# Détection et Localisation de Défauts

Christophe Farges

MASTER 2 MAINTENANCE AÉRONAUTIQUE

*spécialité Ingénierie et Maintenance Aéronautique Avionique*

4TNV902U

# Introduction

- Automatique à l'IMA
  - Modélisation
    - à partir des équations physiques : maquette d'hélicoptère, représentation d'état d'un avion, attitude d'un satellite (L3/M1/M2)
    - par identification (M2)
  - Commande
    - P/PI/PID (L3)
    - LQG (M1)
    - commande numérique (M1)
    - commande multivariable/robuste (M2)

    ⇒ *conception*
  - Diagnostic
    - détecter et localiser un phénomène anormal (défaut) dans un système

    ⇒ *lien direct avec la maintenance aéronautique (flags pilote et capteurs, calculateur de vol et actionneurs...)*

# Introduction

- Exemple 1 : défaillances affectant les chaînes de commande de gouvernes



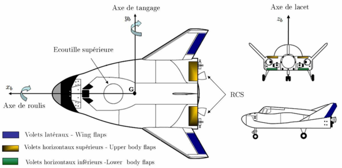
- Symptôme : oscillations indésirables affectant les gouvernes
- Conséquences : performance et qualité de vol dégradées, usure des actionneurs...
- Cause : dysfonctionnement de composants électriques des boucles de commande

⇒ Comment détecter au plus vite ce défaut en vol afin de changer d'actionneur ?
*(chaque surface de contrôle a deux actionneurs redondants)*

# Introduction

- Exemple 2 : défaillances affectant le véhicule de rentrée HL-20


- concept de la NASA pour des missions spatiales habitées : transfert d'équipage vers la station spatiale internationale, maintenance de satellites...
- objectifs : complément à l'USS shuttle orbiter à coût opérationnel réduit, sécurité de vol améliorée, possibilités d'atterrir sur des pistes conventionnelles



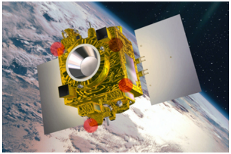

- 7 surfaces de contrôle
- 2 centrales inertielles (accéléromètres et gyroscopes), 1 centrale aérodynamique (altitude, pression dynamique, vitesse), 1 GPS

⇒ défauts actionneurs sur les volets latéraux *(blocage de la servo-commande, embardée due à un dysfonctionnement du circuit hydraulique)*

⇒ défauts capteurs sur la centrale inertielle *(endommagement du capteur durant la phase hypersonique, biais, dérive)*

# Introduction

- Exemple 3 : MICROSCOPE (MICRO-Satellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Equivalence) du CNES



- minisatellite de 300 kg lancé le 25 avril 2016
- objectif : tester le principe d'équivalence avec une meilleure précision que sur Terre (100 fois)

- instrument : constitué de deux accéléromètres différentiels identiques, chaque accéléromètre contient 2 étalons de masse cylindriques maintenus par commande au centre d'une cage par lévitation électrostatique
  - $\rightarrow$ un accéléromètre a des étalons de même matériau (Pt)
  - $\rightarrow$ l'autre accéléromètre a des étalons de masse différente (Pt/Ti)
- $\neq$ sur la commande des deux étalons $\Rightarrow$ violation du principe d'équivalence
- expérience sensible à des déviations de trajectoire $\Rightarrow$ nécessité de détecter
  - $\rightarrow$ défauts actionneurs : blocage de diaphragmes parmi les 12 tuyères
  - $\rightarrow$ défauts capteurs : biais sur position et vitesse retournées par la centrale

# Introduction

- Objectifs du cours
  - Vue d'ensemble des méthodes de détection et localisation de défauts utilisées dans le domaine aérospatial
  - Focus sur les méthodes à base de modèles et notamment l'*espace de parité*
  - Cas d'étude : détection de pannes en vol sur un quadricoptère

- Déroulement
  - 8 séances de cours intégré
  - 1 séance sur une annale d'examen
  - 1 TP sur le cas d'étude
- Pré-requis
  - Connaissances basiques en représentation d'état et commande numérique
  - Utilisation de MATLAB/SIMULINK

# Plan du cours

1. Vue d'ensemble des méthodes de détection et localisation de défauts
   - Tâches de diagnostic (définitions)
   - Approches basées sur la surveillance de signaux
   - Redondance matérielle
   - Redondance analytique
2. Méthode de l'espace de parité
   - Rappel sur les systèmes échantillonnés
   - Espace de parité statique
   - Espace de parité dynamique
3. Cas détude : DLD pour un quadricoptère
   - Modélisation
   - Synthèse de la loi de commande

# Plan du cours

1. Vue d'ensemble des méthodes de détection et localisation de défauts
   - Tâches de diagnostic (définitions)
   - Approches basées sur la surveillance de signaux
   - Redondance matérielle
   - Redondance analytique
2. Méthode de l'espace de parité
   - Rappel sur les systèmes échantillonnés
   - Espace de parité statique
   - Espace de parité dynamique
3. Cas détude : DLD pour un quadricoptère
   - Modélisation
   - Synthèse de la loi de commande

# Tâches de diagnostic (définitions)

- Tâche de détection de défauts
  - Objectif : mettre en évidence l'occurence d'événements pouvant conduire à un fonctionnement anormal dusystème

  → il faut distinguer les *défauts* des *perturbations* qui écartent le système du fonctionnement désiré mais se produisent en fonctionnement normal
- Tâche d'isolation *(ou localisation)*
  - Objectif : circonscrire la faute à un composant ou sous-ensemble de composants (actionneurs, capteurs)
- Techniques de diagnostic de pannes
  - Techniques sans modèle

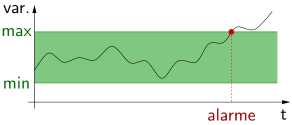
    → approches basées sur la surveillance de signaux

    → redondance matérielle
  - Techniques à base de modèles

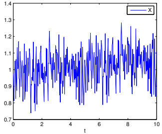
    → redondance matérielle

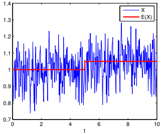
# Approches basées sur la surveillance de signaux

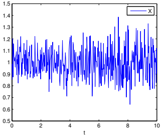
- Hypothèses
  - Des grandeurs mesurables sont porteuses d'informations sur les défauts
- Principe
  - Utiliser le traitement du signal pour surveiller si ces grandeurs se comportent normalement
- Analyse dans le domaine temporel
  - Amplitude (limit-value checking)
    
    $\rightarrow$ si les grandeurs quittent un intervalle correspondant à un fonctionnement normal, une alarme est déclenchée

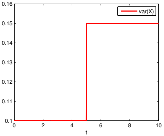



  - Moyenne, variance



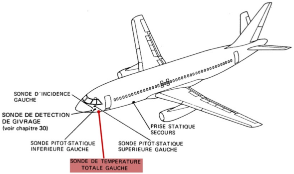



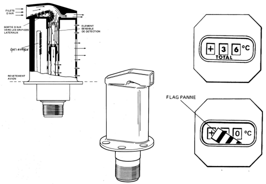




- Analyse dans le domaine fréquentiel
  - Densité spectrale de puissance

# Approches basées sur la surveillance de signaux

- Exemple : sonde de température d'air du Mercure




- Indication de température résulte de la mesure d'une résistance dont la valeur suit une loi connue dépendant de la température
- Gamme de mesure : $[-99°\mathrm{C}, +50°\mathrm{C}]$
- Défaillances surveillées
  - perte d'alimentation, court-circuit
  - erreur dans le processus de mesure

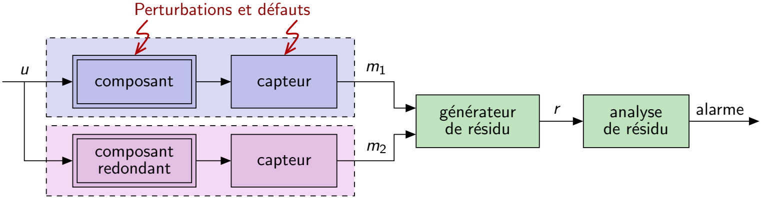
  → *par exemple quand la température quitte la plage admissible*

  → *détectée par un circuit électrique*
- utilisation de l'AMM pour localiser la panne

- Avantage : simple à mettre en oeuvre
- Inconvénients
  - pas efficace pour des plages de fonctionnement importantes
  - surcoût lié à la mise en place de chaînes de mesure supplémentaires

# Redondance matérielle

- Principe
  - introduire des composants matériels additionnels identiques (redondants)
  
  → défaut détectée si la sortie du composant original diffère de celle des composants redondants
- Redondance matérielle double
  - Composants critiques dupliqués

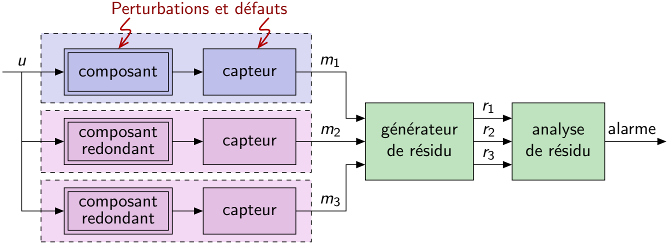



  - $r = m_1 - m_2$ est appelé signal de résidu
  - le résidu $r$ est comparé à un seuil dépendant de la qualité de la mesure

⇒ Le composant défaillant n'est pas isolé

# Redondance matérielle

- Redondance matérielle triple



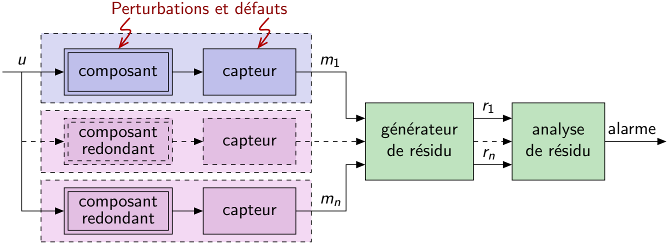

  - Trois signaux de résidu : $r_1 = m_1 - m_2$, $r_2 = m_1 - m_3$, $r_3 = m_2 - m_3$
  - Composant défaillant localisé par un voteur

| Composant 1 | Composant 2 | Composant 3 | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ✓ | ✓ | ✓ | 0 | 0 | 0 |
| ✗ | ✓ | ✓ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 |
| ✓ | ✗ | ✓ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ |
| ✓ | ✓ | ✗ | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ |
| ✓ | ✗ | ✗ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ |
| ✗ | ✓ | ✗ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ |
| ✗ | ✗ | ✓ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ |
| ✗ | ✗ | ✗ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ |

$\Rightarrow$ isole un défaut **unique**

# Redondance matérielle

- Cas général : $n$ composants identiques




$\rightarrow$ Composant défaillant isolé si au max. $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ apparaissent simultanément

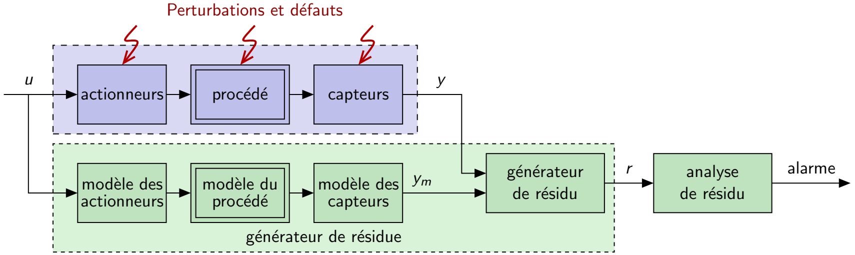
- Exemple : détection et localisation de défauts capteurs sur Airbus A380

  $\rightarrow$ angle d'attaque, vitesses de tangage/roulis/lacet...

- Avantages : simple à concevoir et à mettre en oeuvre
- Inconvénients
  - fautes affectant l'ensemble des composants non détectables *(perte d'alimentation, problème de masse...)*
  - coût élevé (dont limités à un nombre réduit de composants clés)

# Redondance analytique

- Idée générale
  - redondance matérielle remplacée par 1 modèle implanté dans 1 calculateur
    - → utilisation des signaux connus (commande et mesure)
    - → nécessite un modèle du système *(actionneurs + procédé + capteurs)*




  - comportement du système comparé en temps réel à celui de son modèle
    - → une différence peut être interprétée comme le symptôme d'un défaut

- Avantages :
  - pas de coût supplémentaire
  - simple à mettre en oeuvre (calculateur hébergeant la loi de commande)
  - permet de discriminer les effets de défauts et des perturbations

# Redondance analytique

- Retour sur l'exemple 1 : défaillances de gouvernes



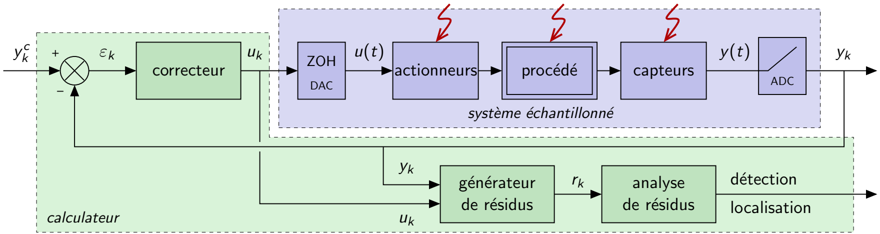
  - Symptôme : oscillations indésirables affectant les gouvernes
  - Conséquences : performance, qualité de vol, actionneurs dégradés...
  - Cause : dysfonctionnement de composants électriques de commande

⇒ Avant l'A380 : méthode basée sur la surveillance de signaux *(sans modèle)*

⇒ Programme A380 : redondance analytique car oscillations appartiennent à la bande passante de la loi de commande *(à base de modèle)*

# Redondance analytique

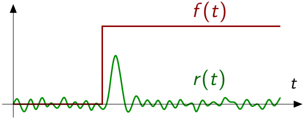
- Principe
  - Comparer comportement du sys. (subissant pert. et défauts) et son modèle
  - → résultat de la comparaison : résidu (signal indicateur de défauts)
- Implantation dans le cas d'une commande numérique



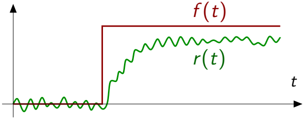

  - → générateur de résidu déterminé à partir du modèle du système échantillonné
- Objectif (cas idéal)
  - cas sans défaut : $r_k = 0 \; \forall \; d_k$
  - cas défaillant : $r_k \neq 0$
- Objectif (cas réaliste)
  - $r_k$ doit être le plus sensible à $d_k$ et le moins sensible à $f_k$
  - l'*analyse de résidu* génère l'alarme (seuil...) et isole le défaut

# Redondance analytique

- Types de détectabilité
  - Détectabilité faible
    - → résidu affecté par le défaut uniquement en régime transitoire




  - Détectabilité forte
    - → résidu affecté par le défaut en régime permanent




⇒ Sinon, le défaut est qualifié de indétectable par le résidu

- Problème de diagnostic
  - Étant donné un modèle du système échantillonné, comment déterminer un générateur de résidu et réaliser l'analyse des résidus obtenus ?

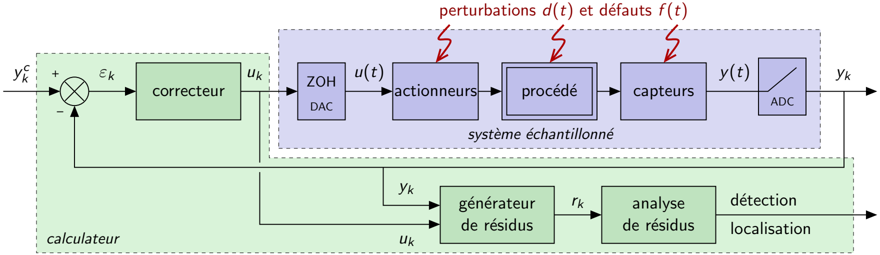
⇒ Méthodologie présentée dans ce cours : l'approche de l'espace de parité

# Plan du cours

1. Vue d'ensemble des méthodes de détection et localisation de défauts
   - Tâches de diagnostic (définitions)
   - Approches basées sur la surveillance de signaux
   - Redondance matérielle
   - Redondance analytique
2. Méthode de l'espace de parité
   - Rappel sur les systèmes échantillonnés
   - Espace de parité statique
   - Espace de parité dynamique
3. Cas détude : DLD pour un quadricoptère
   - Modélisation
   - Synthèse de la loi de commande

# Rappel sur les systèmes échantillonnés

- Schéma bloc avec convertisseurs N/A pour la commande et la DLD




- actionneurs + procédé + capteurs $\equiv \Sigma$ de représentation d'état

$$\rightarrow \Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) & = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) & = \tilde{C}x(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

- actionneurs + procédé + capteurs + CNA + CAN $\equiv \Sigma_k$

$$\rightarrow \Sigma_k : \begin{cases} x(k+1) & = Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k) + B_f f(k) \\ y(k) & = Cx(k) + Du(k) + D_d d(k) + D_f f(k) \end{cases}$$

$$\text{avec } A = e^{\tilde{A}T_e}, \quad B = \int_0^{T_e} e^{\tilde{A}(T_e-\alpha)}\tilde{B}d\alpha, \quad C = \tilde{C}, \quad D = \tilde{D}$$

$\rightarrow$ *perturbations et défauts appliqués par hyp. au système échantillonné*

# Espace de parité - principe

- Modèle

$$\Sigma_k \begin{cases} x(k+1) & = Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k) + B_f f(k) \\ y(k) & = Cx(k) + Du(k) + D_d d(k) + D_f f(k) \end{cases}$$

  - $x(k) \in \mathbb{R}^n$ : état, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ : commandes, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ : mesures
  - $d(k) \in \mathbb{R}^{m_d}$ : perturbations, $f(k) \in \mathbb{R}^{m_f}$ : défauts

- Objectif
  - Calculer $r(k)$ en utilisant les signaux connus $u(k)$, $y(k)$ et le modèle $\Sigma_k$
  - $r(k)$ doit être sensible aux défauts $f(k)$ et robuste aux perturbations $d(k)$

- Principe de l'espace de parité statique
  - utiliser la redondance directe entre les signaux mesurés (au même instant) *(quand une variable mesurée peut être déduite des autres)*

    $\rightarrow$ à l'instant $k$, $r(k)$ généré à partir de $y(k)$ et $u(k)$ uniquement

    $\Rightarrow$ espace de parité statique
  - utiliser la redondance temporelle entre mesures et entrées à des instants $\neq$

    $\rightarrow$ à l'instant $k$, $r(k)$ généré à partir des mesures et entrées présentes et passées

    $\Rightarrow$ espace de parité dynamique

# Espace de parité statique - exemples introductifs

- Modèle

$$\Sigma_k \begin{cases} \cancel{x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k) + B_f f(k)} \\ y(k) = Cx(k) + \cancel{Du(k)} + D_d d(k) + D_f f(k) \end{cases}$$

  - $x(k) \in \mathbb{R}^n$ : état, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ : commandes, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ : mesures
  - $d(k) \in \mathbb{R}^{m_d}$ : perturbations, $f(k) \in \mathbb{R}^{m_f}$ : défauts

- Objectif : trouver $r(k) = f\left(y(k)\right)$ sensible uniquement aux défauts

- Exemple 1 : redondance matérielle
  - $y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix}$

  $\rightarrow$ $f_i(k)$ : défaut sur le capteur $i$

  - $r(k) = \underbrace{y_1(k) - y_2(k)}_{\text{forme de calcul}} = \cancel{x(k)} + f_1(k) - \cancel{x(k)} - f_2(k) = \underbrace{f_1(k) - f_2(k)}_{\text{forme d'évaluation}}$

  $\Rightarrow$ $r(k)$ peut détecter à la fois $f_1(k)$ et $f_2(k)$

# Espace de parité statique - exemples introductifs

- Model
  $$\Sigma_k \ : \ y(k) = Cx(k) + D_d d(k) + D_f f(k)$$
  - $x(k) \in \mathbb{R}^n$ : état, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ : commandes, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ : mesures
  - $d(k) \in \mathbb{R}^{m_d}$ : perturbations, $f(k) \in \mathbb{R}^{m_f}$ : défauts
- Objectif : trouver $r(k) = f\left(y(k)\right)$ sensible aux défauts uniquement
- Exemple 2
  - $y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \\ y_5(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix}$

  $\rightarrow$ $f_1(k)$ affecte le capteur 3 et $f_2(k)$ affecte les capteurs 2 et 3
  - Forme de calcul : $\begin{cases} r_1(k) & = 2y_1(k) - y_3(k) \\ r_2(k) & = y_1(k) + y_2(k) - y_5(k) \end{cases}$

  $\rightarrow$ Exercice : déterminer la forme d'évaluation et vérifier que $r_1(k)$ et $r_2(k)$ sont indépendants de $x(k)$ mais sensibles à $f_1(k)$ et $f_2(k)$

  $\rightarrow$ est-il possible d'isoler les défauts à partir de ces résidus ?

  $\Rightarrow$ méthode pour trouver les expressions de $r_1/r_2$ $\Rightarrow$ espace de parité statique

# Espace de parité statique - détection

- Modèle

$$\Sigma_k \ : \ y(k) = Cx(k) + D_d d(k) + D_f f(k)$$

  - $x(k) \in \mathbb{R}^n$ : état, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ : commandes, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ : mesures
  - $d(k) \in \mathbb{R}^{m_d}$ : perturbations, $f(k) \in \mathbb{R}^{m_f}$ : défauts

- Résidus obtenus comme combinaison linéaires des mesures
  - $\boxed{r(k) = Wy(k)}$ *(forme de calcul)*

$\rightarrow$ $W$ matrice de parité

$\rightarrow$ déterminer $W$ dans l'exercice précédent

$\Rightarrow$ comment choisir $W$ t.q. $r(k)$ est sensible aux défauts uniquement ?

- Forme d'évaluation du résidu
  - $r(k) = Wy(k) = WCx(k) + WD_d d(k) + WD_f f(k)$

$\rightarrow$ cas idéal (sans perturbation) : $\boxed{r_k = WCx(k) + WD_f f(k)}$

# Espace de parité statique - détection

- Calcul de la matrice de parité $W$
  - Forme d'évaluation (cas sans perturbation) :

    $$\boxed{r(k) = WCx(k) + WD_f f(k)}$$
  - Contrainte de robustesse

    $\rightarrow$ $f(k) = 0 \Rightarrow r(k) = 0$ *(pour tout $x(k)$)*
  - Contrainte de sensibilité aux défauts

    $\rightarrow$ $f(k) \neq 0 \Rightarrow r(k) \neq 0$
  - Solution ?

# Espace de parité statique - détection

- Calcul de la matrice de parité $W$
  - Forme d'évaluation (cas sans perturbation) :

    $$\boxed{r(k) = WCx(k) + WD_f f(k)}$$
  - Contrainte de robustesse

    $\rightarrow$ $f(k) = 0 \Rightarrow r(k) = 0$ *(pour tout $x(k)$)*
  - Contrainte de sensibilité aux défauts

    $\rightarrow$ $f(k) \neq 0 \Rightarrow r(k) \neq 0$
  - Solution ?

    $\Rightarrow$ choisir $W$ t.q. $\boxed{WC = 0}$ $\Rightarrow r(k) = WD_f f(k)$
    - $W$ est orthogonale $C$
    - $W$ existe si $p > \text{rang}(C)$ *(mesures redondantes)*, $W \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times p}$

    *Remarque : si toutes les colonnes $C$ sont indépendantes* $\Rightarrow \text{rang}(C) = n$

    $\Rightarrow$ *la condition devient $p > n$ (plus de mesures que de variables d'état)*

**Remarque**

Le terme **parité** vient des bits de parité utilisé en informatique. Ces bits introduisent une redondance de sorte à détecter une erreur dans la transmission de données numériques.

# Espace de parité statique - détection

- Détectabilité et espace de parité
  - Forme d'évaluation : $\boxed{r(k) = WCx(k) + WD_f f(k)}$ avec $W$ t.q. $\boxed{WC = 0}$
    - $\rightarrow$ rappel : le défaut est détectable si $\forall\ f(k) \neq 0 \Rightarrow r(k) \neq 0$
    - $\Rightarrow$ sensibilité aux défauts non garantie
  - Défaut détectable si $WD_f$ n'a pas de colonne nulle
    - $\Rightarrow$ vérification a posteriori
    - $\rightarrow$ remarque : si le défaut est détectable, il est fortement détectable

# Espace de parité statique - détection

- Une méthode pour déterminer <u>une</u> matrice de parité

$\Rightarrow$ Objectif : trouver $W$ t.q. $\boxed{WC = 0}$ avec $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $p > n$, $\mathrm{rang}(C) = n$

1. partitionner $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{(p-n)\times n}$

$\rightarrow$ si $C_1$ de rang plein, choisir $W = \begin{bmatrix} C_2 C_1^{-1} & -I_{p-n} \end{bmatrix}$ *(ainsi $WC = 0$)*

$\rightarrow$ sinon aller à l'étape 2

2. permuter les lignes de $C$ t.q. les $n$ premières lignes constituent une matrice de rang plein
3. partitionner $\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{bmatrix}$, $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{C}_2 \in \mathbb{R}^{(p-n)\times n}$ *($\tilde{C}_1$ est inversible)*
4. calculer $\tilde{W} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 \tilde{C}_1^{-1} & -I_{p-n} \end{bmatrix}$ *(ainsi $\tilde{W}\tilde{C} = 0$)*
5. retrouver $W$ par permutation des colonnes de $\tilde{W}$ de la même façon que les lignes de $C$ ont été permutées

$\Rightarrow$ $W$ n'est pas unique (dépend par exemple des lignes choisies)

$\rightarrow$ cette méthode garantit l'indépendance des $p - n$ équations de parité

*<u>Remarque</u> : si* $\mathrm{rang}(C) < n$*, enlever des colonnes de $C$ pour conserver uniquement* $\mathrm{rang}(C)$ *colonnes indépendantes*

# Espace de parité statique - détection

- Calcul d'une matrice de parité avec MATLAB
  - Objectif : trouver $W$ t.q. $\boxed{WC = 0}$ avec $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $p > n$, $rang(C) = n$

    $\rightarrow$ $W$ n'est pas unique
  - Pour obtenir une solution unique, une contrainte est ajoutée

    $\rightarrow$ les lignes de $W$ doivent constituer une base orthonormée
  - Le problème s'écrit

    $\rightarrow$ Trouver $W$ t.q. $\begin{cases} WC & = & 0 \\ WW^T & = & I_{p-n} \end{cases}$
  - Solution obtenue en utilisant $\boxed{\text{W=null(C')'}}$

    $\rightarrow$ *Remarque : résultat différent de celui obtenu avec la méthode précédente*

# Espace de parité statique - détection

- Exercice
  - $$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \\ y_5(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix}$$

1. Déterminer un matrice de parité $W$
2. Trouver la forme d'évaluation du résidu
3. Ce résidu permet-il de détecter tous les défauts ?
4. Même question avec un défaut supplémentaire $f_3(k)$ affectant $y_4(k)$ :

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \\ y_5(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ f_3(k) \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ même exercice en utilisant MATLAB

# Espace de parité statique - détection

- Robustesse aux perturbations
  - Modèle : $y(k) = Cx(k) + D_d d(k) + D_f f(k)$
  - Résidu $r(k) = WCx(k) + WD_d d(k) + WD_f f(k) = WD_d d(k) + WD_f f(k)$ avec $W$ t.q. $WC = 0$
  - Vérification a posteriori de la robustesse

    $\rightarrow$ si $WD_d = 0$ : insensibilité aux perturbations
  - Comment prendre en compte la robustesse a priori ?

# Espace de parité statique - détection

- Robustesse aux perturbations
  - Modèle : $y(k) = Cx(k) + D_d d(k) + D_f f(k)$
  - Résidu $r(k) = WCx(k) + WD_d d(k) + WD_f f(k) = WD_d d(k) + WD_f f(k)$ avec $W$ t.q. $WC = 0$
  - Vérification a posteriori de la robustesse

    $\rightarrow$ si $WD_d = 0$ : insensibilité aux perturbations
  - Comment prendre en compte la robustesse a priori ?

    $\Rightarrow$ chosir $W$ t.q. $\boxed{W \begin{bmatrix} C & D_d \end{bmatrix} = 0}$

    si une telle matrice $W$ existe...

    $\rightarrow$ condition d'existence : $p > \text{rang}(\begin{bmatrix} C & D_d \end{bmatrix})$

    $\rightarrow$ condition d'existence simplifiée : $p > (n + m_d)$ (si $\begin{bmatrix} C & D_d \end{bmatrix}$ de rang plein)
    - si une telle matrice $W$ n'existe pas

    $\rightarrow$ un résidu scalaire $\bar{r}$ est calculé comme une combinaison linéaire des composantes de $r$

    $\Rightarrow$ $\bar{r}$ doit être le plus sensible aux défauts et le moins sensible aux perturbations

# Espace de parité statique - détection

- Robustesse aux perturbations
  - Modèle : $y(k) = Cx(k) + D_d d(k) + D_f f(k)$
  - Résidu $r(k) = Wy(k) = WD_d d(k) + WD_f f(k)$ avec $W$ t.q. $WC = 0$
  - Objectif

    → générer un résidu scalaire $\bar{r}$ à partir des composantes de $r$ :

    $$\boxed{\bar{r}(k) = v^T r(k)} = v^T WD_d d(k) + v^T WD_f f(k) \text{ avec } W \text{ tq } WC = 0$$

    $v \in \mathbb{R}^{p-n}$ appelé *sélecteur* de résidu

    → $v$ choisi t.q. $\bar{r}$ le plus sensible à $f$ et le moins sensible à $d$
  - Critère à minimiser

    → $v$ choisi de sorte à minimiser

    $$J = \frac{\|v^T WD_d\|_2^2}{\|v^T WD_f\|_2^2} = \frac{v^T WD_d D_d^T W^T v}{v^T WD_f D_f^T W^T v}$$
  - Sélecteur optimal vis-à-vis du critère $J$
    - $$\boxed{v^* = \arg\min_v \frac{v^T WD_d D_d^T W^T v}{v^T WD_f D_f^T W^T v}}$$

    → comment calculer $v^*$ ? ⇒ théorème de Gantmacher

# Espace de parité statique - détection

- Robustesse aux perturbations

**Théorème de Gantmacher** [Theory of matrices, 1961]

Le vecteur $v^* = \arg\min_v \frac{v^T M v}{v^T N v}$ est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre $\lambda_{min}$ du faisceau $(M, N)$ et $\min_v \frac{v^T M v}{v^T N v} = \lambda_{min}$

- Rappel sur les faisceaux de matrices
  - Le faisceau associé aux matrices carrées $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est l'ensemble de matrices $P(\alpha) = M + \alpha N = (M, N)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  - Valeurs propres de $(M, N)$ :

  $\rightarrow$ $(M, N)$ a $n$ valeurs propres

  $\rightarrow$ soit $q$ le nombre de valeurs propres de $N$, alors $(M, N)$ a $q$ valeurs propres égales à $+\infty$ et $n - q$ valeurs propres finies

  $\rightarrow$ les $n - q$ valeurs propres finies de $(M, N)$ sont $\boxed{\lambda \in \mathbb{C} : \det(M - \lambda N) = 0}$

  - Vecteur propre $V_i$ associé à la valeur propre $\lambda_i$ : $\boxed{V_i \in \mathbb{C}^n : MV_i = \lambda_i N V_i}$

  $\rightarrow$ si $M = M^T$ et $N = N^T \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, $V_i \in \mathbb{R}^n$

# Espace de parité statique - détection

- Robustesse aux perturbations
  - Résidu le plus sensible à $f$ et le moins sensible à $d$ :

    $\rightarrow$ $\bar{r}(k) = {v^*}^T r(k) = v^T W D_d d(k) + v^T W D_f f(k)$ avec $W$ tq $WC = 0$

    $\rightarrow$ $v^* = \arg\min_v \dfrac{v^T W D_d D_d^T W^T v}{v^T W D_f D_f^T W^T v}$
  - Méthode pour trouver le sélecteur optimal
    1. Touver $W$ t.q. $WC = 0$
    2. Déterminer les valeurs propres $\lambda$ du faisceau $(W D_d D_d^T W^T, W D_f D_f^T W^T)$
    3. Déterminer le vecteur propre $v^*$ associé à la plus petite valeur propre $\lambda_{min}$
  - La valeur optimale du critère est $\lambda_{min}$ :

    $\rightarrow$ $\min_v \dfrac{v^T W D_d D_d^T W^T v}{v^T W D_f D_f^T W^T v} = \lambda_{min}$

# Espace de parité statique - détection

- Exercice
  - $$y(k)=\begin{bmatrix}y_1(k)\\y_2(k)\\y_3(k)\\y_4(k)\\y_5(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&1\\2&0&2\\1&0&2\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(k)\\f_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1(k)\\d_2(k)\end{bmatrix}$$

    → $d_1(k)$ est un bruit affectant les mesures 1, 2 et 3

    → $d_2(k)$ est un bruit affectant les mesures 4 et 5

1. Rappeler la forme de calcul du résidu $r(k)=Wy(k)$ insensible à $x(k)$
2. Donner la forme d'évaluation de $r(k)$ en fonction de $d(k)$ et $f(k)$.
3. $r(k)$ est il sensible à $d(k)$ ? Est-il possible de trouver un résidu insensible à $x(k)$ et $d(k)$ ?
4. Déterminer $\bar{r}(k)$ le plus sensible à $f(k)$ et le moins sensible à $d(k)$
5. Donner la forme d'évaluation de $\bar{r}(k)$ en fonction de $d(k)$ et $f(k)$
6. Calculer la valeur du critère $J$ pour $r_1(k)$, $r_2(k)$ et $\bar{r}(k)$. Conclure sur l'amélioration obtenue.

→ Vérifier les résultats avec MATLAB

# Espace de parité statique - détection

- Découplage par rapport à certains défauts
  - Modèle : $y(k) = Cx(k) + D_f^+ f^+(k) + D_f^- f^-(k)$
    - $\rightarrow$ le résidu doit être le plus sensible aux défauts $f^+(k)$
    - $\rightarrow$ le résidu doit être le moins sensible aux défauts $f^-(k)$
  - Résidu obtenu en utilisant un sélecteur
    - $\rightarrow$ $r_+(k) = {v_+^*}^T r(k) = v_+^T W D_f^+ f^+(k) + v_+^T W D_f^- f^-(k)$ avec $W$ t.q. $WC = 0$
    - $\rightarrow$ $v_+^* = \arg\min_{v_+} \dfrac{v_+^T W D_f^- (D_f^-)^T W^T v_+}{v_+^T W D_f^+ (D_f^+)^T W^T v_+}$
  - Méthode pour déterminer le sélecteur optimal
    1. Trouver $W$ t.q. $WC = 0$
    2. Déterminer les valeurs propres $\lambda$ du faisceau $(W D_f^- (D_f^-)^T W^T, W D_f^+ (D_f^+)^T W^T)$
    3. Déterminer le vecteur propres $v_+^*$ associé à la plus petite valeur propre $\lambda_{min}$
  - Intérêt
    - $\rightarrow$ si un unique défaut $f^+(k)$ est choisi, le résidu est le plus sensible à ce défaut
    - $\Rightarrow$ l'utilisation d'un lot de ce type de générateurs de résidus constitue une première approche du problème de localisation

# Espace de parité statique - détection

- Exercice *(nouvelle matrice C)*
  - $y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \\ y_5(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^-(k) \\ f_2^-(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} f^+(k)$

    $\rightarrow$ résidu doit être le plus sensible à $f^+(k)$

    $\rightarrow$ résidu doit être le moins sensible à $f_1^-(k)$ and $f_2^-(k)$

1. Trouver $W$ et donner la forme de calcul du résidu $r(k) = Wy(k)$ insensible à $x(k)$
2. Est-il possible de trouver un résidu $r(k)$ insensible à $x(k)$ et $f^-(k)$ ?
3. Trouver le résidu $r_+(k)$ le + sensible à $f^+(k)$ et le - sensible à $f^-(k)$

   $\rightarrow$ *pour obtenir une solution unique, fixer la seconde composante de* $v_+^*$ *à* 1
4. Donner la forme d'évaluation du résidu $r_+(k)$ en fonction de $f^+(k)$ et $f^-(k)$
5. Calculer la valeur du critère $J$ pour $r_1(k)$, $r_2(k)$ et $r_+(k)$. Conclure sur la qualité du résidu obtenu.

# Espace de parité statique - isolation

- Expression du résidu dans le cas sans perturbation
  - $r(k) = Wy(k) = WCx(k) + WD_f f(k)$

    $\rightarrow$ $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $f(k) \in \mathbb{R}^{m_f}$, $r(k) \in \mathbb{R}^{p-\text{rang}(C)}$, $W \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times p}$ t.q. $WC = 0$
- Problème d'isolation
  - Après la détection du défaut (ici, un défaut est détecté quand $r(k) \neq 0$)

  $\rightarrow$ connaissant $r(k)$, comment déterminer quel défaut s'est produit ?

  $\Rightarrow$ quelle composante, parmi les $m_f$ composantes de $f(k)$, n'est pas nulle ?
- Solution
  - Les résidus $r(k)$ se déplacent dans un espace de dimension $p - \text{rang}(C)$

    $\rightarrow$ la direction de $r(k)$ est une signature d'un défaut donné
  - Les colonnes de $WD_f$ constituent les $m_f$ directions vers lesquelles $r(k)$ est orienté en présence d'un défaut

    $\rightarrow$ pour isoler le défaut, la direction de $r(k)$ est calculée et comparée aux colonnes de $WD_f$

# Espace de parité statique - isolation

- Expression du résidu dans le cas sans perturbation
  - $r(k) = Wy(k) = WCx(k) + WD_f f(k)$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $f(k) = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_{m_f}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_f}$, $r(k) \in \mathbb{R}^{p-\text{rang}(C)}$

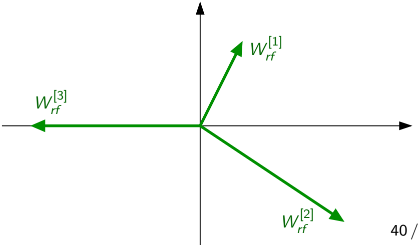
  $\rightarrow$ $W \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C)) \times p}$ t.q. $WC = 0, W_{rf} = WD_f \in \mathbb{R}^{(p-n) \times m_f}, W_{rf} = \begin{bmatrix} W_{rf}^{[1]} & \cdots & W_{rf}^{[m_f]} \end{bmatrix}$
- Méthode d'isolation dans le cas sans perturbation
  - analyse de l'orientation de $r(k)$ par rapport aux directions données par $WD_f$

  $\Rightarrow$ étude de la colinéarité de $r(k)$ et des $m_f$ vecteurs $W_{rf}^{[i]} \in \mathbb{R}^{p-\text{rang}(C)}$

  if $r(k)$ est colinéaire à $W_{rf}^{[i]}$ $\Rightarrow$ défaut $f_i$ isolé

  - Exemple : $p - n = 2$ et $m_f = 3$
    - objectif : isoler 1 défaut parmi 3
    - 3 directions associées aux défauts

  $\rightarrow$ $W_{rf} = \begin{bmatrix} W_{rf}^{[1]} & W_{rf}^{[2]} & W_{rf}^{[3]} \end{bmatrix}$



# Espace de parité statique - isolation

- Expression du résidu dans le cas sans perturbation
  - $r(k) = Wy(k) = WCx(k) + WD_f f(k)$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $f(k) = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_{m_f}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_f}$, $r(k) \in \mathbb{R}^{p-\text{rang}(C)}$

  $\rightarrow$ $W \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times p}$ t.q. $WC = 0, W_{rf} = WD_f \in \mathbb{R}^{(p-n)\times m_f}, W_{rf} = \begin{bmatrix} W_{rf}^{[1]} & \cdots & W_{rf}^{[m_f]} \end{bmatrix}$
- Méthode d'isolation dans le cas sans perturbation
  - analyse de l'orientation de $r(k)$ par rapport aux directions données par $WD_f$

  $\Rightarrow$ étude de la colinéarité de $r(k)$ et des $m_f$ vecteurs $W_{rf}^{[i]} \in \mathbb{R}^{p-\text{rang}(C)}$

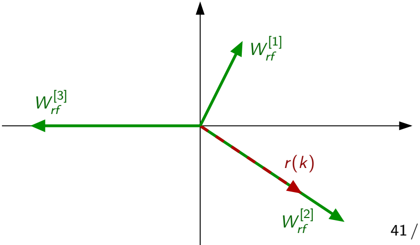
  $\boxed{\text{if } r(k) \text{ est colinéaire à } W_{rf}^{[i]} \Rightarrow \text{défaut } f_i \text{ isolé}}$

  - Exemple : $p - n = 2$ et $m_f = 3$
    - objectif : isoler 1 défaut parmi 3
    - 3 directions associées aux défauts

    $\rightarrow$ $W_{rf} = \begin{bmatrix} W_{rf}^{[1]} & W_{rf}^{[2]} & W_{rf}^{[3]} \end{bmatrix}$

    - ici $r$ est colinéaire à $W_{rf}^{[2]}$

    $\Rightarrow$ *défaut $f_2$ isolé*



# Espace de parité statique - isolation

- Expression du résidu dans le cas sans perturbation
  - $r(k) = Wy(k) = WCx(k) + WD_f f(k)$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $f(k) = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_{m_f}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_f}$, $r(k) \in \mathbb{R}^{p-\mathrm{rang}(C)}$

  $\rightarrow$ $W \in \mathbb{R}^{(p-\mathrm{rang}(C))\times n}$ t.q. $WC = 0$, $W = \begin{bmatrix} W^{[1]} & \cdots & W^{[m_f]} \end{bmatrix}$

- Méthode d'isolation dans le cas sans perturbation
  - Cas particulier : détection de défauts capteurs
    - $f(k) = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_p(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p \Rightarrow$ 1 défaut par capteur

  $\rightarrow$ $D_f = I_p \Rightarrow W_{rf} = W$

  $\Rightarrow$ les $p$ colonnes de $W$ définissent les $p$ directions associées aux défauts

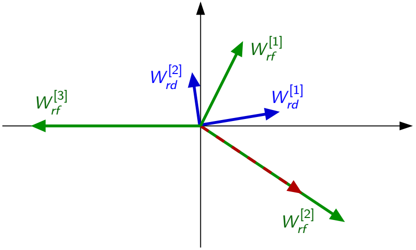
  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{si } r \text{ est colinéaire à } W^{[i]} \Rightarrow \text{défaut capteur sur la } i^{\text{ème}} \text{ mesure}}$

# Espace de parité statique - isolation

- Expression du résidu dans le cas avec perturbation
  - $r(k) = Wy(k) = WCx(k) + WD_f f(k) + WD_d d(k)$
  
  $\rightarrow$ $r(k) \in \mathbb{R}^{p-\text{rang}(C)}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $f(k) \in \mathbb{R}^{m_f}$, $d(k) \in \mathbb{R}^{m_d}$, $W \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times n}$ t.q. $WC = 0$
  
  $\rightarrow$ $W_{rf} = WD_f = \left[W_{rf}^{[1]} \cdots W_{rf}^{[m_f]}\right] \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times m_f}$, $W_{rd} = WD_d = \left[W_{rd}^{[1]} \cdots W_{rd}^{[m_d]}\right] \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times m_d}$
- Méthode d'isolation dans le cas avec perturbation
  - orientation de $r(k)$ dépend
  
  $\rightarrow$ des $m_f$ directions des défauts données par les colonnes $W_{rf}$
  
  $\rightarrow$ des $m_d$ directions des perturbations données par les colonnes de $W_{rd}$

  si $r(k)$ est **le plus colinéaire** à $W_{rf}^{[i]}$ $\Rightarrow$ défaut $f_i$ isolé

  - Exemple : $p - n = 2$, $m_f = 3$, $m_d = 2$
    - objectif : isoler 1 défaut parmi 3
    - 3 directions pour les défauts
    
    $\rightarrow$ $W_{rf} = \begin{bmatrix} W_{rf}^{[1]} & W_{rf}^{[2]} & W_{rf}^{[3]} \end{bmatrix}$
    - 3 directions pour les perturbations
    
    $\rightarrow$ $W_{rd} = \begin{bmatrix} W_{rd}^{[1]} & W_{rd}^{[2]} \end{bmatrix}$
    - ici $r$ est le plus colinéaire à $W_{rf}^{[2]}$



# Espace de parité statique - isolation

- Expression du résidu dans le cas avec perturbation
  - $r(k) = Wy(k) = WCx(k) + WD_f f(k) + WD_d d(k)$

    $\rightarrow$ $r(k) \in \mathbb{R}^{p-\text{rang}(C)}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $f(k) \in \mathbb{R}^{m_f}$, $d(k) \in \mathbb{R}^{m_d}$, $W \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times n}$ t.q. $WC = 0$

    $\rightarrow$ $W_{rf} = WD_f = \left[W_{rf}^{[1]} \cdots W_{rf}^{[m_f]}\right] \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times m_f}$, $W_{rd} = WD_d = \left[W_{rd}^{[1]} \cdots W_{rd}^{[m_d]}\right] \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times m_d}$
- Méthode d'isolation dans le cas avec perturbation
  - orientation de $r(k)$ dépend

    $\rightarrow$ des $m_f$ directions des défauts données par les colonnes $W_{rf}$

    $\rightarrow$ des $m_d$ directions des perturbations données par les colonnes de $W_{rd}$

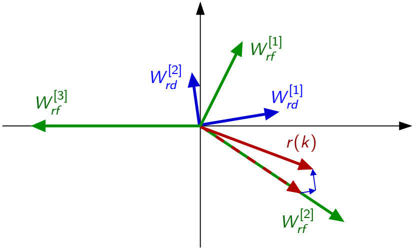
    si $r(k)$ est **le plus colinéaire** à $W_{rf}^{[i]}$ $\Rightarrow$ défaut $f_i$ isolé

  - Exemple : $p - n = 2$, $m_f = 3$, $m_d = 2$
    - objectif : isoler 1 défaut parmi 3
    - 3 directions pour les défauts

    $\rightarrow$ $W_{rf} = \begin{bmatrix} W_{rf}^{[1]} & W_{rf}^{[2]} & W_{rf}^{[3]} \end{bmatrix}$
    - 3 directions pour les perturbations

    $\rightarrow$ $W_{rd} = \begin{bmatrix} W_{rd}^{[1]} & W_{rd}^{[2]} \end{bmatrix}$
    - ici $r$ est le plus colinéaire à $W_{rf}^{[2]}$

    $\Rightarrow$ défaut $f_2$ isolé $\Rightarrow$ comment évaluer la colinéarité avec MATLAB ?

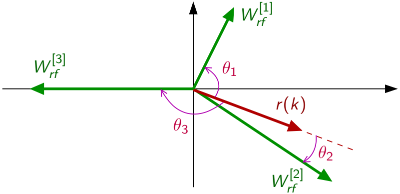


# Espace de parité statique - isolation

- Expression du résidu dans le cas avec perturbation

$$\boxed{\text{if } r(k) \text{ est } \textbf{le plus colinéaire} \text{ à } W_{rf}^{[i]} \Rightarrow \text{défaut } f_i \text{ isolé}}$$

  - Comment évaluer la colinéarité de deux vecteurs ?
    - calcul de l'angle entre deux vecteurs




$\rightarrow$ angle $\theta_i$ obtenu à partir du produit scalaire $r^T \cdot W_{rf}^{[i]} = \|r\| \cdot \|W_{rf}^{[i]}\| \cdot \cos(\theta_i)$

- $\theta_i = \arccos \dfrac{r^T W_{rf}^{[i]}}{\|r\| \cdot \|W_{rf}^{[i]}\|} \Rightarrow \boxed{\theta_i = \arccos \dfrac{r^T W_{rf}^{[i]}}{\sqrt{r^T r}\sqrt{{W_{rf}^{[i]}}^T W_{rf}^{[i]}}}}$

$\rightarrow$ plus $\theta_i$ est petit, plus $r$ et $W_{rf}^{[i]}$ sont colinéaires

$\rightarrow$ $\boxed{\text{défaut } f_i \text{ isolé où } i = \arg\min_i \theta_i}$

$\rightarrow$ exemple ci-dessus : $\min \theta_i = \theta_2 \Rightarrow$ défaut $f_2$ isolé

# Static parity space - isolation

- Exercice
  - $$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \\ y_5(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \end{bmatrix}$$

    → $d_1(k)$ est un bruit affectant les mesures 1, 2 et 3

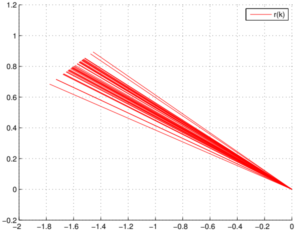
    → $d_2(k)$ est un bruit affectant les mesures 4 et 5

1. Rappeler la forme de calcul du résidu $r(k) = Wy(k)$ insensible à $x(k)$.
2. Donner la forme d'évaluation de $r(k)$ en fonction de $d(k)$ et $f(k)$ et préciser les valeurs des matrices $W_{rd} = WD_d$ et $W_{rf} = WD_f$.
3. Un défaut se produit à l'instant $k = 50$, $r(60) = \begin{bmatrix} -2.09 \\ 1.44 \end{bmatrix}$. Isoler le défaut en utilisant une approche graphique.
4. Confirmer la conclusion en calculant les angles $\theta_i$.

→ *Vérifier les résultats en utilisant* MATLAB

# Static parity space - isolation

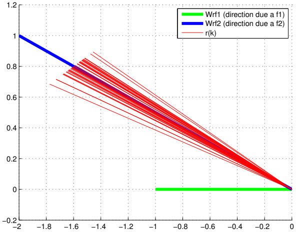
- Exercice
  - Prise en compte de l'évolution temporelle de $r(k)$
    - un autre défaut conduit à la séquence de résidus $r(k)$ ci-dessous




$\rightarrow$ Quel défaut se produit ?

# Static parity space - isolation

- Exercice
  - Prise en compte de l'évolution temporelle de $r(k)$
    - un autre défaut conduit à la séquence de résidus $r(k)$ ci-dessous




$\rightarrow$ Quel défaut se produit ?
$\Rightarrow$ $f_2$ isolé ($r(k)$ orienté selon $W_{rf}^{[2]}$)

# Espace de parité statique - récapitulatif

- Modèle : $y(k)=Cx(k)+D_d d(k)+D_f f(k)$ , $y\in\mathbb{R}^p, x\in\mathbb{R}^n, d\in\mathbb{R}^{m_d}, f\in\mathbb{R}^{m_f}$
- Résidu : $r(k) = Wy(k) = WCx(k) + WD_d d(k) + WD_f f(k)$
- Insensibilité à l'état : trouver $W$ t.q. $WC = 0$ $\quad (W \in \mathbb{R}^{(p-\text{rang}(C))\times n})$
- Sensibilité aux défauts vérifiée a posteriori :
  colonne $i$ de $WD_f$ non nulle $\Rightarrow$ défaut $f_i$ détectable avec $r(k)$
- Robustesse parfaite aux perturbations : trouver $W$ t.q. $W\begin{bmatrix} C & D_d \end{bmatrix} = 0$
- Résidu le pus sensible aux défauts et le moins sensible aux perturbations :
  $\bar{r}(k) = v^T Wy(k)$ ($v$ obtenue avec le théorème de Gantmacher)
- Isolation : $r$ le plus colinéaire à la colonne $i$ de $WD_f$ $\Rightarrow$ $f_i$ isolé
- Limitations de l'approche de l'espace de parité statique
  - $\rightarrow$ limité à la détection/localisation des pannes capteurs uniquement
  - $\rightarrow$ que faire si $W$ n'existe pas ? (pas de redondance directe entre les mesures)

$\Rightarrow$ Une solution : utiliser la redondance temporelle entre commandes et mesures à différents instants $\Rightarrow$ espace de parité dynamique

# Espace de parité dynamique - principe

- Modèle
  - $\Sigma_k \begin{cases} x(k+1) & = Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k) + B_f f(k) \\ y(k) & = Cx(k) + Du(k) + D_d d(k) + D_f f(k) \end{cases}$

  $\rightarrow$ $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$,$u \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^{m_d}$, $f \in \mathbb{R}^{m_f}$
- Idée
  - utiliser la redondance temporelle liant commandes/mesures à $\neq$ instants

  $\rightarrow$ mesures $y(k)$ et commandes $u(k)$ collectées sur une fenêtre temporelle
- Modèle sur la fenêtre temporelle $[k-s, k]$

$$\boxed{Y(k-s,k)=\Phi_U(s)U(k-s,k)+Q_o(s)x(k-s)+\Phi_D(s)D(k-s,k)+\Phi_F(s)F(k-s,k)}$$

$\rightarrow$ $s$ : taille de la fenêtre temporelle

$\rightarrow$ $Y(k-s,k) = \begin{bmatrix} y(k-s) \\ y(k-s+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}$, $U(k-s,k) = \begin{bmatrix} u(k-s) \\ u(k-s+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix}$, $D(k,s) = \cdots$

$\rightarrow$ *exercice : trouver les expressions de $\Phi_U(s)$, $Q_o(s)$, $\Phi_D(s)$ et $\Phi_F(s)$ (approche récursive pour déterminer $y(k-s)$, puis $y(k-s+1)$...)*

# Espace de parité dynamique - principe

- Modèle
  - $\Sigma_k \begin{cases} x(k+1) & = Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k) + B_f f(k) \\ y(k) & = Cx(k) + Du(k) + D_d d(k) + D_f f(k) \end{cases}$
- Modèle sur la fenêtre temporelle $[k-s, k]$

$$\boxed{Y(k-s,k) = \Phi_U(s)U(k-s,k) + Q_o(s)x(k-s) + \Phi_D(s)D(k-s,k) + \Phi_F(s)F(k-s,k)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(k-s) \\ y(k-s+1) \\ y(k-s+2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}}_{Y(k-s,k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^s \end{bmatrix}}_{Q_o(s)} x(k-s) + \underbrace{\begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 & 0 \\ CAB & CB & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & D & 0 \\ CA^{s-1}B & CA^{s-2}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix}}_{\Phi_U(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} u(k-s) \\ u(k-s+1) \\ u(k-s+2) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix}}_{U(k-s,k)}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} D_d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB_d & D_d & \cdots & 0 & 0 \\ CAB_d & CB_d & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & D_d & 0 \\ CA^{s-1}B_d & CA^{s-2}B_d & \cdots & CB_d & D_d \end{bmatrix}}_{\Phi_D(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} d(k-s) \\ d(k-s+1) \\ d(k-s+2) \\ \vdots \\ d(k) \end{bmatrix}}_{D(k-s,k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_f & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB_f & D_f & \cdots & 0 & 0 \\ CAB_f & CB_f & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & D_f & 0 \\ CA^{s-1}B_f & CA^{s-2}B_f & \cdots & CB_f & D_f \end{bmatrix}}_{\Phi_F(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} f(k-s) \\ f(k-s+1) \\ f(k-s+2) \\ \vdots \\ f(k) \end{bmatrix}}_{F(k-s,k)}$$

$\rightarrow$ objectif : trouver $r(k) = f(Y(k-s,k), U(k-s,k))$ insensible à $x(k)$

# Espace de parité dynamique - principe

- Modèle sur la fenêtre temporelle $[k-s, k]$

$$\boxed{Y(k-s,k)=\Phi_U(s)U(k-s,k)+Q_o(s)x(k-s)+\Phi_D(s)D(k-s,k)+\Phi_F(s)F(k-s,k)}$$

- Résidu obtenu par combinaison linéaire des commandes et mesures collectées
  - $\boxed{r(k) = W\left(Y(k-s,k) - \Phi_U(s)U(k-s,k)\right)}$ *(forme de calcul)*

$\rightarrow$ tire parti de la redondance temporelle entre $u$ et $y$ à différents instants

$\Rightarrow$ inter-redondance

## Remarque

- Des résidus scalaires $\tilde{r}_j(k)$ peuvent être générés en utilisant une unique mesure $y_j(k) \Rightarrow$ auto-redondance

$\rightarrow$ $\tilde{r}_j(k) = \tilde{W}_j\left(\tilde{Y}_j(k-s,k) - \tilde{\Phi}_U^j(s)U(k-s,k)\right)$

$\tilde{Y}_j(k-s,k)=\tilde{\Phi}_U^j(s)U(k-s,k)+\tilde{Q}_o^j(s)x(k-s)+\tilde{\Phi}_D^j(s)D(k-s,k)+\tilde{\Phi}_F^j(s)F(k-s,k)$

$\rightarrow$ $\tilde{\Phi}_U^j(s),\tilde{Q}_o^j(s),\tilde{\Phi}_D^j(s),\tilde{\Phi}_F^j(s)$ *obtenues en remplaçant* $C,D,D_d,D_f$ *par leur* $j^{\text{ème}}$ *ligne*

$\Rightarrow$ permet d'aborder le problème de localisation

# Espace de parité dynamique - détection

- Modèle sur la fenêtre temporelle $[k-s, k]$
  - $Y(k-s,k) = \Phi_U(s)U(k-s,k) + Q_o(s)x(k-s) + \Phi_D(s)D(k-s,k) + \Phi_F(s)F(k-s,k)$
- Forme de calcul
  - $\boxed{r(k) = W\left(Y(k-s,k) - \Phi_U(s)U(k-s,k)\right)}$
- Forme d'évaluation
  - $\boxed{r(k) = WQ_o(s)x(k-s) + W\Phi_D(s)D(k-s,k) + W\Phi_F(s)F(k-s,k)}$
- Insensibilité à l'état
  - $r(k)$ insensible à l'état si $W$ t.q. $\boxed{WQ_o(s) = 0}$
  - condition d'existence : $W$ existe si $\boxed{p(s+1) > \text{rang}\left(Q_o(s)\right)}$

$\rightarrow$ $W \in \mathbb{R}^{(p(s+1)-\text{rang}(Q_o(s)))\times p(s+1)}$

$\rightarrow$ $W$ déterminée avec la même méthode que pour l'*espace de parité statique*

# Espace de parité dynamique - détection

- Forme d'évaluation
  - $\boxed{r(k) = WQ_o(s)x(k-s) + W\Phi_D(s)D(k-s,k) + W\Phi_F(s)F(k-s,k)}$

$\rightarrow$ with $W$ s.t. $WQ_o(s) = 0$

- Sensibilité aux défauts : vérifiée a posteriori
  - effet des défauts évaluée avec la matrice $W_{rF} = W\Phi_F(s)$
  - dans le cas sans défaut, le résidu s'écrit

$$\rightarrow r(k) = \left[ W_{rF}^{[1]} \cdots W_{rF}^{[m_f]} \middle| W_{rF}^{[m_f+1]} \cdots W_{rF}^{[2m_f]} \middle| \cdots \middle| W_{rF}^{[sm_f+1]} \cdots W_{rF}^{[(s+1)m_f]} \right] \left[ \begin{array}{c} f_1(k-s) \\ \cdots \\ f_{m_f}(k-s) \\ \hline f_1(k-s+1) \\ \cdots \\ f_{m_f}(k-s+1) \\ \hline \cdots \\ \hline f_1(k) \\ \cdots \\ f_{m_f}(k) \end{array} \right]$$

  - si un défaut unique constant $f_i(k)$ se produit, après $s$ échantillons :

$$\rightarrow r(k) = W_{rF}^{[i]} f_i(k-s) + W_{rF}^{[m_f+i]} f_i(k-s) + \cdots + W_{rF}^{[sm_f+i]} f_i(k-s)$$
$$= (W_{rF}^{[i]} + W_{rF}^{[m_f+i]} + \cdots + W_{rF}^{[sm_f+i]}) f_i(k-s)$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f_i \text{ fortement détectable} & \Leftrightarrow & \sum_{j=0}^{s} W_{rF}^{[jm_f+i]} \neq 0 \\ f_i \text{ faiblement détectable} & \Leftrightarrow & \exists\, q \leq s \text{ s.t. } \sum_{j=s-q}^{s} W_{rF}^{[jm_f+i]} \neq 0 \end{array}}$$

# Espace de parité dynamique - détection

- Forme d'évaluation
  - $\boxed{r(k) = WQ_o(s)x(k-s) + W\Phi_D(s)D(k-s,k) + W\Phi_F(s)F(k-s,k)}$

$\rightarrow$ avec $W$ t.q. $WQ_o(s) = 0$

- Robustesse aux perturbations : vérifiée a posteriori
  - effet des perturbations évalué en utilisant $W_{rD} = W\Phi_D(s)$

résidu insensible à $d_i$ si toutes les colonnes $W_{rD}^{[i]}, W_{rD}^{[m_d+i]}, \cdots, W_{rD}^{[sm_d+i]}$ sont nulles

- Robustesse parfaite aux perturbations : contrainte imposée a priori
  - choisir $W$ t.a. $W\Phi_D(s) = 0 \Rightarrow$ choisir $W$ t.q. $W\begin{bmatrix} Q_o(s) & \Phi_D(s) \end{bmatrix} = 0$
  - une telle matrice $W$ existe si $\boxed{p(s+1) > \text{rang}\left(\begin{bmatrix} Q_o(s) & \Phi_D(s) \end{bmatrix}\right)}$

$\rightarrow$ condition rarement satisfaite

$\Rightarrow$ recherche du résidu le plus sensible aux défauts et le moins sensible aux perturbations

# Espace de parité dynamique - détection

- Forme d'évaluation
  - $\boxed{r(k) = WQ_o(s)x(k-s) + W\Phi_D(s)D(k-s,k) + W\Phi_F(s)F(k-s,k)}$

  → avec $W$ t.q. $WQ_o(s) = 0$
- Résidu le plus sensible aux défauts et le moins sensible aux perturbations
  - résidu scalaire obtenu par combinaison linéaire des composantes de $r(k)$

  → $\boxed{\bar{r}(k) = v^T r(k)} = v^T W\Phi_D(s)D(k-s,k) + v^T W\Phi_F(s)F(k-s,k)$
  - choix du sélecteur optimal

  → $v^* = \arg\min_v \dfrac{\|v^T W\Phi_D(s)\|_2^2}{\|v^T W\Phi_F(s)\|_2^2} = \arg\min_v \dfrac{v^T W\Phi_D(s)\Phi_D^T(s)W^T v}{v^T W\Phi_F(s)\Phi_F^T(s)W^T v}$

  → method to dertermine $v^*$
    1. Déterminer $W$ t.q. $WQ_o(s) = 0$
    2. Calculer les valeur propres $\lambda$ du faisceau $(W\Phi_D(s)\Phi_D^T(s)W^T, W\Phi_F(s)\Phi_F^T(s)W^T)$
    3. Calculer le vecteur propre $v^*$ associé à la plus petite valeur propre $\lambda_{min}$

# Espace de parité dynamique - isolation

- Localisation de défauts dans le cas sans perturbation
  - espace de parité statique (rappel)
    - → forme d'évaluation du résidu : $\boxed{r(k) = WD_f f(k)}$
    - → faute unique $f_i(k) \Rightarrow r(k)$ orienté selon la $i^{\text{th}}$ colonne de $WD_f$
    - → $f_i(k)$ varie $\Rightarrow$ amplitude de $r(k)$ change mais pas sa direction
  - espace de parité dynamique
    - → forme d'évaluation du résidu : $\boxed{r(k) = W\Phi_F(s)F(k-s,k) = W_{rF}F(k-s,k)}$
    - → $$r(k) = \left[W_{rF}^{[1]} \cdots W_{rF}^{[m_f]} \,\middle|\, W_{rF}^{[m_f+1]} \cdots W_{rF}^{[2m_f]} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, W_{rF}^{[sm_f+1]} \cdots W_{rF}^{[(s+1)m_f]}\right] \begin{bmatrix} f_1(k-s) \\ \vdots \\ f_{m_f}(k-s) \\ \hline f_1(k-s+1) \\ \vdots \\ f_{m_f}(k-s+1) \\ \hline \vdots \\ \hline f_1(k) \\ \vdots \\ f_{m_f}(k) \end{bmatrix}$$
    - → $f_i(k)$ varie $\Rightarrow$ amplitude et orientation de $r(k)$ varient (selon les directions $W_{rF}^{[i]}, W_{rF}^{[i+m_f]}, \cdots, W_{rF}^{[i+sm_f]}$)

# Espace de parité dynamique - isolation

- Localisation de défauts dans le cas sans perturbation
  - Forme d'évaluation du résidu :

$$\boxed{r(k) = W\Phi_F(s)F(k-s,k) = W_{rF}F(k-s,k)}$$

$$\rightarrow\ r(k) = \left[W_{rF}^{[1]} \cdots W_{rF}^{[m_f]} \,\middle|\, W_{rF}^{[m_f+1]} \cdots W_{rF}^{[2m_f]} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, W_{rF}^{[sm_f+1]} \cdots W_{rF}^{[(s+1)m_f]}\right] \begin{bmatrix} f_1(k-s) \\ \vdots \\ f_{m_f}(k-s) \\ \hline f_1(k-s+1) \\ \vdots \\ f_{m_f}(k-s+1) \\ \hline \vdots \\ \hline f_1(k) \\ \vdots \\ f_{m_f}(k) \end{bmatrix}$$

  - $f_i(k)$ varie $\Rightarrow$ amplitude et orientation de $r(k)$ varient

$$\rightarrow\ r(k) = W_{rF}^{[i]} f_i(k-s) + W_{rF}^{[i+m_f]} f_i(k-s+1) + \cdots + W_{rF}^{[i+sm_f]} f_i(k)$$

  - si $f_i(k)$ constant, $s$ échantillons après apparition du défaut :

$$\begin{aligned} \rightarrow\ r(k) &= W_{rF}^{[i]} f_i(k-s) + W_{rF}^{[i+m_f]} f_i(k-s) + \cdots + W_{rF}^{[i+sm_f]} f_i(k-s) \\ &= (W_{rF}^{[i]} + W_{rF}^{[i+m_f]} + \cdots + W_{rF}^{[i+sm_f]}) f_i(k-s) \end{aligned}$$

  - sous hyp. de défaut constant, $s$ échantillons après apparition du défaut

$$\boxed{\text{si } r(k) \text{ colinéaire à } W_{rF}^{[i]} + W_{rF}^{[i+m_f]} + \cdots + W_{rF}^{[i+sm_f]} \Rightarrow \text{défaut } f_i \text{ isolé}}$$

# Espace de parité dynamique - taille de la fenêtre

- Forme d'évaluation sur la fenêtre temporelle $[k-s, k]$
  - $\boxed{r(k) = WQ_o(s)x(k-s) + W\Phi_D(s)D(k-s,k) + W\Phi_F(s)F(k-s,k)}$
- Taille de la fenêtre dépend du cahier des charges
  - insensibilité à l'état
    - $W$ t.q. $WQ_o(s) = 0$ existe si $p(s+1) > \text{rang}(Q_o(s))$

    $\rightarrow$ $\boxed{\text{choix itératif de } s}$ ($s$ augmenté jusqu'à satisfaire cette condition $\Rightarrow s_{min}$)
  - insensibilité aux perturbations
    - $W$ t.q. $W\begin{bmatrix} Q_o(s) & \Phi_D(s) \end{bmatrix} = 0$ existe si $p(s+1) > \text{rang}\left(\begin{bmatrix} Q_o(s) & \Phi_D(s) \end{bmatrix}\right)$

    $\rightarrow$ choix itératif de $s$
  - résidu le plus sensible aux défauts et le moins sensible aux perturbations
    - $\bar{r}(k) = v^T r(k)$ avec $v$ minimisant $J(s, v) = \dfrac{\|v^T W\Phi_D(s)\|_2^2}{\|v^T W\Phi_F(s)\|_2^2}$

    $\rightarrow$ critère $J(s, v)$ décroît quand $s$ augmente

    $\rightarrow$ augmenter $s$ jusqu'à satisfaire la condition de robustesse

# Espace de parité dynamique - Exercice

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ f_3(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ f_3(k) \end{bmatrix}$$

→ $f_1(k)$ défaut actionneur, $f_2(k)$ et $f_3(k)$ défauts capteurs

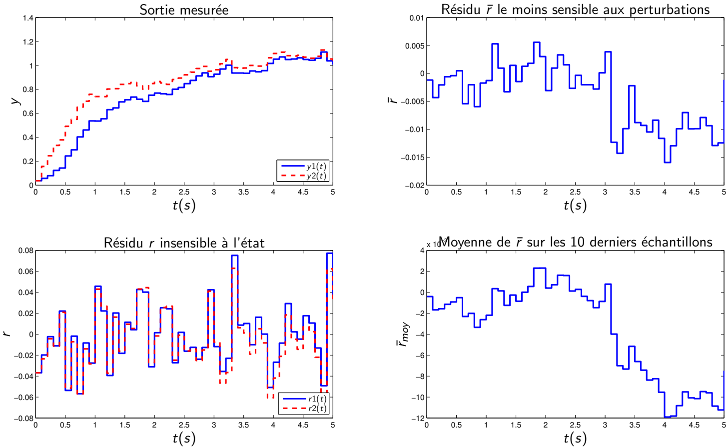
→ $d_1(k)$ perturbation sur l'état, $d_2(k)$ bruit de mesure

1. Est-il possible d'appliquer la méthode de l'espace de parité statique ?
2. Donner la taille minimale de fenêtre $s_{min}$ t.q. un résidu insensible à $x$ existe
3. Trouver $W$ et donner la forme de calcul du résidu en fonction des commandes et mesures collectées.
4. Donner la forme d'évaluation dépendant des défauts et perturbations. Indiquer les directions des défauts capteurs et actionneurs.
5. 3 instants après un défaut unique, $r(k) = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.2 \end{bmatrix}$. Quel défaut s'est produit ?
6. Donner l'expression du résidu $\bar{r}(k)$ le moins sensible aux perturbations (pour $s = s_{min}$) et comparer son efficacité à celle de $r_1(k)$ et $r_2(k)$

⇒ Vérifier les résultats en utilisant MATLAB

# Espace de parité dynamique - Exercice

- Simulation en présence de bruits blancs et d'un défaut constant $f_1$



# Plan du cours

1. Vue d'ensemble des méthodes de détection et localisation de défauts
   - Tâches de diagnostic (définitions)
   - Approches basées sur la surveillance de signaux
   - Redondance matérielle
   - Redondance analytique
2. Méthode de l'espace de parité
   - Rappel sur les systèmes échantillonnés
   - Espace de parité statique
   - Espace de parité dynamique
3. Cas détude : DLD pour un quadricoptère
   - Modélisation
   - Synthèse de la loi de commande

# Modélisation

- Rappel sur le formalisme de Newton-Euler :
  - dans un repère inertiel $\mathcal{I}$

$$m \cdot \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{I}} = \sum_i \vec{F}_i^{\mathcal{I}}$$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right|_{\mathcal{I}} = \left.\frac{d(I\vec{\Omega})}{dt}\right|_{\mathcal{I}} = \sum_i \vec{M}_i^{\mathcal{I}}$$

  - dans un repère non inertiel $\mathcal{B}$

$$m \cdot \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{B}} + \vec{\Omega} \wedge m\vec{v} = \sum_i \vec{F}_i^{\mathcal{B}}$$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right|_{\mathcal{I}} = \left.\frac{d(I\vec{\Omega})}{dt}\right|_{\mathcal{B}} + \vec{\Omega} \wedge I\vec{\Omega} = \sum_i \vec{M}_i^{\mathcal{B}}$$

m - masse

$\vec{\sigma}$ - moment angulaire

I - matrice d'inertie

$\vec{\Omega}$ - vitesse angulaire de $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{I}$

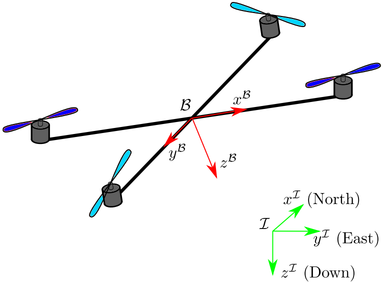
# Repères utilisés

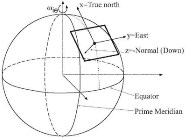
- repère inertiel (Terre, NED – North East Down) :

$$\left(\mathcal{I}, x^{\mathcal{I}}, y^{\mathcal{I}}, z^{\mathcal{I}}\right)$$

- repère non inertiel (body, drone) :

$$\left(\mathcal{B}, x^{\mathcal{B}}, y^{\mathcal{B}}, z^{\mathcal{B}}\right)$$



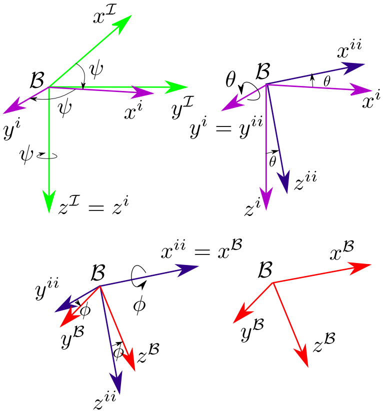



# Angles d'Euler

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$




- Passage d'un vecteur du repère body vers le repère inertiel :

$$X^{\mathcal{I}} = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)X^{\mathcal{B}} \tag{1}$$

- Orthogonalité : $R_a(\eta)^{-1} = R_a(-\eta) = R_a(\eta)^T, \ \forall a \in \{x, \ y, \ z\}$

# Propriétés de la matrice de rotation

- Matrice de rotation du repère body vers le repère inertiel

$$R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) \tag{2}$$

et $X^{\mathcal{I}} = R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} X^{\mathcal{B}}$.

- Transformation inverse :

$$X^{\mathcal{B}} = R_x(-\phi)R_y(-\theta)R_z(-\psi)X^{\mathcal{I}} \tag{3}$$

et

$$R_{\mathcal{I}}^{\mathcal{B}} = R_x(-\phi)R_y(-\theta)R_z(-\psi) = \left(R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}\right)^{-1} \tag{4}$$

- Alors : $\left(R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}\right)^{-1} = \left(R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}\right)^{T}$ et $\left(R_{\mathcal{I}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \left(R_{\mathcal{I}}^{\mathcal{B}}\right)^{T}$

$$R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \tag{5}$$

# PFD en translation (repère inertiel)

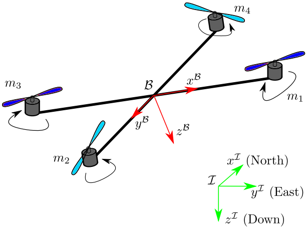
- Forces principales agissant sur le drone
  - Gravité $\vec{G}^{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$
  - Poussée des moteurs $\vec{F}_i^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k\omega_i^2 \end{bmatrix}$, $\forall i \in 1, \ldots 4$ ($\omega_i$ = vitesse de rotation du moteur $i$)
  - Forces aérodynamiques négligées (faibles dans le cas des multicoptères)
- On obtient

$$m\vec{a}^{\mathcal{I}} = \vec{G}^{\mathcal{I}} + R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i^{\mathcal{B}} \qquad (6)$$

# PFD en rotation (repère body)

- Moments agissant sur le drone

$$\vec{M}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} lk(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ lk(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ d(\omega_2^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_3^2) \end{bmatrix}$$




- On obtient

$$I\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = -\vec{\Omega} \wedge I\vec{\Omega} + \vec{M}^{\mathcal{B}} \tag{7}$$

- Dans le repère drone

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{8}$$

# Linéarisation du comportement dynamique de l'engin

- Définition du centre de gravité comme $r$.
- Le quadricoptère est linéarisé autour d'un mode de vol stationnaire $\phi = 0$, $\theta = 0$, $\psi = \psi_0$, $x, y, z =$const., $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} = 0$, $\dot{\phi} = \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$.
- En mode de vol stationnaire et en considérant quatre moteurs identiques

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{4k}}$$

- Introduisons les petites variations suivantes

$$\Delta\phi,\ \Delta\theta,\ \Delta\omega$$

# Linéarisation du comportement dynamique de l'engin

- D'après le PFD en translation appliqué dans le repère inertiel $\mathcal{I}$

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + R_{\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4k\omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{s}\psi \mathrm{s}\phi + \mathrm{c}\psi \mathrm{s}\theta \mathrm{c}\phi \\ \mathrm{s}\psi \mathrm{s}\theta \mathrm{c}\phi - \mathrm{c}\psi \mathrm{s}\phi \\ \mathrm{c}\theta \mathrm{c}\phi \end{bmatrix} 4k\omega^2$$

- En considérant un vol stationnaire aux petites perturbations, les équations précédentes deviennent

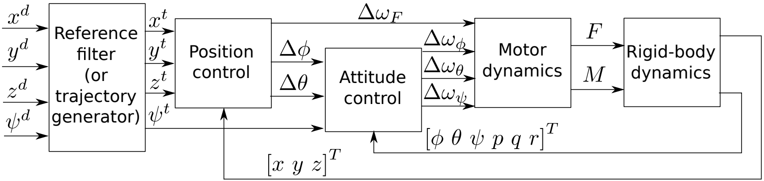
$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{s}\psi \Delta\phi + \mathrm{c}\psi \Delta\theta \\ \mathrm{s}\psi \Delta\theta - \mathrm{c}\psi \Delta\phi \\ 1 \end{bmatrix} 4k(\omega_0 + \Delta\omega_F)^2 \tag{9}$$

- Après simplification des termes en $\mathcal{O}(\Delta^2)$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{1}{m} (\mathrm{s}\psi \Delta\phi + \mathrm{c}\psi \Delta\theta)\, 4k\omega_0^2 = -g\, (\mathrm{s}\psi \Delta\phi + \mathrm{c}\psi \Delta\theta) \\ \ddot{y} = -\frac{1}{m} (\mathrm{s}\psi \Delta\theta - \mathrm{c}\psi \Delta\phi)\, 4k\omega_0^2 = -g\, (\mathrm{s}\psi \Delta\theta - \mathrm{c}\psi \Delta\phi) \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} \left(mg - 4k(\omega_0^2 + 2\omega_0 \Delta\omega_F)\right) = -\frac{8k\omega_0}{m} \Delta\omega_F \end{cases} \tag{10}$$

# Asservissement en position

- Schéma de commande proposé [1]




- Dans le schéma précédent
  - $x^d$, $y^d$, $z^d$, et $\psi^d$ sont les consignes de position et d'angle de lacet
  - $x^t(t)$, $y^t(t)$, $z^t(t)$, et $\psi^t(t)$ sont les trajectoire que doit suivre le quadricoptère.

1. Schéma partiellement inspiré de Manish Kumar, *Quadcopter dynamic modeling and control*, transparents présentés à l'IMA, 2017.

# Asservissement en position

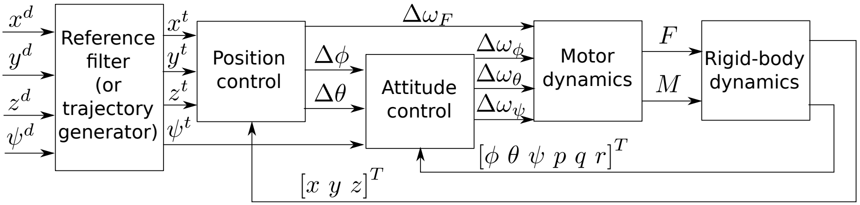
- Le bloc *position control* calcule d'abord $\Delta\ddot{x}$, $\Delta\ddot{y}$, $\Delta\ddot{z}$ :

$$\begin{cases} \Delta\ddot{x} = \ddot{x}^t + H_{pid}^{\ddot{x}}(x^t - x) \\ \Delta\ddot{y} = \ddot{y}^t + H_{pid}^{\ddot{y}}(y^t - y) \\ \Delta\ddot{z} = \ddot{z}^t + H_{pid}^{\ddot{z}}(z^t - z) \end{cases} \tag{11}$$

- Ensuite, en utilisant (10)

$$\begin{cases} \Delta\phi = -\frac{1}{g}\left(\mathrm{s}\psi\Delta\ddot{x} - \mathrm{c}\psi\Delta\ddot{y}\right) \\ \Delta\theta = -\frac{1}{g}\left(\mathrm{c}\psi\Delta\ddot{x} + \mathrm{s}\psi\Delta\ddot{y}\right) \\ \Delta\omega_F = -\frac{m}{8k\omega_0}\Delta\ddot{z} \end{cases} \tag{12}$$

# Asservissement en attitude




- Le bloc *attitude control* calcule $\Delta\omega_\phi$, $\Delta\omega_\theta$, $\Delta\omega_\psi$ avec

$$\begin{cases} \Delta\omega_\phi = H^{\phi}_{pid}(\Delta\phi - \phi) \\ \Delta\omega_\theta = H^{\theta}_{pid}(\Delta\theta - \theta) \end{cases} \tag{13}$$

et

$$\Delta\omega_\psi = H^{\psi}_{pid}(\psi^t - \psi) \tag{14}$$

# Comportement dynamique des moteurs

- Découplage des entrées de commande

$$\begin{bmatrix} \Delta\omega_F \\ \Delta\omega_\phi \\ \Delta\omega_\theta \\ \Delta\omega_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -2kl\omega_0 & 0 & 2kl\omega_0 \\ 2kl\omega_0 & 0 & -2kl\omega_0 & 0 \\ -2d\omega_0 & 2d\omega_0 & -2d\omega_0 & 2d\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\omega_1 \\ \Delta\omega_2 \\ \Delta\omega_3 \\ \Delta\omega_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\iff \begin{bmatrix} \Delta\omega_1 \\ \Delta\omega_2 \\ \Delta\omega_3 \\ \Delta\omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4kl\omega_0} & -\frac{1}{8d\omega_0} \\ 1 & -\frac{1}{4kl\omega_0} & 0 & \frac{1}{8d\omega_0} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4kl\omega_0} & -\frac{1}{8d\omega_0} \\ 1 & \frac{1}{4kl\omega_0} & 0 & \frac{1}{8d\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\omega_F \\ \Delta\omega_\phi \\ \Delta\omega_\theta \\ \Delta\omega_\psi \end{bmatrix} \quad (16)$$

- Les forces de poussées sont calculées en utilisant : $k(\omega_0 + \Delta\omega_i)^2$
- Les moments sont calculés en utilisant : $d(\omega_0 + \Delta\omega_i)^2$

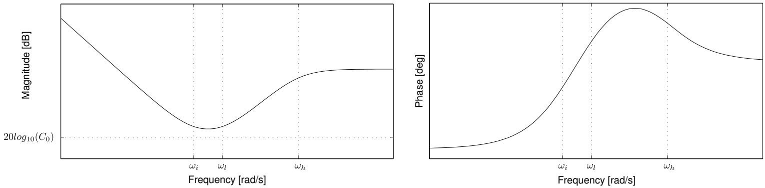
# Synthèse d'une loi de commande PID

- Fonction de transfert d'une loi de commande PID

$$H_{pid}(s) = C_0 C_i(s) C_d(s) \tag{17}$$

avec

$$C_i(s) = \frac{1 + s/\omega_i}{s/\omega_i} \text{ and } C_d(s) = \frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h} \tag{18}$$




- Entrées
  - $G(s)$ - modèle linéaire du procédé
  - $\omega_u$ - pulsation au gain unité de la boucle ouverte (rad/s)
  - $M_\phi$ - phase de marge désirée (rad)

# Synthèse d'une loi de commande PID

- Calculs
  1. $\omega_i = \omega_u/10$
  2. $\rho_u = |C_i(j\omega_u)| \cdot |G(j\omega_u)|$, $\phi_u = arg(C_i(j\omega_u)) + arg(G(j\omega_u))$
  3. $\varphi_m = M_\phi - pi - \phi_u$
  4. $a = \frac{1+sin(\varphi_m)}{1-sin(\varphi_m)}$, $w_l = \frac{w_u}{\sqrt{a}}$, $w_h = w_u\sqrt{a}$
  5. $C_0 = \frac{1}{\sqrt{a}\rho_u}$

- Modèles linéaires monovariables pour la synthèse duPID

$$H_\phi(s) = \frac{1}{I_{xx}s^2} \qquad H_\theta(s) = \frac{1}{I_{yy}s^2} \qquad H_\psi(s) = \frac{1}{I_{zz}s^2}$$

$$H_x(s) = \frac{1}{s^2} \qquad H_y(s) = \frac{1}{s^2} \qquad H_z(s) = \frac{1}{s^2}$$