douche a une information directe sur la température et peut agir sur le mitigeur en fonction de l'écart entre la température attendue et la température ressentie => **commande en boucle fermée**



# Introduction aux systèmes de commande

## 1.3 Notion d'asservissement

On définit la **notion d'asservissement** d'une grandeur physique  $y$  à une grandeur de consigne  $u$  lorsqu'on force par un dispositif particulier la grandeur  $y$  à suivre au mieux l'évolution de la grandeur physique  $u$ .

Lorsque la consigne est constante, on est dans le cas d'une **régulation (ex: régulation vitesse dans une voiture)**.

Si la consigne est variable, on est dans le cas d'une **poursuite (ex: missile sur une cible en déplacement)**.

## 1.4 Autres définitions

Un **système possède un retard pur**  $\tau$  si le signal de sortie  $y(t)$  est décalé de  $\tau$  par rapport au signal d'entrée, soit  $y(t) = u(t - \tau)$ .

*Ex. de la douche: l'eau des tuyauteries est froide et nécessite un certain temps de parcours entre le chauffe eau et la douche, ce temps est considéré comme un retard pur.*

Un signal de sortie admet un **dépassement (en %)** si la réponse du système  $y(t)$  sort de l'intervalle  $[y(0) \quad y_f]$ , où  $y(0)$  correspond à la valeur initiale de la sortie et  $y_f$  correspond à la valeur finale attendue.

# Introduction aux systèmes de commande

Réponse de la température d'une douche suite à l'ouverture du mitigeur d'entrée:

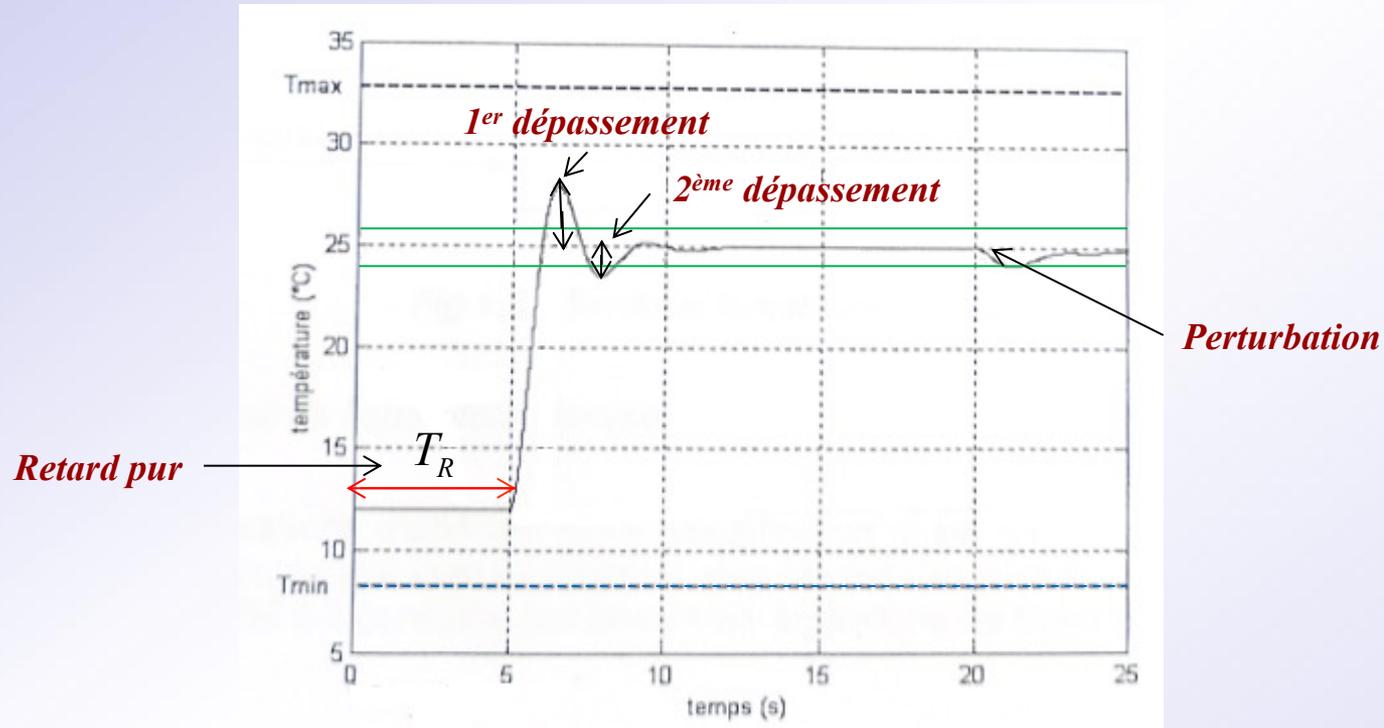


Fig 1: Evolution de la température de la douche en fonction du temps

# Les modèles en vue de l'étude de systèmes de commande

## 3) Les modèles des systèmes dynamiques

Un modèle permet **d'avoir la connaissance du comportement d'un système dynamique**. Il intègre la description de la structure d'un système et de ses constituants. Il existe plusieurs types de représentations sous forme:

- De **modèles mathématiques** (équations différentielles)
- De **schémas fonctionnels** (représentations graphiques du comportement des systèmes)

Ces modèles sont **fondés sur des hypothèses simplifiées de la réalité**.

Leurs résolutions mathématiques permettent d'obtenir la **trajectoire du système** qui **caractérise le comportement** de ce dernier au cours du temps.

# Les modèles en vue de l'étude de systèmes de commande

## 3.1 Les schémas fonctionnels

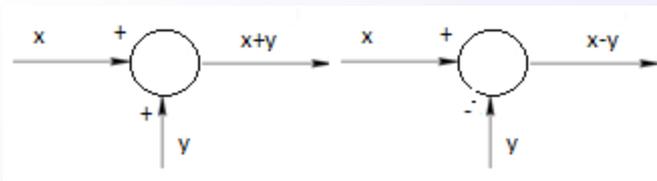
Un **schéma fonctionnel** est une représentation graphique des relations de cause à effet entre un signal de sortie et un signal d'entrée d'un système.



*Fig 2. Schéma fonctionnel avec un seul élément*

**Remarque:** Les flèches indiquent le sens dans lequel l'information ou le signal se transmettent (causalité).

Des opérateurs algébriques sont utilisés dans ces représentations portant le signe + et -. Un élément appelé **comparateur** permet de relier l'opération algébrique de deux signaux. Le signal de sortie est ainsi constitué de la somme algébrique des signaux d'entrée.



*Fig. 3 Schéma fonctionnel de comparateur*

# Les modèles en vue de l'étude de systèmes de commande

Pour prélever un même signal pour un autre élément ou un comparateur, on utilise alors un point de branchement.

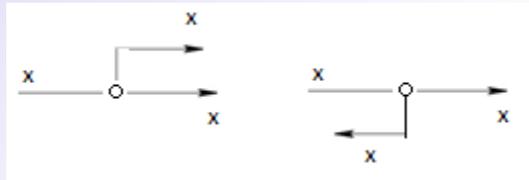


Fig. 4 Schéma fonctionnel d'un point de branchement

## 3.2 Schéma fonctionnel d'un asservissement

L'objectif est ici de présenter un exemple de schéma fonctionnel d'asservissement le plus simple qui existe. Il relie les éléments fonctionnels constituant un système en boucle fermée.

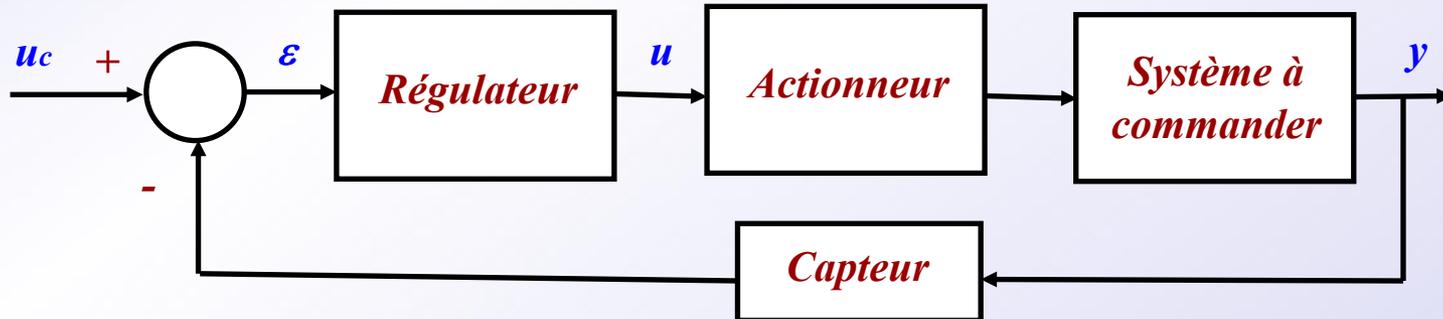


Fig. 5 Schéma fonctionnel d'un point asservissement

# Les modèles en vue de l'étude de systèmes de commande

## Schéma de la commande en boucle fermée

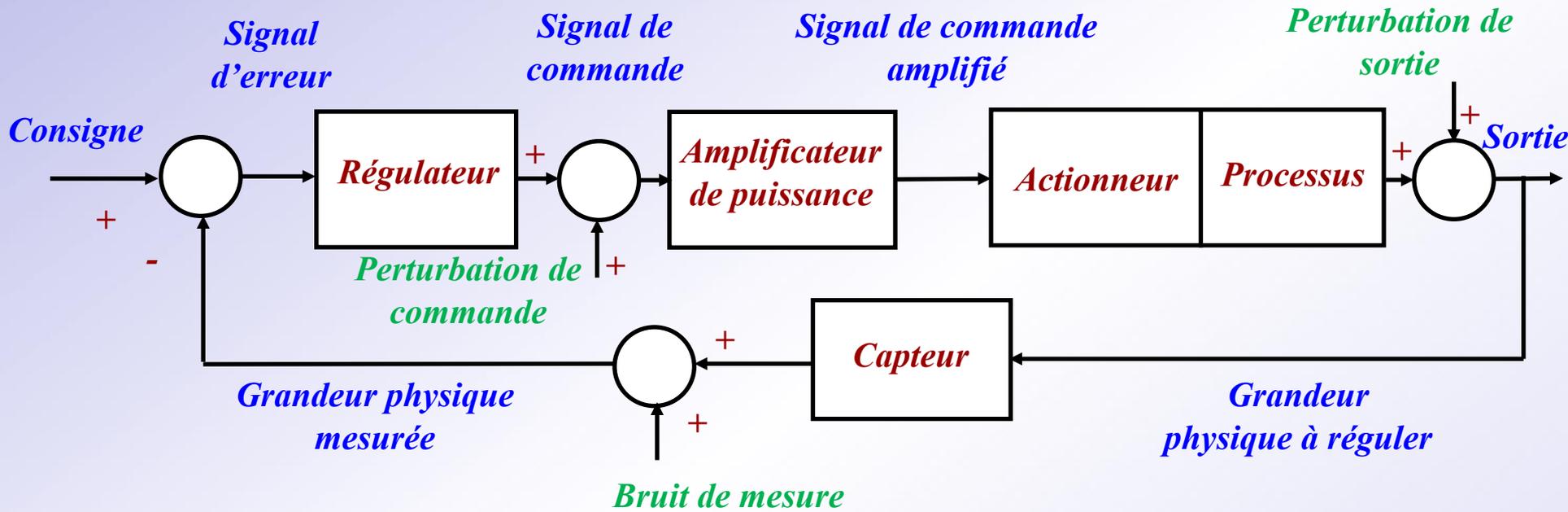
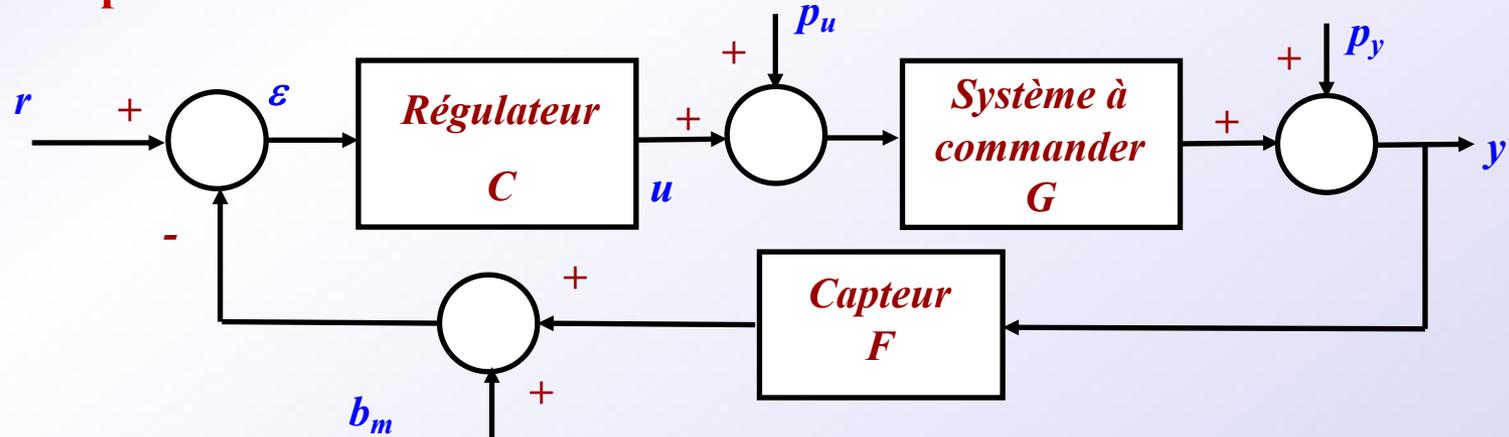


Fig. 6 Schéma fonctionnel complet d'un asservissement

## Ou plus simplement



# Les modèles en vue de l'étude de systèmes de commande

Sur la fig. 6 du système en boucle fermée, on a les éléments suivants:

- **Consigne**  $u_c$  désigne la valeur d'une grandeur physique souhaitée que le signal de sortie  $y$  doit suivre.
- **Signal d'erreur**  $\varepsilon$ , résultat de la comparaison entre la consigne et la grandeur de sortie.
- **Régulateur** établit une loi de commande au travers du signal de commande  $u$  pour réduire le signal d'erreur idéalement à 0.
- **Actionneur** réalise la commande du système.
- **Système** que l'on souhaite contrôler pour une certaine finalité
- **Capteur** qui mesure la grandeur du signal de sortie du système à réguler

## 3.3 Rôle de l'asservissement

### Concevoir un régulateur de sorte que le système bouclé soit:

➔ **stable**, c'est à dire qu'en régime permanent, la grandeur régulée doit toujours converger vers un point d'équilibre stable, et ne doit pas osciller autour du point de consigne ou même diverger.

➔ **précis**, c'est à dire qu'en régime permanent, la grandeur régulée doit être maintenue en permanence la plus proche possible de la consigne.

➔ **rapide**, c'est à dire que l'on cherchera à rejoindre le point d'équilibre le plus rapidement possible.

# Systemes linéaires et équations différentielles

## 4) Systemes linéaires et équations différentielles

Pour réaliser un asservissement avec un cahier des charges fixés, il est nécessaire d'obtenir un modèle de comportement du système.

En vue d'obtenir ce modèle, une première solution consiste à utiliser **les principes fondamentaux des lois de la physique** pour obtenir une description du comportement d'un système

⇒ Ces lois aboutissent généralement à **établir des systèmes d'équations différentielles**.

### 4.1 Les systèmes linéaires

La propriété de linéarité est une **propriété mathématique** caractérisant une classe d'équations différentielles.

- On appelle **système linéaire**, un système (qui vérifie le théorème de superposition) tel que:
  - Si le signal d'entrée  $u_1(t)$  produit le signal  $y_1(t)$  et si le signal  $u_2(t)$  produit le signal  $y_2(t)$ ,
  - Alors le signal d'entrée  $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$  produit le signal de sortie  $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$  et ce, quelque soit les signaux d'entrées/sorties

# Systemes linéaires et équations différentielles

- D'une façon plus générale, la notion de linéarité peut être représentée par **le principe de superposition**:

- Si  $y_i(t)$  la réponse du processus à une commande  $u_i(t)$ , alors la réponse à la commande

$$u(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i(t), \alpha_i \in \mathfrak{R}$$

- Pour des conditions initiales et un horizon de temps donné, la réponse est donnée par:

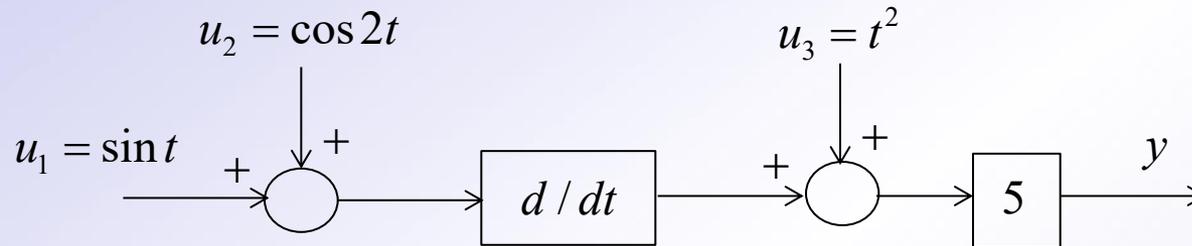
$$y(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i(t)$$

- Si la réponse du système ne dépend que de ses conditions initiales à l'instant  $t_0$ , le **système est alors dit stationnaire et invariant**.
- Lorsqu'un **système ne satisfait pas au théorème de superposition**, il est dit **non linéaire**.

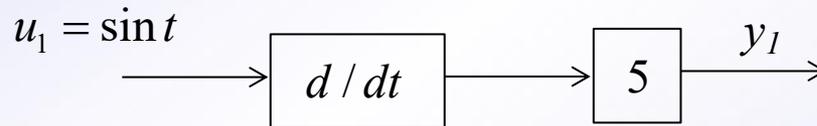
# Systemes linaires et equations differentielles

## Exercice 1: Theoreme de superposition

- Determiner le signal de sortie en utilisant le principe du theoreme de superposition



- 1er cas:  $u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 = 0$



On en deduit que:

$$y_1 = 5\cos(t)$$

# Systemes linéaires et équations différentielles

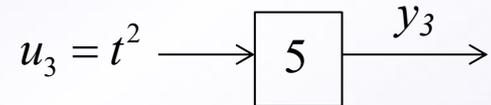
- 2ème cas:  $u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$



On en déduit que:

$$y_2 = 5(-2 \sin(2t)) = -10 \sin(2t)$$

- 3ème cas:  $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$



On en déduit que:

$$y_3 = 5t^2$$

Par application du théorème de superposition, on obtient:

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

soit

$$y = 5\cos(t) - 10 \sin(2t) + 5t^2$$

# Systemes linéaires et équations différentielles

## 4.2 Notion de causalité

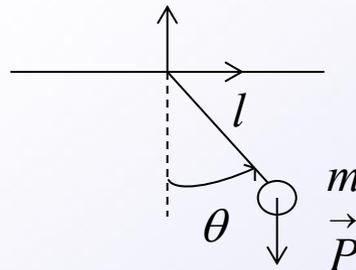
Un **systeme est dit causal** si le signal de sortie ne dépend que des valeurs présentes et passées de la variable d'entrée, c'est-à-dire que le signal de sortie  $y(t)$  ne dépend que du signal d'entrée  $u(t)$  que pour des valeurs  $t \geq 0$ .

## 4.3 Limite de représentation des systemes linéaires

Si le systeme est non-linéaire, il est possible de **se ramener sur un domaine restreint d'espace à un systeme linéaire**.

*Ex. sur un pendule mécanique:*

Soit un pendule mécanique de masse  $m$ , de longueur  $l$  et d'angle  $\theta$ , représenté par la figure 7.



*Fig. 7 Pendule mécanique oscillant*

# Systemes linéaires et équations différentielles

En appliquant le principe fondamentale de la dynamique en rotation, on obtient:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum \vec{M}_{F_{ext}} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \text{ où } J = ml^2 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (3)$$

Le système (3) est dit non linéaire à cause du terme en  $\sin \theta$ . On peut approximer le modèle obtenu en supposant qu'au voisinage de  $\theta \approx 0$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ . On obtient alors que le modèle du système peut être approximé par:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (4)$$

**Le modèle ne reste donc valable que pour  $\theta \approx 0$  sur un **domaine restreint de l'espace.****

# Equations différentielles linéaires à coefficients constants

## 4.4 Résolution d'équations différentielles

Il faut impérativement savoir résoudre des équations différentielles du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre.

=> Voir cours de maths de 1A!!!

# Auto-évaluation introduction

## Mes compétences à l'issue de l'introduction:

### Etre capable de:

- Citer les principales définitions et remobiliser la terminologie relatives aux systèmes de commande
- Expliquer l'intérêt de la boucle fermée par rapport à la boucle ouverte pour un système de commande
- Donner un schéma fonctionnel classique d'asservissement avec sa terminologie
- Définir ce qu'est une équation différentielle linéaire et de citer le théorème de superposition associé.
- Résoudre une équation différentielle du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre

A decorative border made of intricate, symmetrical scrollwork and floral motifs, rendered in a detailed, engraved style. The border frames the central text.

**Cours 1:** *Calcul de transmittances  
et schémas fonctionnels*

# Introduction

## Les objectifs de ce cours sont:

- De rappeler l'intérêt de l'outil de la transformée de Laplace (TL)
- De définir ce qu'est une fonction de transfert
  - Application de la TL à l'obtention d'une fonction de transfert
- D'utiliser la représentation sous forme de schéma blocs pour représenter un modèle à partir de ses équations différentielles et de connaître les règles associées
- De déterminer une fonction globale équivalente de transfert lors de la présence de plusieurs modèles interconnectés dans un schéma blocs ayant différentes structures

## 1) La transformée de Laplace

La **transformée de Laplace** est un outil

- permettant de simplifier la résolution d'équation différentielle d'ordre  $n$  à coefficients constants (voir cours de maths 1A).
- permet de transformer le problème de la résolution portant sur le domaine temporel en le transformant un problème représentant dans le domaine complexe. Il est bien sûr nécessaire de revenir à la fin par une transformation inverse pour la résolution dans le domaine temporel
- utilisé également pour représenter les fonctions de transfert qui exprime la relation entre le signal de sortie et le signal d'entrée d'un système.

# Transformée de Laplace

La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  est donnée par

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-tp} dt \quad (1)$$

Quelques théorèmes très utiles pour l'automatique

**Théorème de la valeur finale:**  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$  alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$  (2)

**Théorème du retard:**  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$  alors  $\mathcal{L}\{f(t-T)\} = \lim_{p \rightarrow 0} e^{-pT} F(p)$  (3)

**Théorème de la dérivée:**  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$  alors  $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = pF(p) - f(0^+)$  (4)

**Théorème de l'intégrale:**  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$  alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int f(t)dt = \frac{F(p)}{p}$  (5)

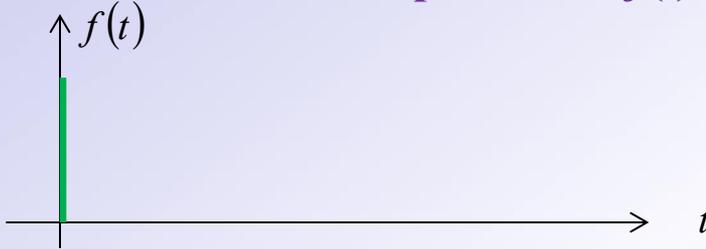
**Théorème de la dérivée d'ordre k:**  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$  alors

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = p^k F(p) - p^{k-1} f(0^+) - p^{k-2} f^{(1)}(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+) \quad (6)$$

# Transformée de Laplace de signaux élémentaires

Transformée de Laplace de signaux utiles en automatique

→ Impulsion de Dirac d'amplitude  $A$ :  $f(t) = A\delta(t)$



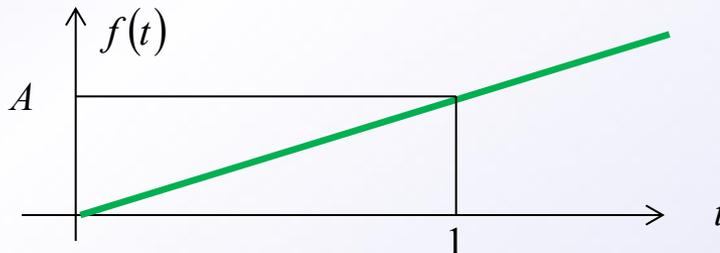
$$\mathcal{L}\{A\delta(t)\} = A$$

→ Echelon d'Heaviside d'amplitude  $A$ :  $f(t) = AH(t)$



$$\mathcal{L}\{AH(t)\} = \frac{A}{p}$$

→ Rampe de pente  $A$ :  $f(t) = Ar(t)$



$$\mathcal{L}\{Ar(t)\} = \frac{A}{p^2}$$

# Table de transformée de Laplace (1/2)

Fonction temporelle	Fonction de Laplace
$u(t) = \delta(t)$	$U(p) = 1$
$u(t) = \Gamma(t)$	$U(p) = \frac{1}{p}$
$u(t) = kt$	$U(p) = \frac{k}{p^2}$
$u(t) = t^n$	$U(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$s(t) = e^{-\alpha t}$	$S(p) = \frac{1}{p + \alpha}$
$s(t) = te^{-\alpha t}$	$S(p) = \frac{1}{(p + \alpha)^2}$
$s(t) = 1 - e^{-\alpha t}$	$S(p) = \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$s(t) = e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$	$S(p) = \frac{\beta - \alpha}{(p + \alpha)(p + \beta)}$

# Table de transformée de Laplace (2/2)

Fonction temporelle	Fonction de Laplace
$s(t) = t - \frac{1}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}$	$S(p) = \frac{1}{p^2(p + \alpha)}$
$s(t) = 1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} e^{-\beta t}$	$S(p) = \frac{\alpha\beta}{p(p + \alpha)(p + \beta)}$
$s(t) = 1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}$	$S(p) = \frac{\alpha^2}{p(p + \alpha)^2}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$

# Fonction de transfert

## 2) Notion de fonction de transfert

Soit un procédé linéaire stationnaire d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $s(t)$  (8)



On suppose connaître l'équation différentielle liant l'entrée à la sortie de ce système

$$a_0 u(t) + a_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}, n \leq m \quad (7)$$

En appliquant la transformée de Laplace (propriété de la dérivée) à l'équation (7) **en supposant les conditions initiales nulles**, il s'ensuit que:

$$U(p)(a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) = S(p)(b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m) \quad (8)$$

**La fonction de transfert de ce système, notée  $H(p)$  correspond au rapport de la transformée de Laplace de sa sortie et de son entrée.**

$$H(p) = \frac{S(p)}{U(p)} = \frac{Num(p)}{Den(p)} \quad \text{où } U(p) = \mathcal{L}\{u(t)\}, \quad S(p) = \mathcal{L}\{s(t)\}$$
$$= \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}$$

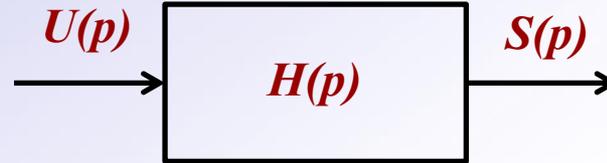
**Représentation fréquentielle**

(9)

# Systemes du premier ordre

## 2.1 Fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre

Un systeme du premier ordre est decrit par le schéma bloc



Où la fonction de transfert (ou transmittance) est donnée par

$$H(p) = \frac{K}{(\tau p + 1)} \quad (10)$$

Il est possible de faire le lien entre le domaine temporel et fréquentiel comme suit:

$$\mathcal{L} \left\{ \tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ku(t) \right\} (p)$$

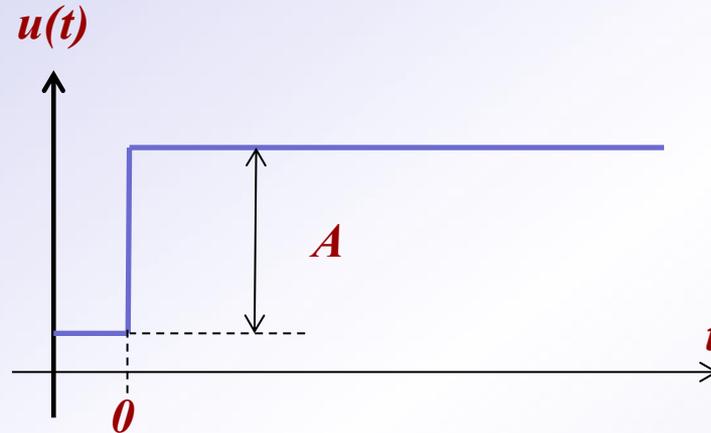
$$\Leftrightarrow \tau p S(p) + S(p) = KU(p)$$

$$\Leftrightarrow S(p)(1 + \tau p) = KU(p)$$

$$\Leftrightarrow H(p) = \frac{S(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

# Systemes du premier ordre

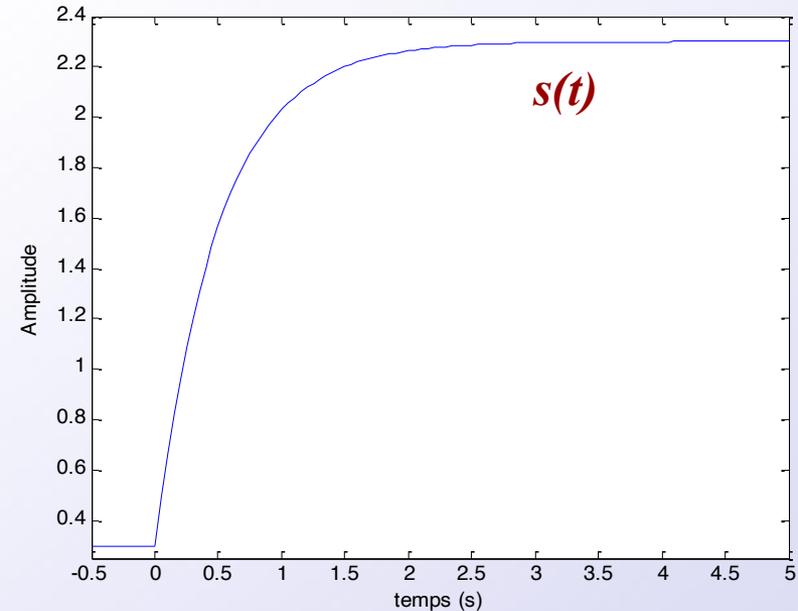
Si l'entrée  $u(t)$  est un échelon d'amplitude  $A$



Alors la sortie  $s(t)$  est donnée par:

$$s(t) = KA \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

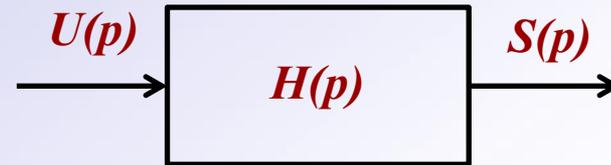
La représentation temporelle associée est donnée à dans la figure ci-contre.



# Systèmes du second ordre

## 2.2 Fonction de transfert du 2<sup>ème</sup> ordre

Un système du second ordre est décrit par le schéma bloc



Où la fonction de transfert (ou transmittance) est donnée par

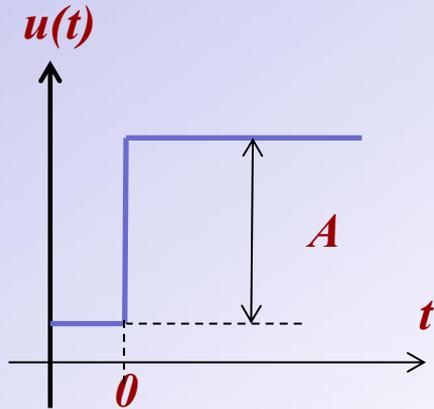
$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + 1} \quad (11)$$

Il est possible de faire le lien entre le domaine temporel et fréquentiel comme suit:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ku(t) \right\} (p) \\ & \Leftrightarrow \left( \frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1 \right) S(p) = KU(p) \\ & \Leftrightarrow H(p) = \frac{S(p)}{U(p)} = \frac{K}{\left( \frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1 \right)} \end{aligned}$$

# Systemes du second ordre

Si l'entrée  $u(t)$  est un échelon d'amplitude  $A$  et  $0 < \xi < 1$  (cas du régime oscillatoire amorti)

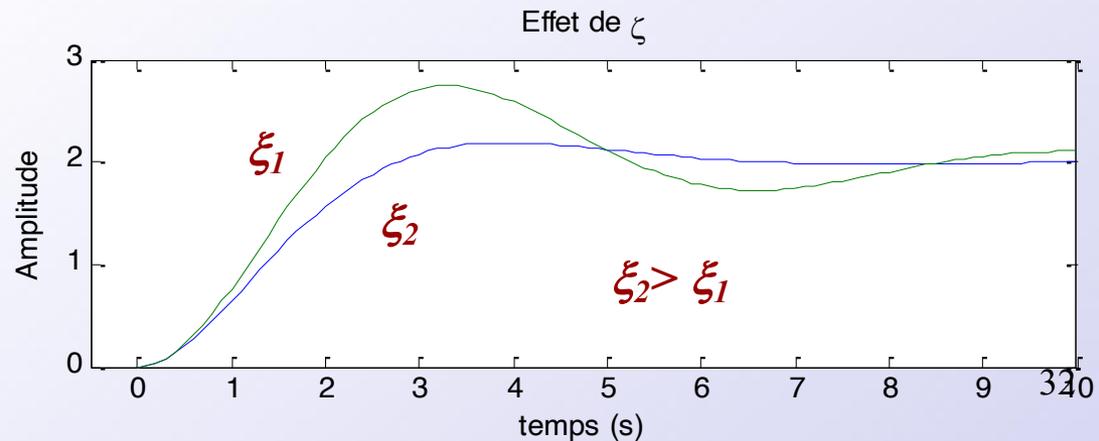
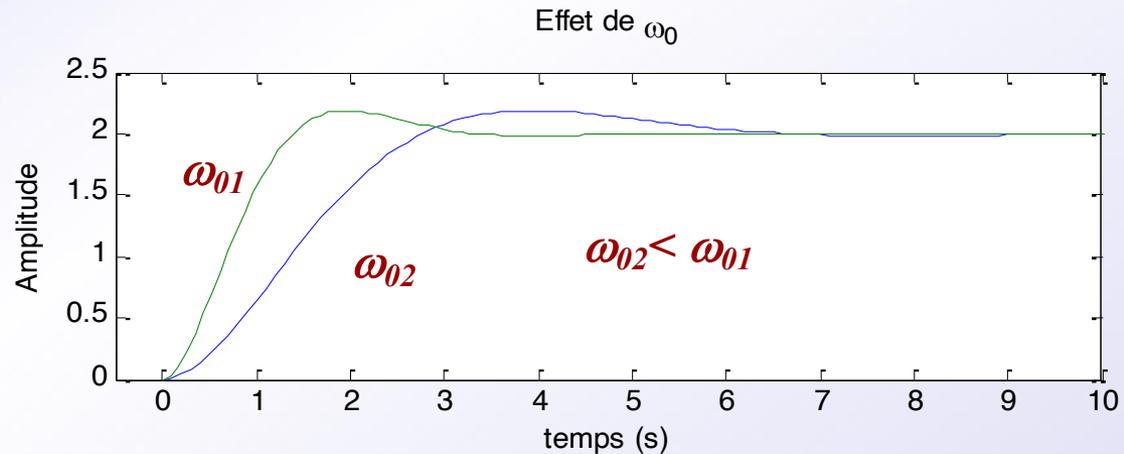


Alors la sortie  $s(t)$  est donnée par

$$s(t) = KA \left( 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_p t + \varphi) \right)$$

où

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad \varphi = \arccos(\xi)$$



# Fonction de transfert

## 2.3 Notions de pôles et de zéros

Soit la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{U(p)}$$

On appelle pôles du système les pôles de la fonction de transfert  $H(p)$  les valeurs de  $p$  telles que

$$Den(p) = 0$$

On appelle zéros du système les zéros de la fonction de transfert  $H(p)$  les valeurs de  $p$  telles que

$$Num(p) = 0$$

**Une fonction de transfert permet, dans le cas d'un système stable, de caractériser le comportement dynamique du système une fois l'effet des conditions initiales amorti.**

On dit que le système atteint **un régime permanent**. La période d'amortissement de l'effet des conditions initiales s'appellent alors **le régime transitoire**.

# Fonction de transfert

Une autre propriété importante des systèmes linéaires stables est de **fournir pour une entrée sinusoïdale une sortie sinusoïdale, en régime permanent, de même pulsation, mais de déphasage et d'amplitude pouvant être différents.**

Ex: On considère un système par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 4\frac{ds(t)}{dt} + 3s(t) = 2e(t) \quad (12)$$

Où  $e(t)$  correspond à un échelon Heaviside et les conditions initiales sont nulles

On souhaite obtenir sa fonction de transfert et déterminer les pôles de (12).

Par application de la propriété du théorème de la dérivée de la transformée de Laplace, on a

$$p^2S(p) + 4pS(p) + 3S(p) = 2E(p)$$

En factorisant, on obtient alors

$$S(p)(p^2 + 4p + 3) = 2E(p)$$

# Fonction de transfert

La fonction de transfert obtenue est donnée par

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p^2 + 4p + 3}$$

Les pôles sont obtenus en résolvant  $p^2 + 4p + 3 = 0$

Deux possibilités:

- Soit le calcul du discriminant d'une équation du second degré
- Soit la reconnaissance directe de racines évidentes

Ici, -1 est une racine évidente, donc  $p^2 + 4p + 3 = (p + 1)(p + 3) = 0$

Les racines évidentes sont donc -1 et -3.

**Remarque:** Nous verrons par la suite que le calcul des pôles d'une fonction de transfert permet de déterminer les propriétés de stabilité d'un système,

# Schémas fonctionnels

## 3) Les schémas fonctionnels

Les fonctions de transfert traduisent une relation ou un modèle de comportement entre un signal de sortie et un signal d'entrée.

Dans le cas où l'on a **plusieurs relations de modèles d'entrée/sortie qui s'imbriquent ou s'interconnectent entre eux** par des structures spécifiques, peut-on obtenir la **fonction globale entrée/sortie équivalente**?

⇒ Notion de connexion en série, en parallèle et en bouclage.

### 3.1 Structure en série

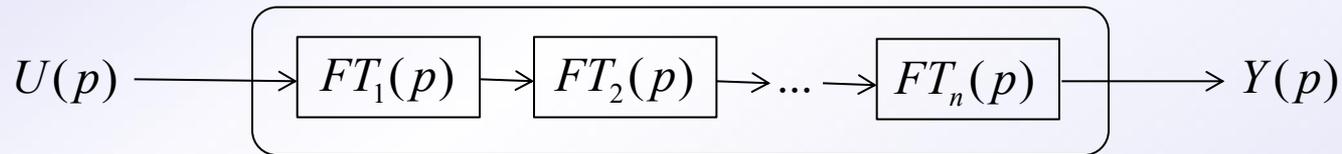


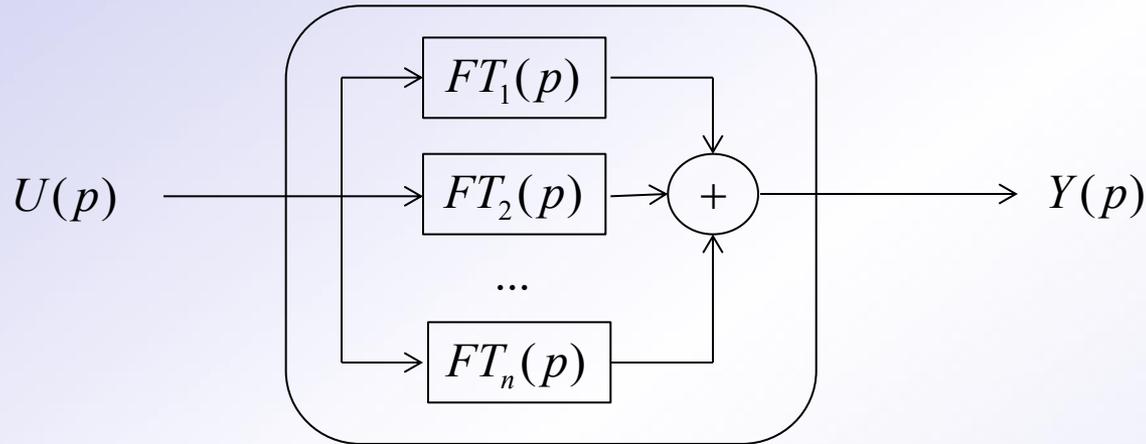
Fig.1 Connexion en série de systèmes linéaires

La fonction de transfert équivalente sera:

$$\begin{aligned} FT_{eq}(p) &= \frac{Y(p)}{U(p)} = FT_1(p)FT_2(p)\dots FT_n(p) \\ &= \prod_{i=1}^n FT_i(p) \end{aligned}$$

# Schémas fonctionnels

## 3.2 Structure en parallèle



**Fig.2 Connexion en parallèle de systèmes linéaires**

La fonction de transfert équivalente sera:

$$\begin{aligned} FT_{eq}(p) &= \frac{Y(p)}{U(p)} = FT_1(p) + FT_2(p) + \dots + FT_n(p) \\ &= \sum_{i=1}^n FT_i(p) \end{aligned}$$

# Schémas fonctionnels

## 3.3 Fonction de transfert en boucle fermée (th. de Mason)

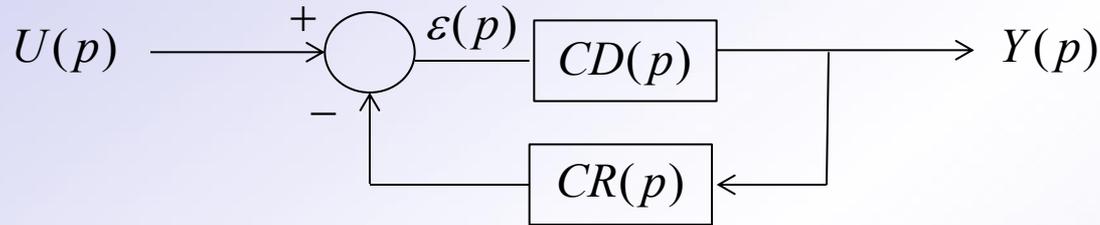


Fig.3 Structure bouclée

Les fonctions de transfert CD et CR dénotent respectivement la chaîne directe et la chaîne retour. Dans le cas d'un signe “-” associée à la chaîne retour, on est en présence d'une contre-réaction.

La fonction de transfert équivalente est donnée par:

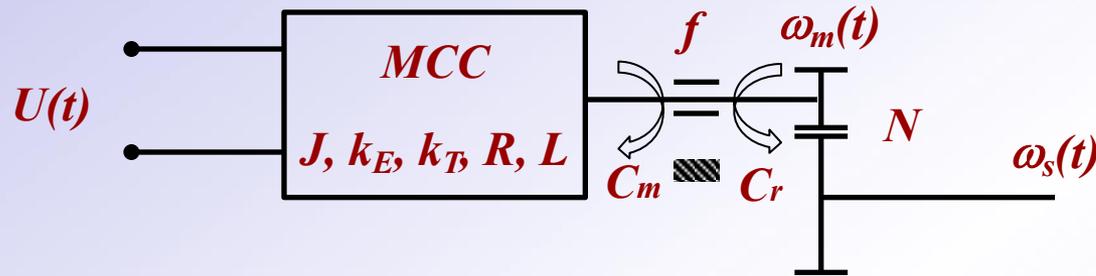
$$FT_{eq}(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{CD(p)}{1 + CD(p)CR(p)}$$

*Preuve:* A partir du schéma bloc, on peut écrire:

$$\begin{cases} \varepsilon(p) = U(p) - CR(p)Y(p) \\ Y(p) = CD(p)\varepsilon(p) \end{cases} \Rightarrow Y(p) = CD(p)(U(p) - CR(p)Y(p))$$

$$\Leftrightarrow (1 + CD(p)CR(p))Y(p) = CD(p)U(p) \Leftrightarrow \frac{Y(p)}{U(p)} = \dots$$

# Schémas fonctionels



On souhaite obtenir le schéma bloc avec en sortie la vitesse  $\omega_s(t)$  et en entrée la tension d'induit.

A partir des équations dynamiques, il est possible de déterminer la tension  $U(t)$  à appliquer au moteur pour obtenir  $\omega_s(t)$  :

$$\begin{aligned}
 \omega_s(t) &\rightarrow \omega_m(t) = \frac{1}{N} \omega_s(t) \\
 &\rightarrow C_m(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f\omega_m(t) + C_r(t) \\
 &\rightarrow C_m(t) = K_T I(t) \\
 E(t) &= K_E \omega_m(t) \\
 &\rightarrow U(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + E(t)
 \end{aligned}$$

Fig.4 Représentation des causalités implicites

**Le schéma bloc peut alors se construire selon la méthodologie suivante...**

# Schémas fonctionels

## 3.4 Les étapes de l'obtention des équations différentielles au schéma bloc

On souhaite commander la vitesse  $\omega_s(t)$  d'un arbre en sortie d'un réducteur (de rapport  $N$ ) entraîné par un moteur à courant continu (MCC), en commandant la tension d'induit  $U(t)$

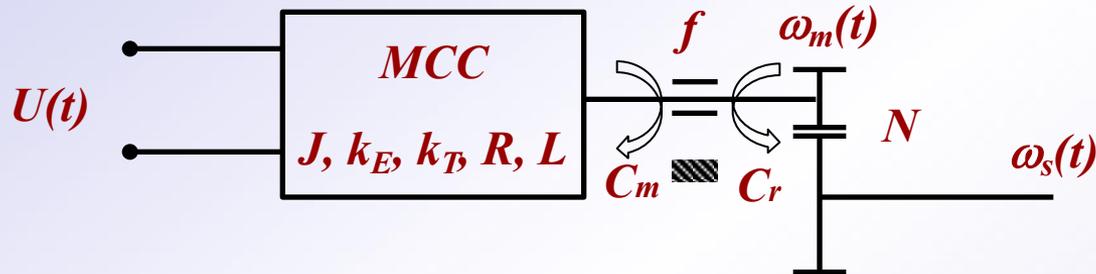


Fig.5 Schéma de représentation d'une MCC

**Etape 1:** Ecrire les équations caractéristiques du système

**-Electrique:**

$$U(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + E(t)$$

**-Mécanique:**

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m - C_r - f\omega_m(t)$$

$$\omega_s(t) = N\omega_m(t)$$

**-Electromécanique :**

$$E(t) = K_E \omega_m(t)$$

$$C_m(t) = K_T I(t)$$

# Schémas fonctionels

**Etape 2:** Traduire les équations différentielles dans le domaine de Laplace, en prenant en compte les conditions initiales (ici supposées nulles).

- **Sous partie électrique:**

$$U(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + E(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} I(p) = \frac{1}{R + Lp} (U(p) - E(p))$$

- **Sous partie mécanique:**

$$C_m(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f\omega_m(t) + C_r(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} \Omega_m = \frac{1}{Jp + f} (C_m(p) - C_r(p))$$

$$\omega_{s(t)} = N\omega_m(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} \Omega_s(p) = N\Omega_m(p)$$

- **Sous partie électromécanique:**

$$E(t) = K_E \omega_m(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} E(p) = K_E \Omega_m(p)$$

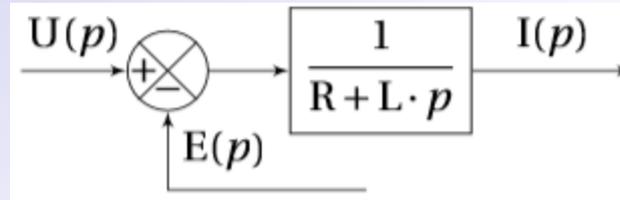
$$C_m(t) = K_T I(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} C_m(p) = K_T I(p)$$

Remarque: L'imbrication des équations est réalisée de sorte à faire apparaître la chaîne de causalité implicite de la fig. 5

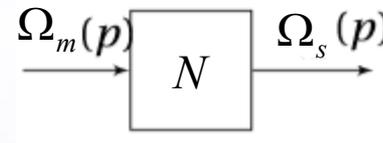
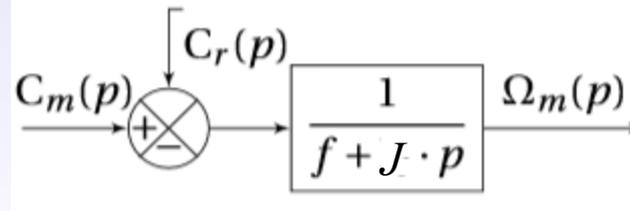
# Schémas fonctionnels

**Etape 3:** Mise sous forme de schéma bloc de chacune des relations obtenues dans le domaine de Laplace

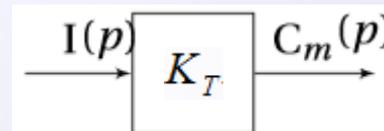
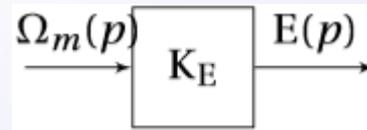
- **Sous partie électrique:**



- **Sous partie mécanique:**

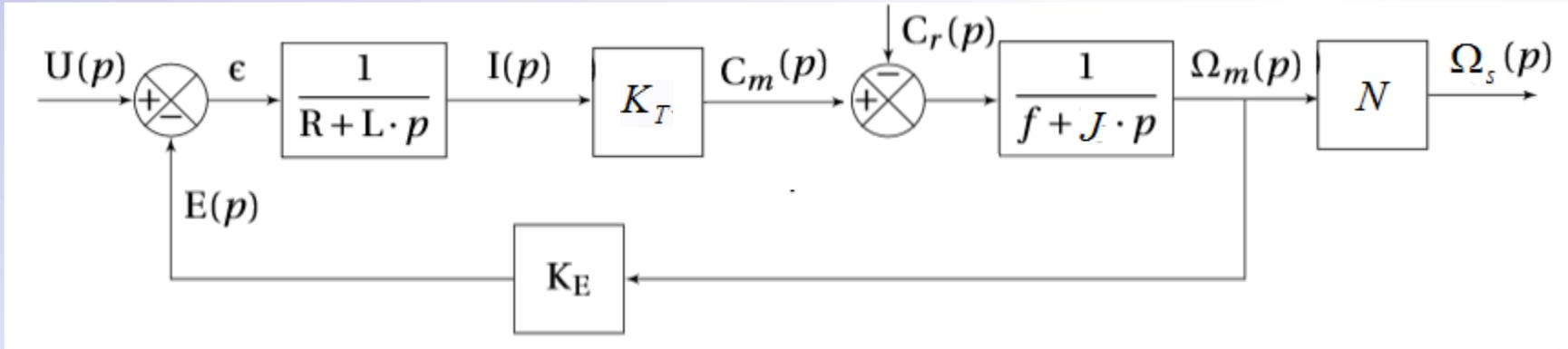


- **Sous partie électromécanique:**



# Schémas fonctionnels

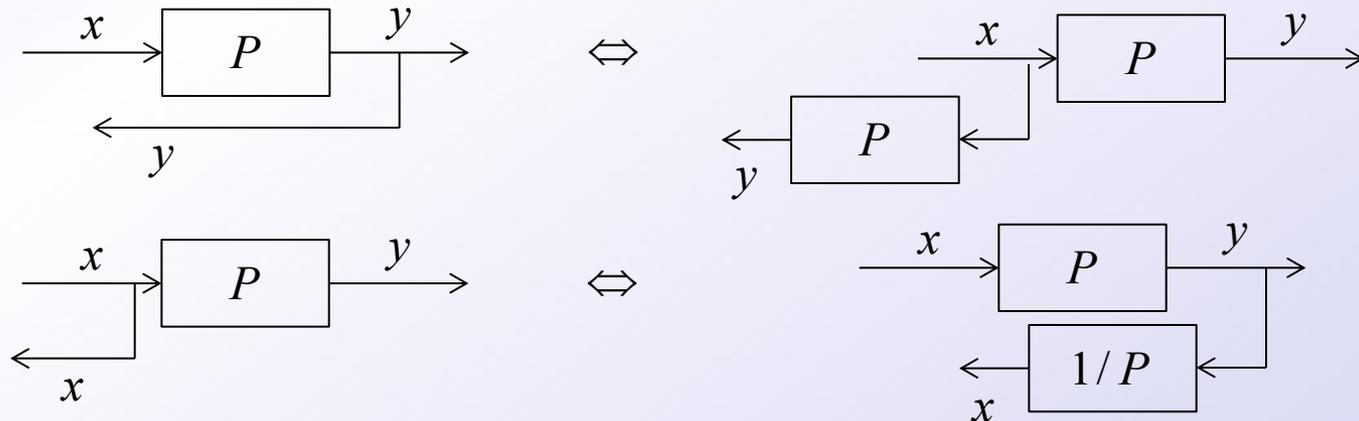
**Etape 4:** Connexion des blocs fonctionnels pour obtenir une représentation du modèle de machine à courant continu



## 3.5 Déplacement d'éléments au sein d'un schéma bloc

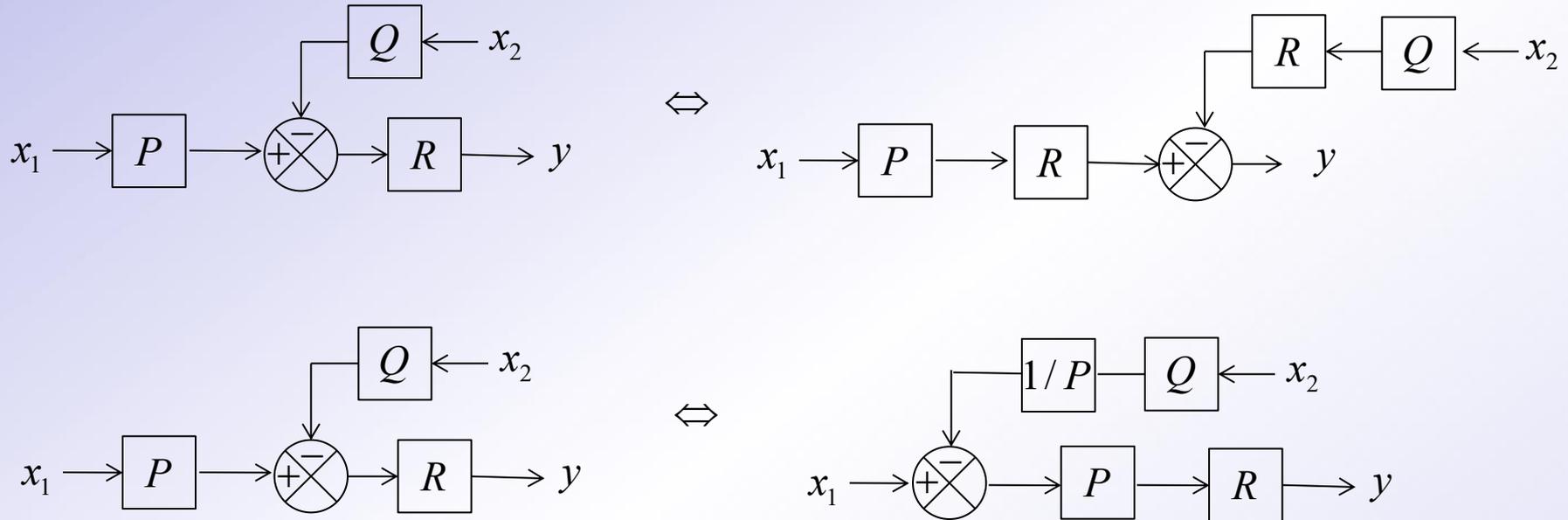
Pour faciliter l'analyse des propriétés d'un système représenté sous forme d'un schéma bloc, certains déplacements d'éléments peuvent être réalisés.

**Déplacement d'une jonction:**



# Schémas fonctionnels

## Déplacement d'un sommateur:



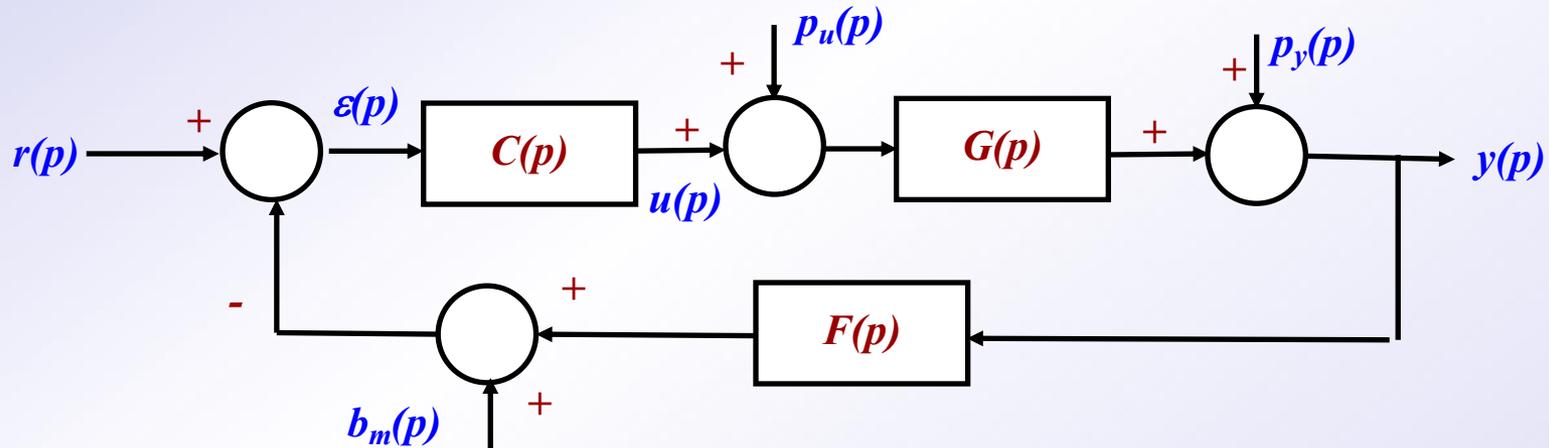
## 3.6 Cas des multi entrées dans un schéma bloc

Pour un système linéaire, dans le cas où l'on a plusieurs entrées et que l'on souhaite connaître le comportement final en sortie, on utilise le théorème de superposition:

- On met à zéro toutes les entrées sauf une qui conserve sa valeur
- On calcule la sortie équivalente
- On répète la démarche pour chaque entrée tour à tour
- On somme algébriquement chacune des sorties obtenues pour chacune des entrées.

# Schémas fonctionels

**Exercice:** Soit le schéma donné ci-dessous, déterminer la fonction de transfert relative à chacune des entrées, puis déterminer la sortie générale.



# Schémas fonctionels

Les fonctions de transfert décrivent comment une (seule) entrée affecte une (seule) sortie ou un signal interne à la boucle.

$$\frac{y(p)}{r(p)} = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)F(p)}$$

$$\frac{y(p)}{p_u(p)} = \frac{G(p)}{1 + C(p)G(p)F(p)}$$

$$\frac{y(p)}{p_y(p)} = \frac{1}{1 + C(p)G(p)F(p)}$$

$$\frac{u(p)}{b_m(p)} = \frac{-C(p)}{1 + C(p)G(p)F(p)}$$

$$\frac{\varepsilon(p)}{r(p)} = \frac{1}{1 + C(p)G(p)F(p)}$$

$$\frac{u(p)}{r(p)} = \frac{C(p)}{1 + C(p)G(p)F(p)}$$

...

# Auto-évaluation Cours 1

## Mes compétences à l'issue du Cours 1:

### Etre capable de:

- Donner la définition de la transformée de Laplace (représentation fréquentielle) et l'expression associée aux principaux signaux élémentaires (dirac, échelon, rampe)
- Définir ce qu'est une fonction de transfert, un pôle et un zéro de la fonction de transfert
- Utiliser la transformée de Laplace pour donner la fonction de transfert d'un système à partir ces équations différentielles
- Proposer un schéma bloc à partir des équations différentielles d'un processus
- Calculer une fonction de transfert équivalente d'un schéma où plusieurs fonctions de transfert s'imbriquent, à partir des règles de structure d'un schéma bloc



**Cours 2 :** *Etude fréquentielle  
des systèmes*

# Introduction

## **Les objectifs de ce cours sont:**

- Rappeler les notions de module, argument, gain, phase de fonction de transfert
- Interpréter physiquement la notion d'analyse fréquentielle.
- Présenter les différentes expressions analytiques de systèmes élémentaires (intégrateurs, passe haut, passe bas, dérivateur, second ordre, cas du retard).
- Introduire des outils d'analyse fréquentielle et de représentations (Bode, Black/Nichols) de fonctions de transfert élémentaires.
- Introduire une méthodologie permettant de déduire le comportement fréquentiel de fonctions de transfert plus complexes

# Introduction à l'analyse fréquentielle

## 1) Rappels sur les complexes et intérêt de l'analyse fréquentielle

Partant d'une fonction de transfert  $H(p)$ , la réponse fréquentielle s'obtient :

- en posant  $p = j\omega$ ,  $j$  étant un imaginaire pur unitaire et  $\omega$  une pulsation (rad/s),
- en faisant varier  $\omega$  sur une gamme de pulsations
- en calculant le module ou le gain et la phase de  $H(j\omega)$  pour chaque pulsation.

### 1.1 Rappels sur les nombres complexes

Soit le nombre complexe  $N = a + jb$ , on définit:

-Le module

$$|N| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

-Le module en dB

$$|N|_{dB} = 20 \log \sqrt{a^2 + b^2}$$

-La phase en rad/s

$$\varphi(N) = \text{Arg}(N)$$

# Introduction à l'analyse fréquentielle

*Attention, la fonction arctan est à manipuler avec précaution!*

$$\operatorname{arg}(N) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0 \\ \text{Indéfini} & \text{si } a = 0 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

- La phase en degré

$$\varphi^\circ(N) = \frac{180}{\pi} \operatorname{Arg}(N)$$

# Introduction à l'analyse fréquentielle

- Les opérations sur les nombres complexes les plus utiles sont:

$$|C_1.C_2| = |C_1||C_2|$$

$$20\log|C_1.C_2| = 20\log|C_1| + 20\log|C_2|$$

$$\text{Arg}(C_1.C_2) = \text{Arg}(C_1) + \text{Arg}(C_2)$$

## 1.2 Intérêt de l'analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle est un outil d'analyse destiné à caractériser le comportement d'un système au travers de l'étude de ses relations d'entrée/sortie dans le domaine fréquentiel.

L'objectif final est de définir les propriétés du système étudié:

- Bande passante
- Gain d'amplification sur une plage de fréquences
- etc

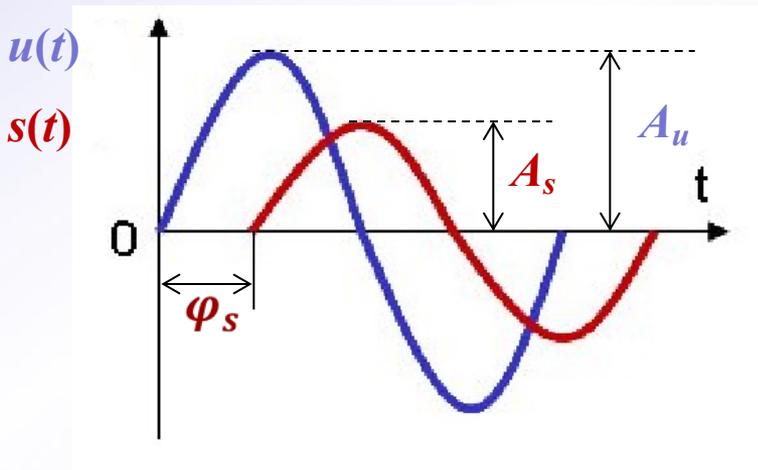
A présent, nous allons donner une représentation physique de l'analyse fréquentielle sur des fonctions de transfert.

# Introduction à l'analyse fréquentielle

Pour une pulsation  $\omega$  donnée, une **interprétation physique du gain et de la phase** d'un système est possible. Pour cela, on suppose que l'entrée du système est un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $A_u$ .



**Sous l'hypothèse d'un système linéaire stationnaire, la sortie du système est alors, en régime permanent, un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , d'amplitude  $A_s$  et de déphasage  $\varphi_s$ .**



Si  $H(p)$  est la fonction de transfert du système

$$|H(j\omega)| = \frac{A_s}{A_u}$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left( \frac{A_s}{A_u} \right)$$

$$\varphi(H(j\omega))^\circ = \frac{180}{\pi} \varphi_s(\omega)$$

# Introduction à l'analyse fréquentielle

Si la fonction de transfert se présente sous le forme de produits ou de rapports

$$H(p) = \frac{Num_1(p)Num_2(p)}{Den_1(p)Den_2(p)} \quad (1)$$

**le module, le gain et la phase** se calculent sur chaque terme

$$|H(j\omega)| = \frac{|Num_1(j\omega)||Num_2(j\omega)|}{|Den_1(j\omega)||Den_2(j\omega)|} \quad (2)$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log(|H(j\omega)|) = |Num_1(j\omega)|_{dB} + |Num_2(j\omega)|_{dB} - |Den_1(j\omega)|_{dB} - |Den_2(j\omega)|_{dB}$$

$$\varphi(H(j\omega))^\circ = \varphi(Num_1(j\omega))^\circ + \varphi(Num_2(j\omega))^\circ - \varphi(Den_1(j\omega))^\circ - \varphi(Den_2(j\omega))^\circ$$

*Exemple:* Calculer le gain en dB et la phase de

$$H(p) = \frac{2}{(p+3)(p+1)}$$

Le gain est donné par:

$$|H(j\omega)| = \frac{|2|}{|j\omega+3||j\omega+1|} = \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2+\omega^2}\sqrt{1^2+\omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{9+\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}}$$

# Analyse fréquentielle de fonctions de transfert élémentaires

Le gain en dB se déduit comme suit:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log|H(j\omega)| = 20\log(2) - 20\log\sqrt{9 + \omega^2} - 20\log\sqrt{1 + \omega^2}$$

La phase est alors donnée par:

$$\begin{aligned}\varphi(H(j\omega)) &= \text{Arg}(2) - \text{Arg}[(3 + j\omega)(1 + j\omega)] \\ &= \text{Arc tan}(0) - \text{Arc tan}\left(\frac{\omega}{3}\right) - \text{Arc tan}(\omega)\end{aligned}$$

## 2) Le gain et la phase de fonctions de transferts élémentaires

### 2.1 Fonction de transfert d'un gain

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = K \quad (4)$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned}G_{dB} &= 20\log|K| \\ \varphi &= \begin{cases} 0 & \text{si } K > 0 \\ -\pi & \text{si } K < 0 \end{cases} \quad (5)\end{aligned}$$

# Analyse fréquentielle de fonctions de transfert élémentaires

## 2.2 Fonction de transfert d'un dérivateur

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = p \quad (6)$$

On en déduit que:

$$G_{dB} = 20 \log \omega \quad (7)$$

$$\varphi = \pi/2$$

## 2.3 Fonction de transfert d'un intégrateur

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = \frac{1}{p} \quad (8)$$

On en déduit que:

$$G_{dB} = 20 \log 1 - 20 \log \omega = -20 \log \omega \quad (9)$$

$$\varphi = -\pi/2$$

# Analyse fréquentielle de fonctions de transfert élémentaires

On suppose pour la suite que  $\tau > 0$

## 2.4 Fonction de transfert du premier ordre au numérateur

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = (1 + \tau p) \quad (10)$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \varphi &= \arctan(\tau \omega) \end{aligned} \quad (11)$$

## 2.5 Fonction de transfert du premier ordre au numérateur (bis)

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = (1 - \tau p) \quad (12)$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \varphi &= -\arctan(\tau \omega) \end{aligned} \quad (13)$$

# Analyse fréquentielle de fonctions de transfert élémentaires

## 2.6 Fonction de transfert du premier ordre au dénominateur

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad (14)$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= -20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \varphi &= -\arctan(\tau \omega) \end{aligned} \quad (15)$$

## 2.7 Fonction de transfert du premier ordre au dénominateur (bis)

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = \frac{1}{1 - \tau p} \quad (16)$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= -20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \varphi &= \arctan(\tau \omega) \end{aligned} \quad (17)$$

# Analyse fréquentielle de fonctions de transfert élémentaires

## 2.8 Fonction de transfert du second ordre au numérateur

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = \frac{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}{\omega_n^2} = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 \quad (18)$$

On en déduit que:

$$G_{dB} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) & \text{si } \omega < \omega_n \\ \text{autre cas à déduire de la slide 61} \end{cases} \quad (19)$$

## 2.9 Fonction de transfert du second ordre au dénominateur

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = \frac{1}{\frac{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}{\omega_n^2}} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} \quad (20)$$

# Analyse fréquentielle de fonctions de transfert élémentaires

On en déduit que:

$$G_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
$$\varphi = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) & \text{si } \omega < \omega_n \\ \text{autre cas à déduire de la slide 61} \end{cases} \quad (21)$$

## 2.10 Fonction de transfert de type retard pur

Soit la fonction de transfert donnée par

$$H(p) = e^{-T_R p}$$
$$= e^{-jT_R \omega} = \cos(-T_R \omega) + j \sin(-T_R \omega) \quad (22)$$

On en déduit que:

$$G_{dB} = 20 \log \sqrt{\cos^2(-T_R \omega) + \sin^2(-T_R \omega)}$$
$$= 20 \log \sqrt{1} = 0dB \quad (23)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sin(-T_R \omega)}{\cos(-T_R \omega)}\right)$$
$$= \arctan(\tan(-T_R \omega))$$
$$= -T_R \omega$$

# Analyse fréquentielle de fonctions de transfert

## 3) Analyse fréquentielle de fonctions de transfert quelconques

Comme nous l'avons déjà vu dans ce cours, une fonction de transfert quelconque d'un système linéaire peut s'exprimer sous la forme

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}, n < m \quad (24)$$

Si cette fonction de transfert peut être factorisée par un produit de fonctions de transfert élémentaires de la forme

$$K \text{ ou } p^\alpha \text{ ou } (1 + \tau p)^\beta \text{ ou } \left( \frac{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}{\omega_n^2} \right)^\gamma$$

Tels que

$$H(p) = K p^\alpha \prod_i (1 + \tau_i p)^{\beta_i} \prod_j \left( \frac{p^2 + 2\xi_j \omega_{nj} p + \omega_{nj}^2}{\omega_{nj}^2} \right)^{\gamma_j} \quad (25)$$

Avec

$$(K, \tau) \in \mathfrak{R}^2$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$$

$$\xi \in [0 \ 1[ \text{ et } \omega_n > 0$$

# Analyse fréquentielle de fonctions de transfert

On peut alors écrire le gain en dB comme suit:

$$\begin{aligned}
 G_{dB} &= 20 \log|K| + 20\alpha \log \omega + \sum_i 20\beta_i \log|1 + j\omega\tau_i| & (26) \\
 &+ \sum_j (20\gamma_j \log|(j\omega)^2 + 2j\xi_j\omega\omega_{nj} + \omega_{nj}^2| - 20\gamma_j \log \omega_{nj}^2) \\
 &= 20 \log|K| + 20\alpha \log \omega + \sum_i 10\beta_i \log(1 + \omega^2\tau_i^2) \\
 &+ \sum_j (10\gamma_j \log\left(\left(\omega_{nj}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\xi_j^2\omega^2\omega_{nj}^2\right) - 40\gamma_j \log \omega_{nj})
 \end{aligned}$$

Puis, nous pouvons également en déduire la phase:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \arg(K) + \alpha \frac{\pi}{2} + \sum_i \beta_i \arg(1 + j\omega\tau_i) + \sum_j \gamma_j \arg\left((j\omega)^2 + 2j\xi_j\omega\omega_{nj} + \omega_{nj}^2\right) & (27) \\
 &= \frac{\alpha + \text{signe}(K) - 1}{2} \pi + \sum_i \beta_i \arctan(\omega\tau_i) + \sum_j \lambda_j \arctan\left(\frac{2\xi_j\omega\omega_{nj}}{\omega_{nj}^2 - \omega^2}\right)
 \end{aligned}$$

*Remarque:* Quelque soit la fonction de transfert considérée, il est possible de la ramener à un produit de fonctions de transferts élémentaires. Le gain et la phase sont alors déduits comme étant la somme des contributions élémentaires de chacune des fonctions de transfert dans le calcul. Cette propriété est possible due fait des propriétés logarithmiques et de l'argument.

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## 4) Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

Pour faciliter l'analyse fréquentielle des fonctions de transfert et la détermination du comportement fréquentiel d'un système, en vue de vérifier si le système considéré possède certaines propriétés attendues (gain statique, bande passante, robustesse par rapport à la limite de stabilité etc), on utilise des représentations fréquentielles de ces fonctions de transfert. Ce sont des outils couramment utilisés dans de nombreux domaines comme l'automatique, l'électronique, etc.

Les outils les plus connus sont:

- Le diagramme de Bode
- Le diagramme de Black/Nichols

### 4.1 Le diagramme de Bode

Le diagramme de Bode correspond au tracé de deux graphes correspondant au gain réel et au déphasage:

- Gain:  $G_{dB} = f(\omega)$

- Phase:  $\varphi = f(\omega)$

Les deux représentations sont associées à des échelles logarithmiques, permettant également un plus grand intervalle de représentation que la simple utilisation d'une échelle linéaire.

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## Diagramme de Bode des fonctions de transfert élémentaires

Dans la partie 3) de ce cours, nous avons déjà calculé les expressions littérales du  $G_{dB}$  et de la phase des fonctions de transfert élémentaires. Nous allons à présent voir comment nous utilisons ces résultats pour tracer leurs diagrammes de Bode.

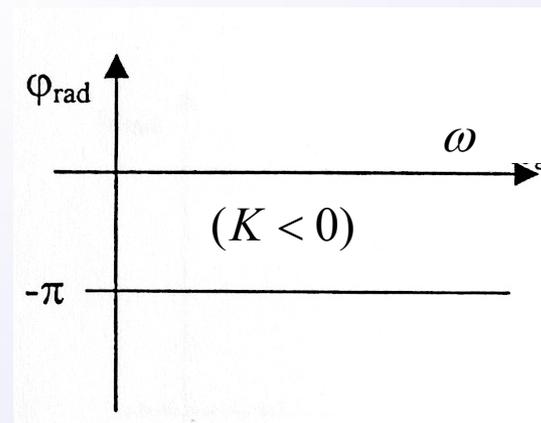
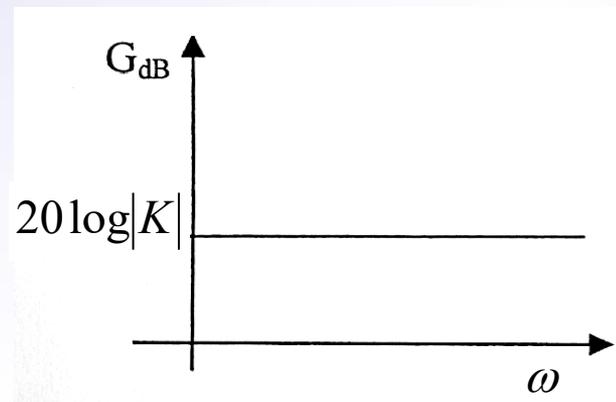
Fonction de transfert:

$$H(p) = K$$

Gain et phase:

$$G_{dB} = 20 \log |K|$$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{si } K > 0 \\ -\pi & \text{si } K < 0 \end{cases}$$



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## Diagramme de Bode des fonctions de transfert élémentaires

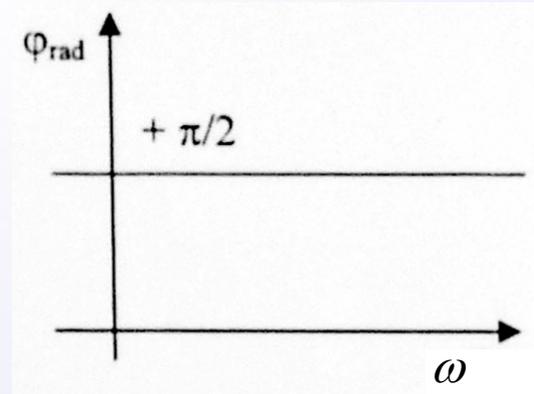
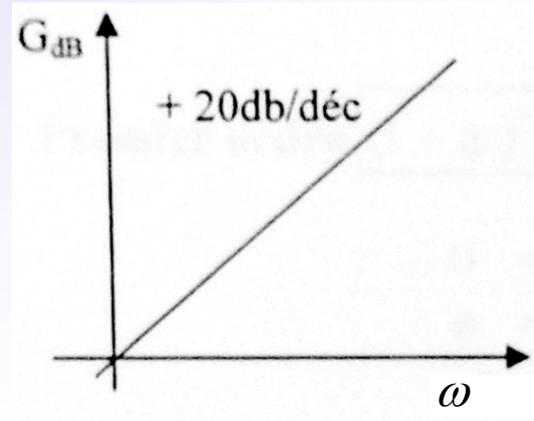
Fonction de transfert:

$$H(p) = p$$

Gain et phase:

$$G_{dB} = 20 \log \omega$$

$$\varphi = \pi/2$$



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## Diagramme de Bode des fonctions de transfert élémentaires

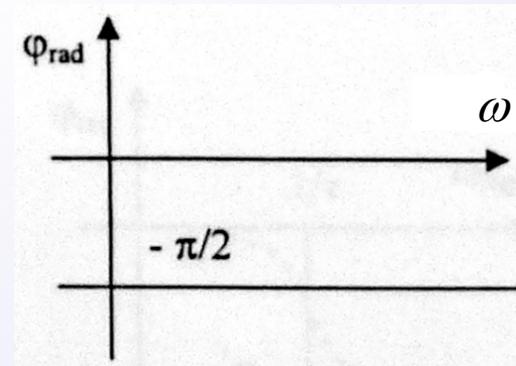
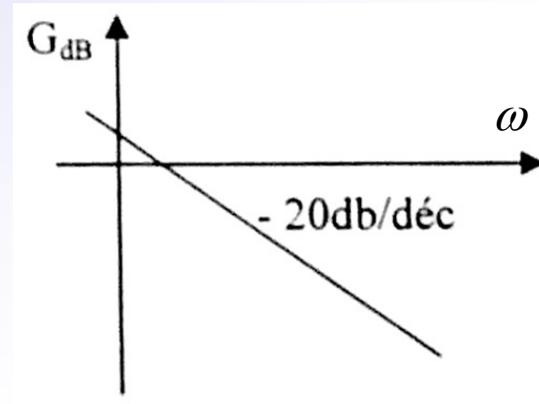
Fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{1}{p}$$

Gain et phase:

$$G_{dB} = -20 \log \omega$$

$$\varphi = -\pi/2$$



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## Diagramme de Bode des fonctions de transfert élémentaires

Fonction de transfert:

$$H(p) = (1 + \tau p)$$

Gain et phase:

$$G_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}$$

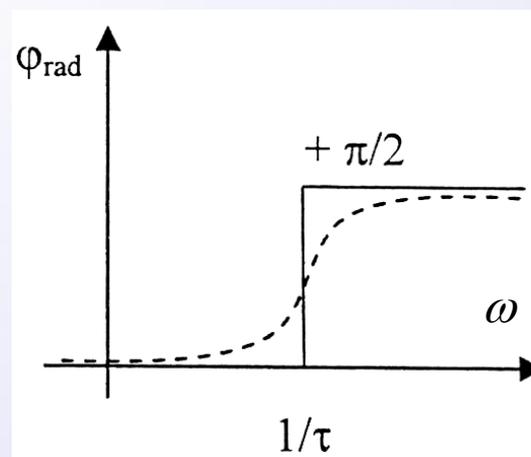
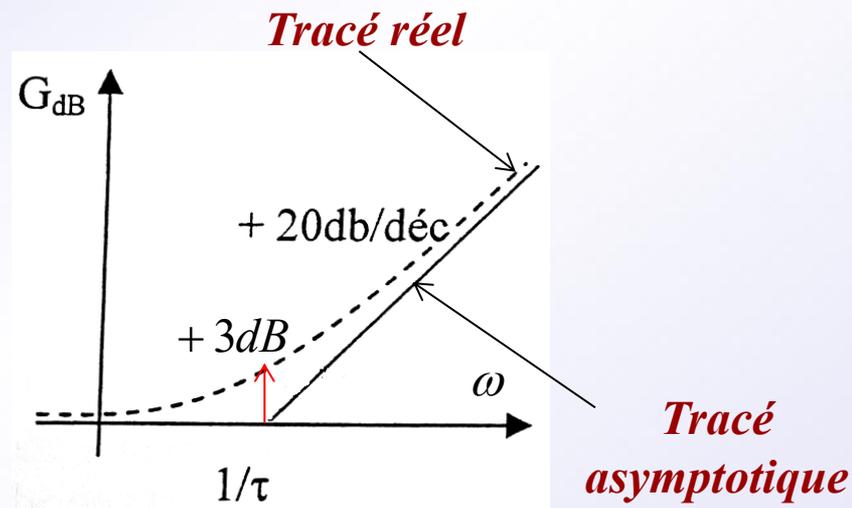
$$\varphi = \arctan(\tau \omega)$$

Etude asymptotique:

$$\text{Si } \tau \omega \ll 1, G_{dB} \approx 20 \log \sqrt{1} \approx 0, \varphi \approx 0$$

$$\text{Si } \tau \omega \gg 1, G_{dB} \approx 20 \log(\tau \omega) \rightarrow 20 \text{ dB / dec}$$

$$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## Diagramme de Bode des fonctions de transfert élémentaires

Fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

Gain et phase:

$$G_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}$$

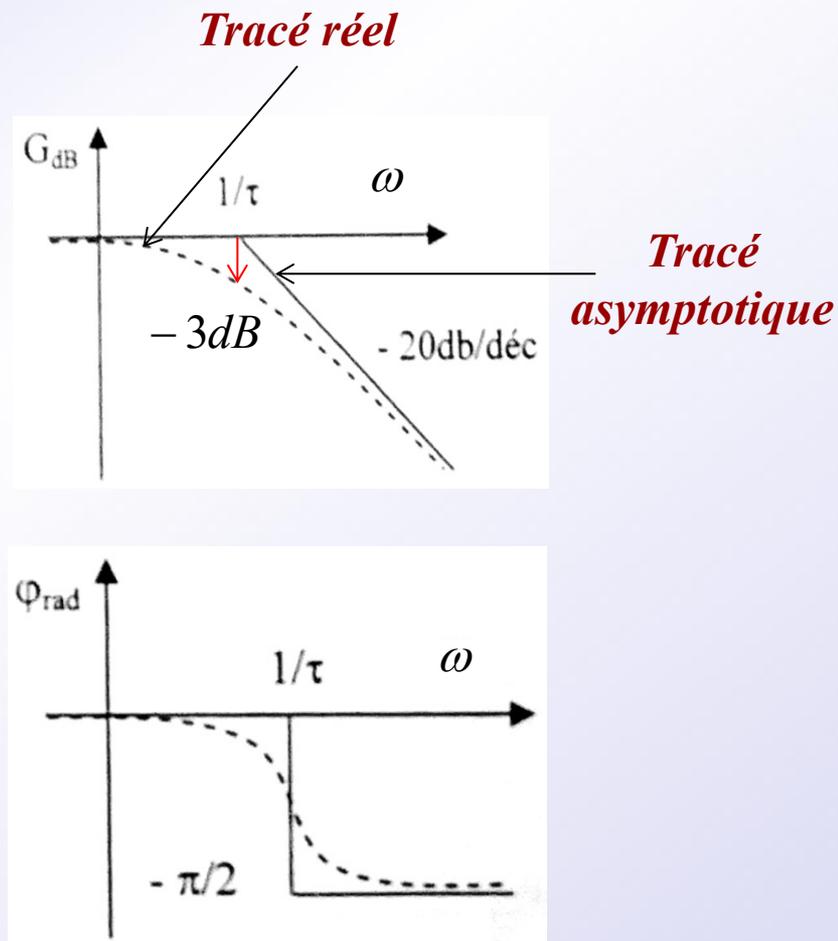
$$\varphi = -\arctan(\tau\omega)$$

Etude asymptotique:

Si  $\tau\omega \ll 1$ ,  $G_{dB} \approx -20 \log \sqrt{1} \approx 0$ ,  $\varphi \approx 0$

Si  $\tau\omega \gg 1$ ,  $G_{dB} \approx -20 \log(\tau\omega) \rightarrow -20dB / dec$

$$\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## Diagramme de Bode des fonctions de transfert élémentaires

Fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Gain et phase:

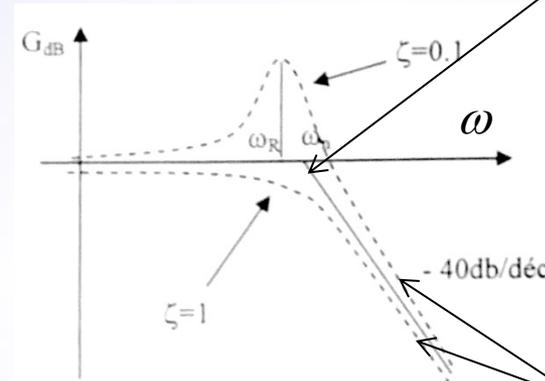
$$G_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) & \text{si } \omega < \omega_n \\ \text{autre cas à déduire de la slide 61} \end{cases}$$

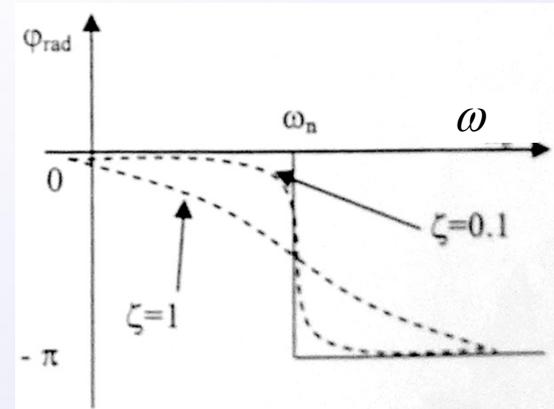
Etude asymptotique:

- Si  $\omega \ll \omega_n$ ,  $G_{dB} \approx 0dB$ ,  $\varphi \approx 0$
- Si  $\omega \gg \omega_n$ ,  $G_{dB} \approx -20 \log(\omega^2 / \omega_n^2)$ ,  $\varphi \approx -\pi$
- Si  $\omega = \omega_n$ ,  $G_{dB} \approx -20 \log(2\xi)$ ,  $\varphi \approx -\pi/2$

*Tracé asymptotique*



*Tracé réel*



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## Diagramme de Bode des fonctions de transfert élémentaires

Fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}{\omega_n^2} = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1$$

Gain et phase:

$$G_{dB} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) & \text{si } \omega < \omega_n \\ \text{autre cas à déduire de la slide 61} \end{cases}$$

Etude asymptotique:

Si  $\omega \ll \omega_n$ ,  $G_{dB} \approx 0dB$ ,  $\varphi \approx 0$

Si  $\omega \gg \omega_n$ ,  $G_{dB} \approx 20 \log(\omega^2 / \omega_n^2)$ ,  $\varphi \approx \pi$

Si  $\omega = \omega_n$ ,  $G_{dB} \approx 20 \log(2\xi)$ ,  $\varphi \approx \pi/2$

*Exercice:* Déduire le diagramme de Bode associé asymptotique et réel.

*Remarque:* La modification de la courbe du gain entre les deux courbes réels a lieu pour un coefficient inférieur ou supérieur à 0.7.

-En dessous de 0.7, il y a résonance avec dépassement sur la courbe réelle et l'apparition d'une pulsation de résonance de

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

-Au dessus de 0.7, il n'y a pas de résonance.

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## Diagramme de Bode des fonctions de transfert élémentaires

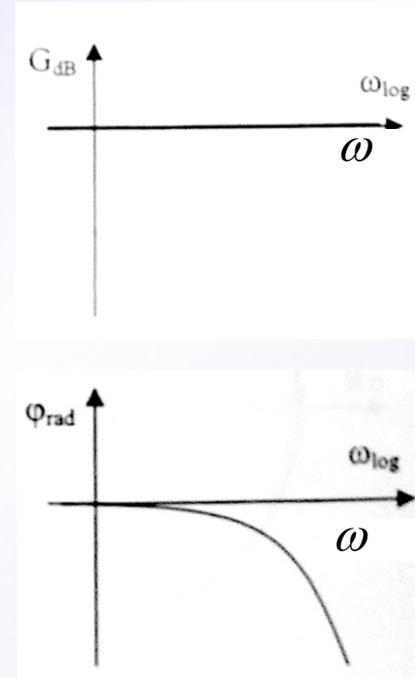
Fonction de transfert:

$$H(p) = e^{-T_R p}$$

Gain et phase:

$$G_{dB} = 0dB$$

$$\varphi = -T_R \omega$$



A présent, nous allons traiter le cas des fonctions de transfert quelconques

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

Cas des fonctions de transfert quelconques ramenées à un produit de fonctions de transfert élémentaires.

$$H(p) = Kp^\alpha \prod_i (1 + \tau_i p)^{\beta_i} \prod_j \left( \frac{p^2 + 2\xi_j \omega_{nj} p + \omega_{nj}^2}{\omega_{nj}^2} \right)^{\gamma_j} \quad (28)$$

Le gain et la phase sont donnés par:

$$G_{dB} = 20 \log|K| + 20\alpha \log \omega + \sum_i 10\beta_i \log(1 + \omega^2 \tau_i^2) + \sum_j (10\gamma_j \log\left(\left(\omega^2 - \omega_{nj}^2\right)^2 + 4\xi_j^2 \omega^2 \omega_{nj}^2\right) - 40\gamma_j \log \omega_{nj}) \quad (29)$$

$$\varphi = \frac{\alpha + \text{signe}(K) - 1}{2} \pi + \sum_i \beta_i \arctan(\omega \tau_i) + \sum_j \lambda_j \arctan\left(\frac{2\xi_j \omega \omega_{nj}}{\omega_{nj}^2 - \omega^2}\right) \quad (30)$$

Règles de tracé du diagramme de Bode:

- Un terme de degré  $\alpha > 0$  provoque une variation de pente  $+20\alpha dB / dec$ , s'il est au numérateur et une variation de pente de  $-20\alpha dB / dec$  s'il est au dénominateur.
- Un terme de degré  $\beta_i > 0$  provoque une variation de pente  $+20\beta_i dB / dec$ , à partir de  $\omega = 1/\tau_i$  s'il est au numérateur et une variation de pente de  $-20\beta_i dB / dec$  à partir de  $\omega = 1/\tau_i$ , s'il est au dénominateur.

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

- Un terme de degré  $\gamma_j > 0$  provoque une variation de pente  $+40\gamma_j dB/dec$ , à partir de  $\omega = \omega_{nj}$  s'il est au numérateur et une variation de pente de  $-40\gamma_j dB/dec$  à partir de  $\omega = \omega_{nj}$ , s'il est au dénominateur.
- Concernant la phase, un terme de degré  $\alpha > 0$  provoque une variation de phase  $\alpha\pi/2$ , s'il est au numérateur et une variation de phase de  $-\alpha\pi/2$ , s'il est au dénominateur.
- Un terme de degré  $\beta_i > 0$  provoque une variation de phase  $\beta_i\pi/2$ , à partir de  $\omega = 1/\tau_i$  s'il est au numérateur et une variation de phase de  $-\beta_i\pi/2$ , à partir de  $\omega = 1/\tau_i$ , s'il est au dénominateur.
- Un terme de degré  $\gamma_j > 0$  provoque une variation de phase  $\gamma_j\pi$ , à partir de  $\omega = \omega_{nj}$  s'il est au numérateur et une variation de pente de  $-\gamma_j\pi$  à partir de  $\omega = \omega_{nj}$ , s'il est au dénominateur.

Le diagramme de Bode final est déduit comme la somme des contributions de chacun des termes constituant la fonction de transfert de (28) pour les graphes de gain et de phase.

Ex: Tracer le diagramme de Bode de la fonction suivante:

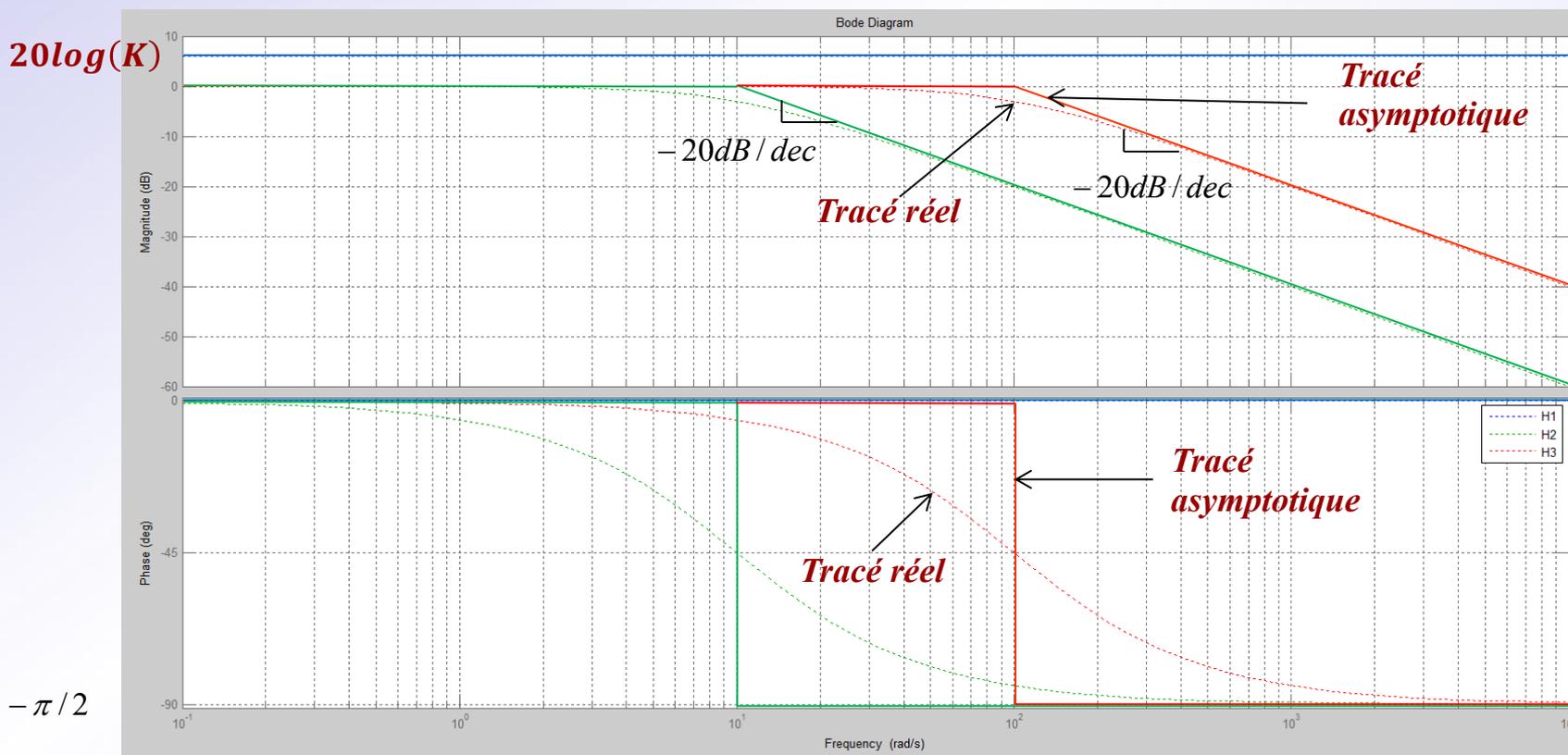
$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{2000}{(p+10)(p+100)} = 2000 \times \frac{1}{p+10} \times \frac{1}{p+100} \quad \begin{matrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{matrix} \\
 &= 2000 \times \frac{1}{10} \frac{1}{\frac{1}{10}p+1} \times \frac{1}{100} \frac{1}{\frac{1}{100}p+1} = 2 \times \frac{1}{\frac{1}{10}p+1} \times \frac{1}{\frac{1}{100}p+1}
 \end{aligned}$$

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

La forme canonique associée est donnée par:

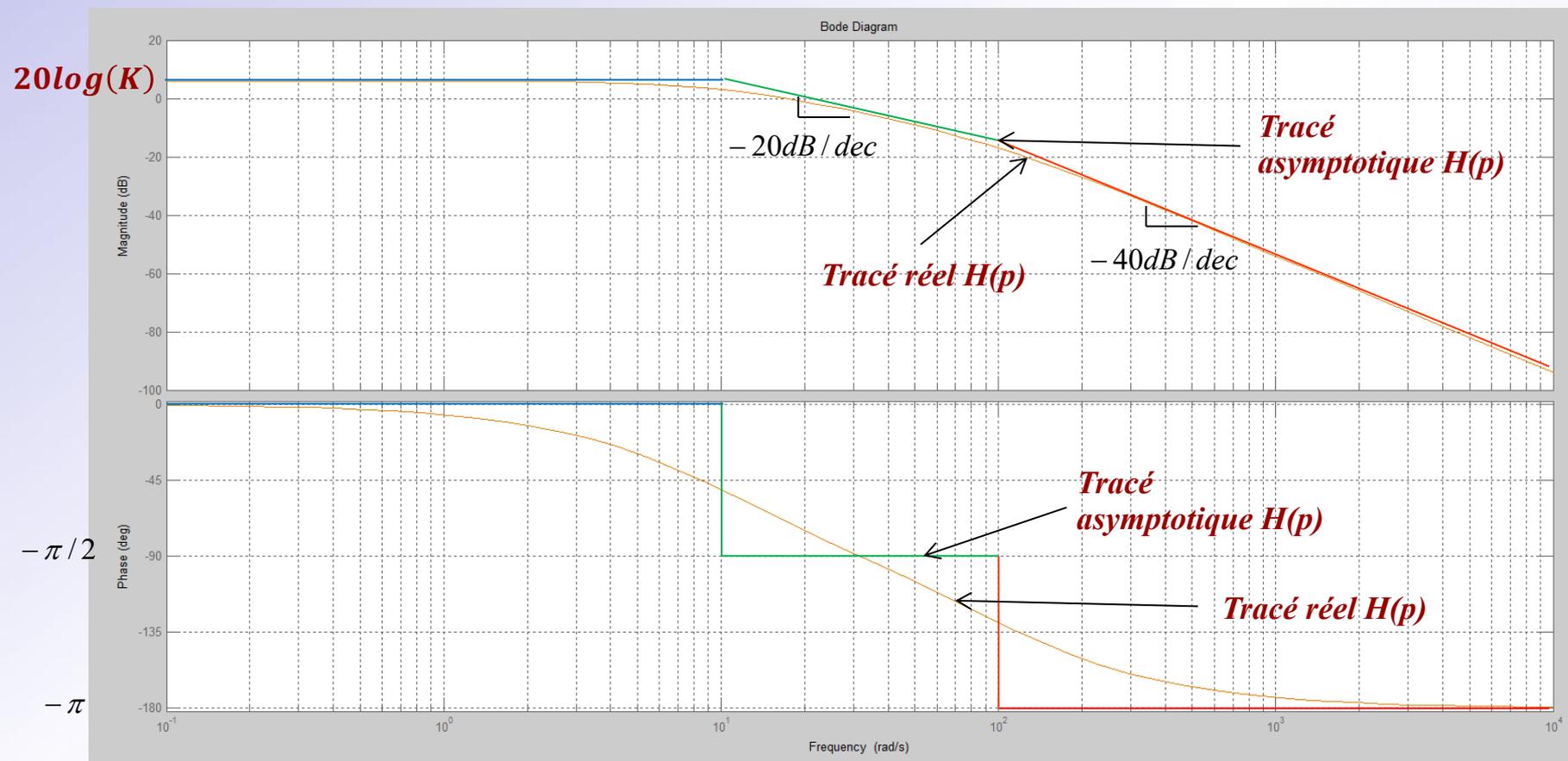
$$H(p) = K \times \frac{1}{(1 + \tau_1 p)} \times \frac{1}{(1 + \tau_2 p)}$$
$$= H_1(p) \times H_2(p) \times H_3(p)$$

La fonction de transfert est composée de trois termes dont deux fonctions de transfert du premier au dénominateur. Traçons le diagramme de Bode des 3 termes:



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

Le diagramme de Bode de  $H(p)$  peut alors se déduire à partir de la somme algébrique de  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  pour le tracé asymptotique et réel du gain et de la phase



Remarque: Attention à ne pas confondre le tracé asymptotique et le tracé réel du diagramme de Bode d'une fonction de transfert!

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

Exercice: Tracer le diagramme de Bode de la fonction suivante:

$$H(p) = \frac{5(p+2)}{p\left(p + \frac{1}{10}\right)^2 (p^2 + 0.8p + 1)}$$

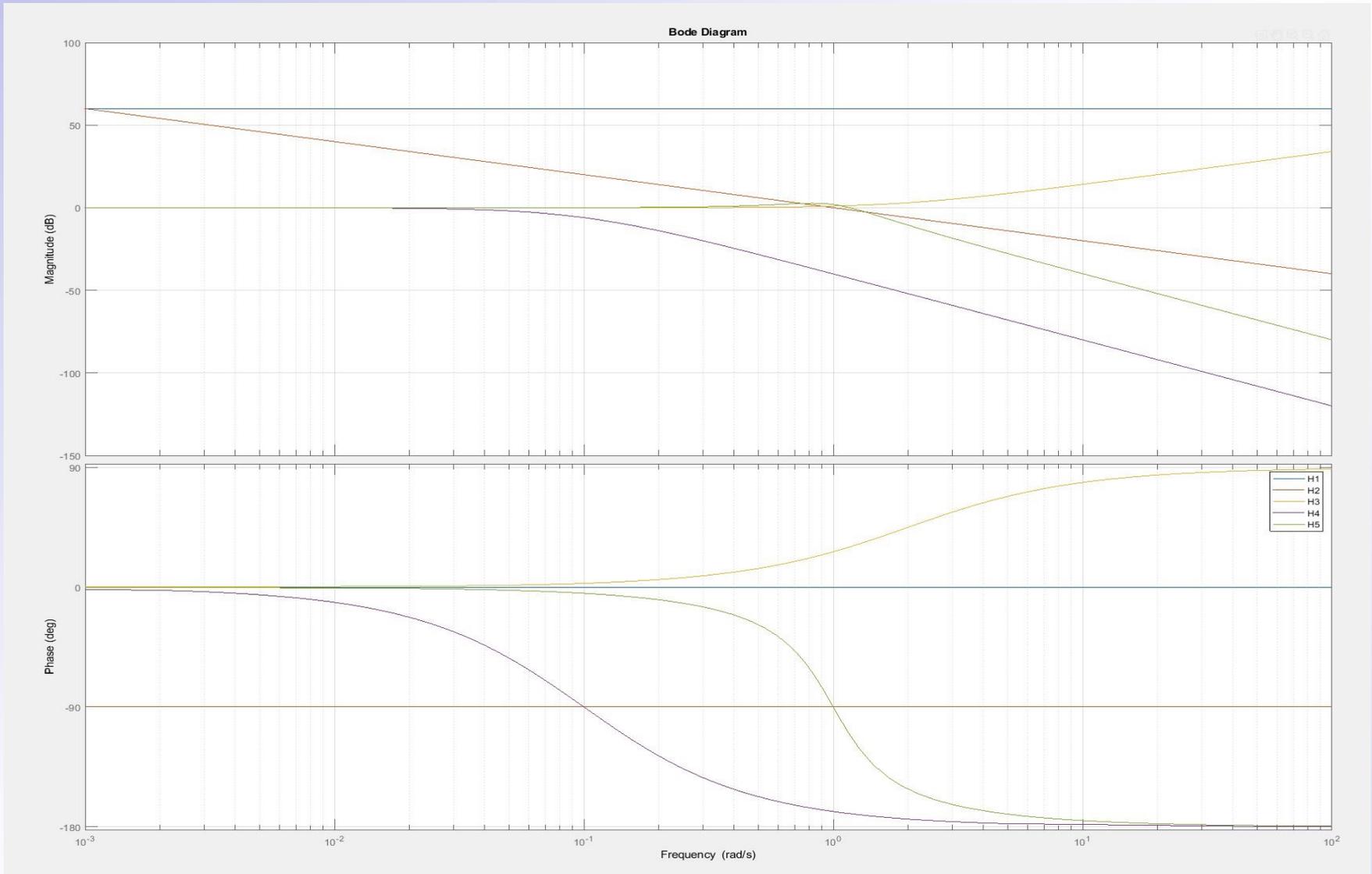
# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

Exercice: Tracer le diagramme de Bode de la fonction suivante:

$$\begin{aligned}H(p) &= \frac{5(p+2)}{p\left(p+\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{p^2+2\times 0.4\times 1p+1^2}{1^2}\right)} \\&= 5\times\frac{1}{p}\times 2\left(1+\frac{p}{2}\right)\times\frac{1}{\frac{1}{10^2}(10p+1)^2}\times\frac{1}{\left(\frac{p^2+2\times 0.4\times 1p+1^2}{1^2}\right)} \\&= 1000\times\frac{1}{p}\times\left(1+\frac{p}{2}\right)\times\frac{1}{(10p+1)^2}\times\frac{1}{\left(\frac{p^2+2\times 0.4\times 1p+1^2}{1^2}\right)} \\&= K\times\frac{1}{p}\times(1+\tau_1p)\times\frac{1}{(1+\tau_2p)^2}\times\frac{1}{\left(\frac{p^2+2\times 0.4\times 1p+1^2}{1^2}\right)} \\&= H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)H_5(p)\end{aligned}$$

Traçons à présent le diagramme de Bode réel de chacune des fonctions de transfert composant  $H(p)$ .

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert



Justifier chacune des caractéristiques obtenues: tracé asymptotique + réel, pente, phase, résonance, pulsation de résonance...

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

Justification pour  $H_1(p)$ :

Justification pour  $H_2(p)$ :

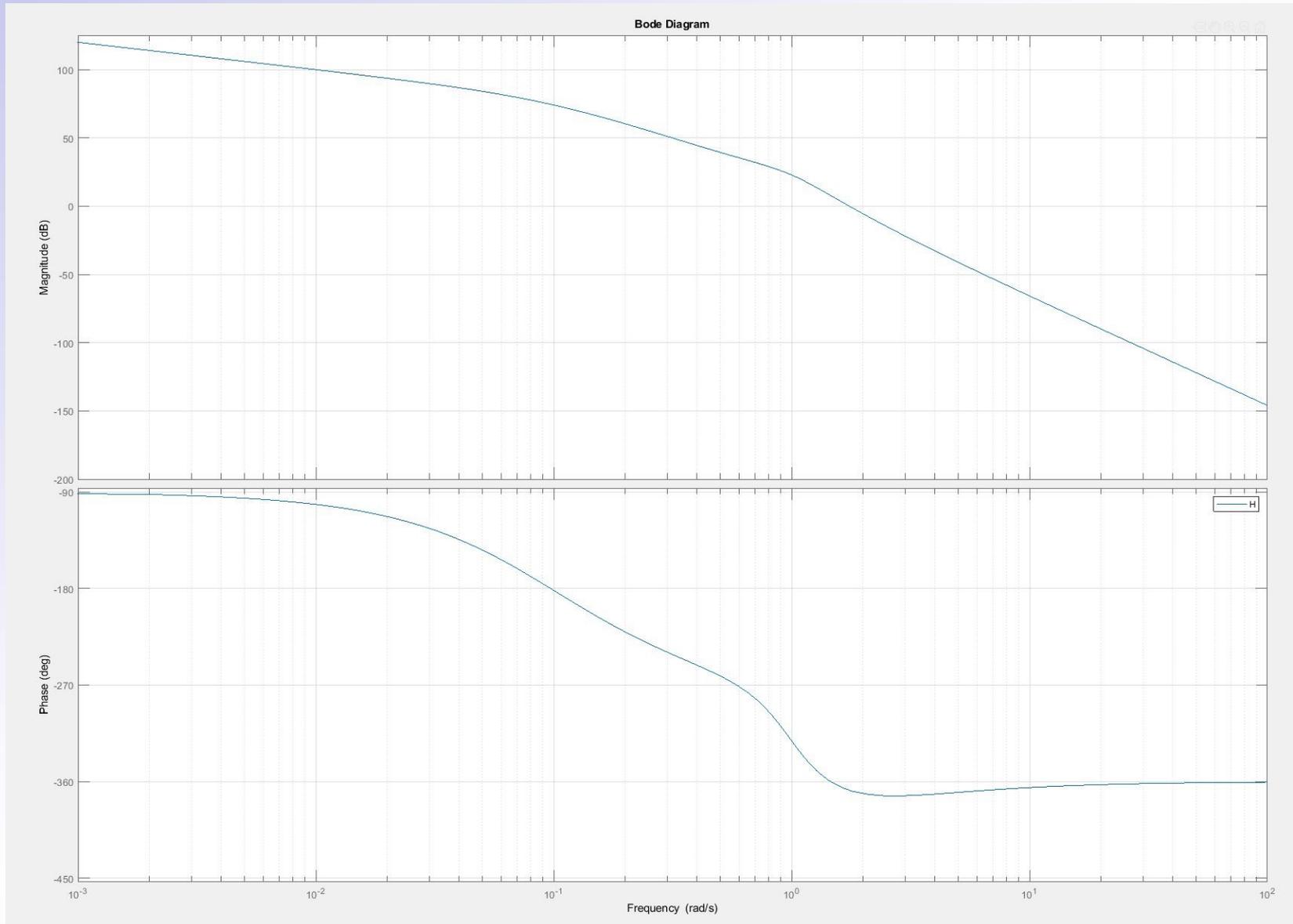
Justification pour  $H_3(p)$ :

Justification pour  $H_4(p)$ :

Justification pour  $H_5(p)$ :

# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

Tracé de Bode final:



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## 4.2 Le diagramme de Black Nichols

Le diagramme de Black de  $H(p)$  est une représentation cartésienne de  $H(j\omega)$  avec  $\varphi(\omega)$  la phase en degré en abscisse et  $G(\omega)$  le gain en dB en ordonnée, la pulsation  $\omega$  devenant une variable implicite dans ce graphe. Il est néanmoins gradué et orienté dans le sens des pulsations  $\omega$  croissantes

**Ex:**

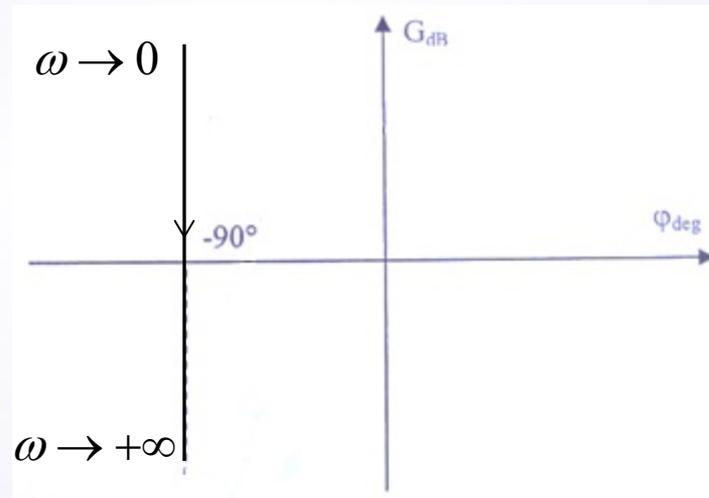
Fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{1}{p}$$

Gain et phase:

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log \omega$$

$$\varphi(\omega) = -\pi/2$$



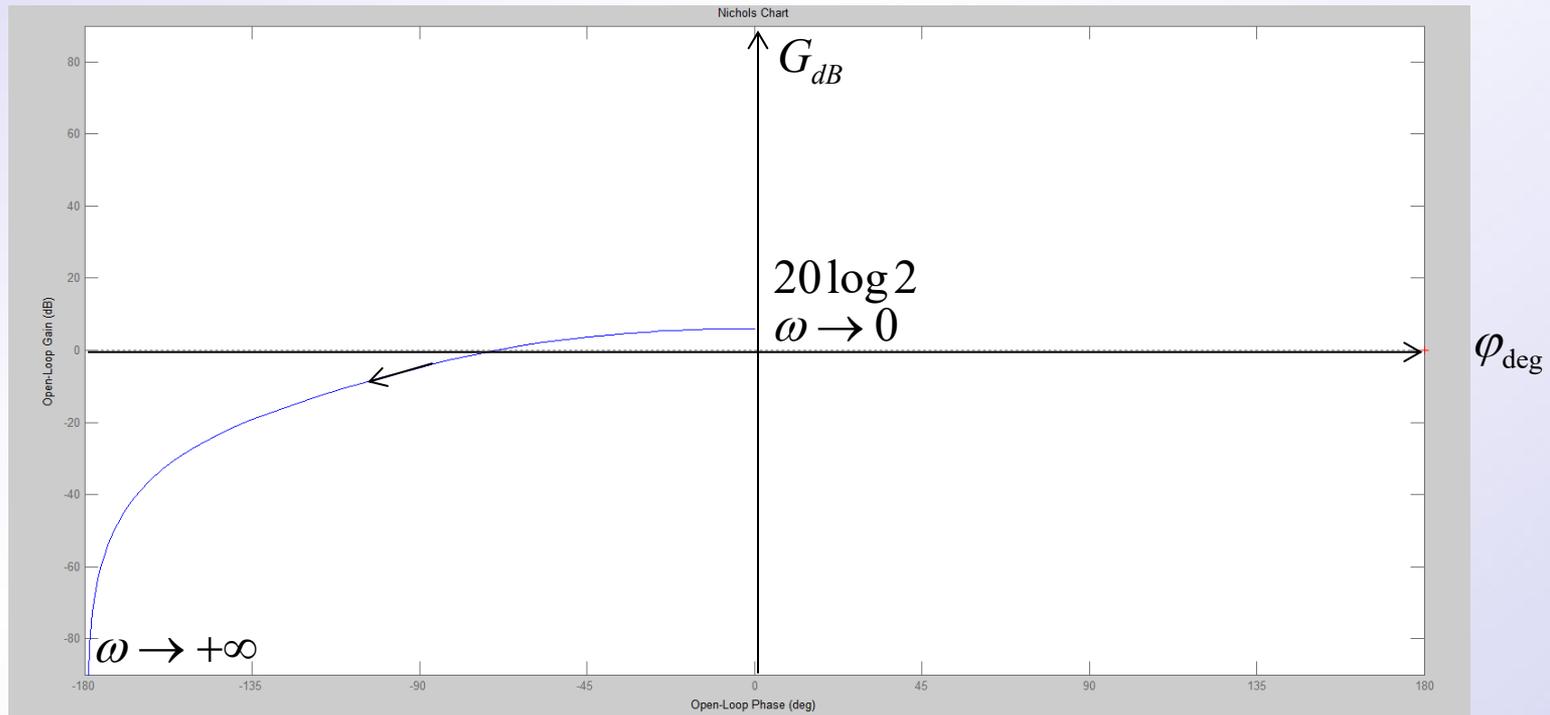
# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

En règle générale, l'étude du diagramme de Bode est nécessaire et le diagramme de Black est déduit de la précédente étude

**Ex:** Déterminer le diagramme de Black de la fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{2000}{(p + 10)(p + 100)}$$

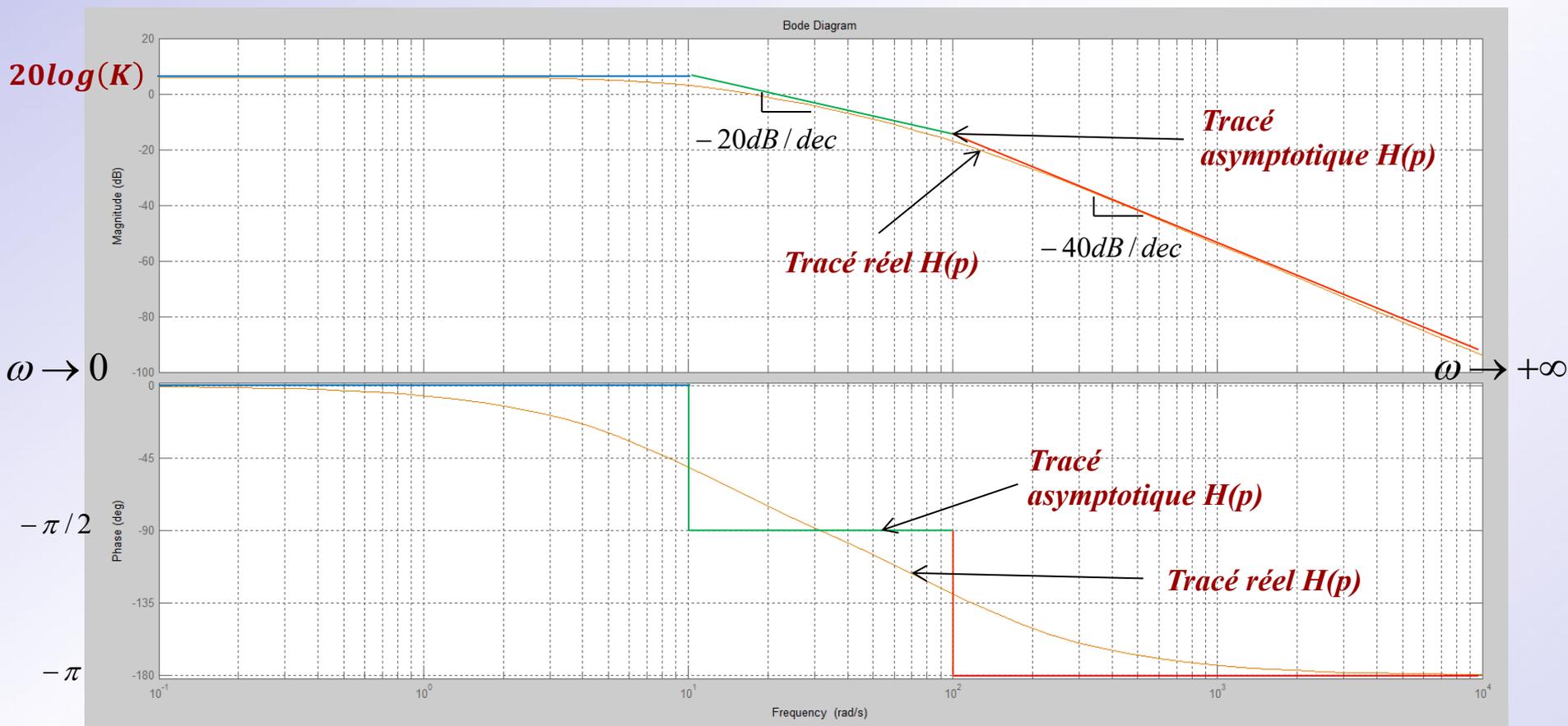
**Tracé de Black/Nichols:**



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

Obtenu à partir de l'étude du diagramme de Bode...

Pour rappel:

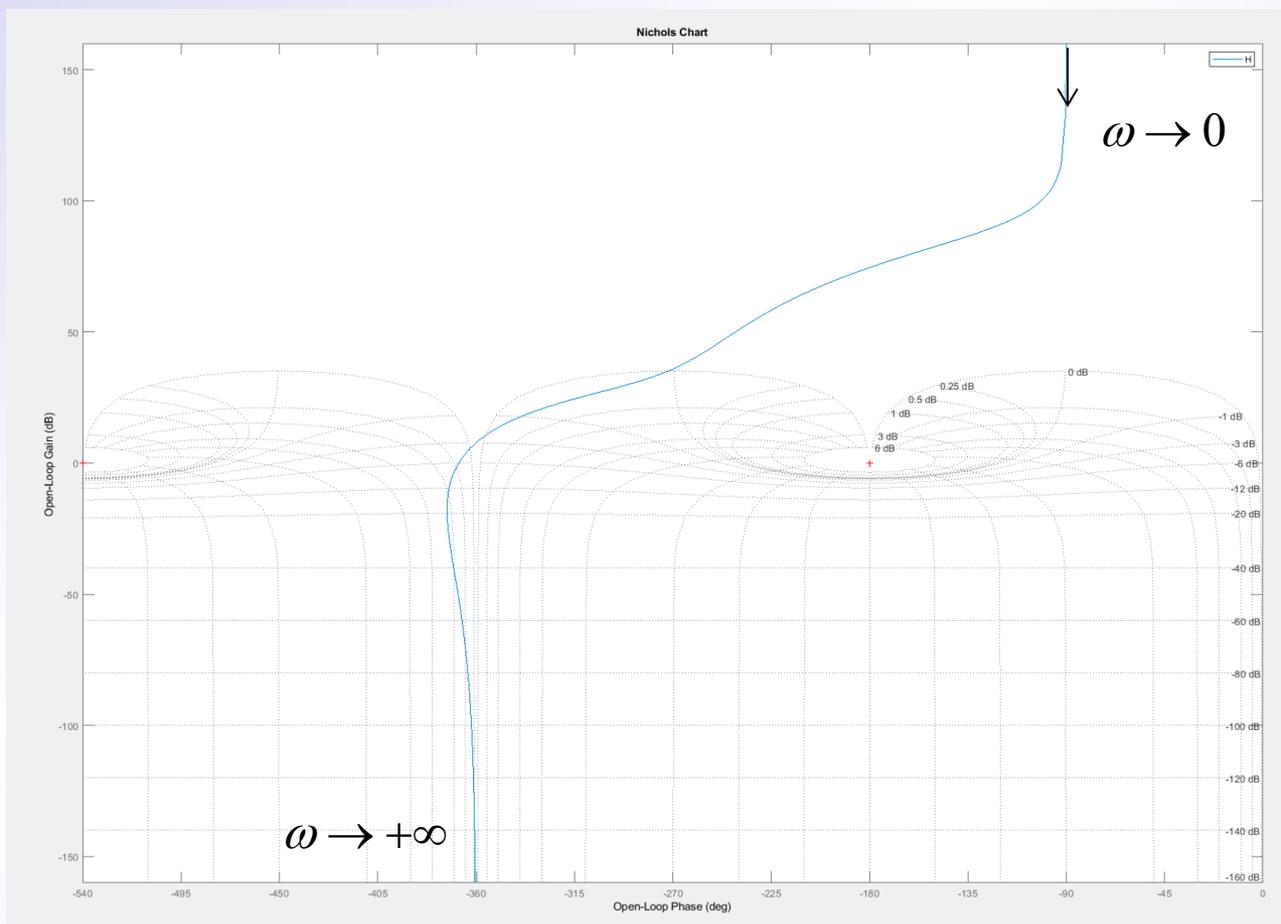


# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

**Exercice:** Déterminer le diagramme de Black de la fonction de transfert:

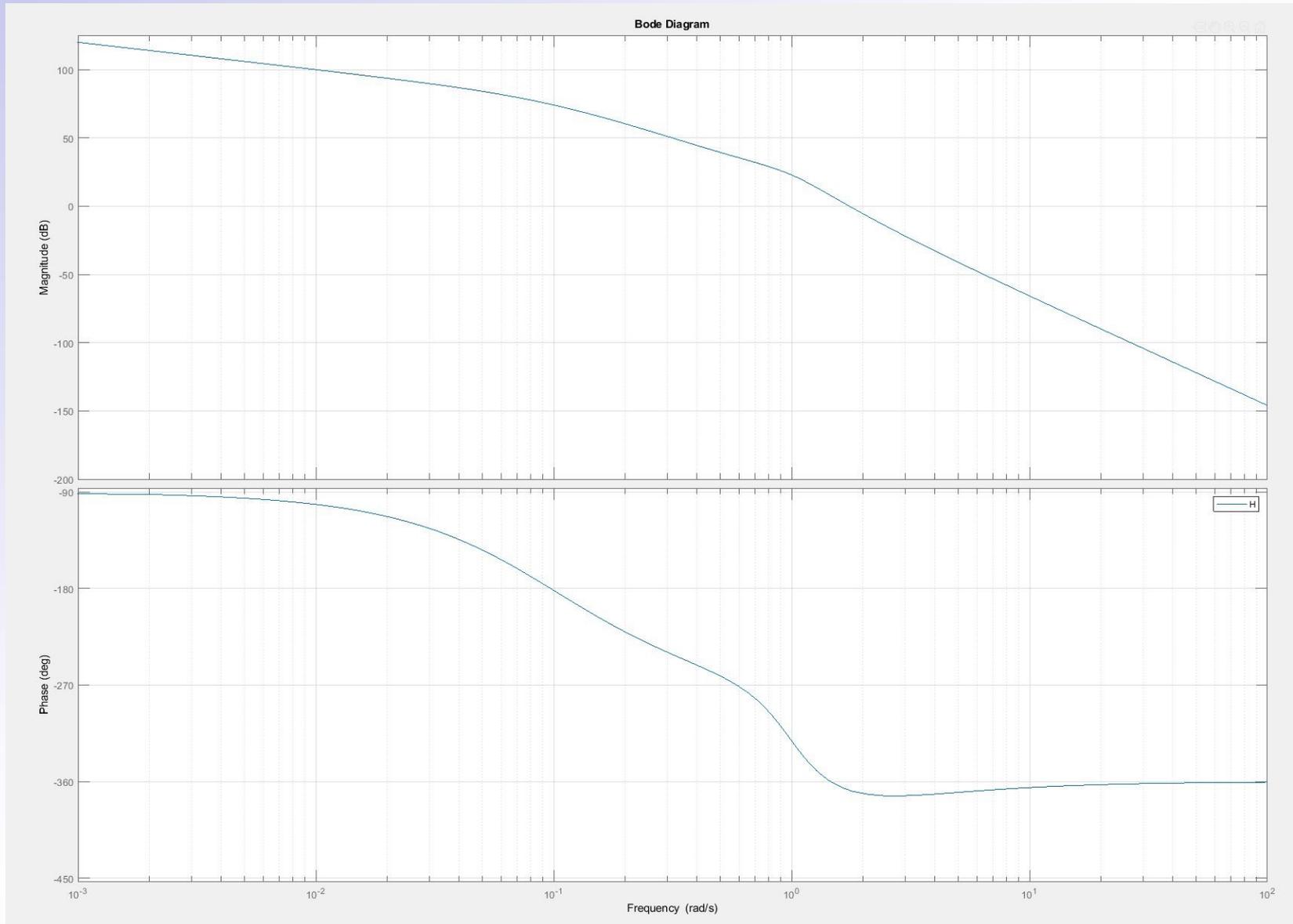
$$H(p) = \frac{5(p+2)}{p \left( p + \frac{1}{10} \right)^2 \left( \frac{p^2 + 2 \times 0.4 \times 1 p + 1^2}{1^2} \right)}$$

**Tracé de Black/Nichols:**



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## Rappel du tracé de Bode



# Représentations fréquentielles des fonctions de transfert

## 4.3 Résumé des diagrammes de Bode et de Black

- Si la fonction de transfert à étudier peut être mis sous forme d'un produit de fonctions élémentaires alors on peut utiliser les règles de construction du diagramme de Bode, déduire son tracé asymptotique et donc son tracé réel. Le diagramme de Black sera déduit facilement de cette étude.
- Si la fonction de transfert à étudier **ne peut pas être** mis sous forme d'un produit de fonctions élémentaires alors il est nécessaire d'établir algébriquement l'expression de son gain et de sa phase en fonction de la pulsation, d'étudier les propriétés asymptotiques de ces dernières, et tracer le diagramme de Bode point par point. Le diagramme de Black pourra par la suite être tracé également point par point.
- Ces représentations fréquentielles sont des outils très utiles et seront utilisées en automatique plus tard dans le cours pour caractériser la performance d'un asservissement.

# Auto-évaluation Cours 2

## Mes compétences à l'issue du Cours 2:

### Etre capable de:

- Calculer le module et l'argument d'un nombre complexe
- Calculer le gain et la phase d'une fonction de transfert
- Définir la notion d'analyse fréquentielle et la différentier de l'analyse temporelle
- Connaître les différentes expressions analytiques des fonctions de transferts élémentaires (intégrateurs, passe haut, passe bas, dérivateur, second ordre, cas du retard).
- Donner les représentations de Bode/Black Nichols de fonctions de transfert et de justifier les grandeurs caractéristiques associées

A decorative border made of intricate, symmetrical scrollwork and floral patterns, rendered in a grayscale, engraved style. The border frames the central text.

**Cours 3 : Analyse transitoire et de  
stabilité des systèmes dynamiques**

# Introduction

## **Les objectifs de ce cours sont:**

- Obtenir les expressions des réponses temporelles de fonctions de transfert élémentaires (premier ordre et second ordre) pour différents types de signaux d'entrée
- Obtenir les expressions des réponses temporelles de fonctions de transfert plus complexes par décomposition en éléments simples et utilisation des tables de transformées de LAPLACE
- Utiliser les théorèmes de la valeur finale et de la valeur initiale pour obtenir des valeurs de grandeurs physiques en 0 et en l'infini
- Définir la notion de stabilité
- Relier la stabilité d'un système au lieu des pôles de sa fonction de transfert
- Définir les principaux théorèmes relatifs à la stabilité, à la stabilité limite, etc

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

## 1) Réponses temporelles de systèmes élémentaires

- Dans le cours 1, nous avons abordé comment une fonction de transfert était définie, régissant le comportement des processus continus linéaires entre la sortie et l'entrée d'un système.

- Une fonction de transfert, représente une équation différentielle d'ordre  $n$  entre la sortie et la sollicitation d'entrée d'un système ramené dans le domaine fréquentiel

⇒ Nous allons montrer comment déterminer explicitement la sortie dans le domaine fréquentiel pour différentes sollicitations couramment utilisées en entrée, puis en déduire son expression dans le domaine temporel.

### 1.1 Fonction de transfert du premier ordre

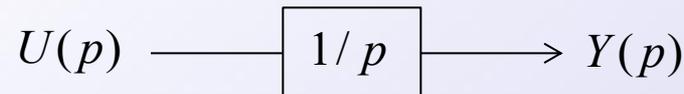
Fonction de transfert d'un intégrateur pur:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p} \quad (7)$$

L'équation différentielle régissant le comportement de cette fonction de transfert est donnée par:

$$\dot{y} = u \quad (8)$$

Le schéma bloc équivalent est donné par:



# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

## a) Réponse sans entrée $u$

Si  $u(t)$  est nulle alors la sortie vaut:

$$\int_{t_0}^t \dot{y}(t) dt = 0 \Leftrightarrow y(t) = y(t_0), \forall t \geq t_0 \quad (9)$$

## b) Réponse avec entrée $u$

En cas de présence d'entrée, on a alors:

$$Y(p) = \frac{1}{p} U(p) \quad (10)$$

La sortie peut alors se déduire de:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} U(p)\right\} \quad (11)$$

Suivant les signaux d'entrée considérés, une expression temporelle de la sortie pourra être déduite.

**Les théorèmes de la valeur initiale et finale permettront de déterminer les valeurs initiales et finales de la grandeur physique de sortie du système.**

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

Réponse impulsionnelle (suite à une entrée de type Dirac):

$$u(t) = a\delta(t), y(0^+) = y_0 \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} U(p) = a$$

En appliquant le théorème de la dérivée (4) sur (8), on a

$$pY(p) - y(0^+) = U(p) = a$$

En appliquant l'inverse de la transformée de Laplace, d'après les tables, on a:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{p}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y(0^+)}{p}\right\} \\ &= (a + y_0)\Gamma(t) \end{aligned} \quad (12)$$

**Remarque:** il y a superposition de l'influence de la condition initiale à celle de l'entrée. Une entrée impulsionnelle traduit donc un changement de condition initiale sur un intégrateur.

Réponse indicielle (suite à une entrée de type échelon):

$$u(t) = a\Gamma(t), y(0^+) = y_0 \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} U(p) = \frac{a}{p}$$

En appliquant le théorème de la dérivée (4) sur (8), on a

$$pY(p) - y(0^+) = U(p) = \frac{a}{p}$$

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

En appliquant l'inverse de la transformée de Laplace, d'après les tables, on a:

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{p^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y(0^+)}{p}\right\} \\ &= (at + y_0)\Gamma(t)\end{aligned}\quad (13)$$

Réponse suite à une entrée de type rampe:

$$u(t) = at, y(0^+) = y_0 \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} U(p) = \frac{a}{p^2}$$

En appliquant le théorème de la dérivée (4) sur (8), on a

$$pY(p) - y(0^+) = U(p) = \frac{a}{p^2}$$

En appliquant l'inverse de la transformée de Laplace, d'après les tables, on a:

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{p^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y(0^+)}{p^2}\right\} \\ &= \left(a \frac{t^2}{2!} + y_0 t\right)\Gamma(t)\end{aligned}\quad (14)$$

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

Fonction de transfert du premier ordre:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + \tau p} \quad (15)$$

a) Réponse sans entrée  $u$

L'équation différentielle associée à (15) est donnée comme suit:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \quad (16)$$

(16) admet comme solution

$$y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} y_0, \forall t \geq 0 \quad (17)$$

b) Réponse avec entrée  $u$

Réponse impulsionnelle

$$u(t) = a\delta(t), y(0^+) = y_0 \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} U(p) = a$$

En appliquant le théorème de la dérivée (4) sur (16), on a

$$\tau(pY(p) - y(0^+)) + Y(p) = U(p) = a$$

En appliquant l'inverse de la transformée de Laplace, d'après les tables, on a:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{1 + \tau p}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tau y(0^+)}{1 + \tau p}\right\}$$

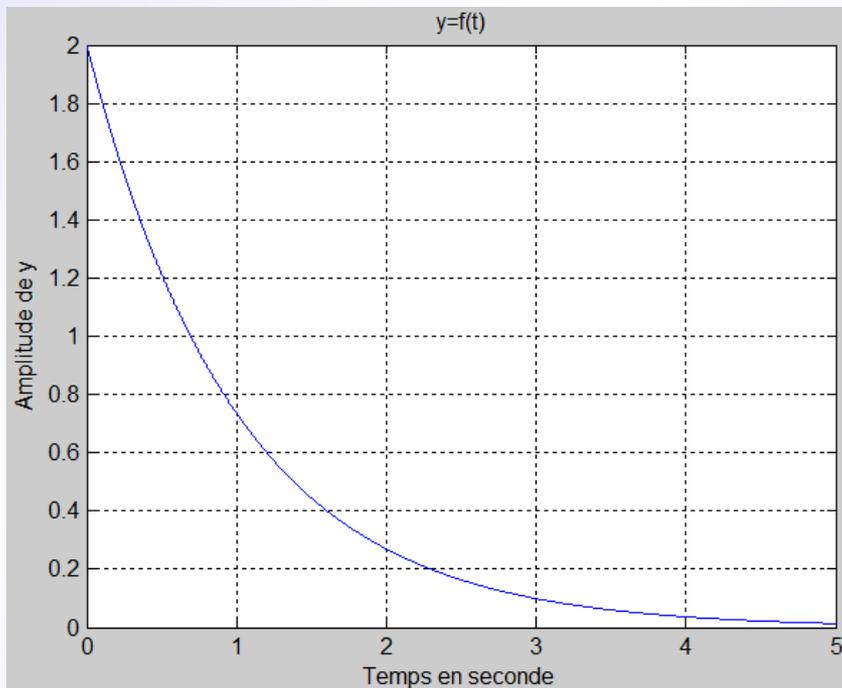
# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

On en déduit alors:

$$y(t) = \left( \frac{a}{\tau} + y(0^+) \right) e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0 \quad (18)$$

La réponse  $y(t)$  prend la valeur  $\left( \frac{a}{\tau} + y(0^+) \right)$  et s'amortit exponentiellement avec le temps.

Tracé:  $a = \tau = 1, y(0^+) = 1$



# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

Réponse indicielle:

$$u(t) = a\Gamma(t), y(0^+) = y_0 \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} U(p) = \frac{a}{p}$$

En appliquant le théorème de la dérivée (4) sur (16), on a

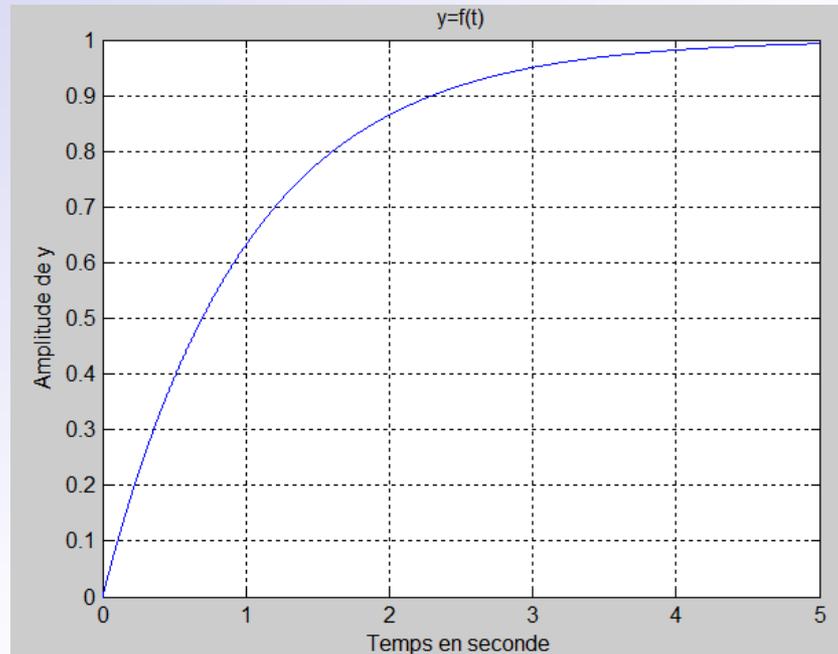
$$\tau(pY(p) - y(0^+)) + Y(p) = U(p) = \frac{a}{p}$$

En appliquant l'inverse de la transformée de Laplace, d'après les tables, on a:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{p(1+\tau p)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tau y(0^+)}{1+\tau p}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{a \frac{1/\tau}{p\left(p + \frac{1}{\tau}\right)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y(0^+)}{p + \frac{1}{\tau}}\right\} \\ &= a\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + y(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \tag{19}$$

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

Tracé:  $a = \tau = 1, y(0^+) = 0$



Réponse à une rampe:

$$u(t) = at, y(0^+) = y_0 \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} U(p) = \frac{a}{p^2}$$

En appliquant le théorème de la dérivée (4) sur (16), on a

$$\tau(pY(p) - y(0^+)) + Y(p) = U(p) = \frac{a}{p^2}$$

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

En appliquant l'inverse de la transformée de Laplace, d'après les tables, on a:

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{a \frac{1}{p^2(1+\tau p)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\tau y(0^+) \frac{1/\tau}{p\left(p + \frac{1}{\tau}\right)}\right\} \\&= at - a\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\&= at + (\tau y(0^+) - a\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \forall t \geq 0\end{aligned}\quad (20)$$

Fonction de transfert du premier ordre:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 - \tau p} \quad (21)$$

Par un raisonnement analogue à celui qui a été réalisé précédemment, on peut déterminer les réponses aux signaux d'entrée classiques utilisés en automatique

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

L'équation différentielle régissant le comportement de cette fonction de transfert est donnée par:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = u(t) \quad (22)$$

avec  $\tau$  la constante de temps.

## a) Réponse sans entrée $u$

(22) admet comme solution

$$y(t) = e^{+\frac{t}{\tau}} y_0, \forall t \geq 0 \quad (23)$$

La solution est instable, puisque  $y(t)$  diverge exponentiellement.

## b) Réponse avec entrée $u$

### Réponse impulsionnelle

Par un raisonnement analogue à la partie précédente, on pourra montrer que:

$$y(t) = \left( \frac{a}{\tau} + y(0^+) \right) e^{+\frac{t}{\tau}}, t \geq 0 \quad (24)$$

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

## Réponse indicielle:

Par un raisonnement analogue à la partie précédente, on pourra montrer que:

$$y(t) = a \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + y(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (25)$$

La solution diverge également au cours du temps...

## **1.2 Filtre du second ordre:**

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \quad (26)$$

où  $\omega_n$  est la pulsation naturelle du système et  $\xi$  est le coefficient d'amortissement.

On fait l'hypothèse que  $|\xi| < 1$ , système à caractéristique oscillante, sinon la fonction de transfert pourrait se décomposer en deux éléments du premier ordre et on serait donc ramené à traiter les cas des parties précédentes.

L'équation différentielle associée à (26) est donnée par:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u \quad (27)$$

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

## a) Réponse sans entrée $u$

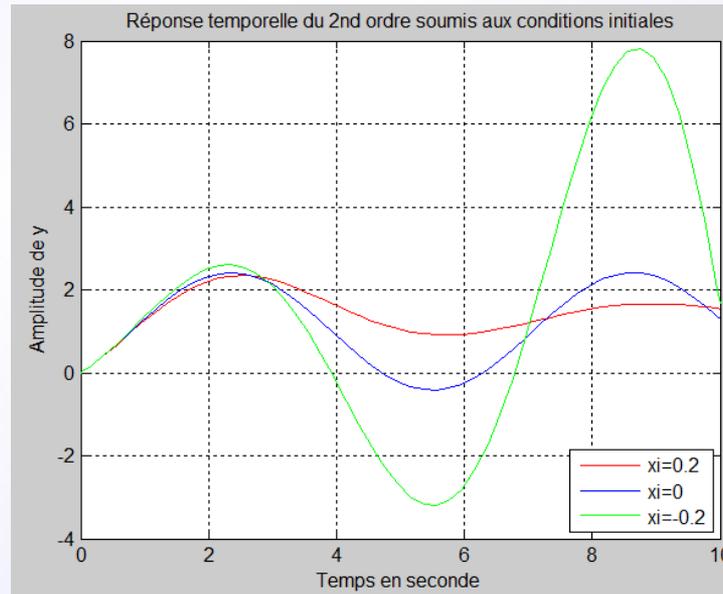
Dans le cours, nous avons montré que pour  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ , la solution  $y(t)$  est donnée par

$$y(t) = C e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_p t + \varphi) \quad (28)$$

Où  $y_0 = C \sin(\varphi)$ ,  $\dot{y}_0 = C(-\xi \omega_n \sin(\varphi) + \omega_p \cos(\varphi))$  et  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ .

- $\Rightarrow \xi > 0$  Sinusoïdale amortie par une exponentielle
- $\Rightarrow \xi = 0$  Sinusoïdale juste entretenue
- $\Rightarrow \xi < 0$  Sinusoïdale divergente

Ex:  $\omega_n = 1$ ,  $y(0^+) = 1$ ,  $\dot{y}(0^+) = 1$



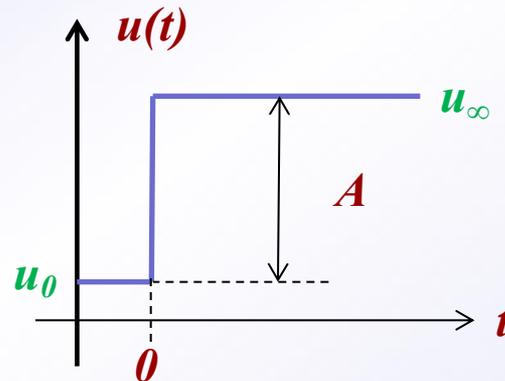
# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

## b) Réponse avec entrée $u$

### Réponse impulsionnelle:

En l'absence de conditions initiales et pour  $u(t) = \delta(t)$ , la dérivée  $\dot{y}(0^+)$  prend instantanément une valeur initiale 1 et  $y(t)$  évolue comme dans le cas sans entrée. Dans le cas de présence de conditions initiales et pour  $u(t) = \delta(t)$ , la dérivée  $\dot{y}(0^+)$  prend instantanément une valeur initiale 1 + la valeur de la condition initiale précédente,  $y(0^+)$  prend la valeur de la condition initiale et  $y(t)$  évolue comme dans le cas sans entrée.

### Réponse indicielle:

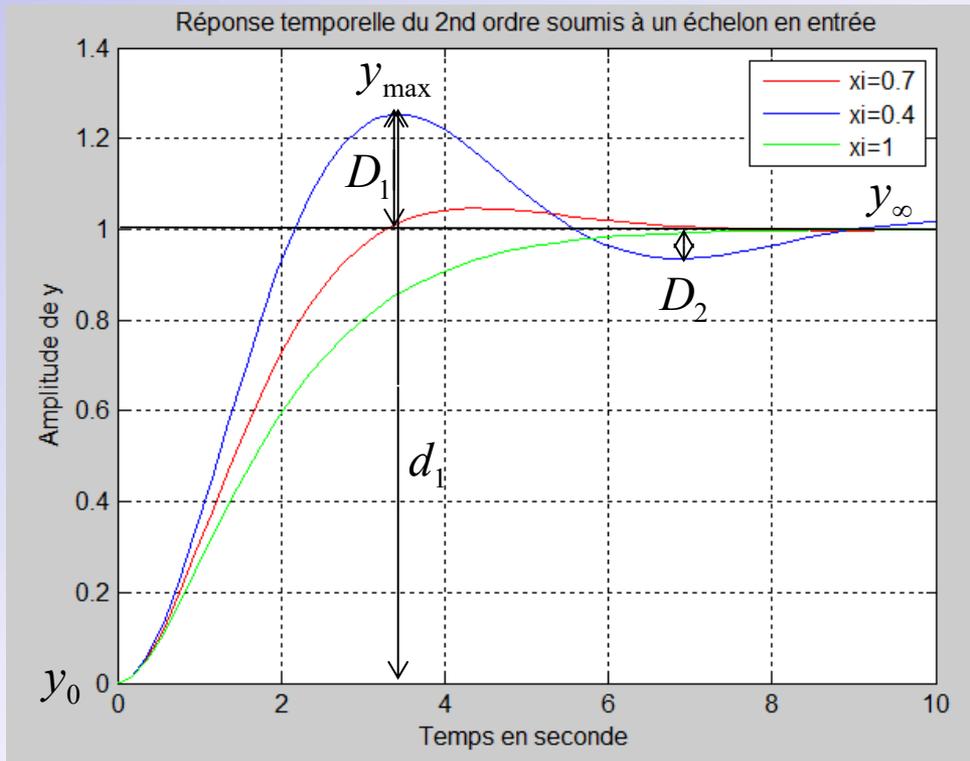


Dans le cas d'absence de conditions initiales et pour  $u(t) = a\Gamma(t)$ , on admettra à ce stade qu'à partir des tables de Laplace, on a:

$$y(t) = a - a \frac{\omega_n}{\omega_p} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Où  $\varphi = \text{Arc cos}(\xi)$

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires



## Dépassements

$$D_k \% = e^{-\frac{\xi\pi k}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

avec

$$D_1 \% = 100 \frac{y_{\max} - (y_{\infty} - y_0)}{y_{\infty} - y_0}$$

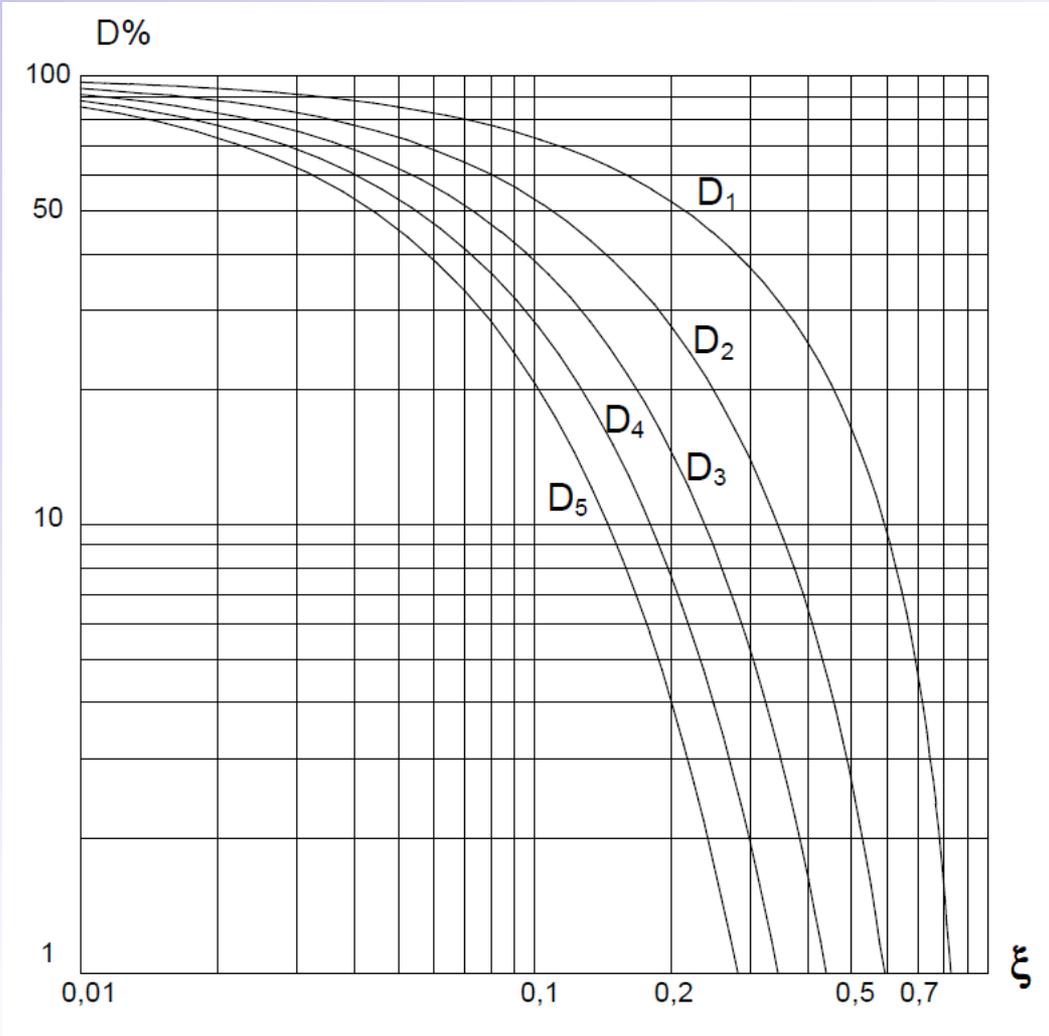
## Pseudo-période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

- Toutes les courbes ont une tangente à l'origine traduisant la caractéristique d'un système du second ordre.
- On appelle dépassement le rapport (exprimé en %) entre la valeur transitoire maximale atteinte par le signal et le niveau du signal en régime permanent
- Remarque: On peut toujours utiliser le théorème de la valeur finale et de la valeur initiale pour déterminer  $y(0^+)$  et  $y(\infty)$ .

# Réponses temporelles de systèmes élémentaires

**Le paramètre  $\xi$  se détermine en utilisant l'abaque ci-dessous.**



$$H(p) = \frac{K}{\omega_n^2 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + 1}$$

**En utilisant la valeur de  $\xi$  trouvée et la mesure de la pseudo-période  $T_p$ ,  $\omega_n$  se déduit de la relation**

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

# Réponses temporelles de systèmes d'ordre quelconque

La détermination de la réponse temporelle d'un système d'ordre fini quelconque, à partir de sa fonction de transfert, est en général réalisé à partir des outils de la transformée de Laplace.

En effet, cela correspond à résoudre l'équation différentielle d'ordre quelconque sous jacente à la fonction de transfert.

Dans un premier temps, nous montrerons :

- qu'il est trop complexe de vouloir réaliser une résolution explicite par une méthode directe
- qu'il est vivement recommandé de procéder à une résolution explicite indirecte

## *2) Méthodologie de résolution explicite d'équation différentielle d'ordre fini*

*a) Obtention de la fonction de transfert + remplacement du signal d'entrée en TL*

*b) Décomposition en éléments simples*

*c) Solution explicite par calcul de la transformée inverse de Laplace*

# Résolution explicite d'équation différentielle

Pourquoi il faut éviter la résolution directe? On cherche l'expression  $s(t)=\dots$

Si l'on prend de nouveau le cas d'une équation différentielle générale:

$$a_0 u(t) + a_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}, \quad n \leq m \quad (13)$$

dont la fonction de transfert, en supposant les conditions initiales nulles, est donnée par

$$H(p) = \frac{S(p)}{U(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m} \quad (14)$$

La solution de l'équation différentielle dans le domaine de Laplace correspond à

$$S(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m} U(p) \quad (15)$$

où  $U(p)$  est remplacé par son expression équivalente suivant le signal d'entrée considéré, par exemple une impulsion, un échelon, une rampe, etc

La solution l'équation différentielle dans le domaine temporel serait déduite par:

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m} U(p) \right\}$$

Cette approche directe est difficilement utilisable sauf dans des cas simples. Il faudra plutôt conseiller une décomposition en éléments simples de (15) afin d'éviter d'avoir à calculer littéralement une fonction de Laplace inverse.

# Résolution explicite d'équation différentielle

Méthodologie de résolution par décomposition en éléments simples:

(15) peut être réécrit comme suit:

$$S(p) = \frac{c_0 + c_1 p + \dots + c_n p^n}{d_0 + d_1 p + \dots + d_m p^m} = \frac{\sum_{i=0}^n c_i p^i}{\sum_{i=0}^m d_i p^i} \quad (17)$$

Le polynôme présent au dénominateur de (17) possède  $m$  racines (éventuellement multiples) notées  $p_1$  d'ordre de multiplicité  $m_1$ ,  $p_2$  d'ordre de multiplicité  $m_2, \dots, p_r$  d'ordre de multiplicité  $m_r$  avec  $m_1 + m_2 + \dots + m_r = m$ . On peut alors écrire (17) comme étant:

$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^n c_i p^i}{\prod_{i=1}^r (p - p_i)^{m_i}} \quad (18)$$

En décomposant (18) par rapport à chacun des termes du dénominateur, on obtient:

$$S(p) = E + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e_{ik}}{(p - p_i)^k} \quad (19)$$

Où  $E = \frac{c_n}{d_m} \neq 0$  si  $n=m$  et  $e_{ik} = \frac{1}{(m_i - k)!} \left[ \frac{d^{m_i - k}}{dp^{m_i - k}} \left[ (p - p_i)^{m_i} S(p) \right] \right]_{p=p_i}$

# Résolution explicite d'équation différentielle

*Ex. de la décomposition en éléments simples:*

*Exemple 1:*

$$\begin{aligned}G(p) &= \frac{p^2 + 2p + 2}{p^2 + 2p + 3} = \frac{p^2 + 2p + 2}{(p+1)(p+2)} \\ &= E + \frac{e_{11}}{p+1} + \frac{e_{21}}{p+2} \\ &= 1 + \frac{e_{11}}{p+1} + \frac{e_{21}}{p+2}\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}e_{11} &= [(p+1)G(p)]_{p=-1} = \frac{(-1)^2 + 2(-1) + 2}{(-1+2)} = 1 \\ e_{21} &= [(p+2)G(p)]_{p=-2} = \frac{(-2)^2 + 2(-2) + 2}{(-2+1)} = -2\end{aligned}$$

donc

$$G(p) = 1 + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+2}$$

**Remarque:** Une autre méthode de décomposition en éléments par identification est également utilisable et sera présentée sur un autre exemple.

# Résolution explicite d'équation différentielle

*Exemple 2:* Soit un système régi par une équation différentielle d'ordre 2:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s = e(t)$$

où  $e(t) = t$  et les conditions initiales sont supposées nulles.

Après application de la propriété de la dérivée de la transformation de Laplace, on obtient la fonction de transfert suivante:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}$$

Donc

$$S(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} E(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \frac{1}{p^2}$$

En procédant à une décomposition en éléments simples, on a:

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)} = \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+2} \\ &= \frac{(Ap+B)(p+1)(p+2) + Cp^2(p+2) + Dp^2(p+1)}{p^2(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$

# Résolution explicite d'équation différentielle

En développant, on obtient:

$$S(p) = \frac{(A + C + D)p^3 + (3A + B + 2C + D)p^2 + (2A + 3B)p + 2B}{p^2(p + 1)(p + 2)}$$

Par identification à l'équation de départ, on peut en déduire que:

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ 3A + B + 2C + D = 0 \\ 2A + 3B = 0 \\ 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + D = 3/4 \\ 2C + D = 7/4 \\ A = -3/4 \\ B = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = -1/4 \\ A = -3/4 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

Finalement, on obtient la décomposition en éléments simples suivantes:

$$S(p) = \frac{-(3/4)p + 1/2}{p^2} + \frac{1}{p + 1} + \frac{-1/4}{p + 2}$$

# Résolution explicite d'équation différentielle

## Transformée inverse de Laplace

- Pour obtenir la solution dans le domaine temporel, il est nécessaire de **calculer la transformée inverse de Laplace** sur la décomposition en éléments simples précédente.

- La **table des transformées de Laplace** peut être utilisée pour faciliter l'obtention de l'expression dans le domaine temporel, solution de l'équation différentielle.

Calculons la transformée inverse de Laplace de (19):

$$\begin{aligned} s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{E + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e_{ik}}{(p-p_i)^k}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{E\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e_{ik}}{(p-p_i)^k}\right\} = E\delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \end{aligned} \quad (20)$$

- Reprenons les deux exemples précédents pour illustrer:

*Exemple 1 (suite):*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{1 + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{1\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{p+2}\right\} \\ &= \delta(t) + (e^{-t} - 2e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

# Résolution explicite d'équation différentielle

*Exemple 2 (suite):*

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{3}{4p} + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4(p+2)} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{3}{4p} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2p^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{4(p+2)} \right\} \\ &= \left( -\frac{3}{4} + \frac{t}{2} + e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{4} \right) u(t) \end{aligned}$$

*Remarques : La transformée de Laplace permet :*

*- de traduire un problème de résolution d'équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  du domaine temporel dans le domaine fréquentiel.*

*- de décomposer dans le domaine fréquentiel les constituantes de l'équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  en une somme de composantes élémentaires d'ordre plus faible.*

*La transformée inverse de Laplace permet de donner la solution explicite de l'équation différentielle d'ordre  $n$  dans le domaine temporel comme une somme de termes élémentaires, ici de la décomposition précédemment établie.*

*=> Outil puissant pour la résolution d'équation différentielle linéaire d'ordre fini*

# Notion de stabilité

La stabilité de système est une notion clé dans le domaine de l'automatique, notamment dans la conception d'asservissement de processus.

## 3. Définition de la stabilité

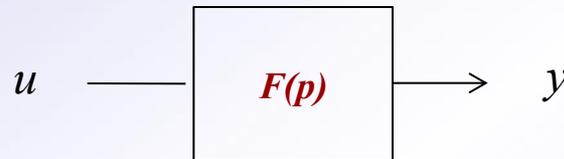


Fig.1 Représentation d'un système entrée/sortie

D'une façon très générale, on peut définir qu'un système est stable si tout signal d'entrée borné produit un signal de sortie borné.

**Stabilité entrée-sortie: un système linéaire est dit stable si et seulement si il existe  $M > 0$  tel que dans le cas où un système est soumis à ces conditions initiales, on a:**

$$\sup_{t \geq 0} |y(t)| \leq M \sup_{t \geq 0} |u(t)|$$

**Dans le cas où  $u=0$ , un système linéaire est dit stable si et seulement si quelle que soit la valeur des conditions initiales, on a:**

$$u = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

# Notion de stabilité

Peut-on lier la propriété de stabilité d'un système  $F(p)$  à partir de la caractérisation des valeurs des pôles d'une fonction de transfert?

## 3.1 Stabilité des systèmes et pôles des fonctions de transfert

On suppose connaître l'équation différentielle régissant le système  $F(p)$  de la fig.1:

$$a_0 u(t) + a_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} = b_0 y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m}, n \leq m \quad (1)$$

La fonction de transfert associée est donnée par:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m} \quad (2)$$

Le régime libre de (2) est donné en résolvant l'équation caractéristique suivante:

$$b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m = 0 \quad (3)$$

Si on dénomme  $p_1, p_2, \dots, p_m$  les racines complexes de (3), en supposant qu'elles ne soient pas multiples, alors on peut écrire:

$$b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m = k(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m) \quad (4)$$

En considérant une sollicitation de type échelon unitaire pour  $U(p)$  dans (2), à partir de (4), on peut écrire la relation suivante:

# Notion de stabilité

$$Y(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{k(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)} \frac{1}{p} \quad (5)$$

Après décomposition en éléments simples, on a:

$$Y(p) = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p - p_1} + \dots + \frac{c_m}{p - p_m} \quad (6)$$

En procédant à la transformée inverse de Laplace de (6) et à partir des tables, on obtient:

$$\begin{aligned} y(t) &= (c_0 + c_1 e^{p_1 t} + \dots + c_m e^{p_m t}) u(t) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i e^{p_i t} u(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Pour que  $y(t)$  ne diverge pas et soit donc stable asymptotiquement, il est nécessaire que toutes les termes en exponentiels soient à parties réelles négatives.

Dans le cas de racines d'ordre de multiplicité  $r_i$  associés alors les solutions sont données par

$$y(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} C_{i,j} t^{j-1} e^{p_i t} u(t) \quad (8)$$

# Notion de stabilité

Par conséquent, un système est dit stable si toutes les racines de l'équation caractéristique associée à (3) sont à parties réelles strictement négatives  $\Re(p_i) < 0$ ,  $\forall i$

## 3.2 Stabilité des systèmes asservis

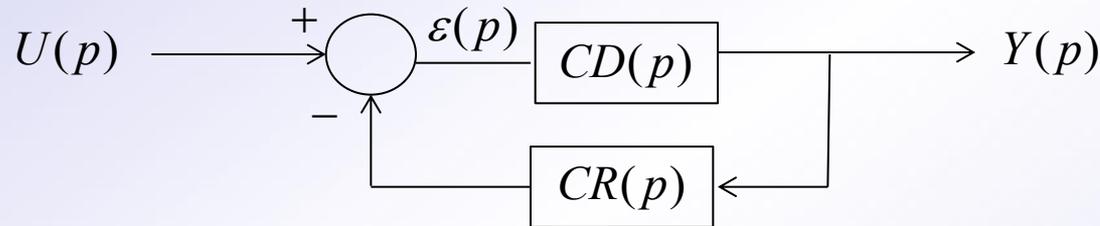


Fig. 2 Représentation d'un asservissement

La fonction de transfert de la boucle fermée de la fig.2 est donnée par:

$$FT_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{CD(p)}{1 + CD(p)CR(p)}$$

Un système asservi est dit stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée sont à parties réelles strictement négatives.

# Notion de stabilité

## 4) Etude des différents cas donnant la stabilité/instabilité

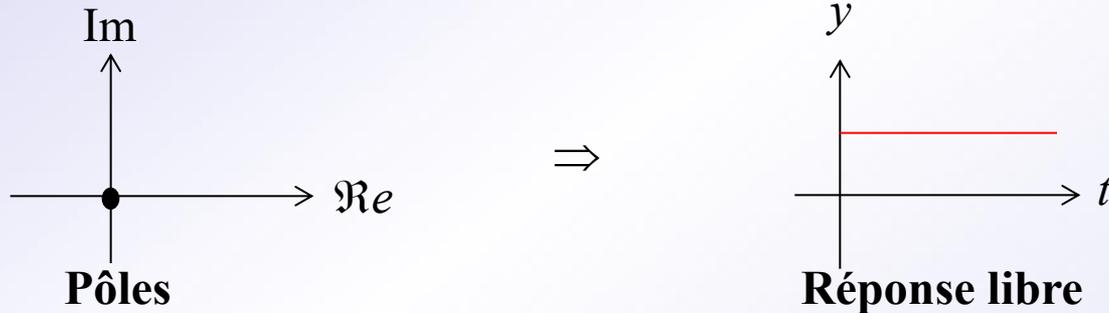
On peut distinguer plusieurs cas qui peuvent se présenter dans l'analyse de stabilité:

### a) Pôles unique placé à l'origine $p_i = 0$

Si une fonction de transfert en boucle fermée a un pôle uniquement placé à l'origine

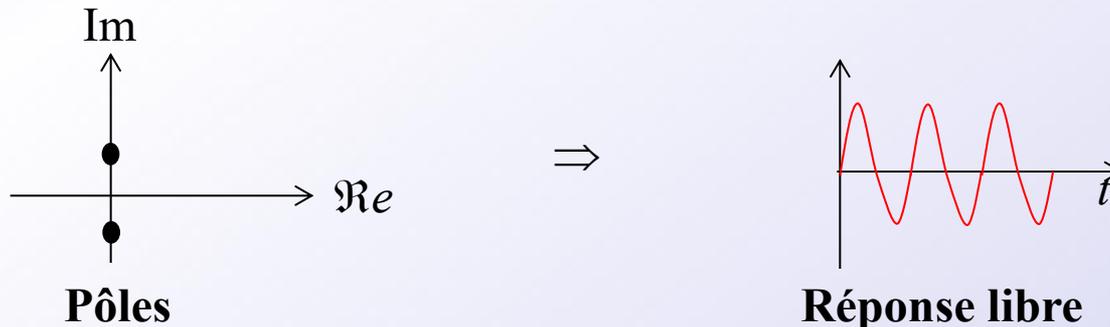
$p_i = 0$ , on a alors à partir de (7) la réponse libre  $y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_i e^{0t} = C_i$

⇒ Le système est dit à stabilité marginale



### b) Pôles purement imaginaires $p_i = j\omega_i, p_{i+1} = -j\omega_i$

Si la fonction de transfert possède deux pôles purement imaginaires  $p_i = j\omega_i, p_{i+1} = -j\omega_i$  alors la réponse libre  $y(t) = C_i e^{j\omega t} + C_{i+1} e^{-j\omega t} = C_{i,i+1} \sin(\omega t + \varphi)$



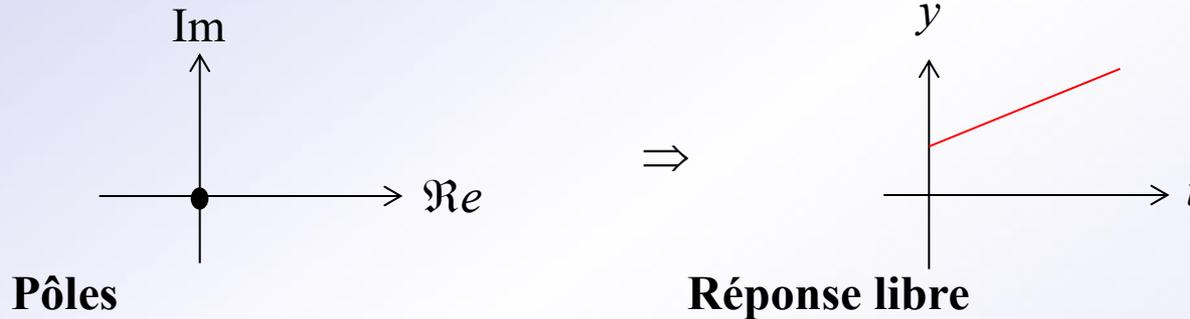
# Notion de stabilité

⇒ Le système est dit à stabilité marginale

## c) Pôles multiples placés à l'origine

Si une fonction de transfert en boucle fermée a plusieurs pôles placés à l'origine, on a alors à partir de (7), on peut dire que la réponse libre  $y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_i t e^{0t} = +\infty$

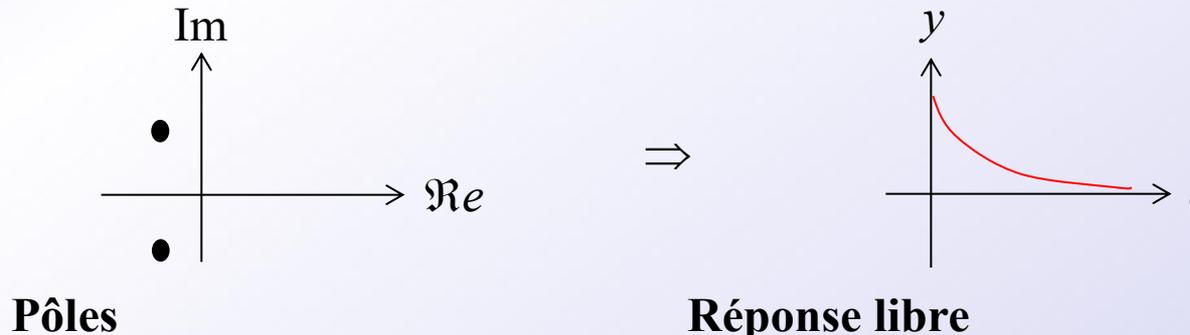
⇒ Le système est dit instable



## d) Pôles complexes à parties réelles négatives

Si la fonction de transfert possède  $n$  pôles complexes à parties réelles négatives  $p_i = -\sigma_i + j\omega_i$ , alors la réponse libre  $y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_i e^{-\sigma_i t} e^{j\omega_i t} \rightarrow 0$ .

⇒ Le système est dit asymptotiquement stable

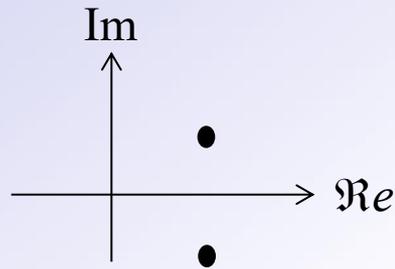


# Notion de stabilité

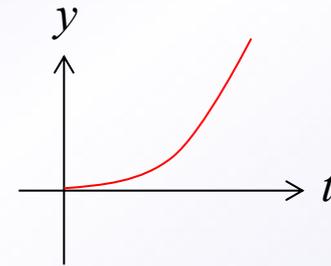
## *e) Pôles complexes dont au moins un pôle est à partie réelle positive*

Si la fonction de transfert possède  $n$  pôles complexes dont au moins un pôle est à partie réelle positive alors la réponse libre  $y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_i e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} \rightarrow \infty$ .

⇒ Le système est dit instable



⇒



Pôles

Réponse libre

## *f) Synthèse du placement des pôles sur la caractéristique des réponses impulsionnelles*

Se référer à la figure 3.

# Notion de stabilité

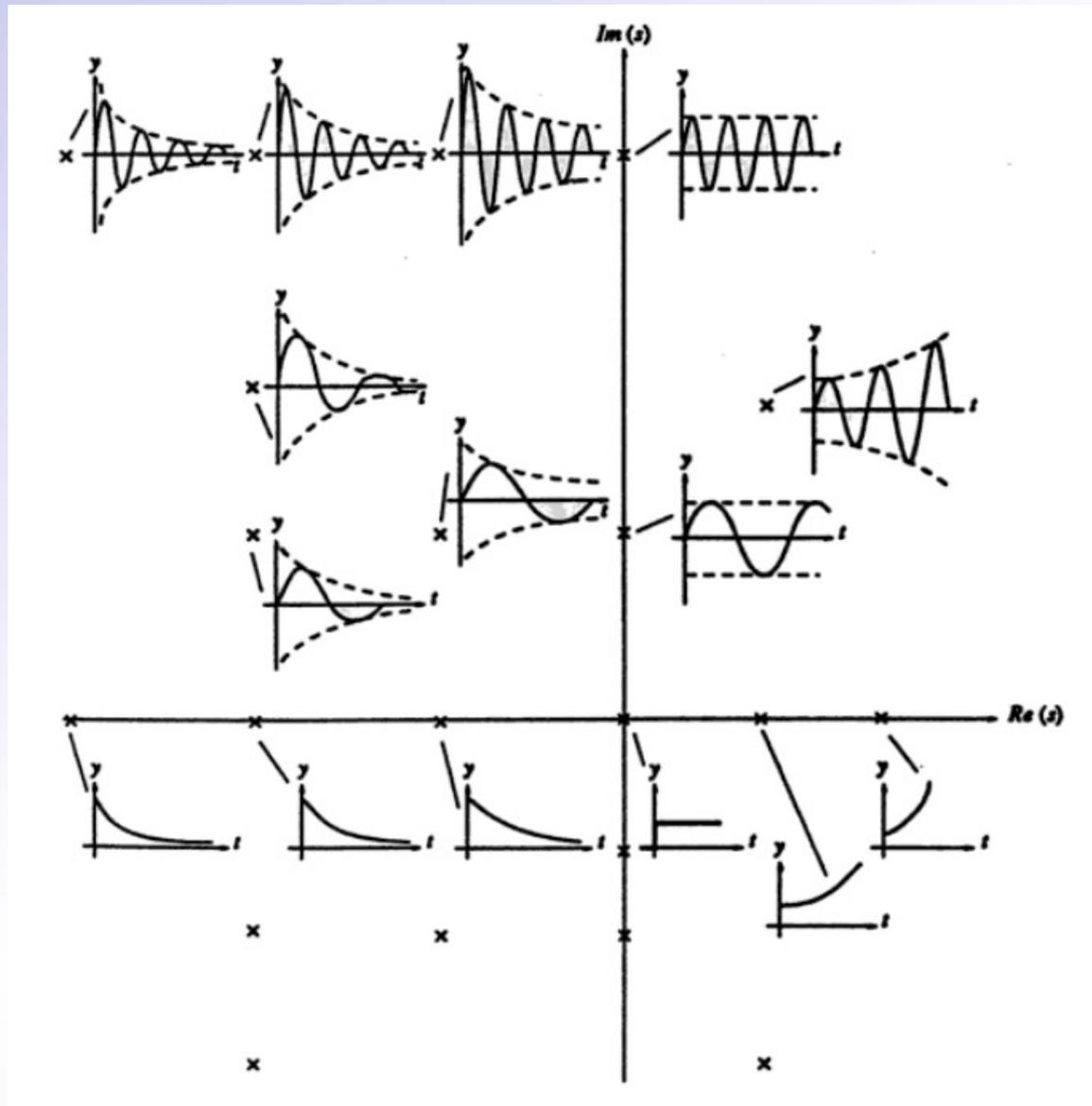


Fig.3: Influence du placement des pôles sur la caractéristique des réponses impulsionnelles

# Auto-évaluation Cours 3

## Mes compétences à l'issue du Cours 3:

### Etre capable de:

- Déterminer les réponses temporelles élémentaires des systèmes du premier ordre et du deuxième ordre avec leurs caractéristiques pour différents types de signaux d'entrées
- Résoudre explicitement une équation différentielle d'ordre fini à partir de la méthodologie proposée (basée sur la décomposition en éléments simples)
- Définir la notion de stabilité
- Calculer les pôles d'une fonction de transfert et déterminer le type de stabilité/instabilité
- Définir les principaux théorèmes relatifs à la stabilité, à la stabilité limite, etc



**Cours 4 : Identification des  
systèmes dynamiques**

# Introduction

## **Les objectifs de ce cours sont:**

- Définir la notion d'identification de système
- Introduire des méthodes d'identification temporelle de systèmes
  - du premier ordre avec et sans retard
  - du second ordre
- Introduire des méthodes d'identification des systèmes du premier et second ordre à partir de réponses fréquentielles.

# Notion d'identification de systèmes

## 1) Terminologie

Afin d'être en mesure de procéder à la régulation d'un système, nous avons vu dans les chapitres précédents qu'il était nécessaire d'avoir un **modèle de connaissance/de représentation** décrivant le comportement du système.

**Identifier un système** consiste à déterminer, à partir des connaissances et des mesures disponibles sur un système, les relations de cause à effet qui relient les grandeurs d'entrées et de sorties de ce système.

Plusieurs approches peuvent exister afin d'obtenir le modèle du système qui relient les entrées et les sorties:

-**Approche théorique: modèle de connaissance a priori** d'un système basé sur les connaissances phénoménologiques de ce dernier.

-**Approche expérimentale: modèle de représentation** basé sur des modèles de type boîte noire où l'on a seulement la connaissance de l'entrée et de la sortie du système, on cherche à reconstruire le modèle reliant le lien entre des entrées et des sorties données.

En règle générale, on a une vision combinée de ces deux approches pour l'identification de systèmes, on considère alors un modèle de type boîte grise.

# Notion d'identification de systèmes

=> Identification de systèmes: A pour objectif la détermination des paramètres du modèle, à partir de la connaissance expérimentale des entrées/sorties.

Qu'appelle t-on **un modèle**?

Un modèle est une représentation mathématique d'un processus réel, au travers de ces manifestations réelles (entrées/sorties).

Identifier un système, c'est lui donner une représentation mathématique approximative la plus proche possible de la réalité.

## 2) L'identification des systèmes

Le processus d'identification

- Est un processus itératif jusqu'à validation du modèle obtenu pour un objectif donné
- Nécessite une connaissance a priori pour le choix du modèle
- Est basé sur des expérimentations (nécessite des données) entrées/sorties

Il est résumé dans le schéma donné ci après.

# Notion d'identification de systèmes

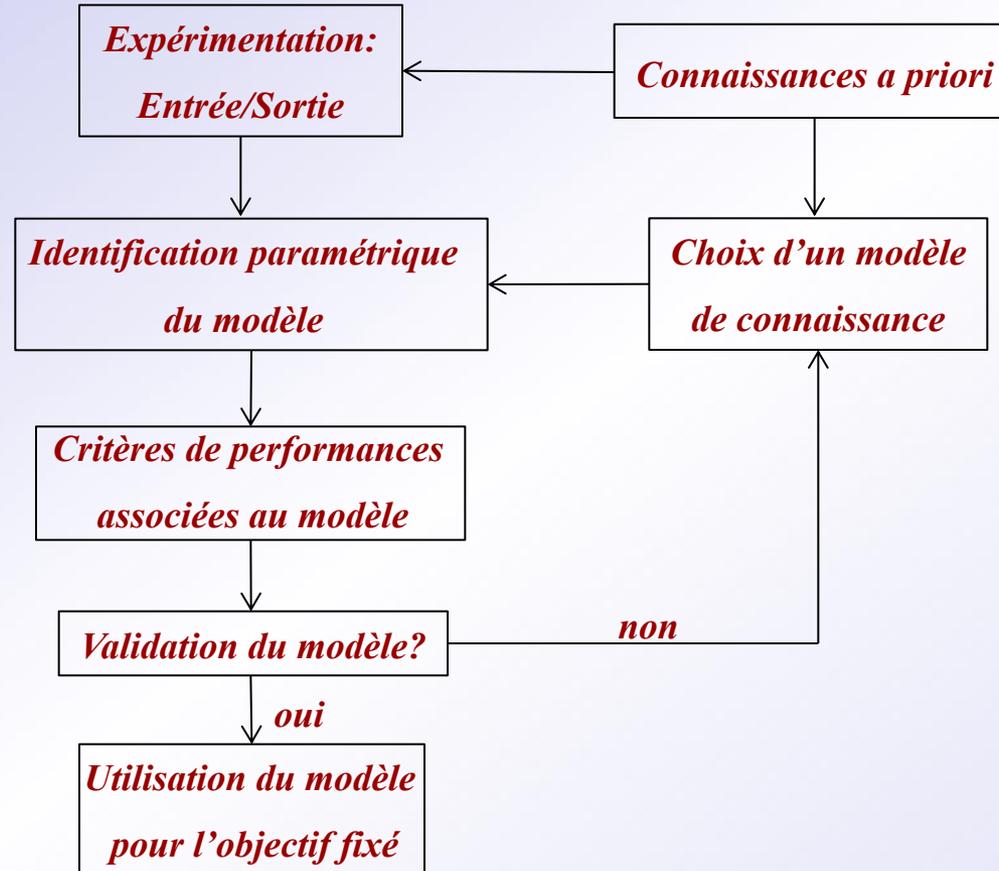


Fig.1 Processus d'identification

# Notion d'identification de systèmes

Deux représentations peuvent être utilisées pour l'identification des systèmes:

- **Représentation paramétrique:** il s'agit d'une représentation basée sur un nombre de coefficients finis d'un modèle (équation différentielle, fonction de transfert, etc) à identifier, à partir de la connaissance des signaux d'entrée/sorties.

- **Représentation non paramétrique:** il s'agit d'une représentation d'un modèle de comportement de système obtenue à l'aide de l'analyse fréquentielle, notamment au travers de représentation fréquentielle (Bode, Black Nichols...)

## 3) Méthodologie d'identification de système basée sur l'interprétation de réponses temporelles

On considère les réponses indicielles (à un échelon en entrée) des systèmes considérés.

### 3.1 Systèmes du premier ordre

a) *Fonction de transfert du type*

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

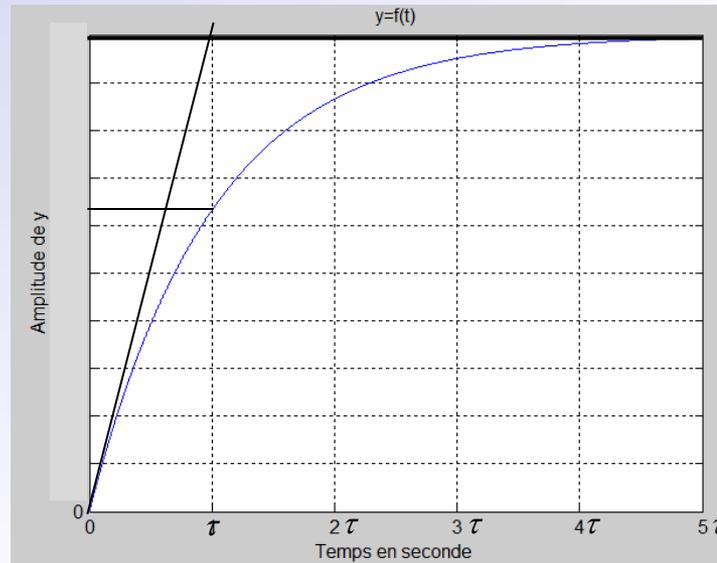
La réponse indicielle obtenue est alors donnée par:

$$y(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (1)$$

# Identification des systèmes du premier ordre

La représentation temporelle est alors donnée par:

$0.63K$



$$K = \frac{y_{\infty} - y_0}{u_{\infty} - u_0}$$

Le gain statique  $K$  représente la valeur en régime permanent obtenue

La constante de temps  $\tau$  est l'intersection entre la courbe de tangente à l'origine et l'axe des abscisses, soit environ le temps mis pour atteindre 63% de la valeur finale

**b) Fonction de transfert du type**  $\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Kp}{1 + \tau p}$

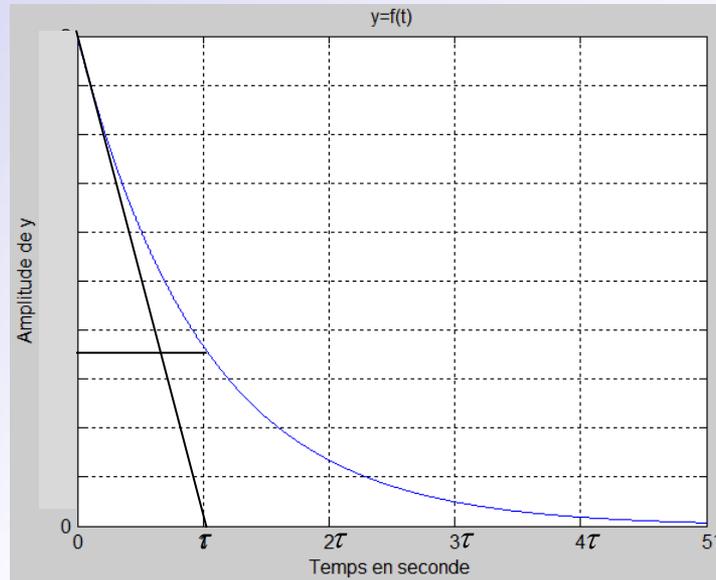
La réponse indicielle obtenue est alors donnée par:

$$y(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2)$$

# Identification des systèmes du premier ordre

La représentation temporelle est alors donnée par:

$0.37K$



$$K = \frac{y_\infty - y_0}{u_\infty - u_0}$$

Le gain statique  $K$  est déterminé par l'abscisse à l'origine.

La constante de temps  $\tau$  est l'intersection entre la courbe de tangente à l'origine et l'axe des abscisses, soit environ le temps mis pour atteindre 37% de la valeur finale

c) *Fonction de transfert du type* 
$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Ke^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

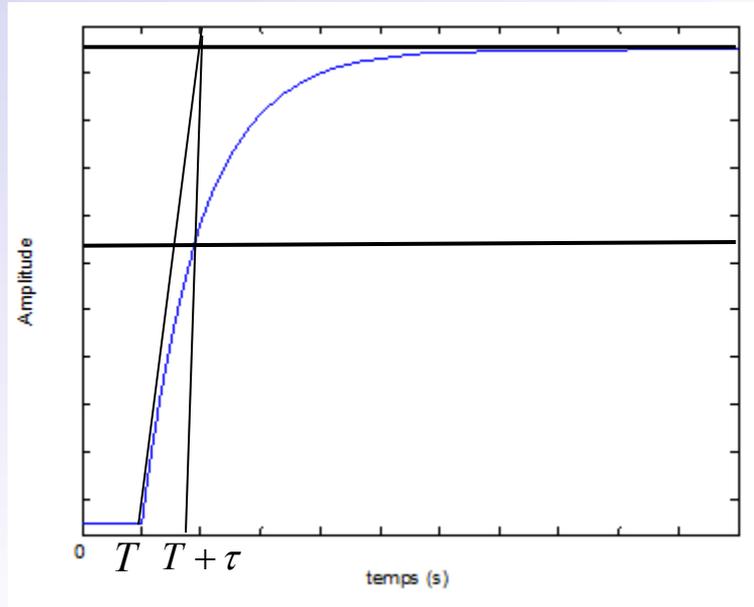
La réponse indicielle obtenue est alors donnée par:

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}}\right) \quad (3)$$

# Identification des systèmes du premier ordre

La représentation temporelle est alors donnée par:

$0.63K$



$$K = \frac{y_{\infty} - y_0}{u_{\infty} - u_0}$$

3.2 Systèmes du deuxième ordre

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

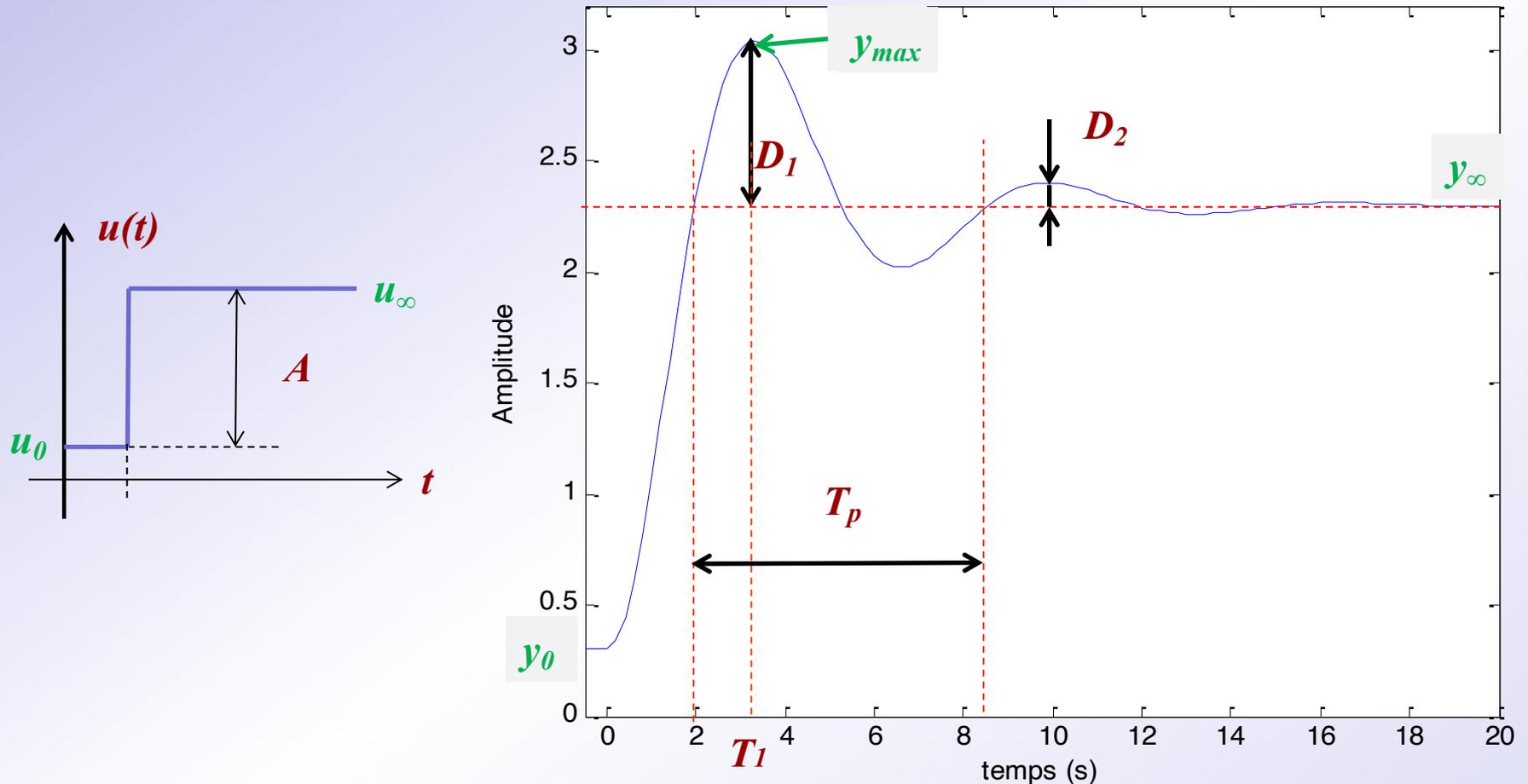
## a) Système pseudo périodique

Les paramètres les plus importants à identifier sont:

- Le facteur d'amortissement  $\xi$
- La pulsation propre non amortie  $\omega_n$
- Le gain statique  $K$

# Identification des systèmes du second ordre

La représentation temporelle est alors donnée par:



**Gain**

**Pseudo-période**

**Temps de premier  
dépassement**

**Amplitude de premier  
dépassement**

$$K = \frac{y_\infty - y_0}{u_\infty - u_0}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$D_1 \% = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

# Identification des systèmes du second ordre

## Amortissement

$$\xi = \frac{\left| \frac{\ln(D_1)}{\pi} \right|}{\sqrt{1 + \left( \frac{\ln(D_1)}{\pi} \right)^2}}$$

## Pulsation

$$\omega_n = \frac{\pi \sqrt{1 + \left( \frac{\ln(D_1)}{\pi} \right)^2}}{T_1}$$

## Amplitude des dépassement

$$D_k \% = e^{-\frac{\xi \pi k}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

## b) Systèmes apériodiques

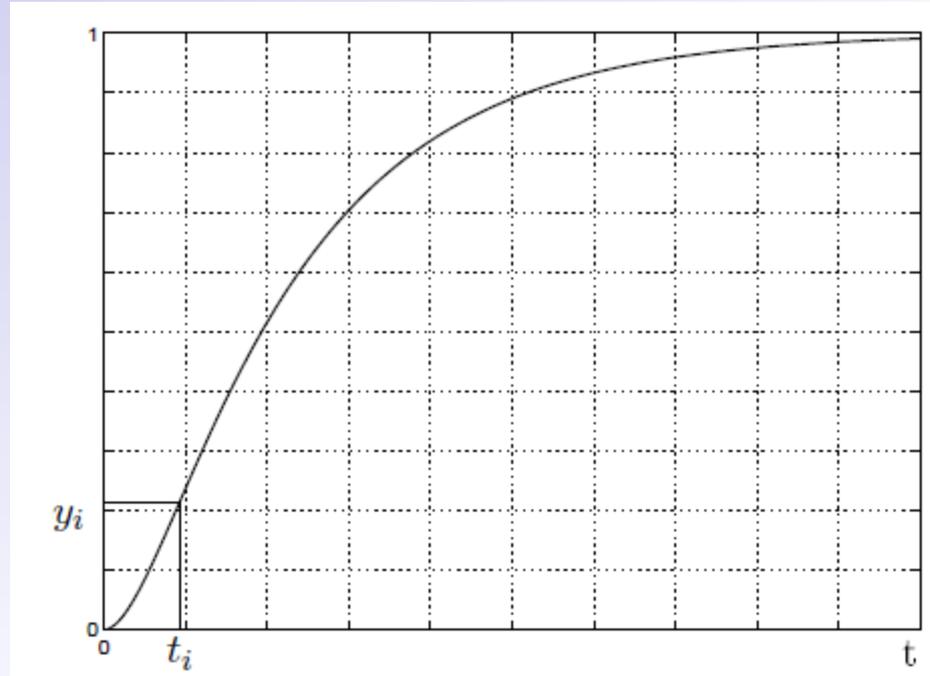
L'identification est réalisée à partir de la méthode du point d'inflexion. On a montré dans le cours 1 dans le cas où  $\xi > 1$ , la réponse temporelle  $y(t)$  est la somme de deux réponses du premier ordre. On cherche ici les deux constantes  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

La réponse indicielle est alors donnée par:

$$y(t) = K \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (4)$$

On cherche alors à déterminer les constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , à partir du point d'inflexion. Pour faciliter la clarté de la présentation, on considérera  $K = 1$ .

# Identification des systèmes du second ordre



En dérivant (4), on obtient alors:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (5)$$

En dérivant (5), on obtient également:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\tau_1(\tau_1 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{1}{\tau_2(\tau_1 - \tau_2)} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (6)$$

# Identification des systèmes du second ordre

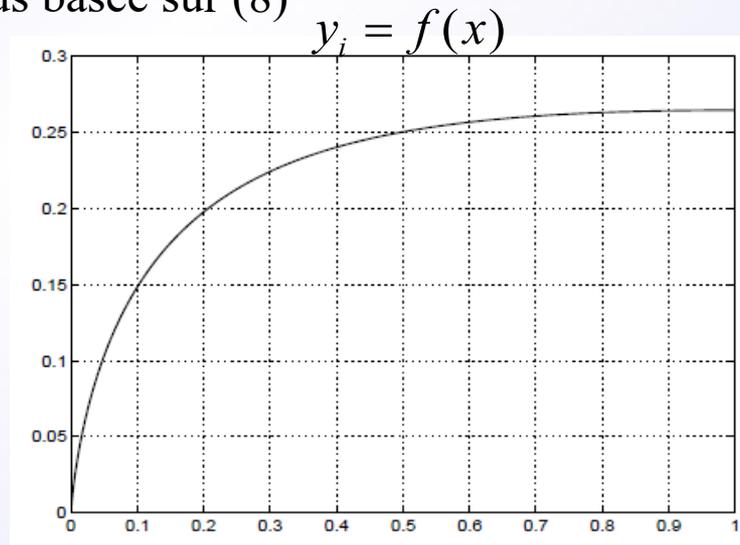
L'inflexion se produit lorsque  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$ , on peut alors en déduire que:

$$t_i = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \ln \left( \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \quad (7)$$

En remplaçant (7) dans (4) et en posant  $x = \frac{\tau_1}{\tau_2}$ , on peut alors écrire que:

$$y_i = 1 - x^{\frac{x}{1-x}} (1 + x) \quad (8)$$

$y_i$  est relevé directement sur la courbe de réponse indicielle et pour déterminer  $x$ , on utilise la courbe ci-dessous basée sur (8)



# Identification des systèmes du second ordre

Une fois que  $x$  a été déterminée, on peut en déduire  $\tau_1$  en mesurant la pente de la tangente au point d'inflexion sur la réponse indicielle. L'expression de la pente est alors donnée comme suit:

$$\tau_1 = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_i}} x^{\frac{x}{1-x}} \quad (9)$$

Puis, on peut en déduire  $\tau_2$  au travers de l'expression:

$$\tau_2 = x\tau_1 \quad (10)$$

Par conséquent, on peut écrire la fonction de transfert comme étant:

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(1 + \tau_1 p)} \frac{1}{(1 + \tau_2 p)} \quad (11)$$

Le même raisonnement peut être étendu pour le cas où  $K \neq 1$ .

## 4. Méthodologie d'identification de système basée sur l'interprétation de réponses fréquentielles

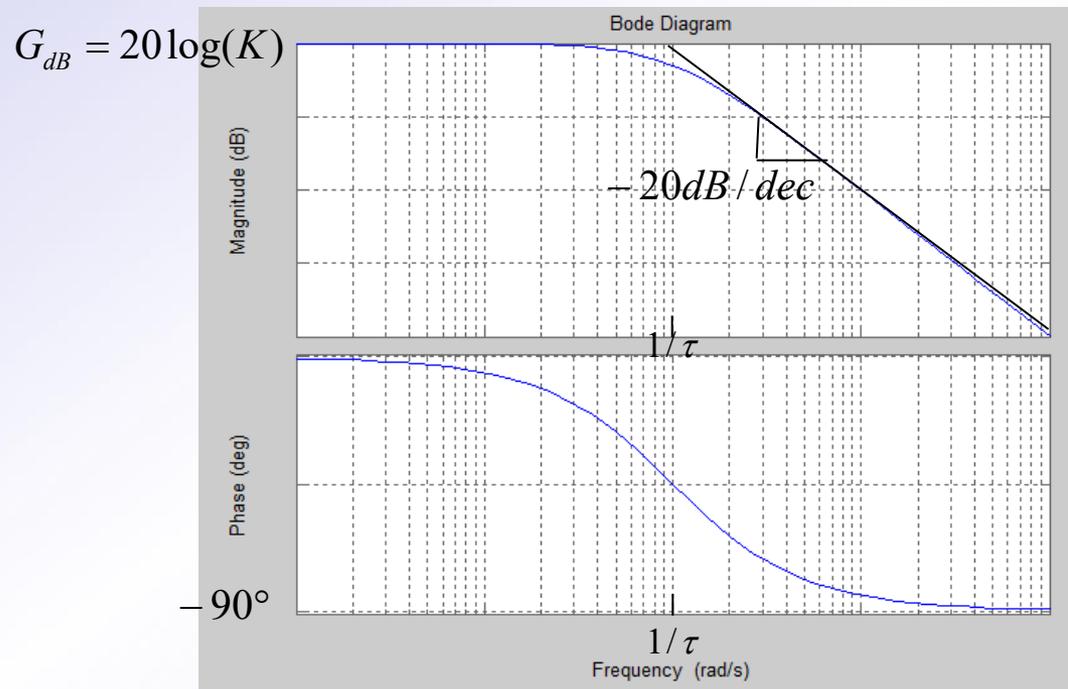
A partir des tracés des diagrammes de Bode, il est possible de réaliser l'identification des paramètres du modèle d'un système

# Identification des systèmes du second ordre

## 4.1 Système du premier ordre

a) Fonction de transfert: 
$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{(1 + \tau p)}$$

A partir de la représentation du diagramme de Bode ci-dessous, on peut obtenir le modèle paramétrique associé.

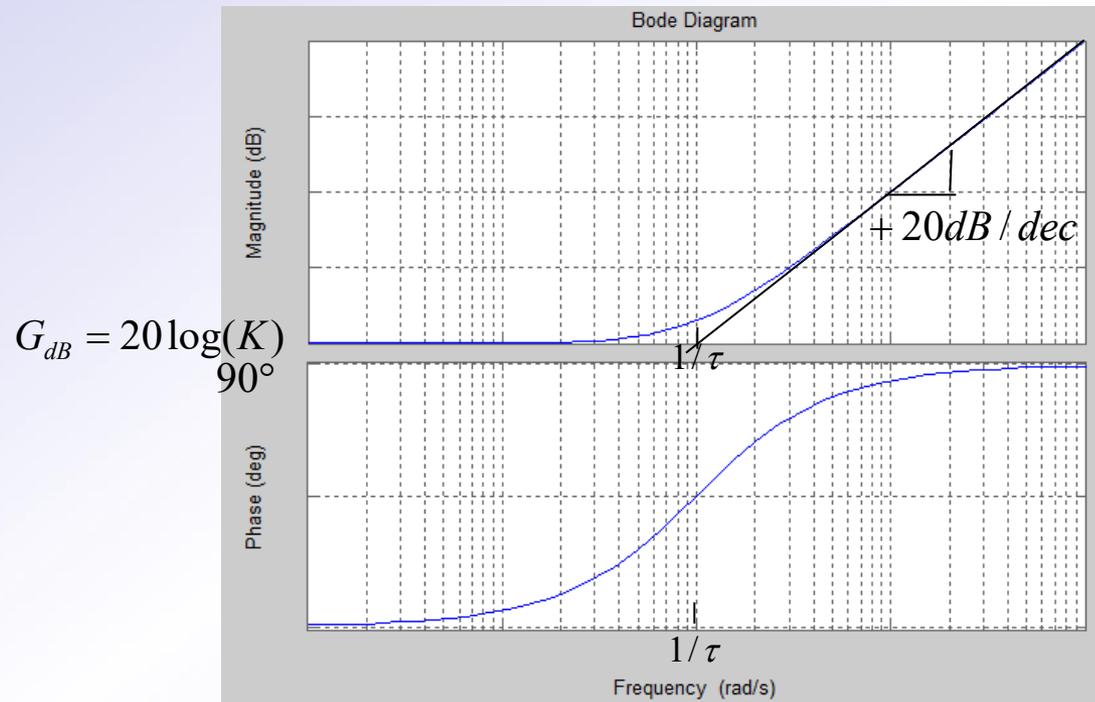


Les paramètres du modèles sont déduits en calculant  $K = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$  et  $\tau$ .

# Identification des systèmes du second ordre

b) Fonction de transfert:  $\frac{Y(p)}{U(p)} = K(1 + \tau p)$

A partir de la représentation du diagramme de Bode ci-dessous, on peut obtenir le modèle paramétrique associé.



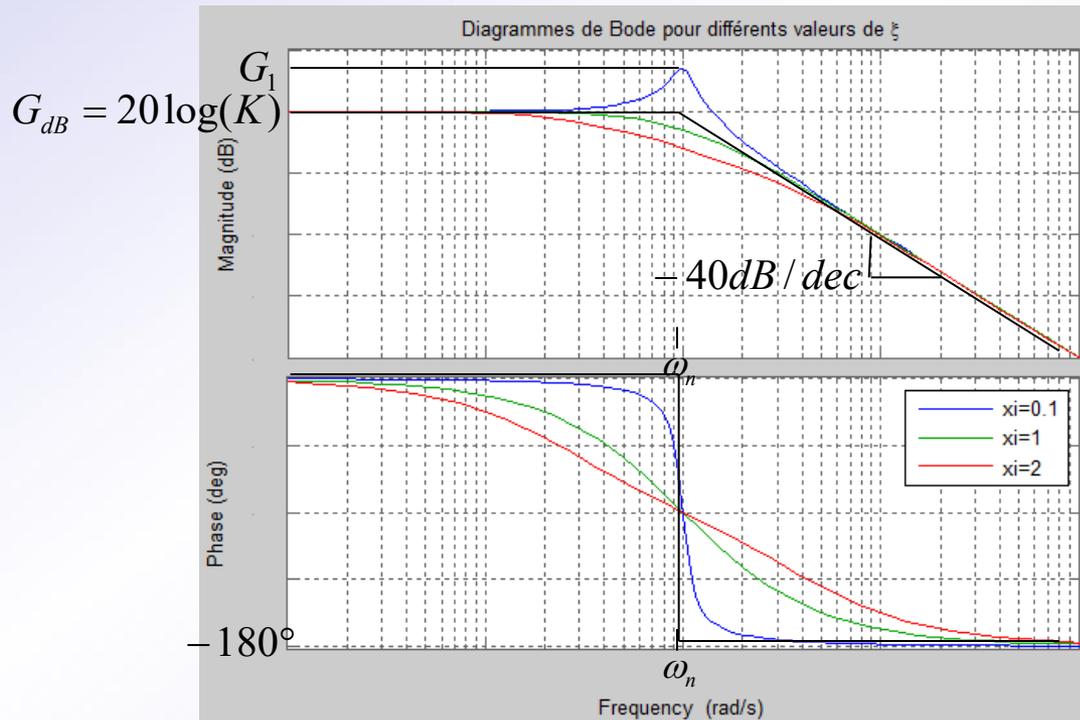
Les paramètres du modèle sont déduits en calculant  $K = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$  et  $\tau$

# Identification des systèmes du second ordre

## 4.2 Système du deuxième ordre

Fonction de transfert: 
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$$

A partir de la représentation du diagramme de Bode ci-dessous, on peut obtenir le modèle paramétrique associé.



# Identification des systèmes du second ordre

On a alors plusieurs cas possibles:

- $0 < \xi < 0.7$  présence de deux pôles complexes conjugués
  - Argument relatif à la pulsation propre:  $\arg(H(j\omega_n)) = -90^\circ$
  - Module relatif à la pulsation propre:  $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2\xi}$
  - Maximum d'amplitude pour  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$
  - Amplitude maximum donnée par  $A_{\max} = \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$

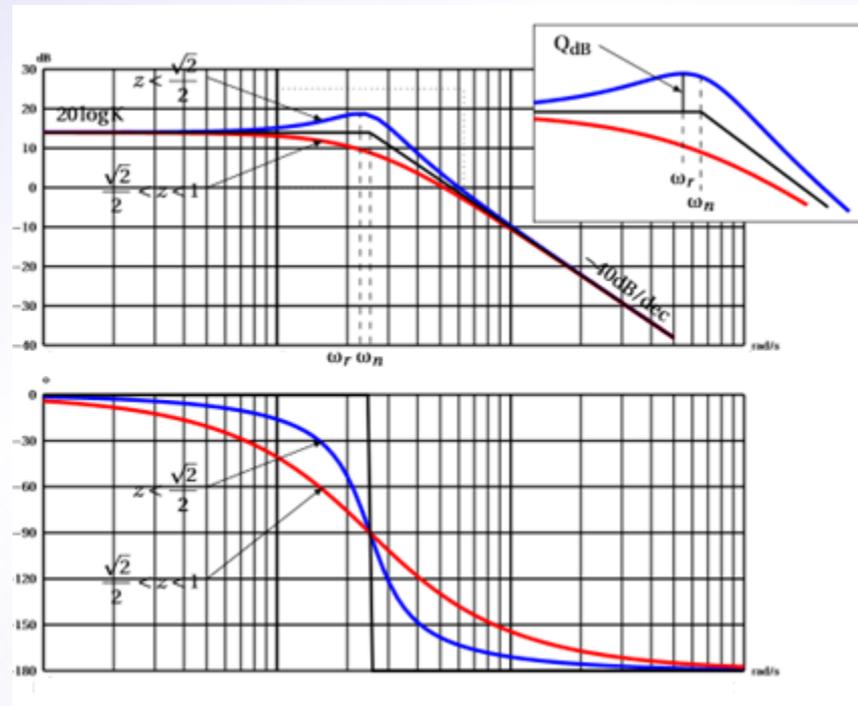


Fig.2 Diagramme de Bode du 2<sup>nd</sup> ordre pour deux racines complexes

# Identification des systèmes du second ordre

Les paramètres peuvent alors être déterminés comme suit  $K = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$ , on lit la phase correspondant à la valeur relative en  $-90^\circ$ , et le coefficient d'amortissement à la pulsation se déduit par

$$\xi = \left( \frac{K}{2.10^{\frac{G_{dB}}{20}}} \right)$$

- $0.7 < \xi < 1$  : Le cas est identique au précédent mais ne présente pas de maximum, mais les relations précédentes restent vraies.
- $\xi > 1$  : La fonction de transfert peut alors se décomposer en un produit de deux fonctions de transfert du premier ordre en cascade

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

Les deux pulsations de coupure associées à  $H(p)$  sont données en  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$  et en  $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ , avec  $\omega_1 < \omega_2$ . La pulsation propre est alors définie par  $\omega_n = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ .

L'argument à la pulsation propre est alors donné par  $\arg(H(j\omega_n)) = -90^\circ$

Le module à la pulsation propre est donné par  $|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2\xi}$

# Identification des systèmes du second ordre

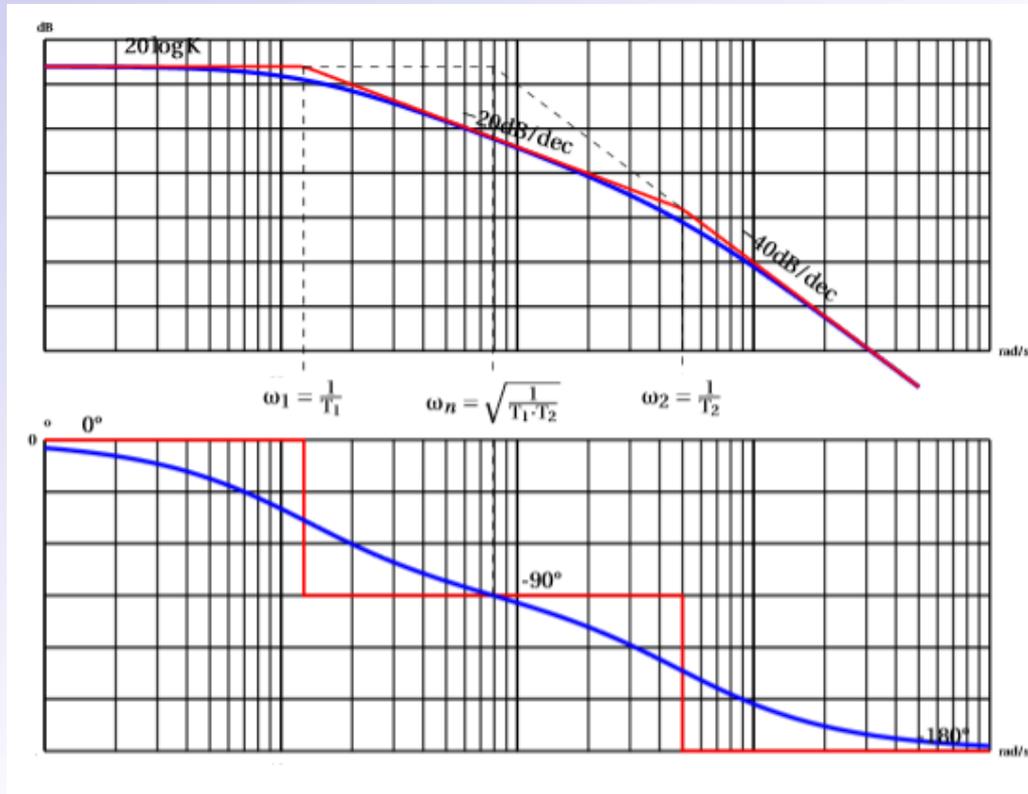


Fig.3 Diagramme de Bode du 2<sup>nd</sup> ordre pour deux racines réelles

L'identification paramétrique est alors déduite en déterminant  $K, T_1, T_2$ .

-  $\xi = 1$  : La fonction de transfert peut alors se décomposer en un produit de deux fonctions de transfert du premier ordre identique.

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{(1 + Tp)^2}$$

# Identification des systèmes du second ordre

On déduit la pulsation de coupure  $\omega_c = \frac{1}{T}$ , à partir de laquelle on retrouvera une pente de  $-40\text{dB/dec}$ , correspondant également à l'argument de  $-90^\circ$ .

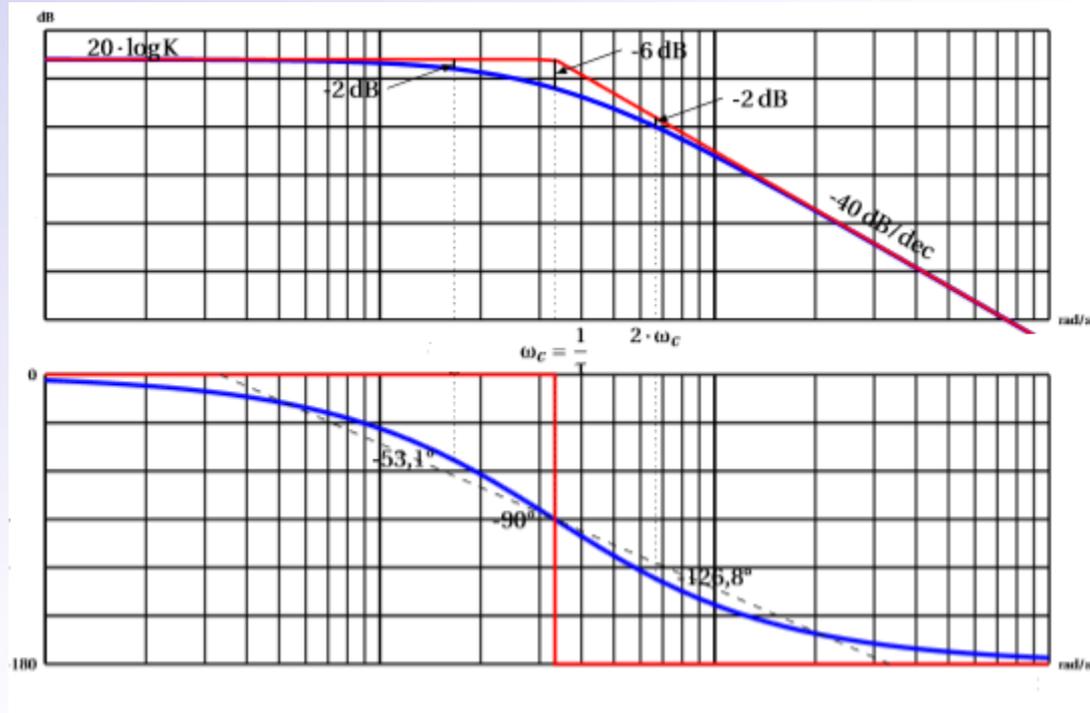


Figure: Diagramme de Bode du 2<sup>nd</sup> ordre pour une racine réelle double

L'identification du système équivalent est alors déduit à partir de la lecture du diagramme de Bode, en déduisant la valeur de  $K, T$ .

# Auto-évaluation Cours 4

## **Mes compétences à l'issue du Cours 4:**

- Définir la notion d'identification de système
- Identifier les paramètres à partir de sa réponse indicielle d'un système
  - du premier ordre avec et sans retard
  - du second ordre
- Identifier les paramètres d'un système du premier et du second ordre, à partir de réponses fréquentielles.