

Révisions sur les espaces vectoriels normés et espaces complets.

Exercice 1. Montrer qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 2. Sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on considère les normes: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

1) Représenter la boule unité pour chacune de ses normes sur $\mathbb{R}^2$.

2) On sait que ces normes sont équivalentes: donner les meilleures encadrements possibles entre ces 3 normes (en fonction de la dimension n).

3) On considère maintenant l'espace des suites réelles à support fini: $c_{00} := \{u = (u_n)_n, \exists N, u_k = 0 \text{ pour tout } k \geq N\}$. On définit les trois normes suivantes:

$$\|u\|_\infty := \sup_{n\geq 0} |u_n|, \quad \|u\|_1 := \sum_{k\geq 0} |u_k|, \quad \|u\|_2 := \left(\sum_{k\geq 0} |u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.a) Montrer que pour $u \in c_{00}$,

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1$$

3.b) Montrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3. On considère $E = \mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt, \; \|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, \; \|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Monter que ce sont bien des normes sur E. Montrer qu'elles ne sont pas comparables. Qu'en est-il lorsque l'on remplace $\mathbb{R}$ par $I = [0,1]$.?

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}([0,2],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^1 f(u)du - \int_1^2 f(u)du.$$

Montrer que $\|T\| = 2$ mais que cette norme n'est pas atteinte.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique complet et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de X.

1) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy.

2) La réciproque est-elle vraie?

3) Montrer que si $(x_n)_n$ est de Cauchy, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $\sum_{n\geq 0} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$.

4) En déduire qu' un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 6. 1) Montrer que $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet.
2) Montrer que $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

Exercice 7. 1) Montrer que $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas complet.
2) Montrer que $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est complet.

Exercice 8. Pour $p \geq 1$, on note $\ell_1(\mathbb{N})$ l'espace des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\|u\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$$

Montrer que $(\ell_1(\mathbb{N}), \|.\|_1)$ est un espace de Banach.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. On considère l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme $\|u\| = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|u(x)\|_F$. Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.

Exercice 10. Soit E un espace de Banach et u un endomorphisme continu de E .
1) On suppose que u est de norme < 1. Montrer que $Id - u$ est inversible (et donner son inverse son la forme d'une série).
2) En déduire que e que $GL(E)$ est ouvert.

Exercice 11. Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une suite (x_n) de E converge faiblement vers $x \in E$ si

$$\forall y \in E,\ \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

On notera $x_n \rightharpoonup x$

1. Montrer que si (x_n) converge vers x pour la topologie usuelle alors (x_n) converge faiblement vers x
2. On admet que toute suite faiblement convergente est nécessairement bornée. Montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
3. Montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|$ alors $x_n \to x$ dans E.

Exercice 12. Pour chacune des suites (u_n) de l'espace de Hilbert E, étudier l'existence d'une limite faible.
1) $E = L^2(\mathbb{R})$, $u_n(x) = \varphi(x-n)$ où $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ est fixée
2) $E = L^2([0,2\pi])$, $u_n(x) = \sin(nx)$.

Exercice 13. Montrer que dans un espace de Hilbert H de dimension infinie, l'ensemble des limites faibles de la sphère unité $S := \{x \in H, \|x\|_2 = 1\}$ est la boule unité $B := \{x \in H, \|x\|_2 \leq 1\}$