

Filtrage numérique

Plan

1. Transformée en Z d'un signal échantillonné
2. Relation entre les transformées en Z et Fourier
3. Fonction de transfert en Z d'un filtre numérique
4. Catégories de filtres numériques
5. Applications

Echantillonnage d'un signal analogique :

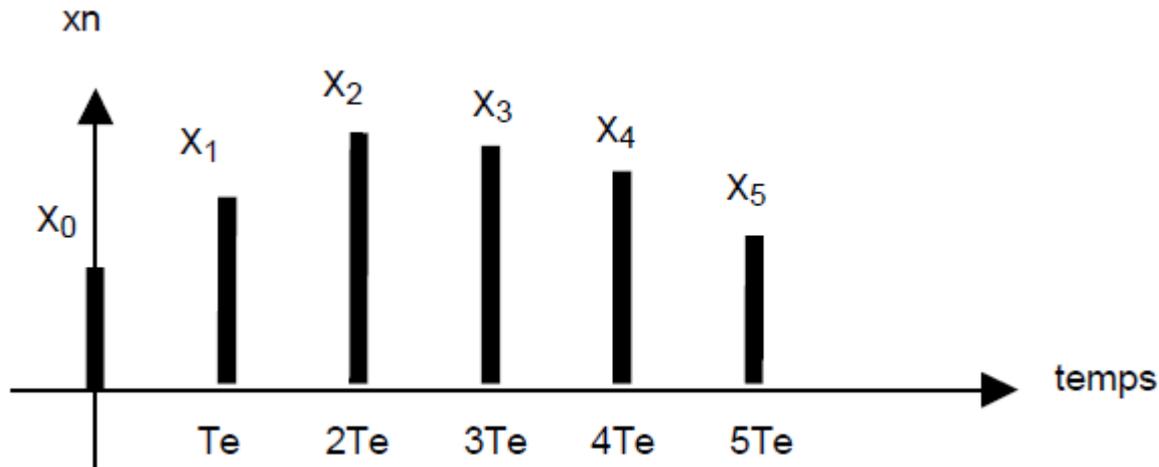


Figure 1 : Signal échantillonné à une fréquence F_e

Expression en Z du signal échantillonné :

$$X(z) = x_0 + x_1.z^{-1} + x_2.z^{-2} + x_3.z^{-3} + \dots$$

Exemple de l'impulsion de Dirac:

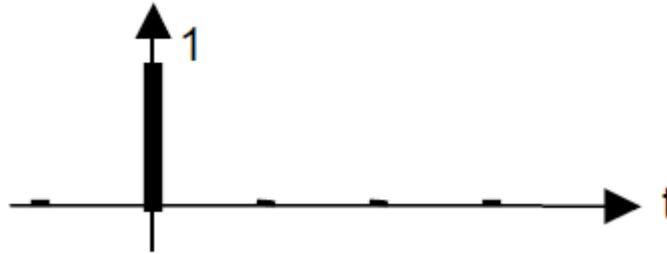


Figure 2 : Signal échantillonné de l'impulsion de Dirac

Expression en Z de l'impulsion de Dirac échantillonnée :

$$X(z) = 1$$

Exemple de l'échelon de Heaviside:



Figure 3 : Signal échantillonné de l'échelon d'Heaviside

Expression en Z de l'échelon d'Heaviside échantillonné :

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Relation :

$$z = e^{j \cdot \frac{\omega}{F_e}}$$

Conséquence :

A partir de l'expression en Z d'un signal échantillonné, en exploitant la relation précédente, le tracé du diagramme de Bode de ce signal devient aisé.

Fonction de transfert (transmittance) d'un filtre numérique:



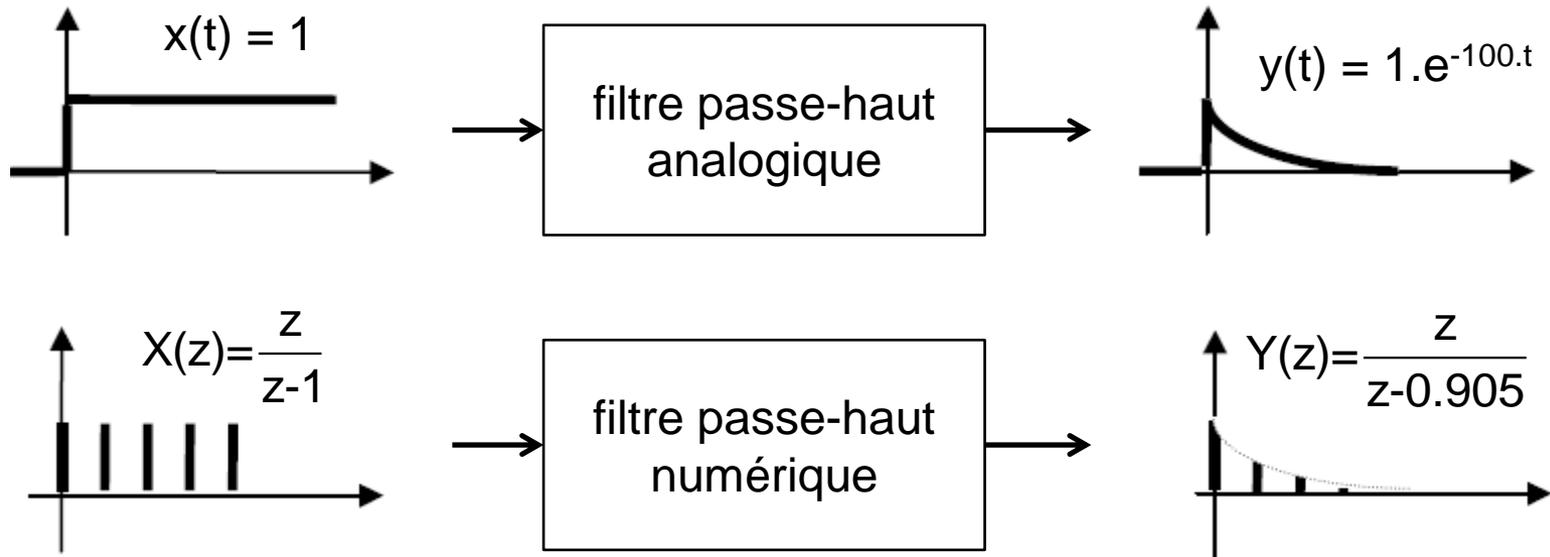
domaine temporel \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots \longrightarrow h_1, h_2, h_3, \dots \longrightarrow y_1, y_2, y_3, \dots

domaine en Z \Rightarrow $X(z)$ \longrightarrow $H(z)$ \longrightarrow $Y(z)$

Expression en Z de la fonction de transfert d'un filtre numérique:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Exemple de création d'un filtre numérique:



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{z-1}{z-0.905}$$

⇒ Méthode de création de filtre numérique par identification de la réponse indicielle

Filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR) :

domaine temporel $\Rightarrow y_n = b_1 \cdot x_n + b_2 \cdot x_{n-1} + b_3 \cdot x_{n-2} + \dots$

domaine en Z $\Rightarrow H(z) = b_1 + b_2 \cdot z^{-1} + b_3 \cdot z^{-2} + \dots$

Filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) :

domaine temporel $\Rightarrow y_n = a_1 \cdot y_{n-1} + a_2 \cdot y_{n-2} + a_3 \cdot y_{n-3} + \dots + b_1 \cdot x_n + b_2 \cdot x_{n-1} + b_3 \cdot x_{n-2} + \dots$

domaine en Z $\Rightarrow H(z) = \frac{b_1 + b_2 \cdot z^{-1} + b_3 \cdot z^{-2} + \dots}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + a_3 \cdot z^{-3} + \dots}$

Filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR) :

avantages \Rightarrow stabilité
phase linéaire
intuitif
simple à concevoir

inconvénients \Rightarrow nombreux coefficients
implémentation lourde, couteuse ou peu performante en fréquence

Filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) :

avantages \Rightarrow peu de coefficients
implémentation simple et performante en fréquence

inconvénients \Rightarrow stabilité à étudier en raison de la présence de pôles dans $H(z)$
complexe à concevoir
utilisation de nombres à virgules

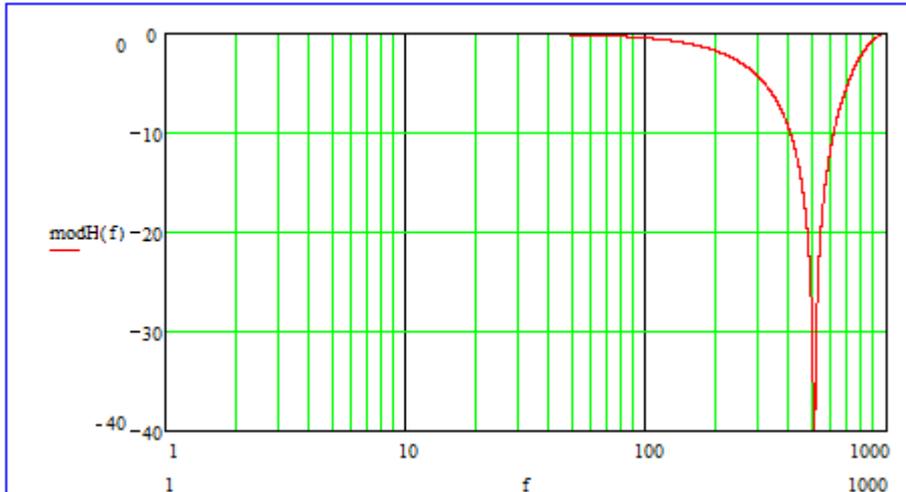
Exemple de filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR) : le moyeneur

$$y_n = 0,5 \cdot X_n + 0,5 \cdot X_{n-1}$$

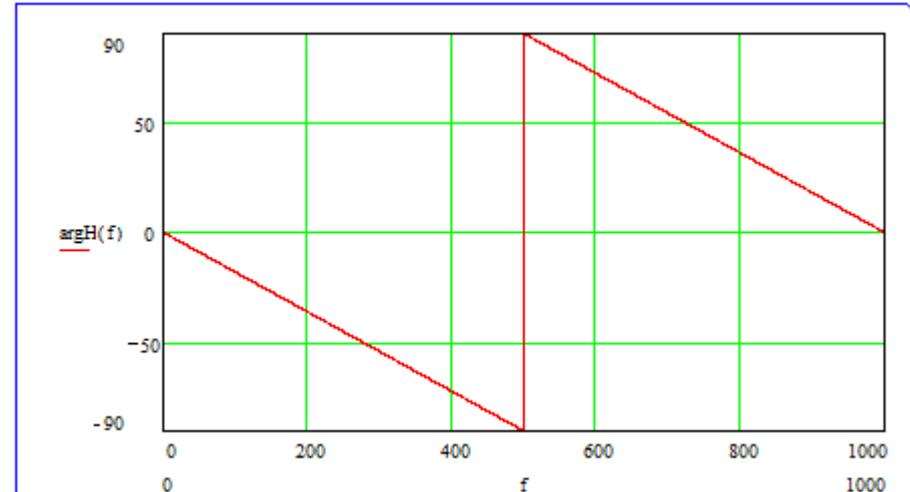
$$H(z) = 0,5 + 0,5 \cdot z^{-1}$$

$$H(j\omega) = 0,5 + 0,5 \cdot e^{-j \frac{\omega}{1000}}$$

avec $F_e = 1\text{kHz}$



Gain de $H(j\omega)$



Phase de $H(j\omega)$

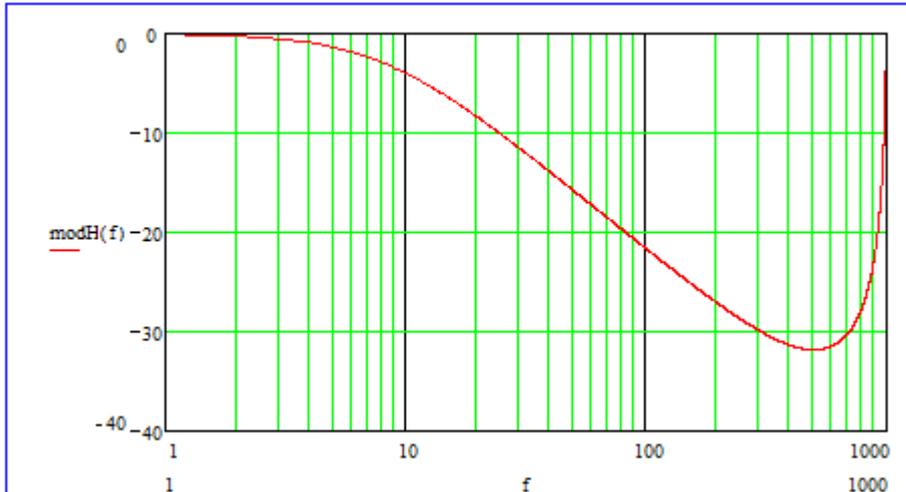
Exemple de filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR) : le passe-bas récursif

$$y_n = 0,95 \cdot y_{n-1} + 0,05 \cdot x_n$$

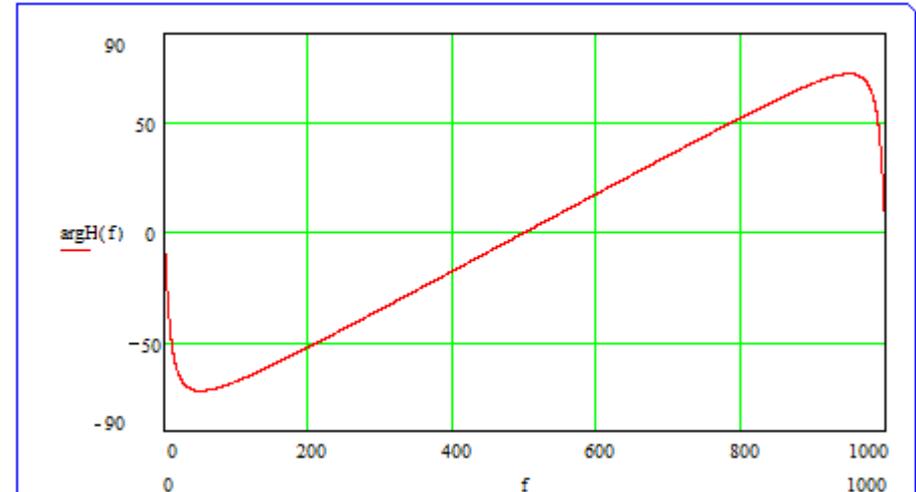
$$H(z) = \frac{0,05}{1 - 0,95 \cdot z^{-1}}$$

$$H(j\omega) = \frac{0,05}{1 - 0,95 \cdot e^{-j \cdot \frac{\omega}{1000}}}$$

avec $F_e = 1\text{kHz}$



Gain de $H(j\omega)$



Phase de $H(j\omega)$

Spatialisation des communications auditives

