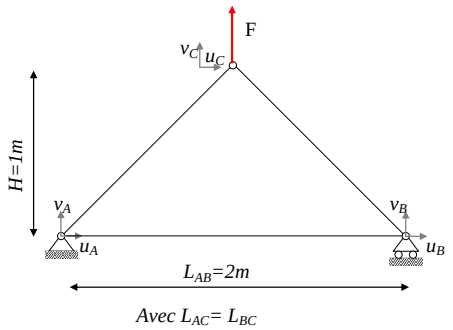
1 Support d'étude



Pour cette étude, on donne les matrices de raideur des barres AC et BC :

Barre AC :

$$[K_{AC}] = \frac{ES}{2\sqrt{2}L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_A & v_A & u_C & v_C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Barre BC :

$$[K_{BC}] = \frac{ES}{2\sqrt{2}L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_B & v_B & u_C & v_C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.1 Approche analytique (sans application numérique)

Q 1. Donner la matrice de raideur de la barre AB *(2pts)*

Barre AB :

$$[K_{AC}] = \frac{ES}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_A & u_B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Q 2. Réaliser l'assemblage de la structure pour déterminer la matrice de raideur de l'ensemble. *(3pts)*

On pose : $k1 = \frac{ES}{2\sqrt{2}L}$ et $k2 = \frac{ES}{L}$

$$[K_{total}] = \begin{bmatrix} k1+k2 & k1 & -k2 & 0 & -k1 & -k1 \\ k1 & k1 & 0 & 0 & -k1 & -k1 \\ -k2 & 0 & k1+k2 & -k1 & -k1 & k1 \\ 0 & 0 & -k1 & k1 & k1 & -k1 \\ -k1 & -k1 & -k1 & k1 & 2k1 & 0 \\ -k1 & -k1 & k1 & -k1 & 0 & 2k1 \end{bmatrix}$$

Q 3. Introduire les conditions aux limites puis résoudre le système. Déduire la valeur de déplacement en chacun des nœuds (A, B et C) *(1pt).*

Conditions aux limites :

$u_A=v_A=v_B=0$

On trouve le système suivant :

$$\begin{bmatrix} k1+k2 & -k1 & k1 \\ -k1 & 2k1 & 0 \\ k1 & 0 & 2k1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_C \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

En résolvant, on obtient les résultats suivants :

$$\mathrm{u_B} = \frac{\text{-F}}{2k1};\ u_C = \frac{\text{-F}}{4k1};\ v_C = \frac{F(2k2+k1)}{4k1k2}$$

A.N. :

$$k1 = \frac{210\times10^9\times3.14\times(15\times10^{-3})^2}{2\times\sqrt{2}\times1} = 52.5\times10^6\,N/m$$

$$k2 = \frac{210\times10^9\times(30\times10^{-3})^2}{2} = 94.5\times10^6\,N/m$$

$$\mathrm{u_B} = -5.29\times10^{-5}m;\ u_C = -2.64\times10^{-5}m;\ v_C = 12.17\times10^{-5}m$$

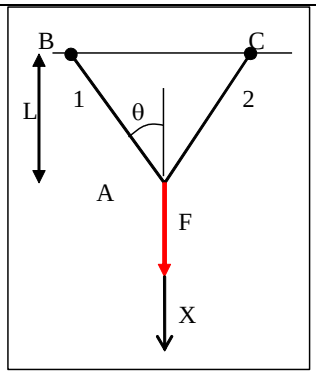
Valeur de déplacement relevé sur Abaqus :

Ucx=3.78^{E}-5

Ucy=17.90^{E}-5

Etude 2:

On propose l'étude de la structure suivante:



1. On donne les matrices de raideurs

La longueur d'une barre est de $L_{barre} = \dfrac{L}{\cos(\theta)}$

La matrice de raideur de :

barre BA :

$$[K_e^1] = \frac{ES}{L/c}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

barre CA :

$$[K_e^2] = \frac{ES}{L/c}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Avec $\begin{cases} c = \cos(\theta) \\ s = \sin(\theta) \end{cases}$

2. Assemblage des matrices de raideur

$$[K] = \frac{ESc}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_A & v_A & u_B & v_B & u_C & v_C \end{array} \\ \begin{bmatrix} c^2+c^2 & cs-cs & -c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ cs-cs & 2s^2 & -cs & -s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs & & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 & & \\ -c^2 & cs & & & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & & & -cs & s^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Avec $\begin{cases} c = \cos(\theta) \\ s = \sin(\theta) \end{cases}$

3. Conditions aux limites :

$u_B = u_C = v_B = v_C = 0$

4. Résolution du système : {F} = [Ke]{u}

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{ESc}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_A & v_A & u_B & v_B & u_C & v_C \end{array} \\ \begin{bmatrix} c^2+c^2 & cs-cs & -c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ cs-cs & 2s^2 & -cs & -s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs & & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 & & \\ -c^2 & cs & & & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & & & -cs & s^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Avec $\begin{cases} c = \cos(\theta) \\ s = \sin(\theta) \end{cases}$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} = \frac{ESc}{L}\begin{bmatrix} c^2+c^2 & cs-cs \\ cs-cs & 2s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \end{Bmatrix}$$

On trouve donc :

$2c^2u_A=0 \rightarrow u_A=0$

Et $\dfrac{FL}{ESc} = 2s^2v_B \rightarrow \dfrac{FL}{ESc2s^2} = v_B$