Master Mathématiques et Applications — Université de Bordeaux

Espaces L^p, Distributions — 2022-23

Rappels d'intégration

Exercice 1. 1) Proposer une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ sur $[0,1]$ qui converge simplement vers une fonction continue f sur $[0,1]$ mais telle que

$$\int_0^1 f_n(t)dt \text{ ne converge pas vers } \int_0^1 f(t)dt.$$

2) Qu'en est-il si on suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0?

Exercice 2. Soit $I_n = \int_0^\infty e^{-t^n}dt$. Justifier que cette intégrale est bien définie et que la suite (I_n) admet une une limite que l'on calculera lorsque $n \to \infty$

Exercice 3. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 4. (Transformée de Fourier de la Gaussienne). On définit pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\,dx.$$

1) Montrer que ϕ est bien définie et que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que ϕ est dérivable, puis par intégration par parties, montrer ϕ vérifie une équation différentielle du premier ordre.

3) Résoudre cette équation différentielle puis donner la valeur de $\phi(\xi)$.

Exercice 5. (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$)

Soient $U = \{(r,\varphi,\theta),\ 0 < r < \infty,\ -\pi < \varphi < \pi,\ 0 < \theta < \pi$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z),\ x \leq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$ et soit $\phi : U \to V$ définie par

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

1) Montrer que Φ est un C^1 diffeomorphisme et que $J\Phi(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi$.

2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit

$$f_\alpha(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Montrer que f_α est intégrable sur $B(0,1)$ ssi $\alpha > -3$ et que f_α est intégrable sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)$ ssi $\alpha < -3$.

3) Généralisation à $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$?