FILTRAGE ANALOGIQUE

Filtre : circuit électronique qui atténue certaines composantes d'un signal d'entrée au niveau du temps et de la fréquence. Il modifie la phase et l'amplitude de certaines fréquences. L'exemple le plus connu est l'égaliseur (« equalizer ») audio ou graphique

1 - Filtre Hi-fi : système électronique changeant la réponse en fréquence du signal. On utilise dans les enceintes des filtres à plusieurs voies pour répartir les fréquences graves et aigus sur les haut-parleurs dédiés. Un filtre est défini par: la fréquence de coupure utilisé, sa pente (le plus souvent un multiple de 6dB/ octave) et sa réponse en phase. Il est indispensable à toute enceinte possédant plusieurs types de haut-parleur (grave, médium, aigu).

2 - Filtre MPX : sur la FM (modulation de fréquence), filtres pour couper les extrêmes aigus.(sifflantes)

3 - Filtre subsonique : utilisé pour les micros, afin d'éviter les bruits de vent.

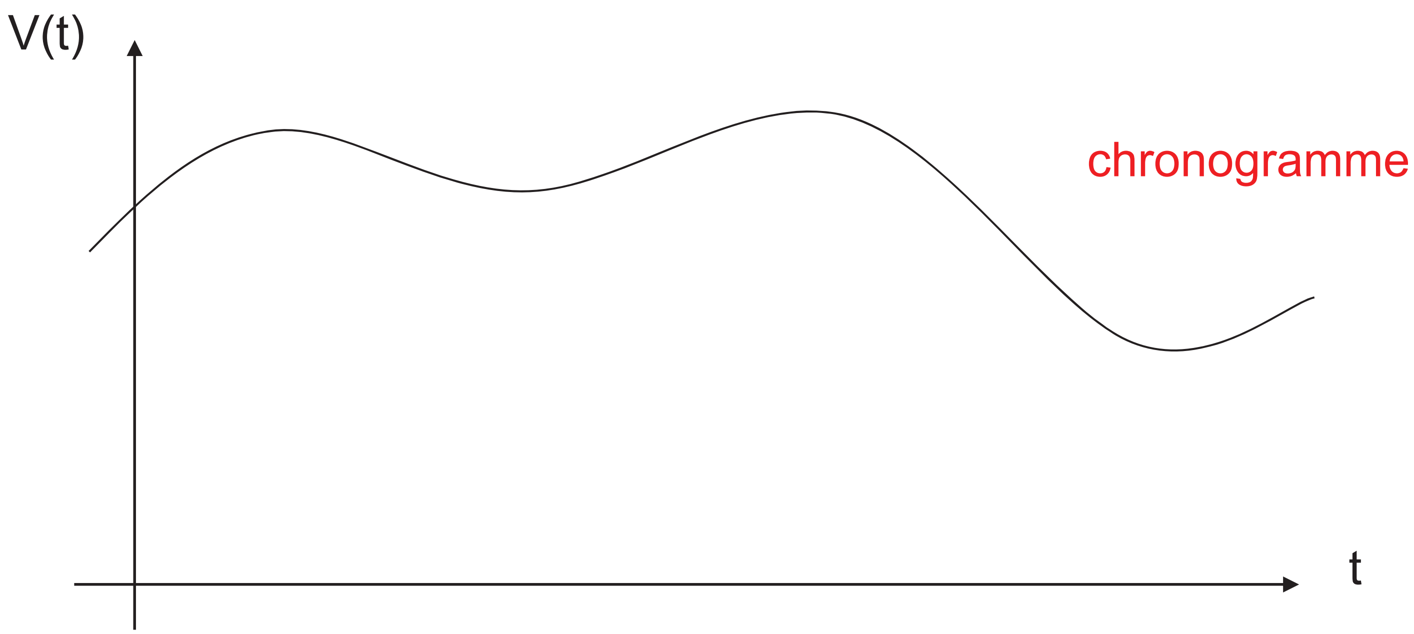
4 - Filtre synthétiseur : circuit permettant de modifier l'amplitude de certaines fréquences sélectionnées dans une forme d'onde ou dans un spectre sonore. Grâce au filtre, une région déterminée du signal sera atténuée ou amplifiée. La pente du filtre est notée en décibel. Le niveau de la pente est un paramètre important concernant sa qualité et son efficacité. La référence étant le filtre passe-bas Moog 24 dB/octave.

Source : PIANO WEB : PORTAIL CULTUREL SUR LA MUSIQUE ET LES CLAVIERS : PIANO, SYNTHE & ORGUE

le KOBOL et son filtre à 24 dB/oct

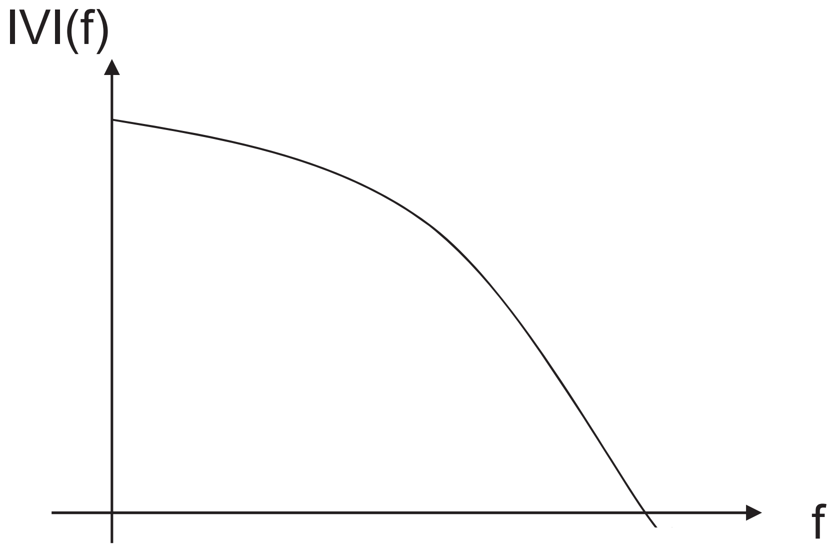
Représentation temporelle

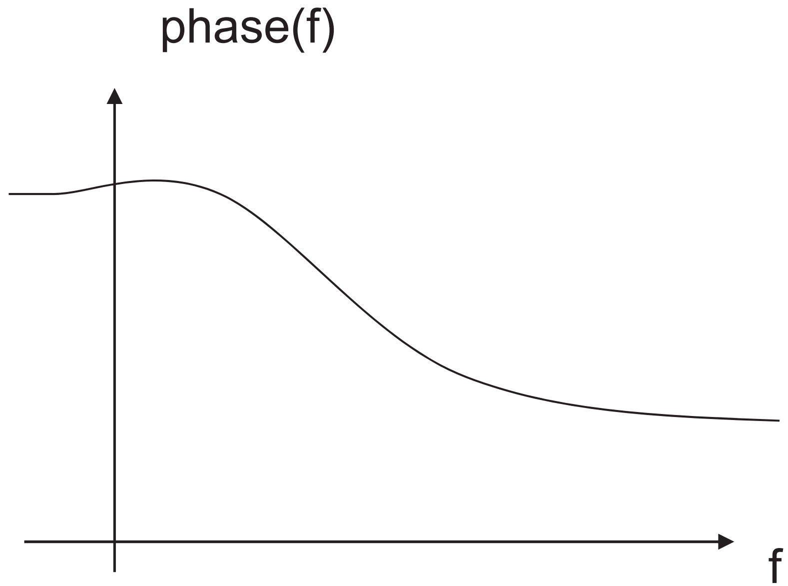
Nous avons l'habitude d'observer et de décrire les signaux électriques dans le domaine temporel, on parle alors de leur valeur instantanée v(t), i(t).



Représentation fréquentielle

- Il existe une autre représentation, la représentation dans le domaine des fréquences : v(f)

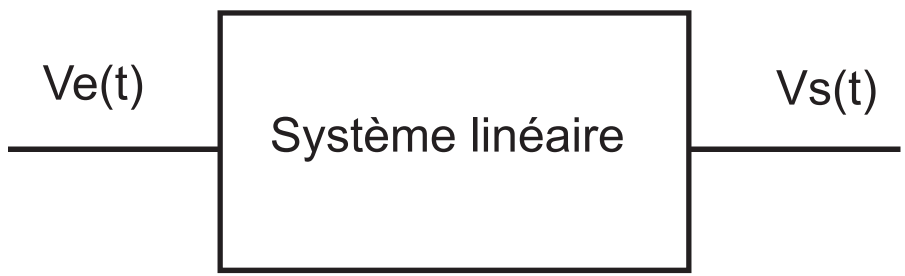




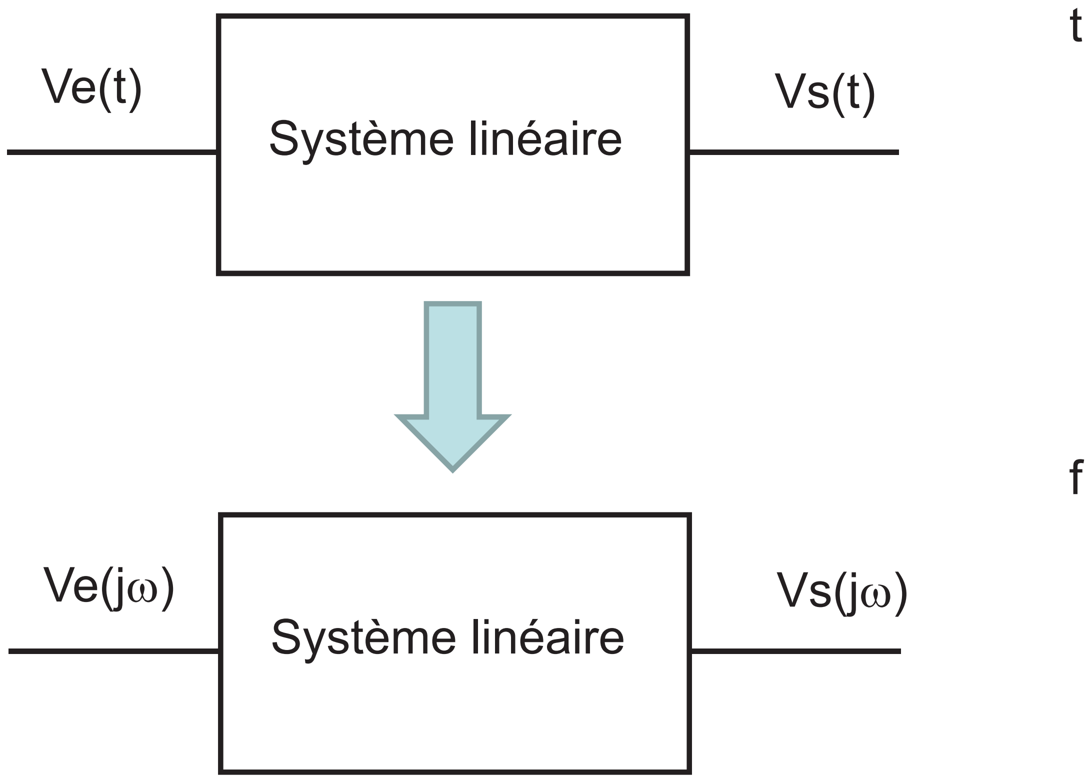
Filtrage

Le filtrage est une opération linéaire qui consiste à sélectionner certaines parties du spectre d'un signal.

Comme tout système linéaire les filtres sont caractérisés par leur fonction de transfert.



Fonction de transfert



$$H(j\omega) = \frac{Vs(j\omega)}{Ve(j\omega)}$$

Fonction de transfert

En Laplace

$$H(p) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j \times p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i \times p^i}, \; avec \; m \leq n$$

$$H(j\omega) \; est \; obtenue \; en \; remplaçant \; p \; par \; j\omega$$

On appelle ordre du filtre n, l’ordre du polynôme du dénominateur

Dans la bande de coupure la pente de l’asymptote est de ± nx20 dB par décade

Filtrage

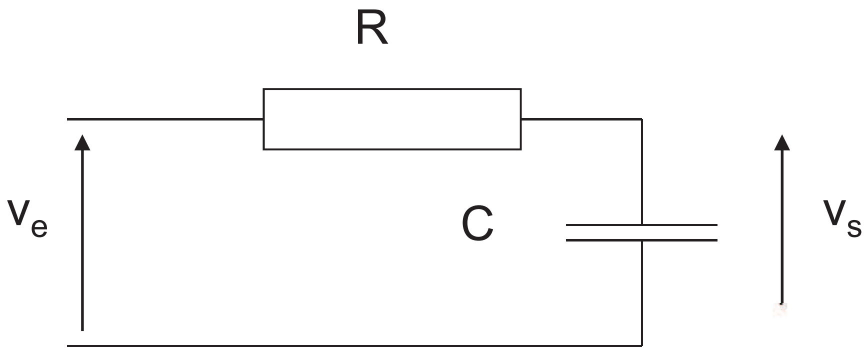
On distingue 4 catégories de filtres :

- •Filtre passe bas
- •Filtre passe haut
- •Filtre passe bande
- •Filtre réjecteur

On montre que l'on peut, par des transformations mathématiques, passer d'un type de filtre aux autres. Aussi la plupart du temps on ne présente que les filtres passe-bas.

Passe bas du premier ordre

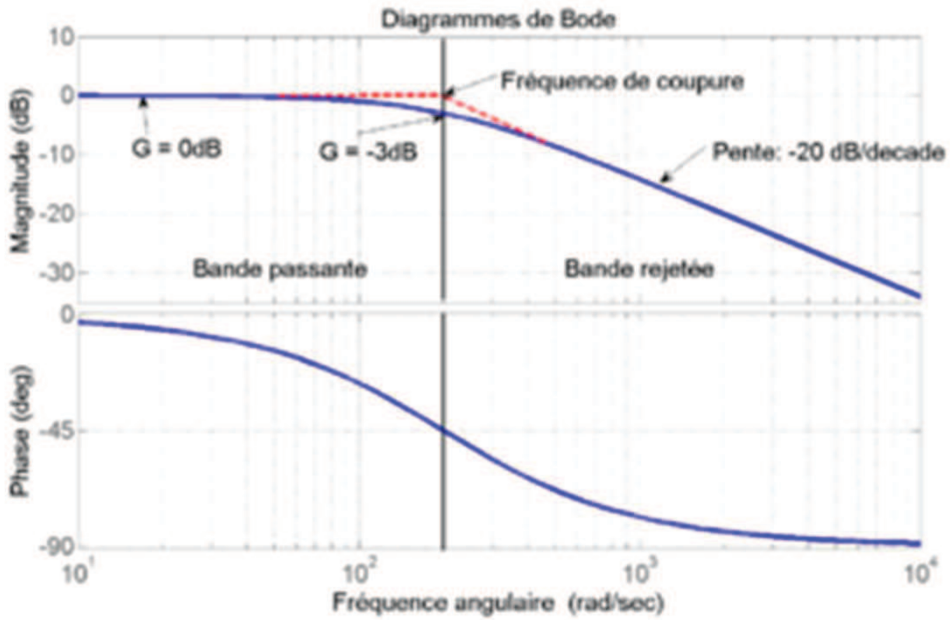
$$RC\frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$$



$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

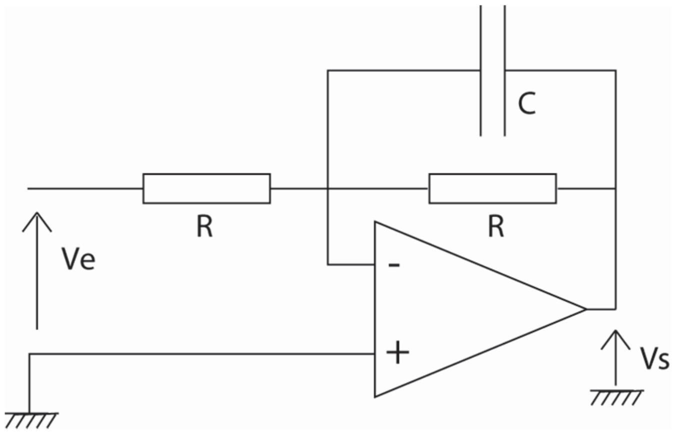
$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = RC$$



Filtres actifs

Le filtre précédent est un filtre passif (composé d'éléments passifs). Son principal inconvénient est que sa fonction de transfert dépend de la charge branchée à sa sortie. C'est pourquoi on lui préférera en général un filtre actif.

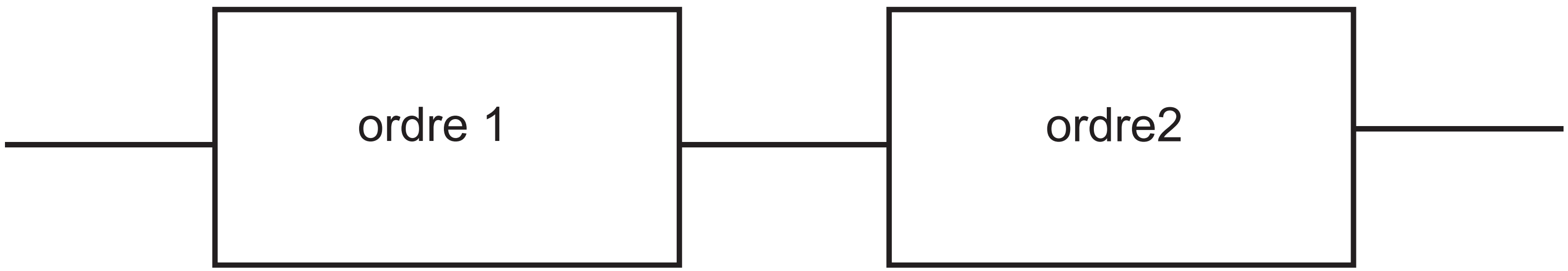
Un filtre actif contient systématiquement au moins un élément actif (amplificateur opérationnel). Le schéma ci-dessous est un filtre actif du premier ordre



$$H(p) = \frac{-1}{1 + RCp}$$

Filtres actifs ordre élevé

On montre que l'on peut décomposer tout filtre d'ordre supérieur à 2 en filtres élémentaires d'ordre 1 et 2. Par exemple un ordre 3 se construit en associant un ordre 1 à un ordre 2



C'est pourquoi dans ce cours on ne parlera que de ces deux ordres

Filtre passe bas d'ordre 2

$$\boxed{H(p) = \frac{A_0}{1 + \frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

A_0 : gain dans la bande passante

ω_0 = 2p f_0 : pulsation caractéristique

Q : coefficient de surtension

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{A_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{A_0}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1}}$$

Écriture réduite en posant s = p/ω_0

Filtre passe bas d'ordre 2

Pour $A_0 = 1$

$$\omega = \omega_0$$
$$|\mathrm{H}(j\omega_0)| = Q$$
$$\boxed{H_{dB} = 20\log(Q)}$$

$$\omega \ll \omega_0$$
$$|\mathrm{H}(j\omega_0)| = 1$$
$$\boxed{H_{dB} = 0}$$

$$\omega \gg \omega_0$$
$$|\mathrm{H}(j\omega_0)| = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$
$$\boxed{H_{dB} = -40\log(\omega) + 40\log(\omega_0)}$$

Filtre passe bas d'ordre 2

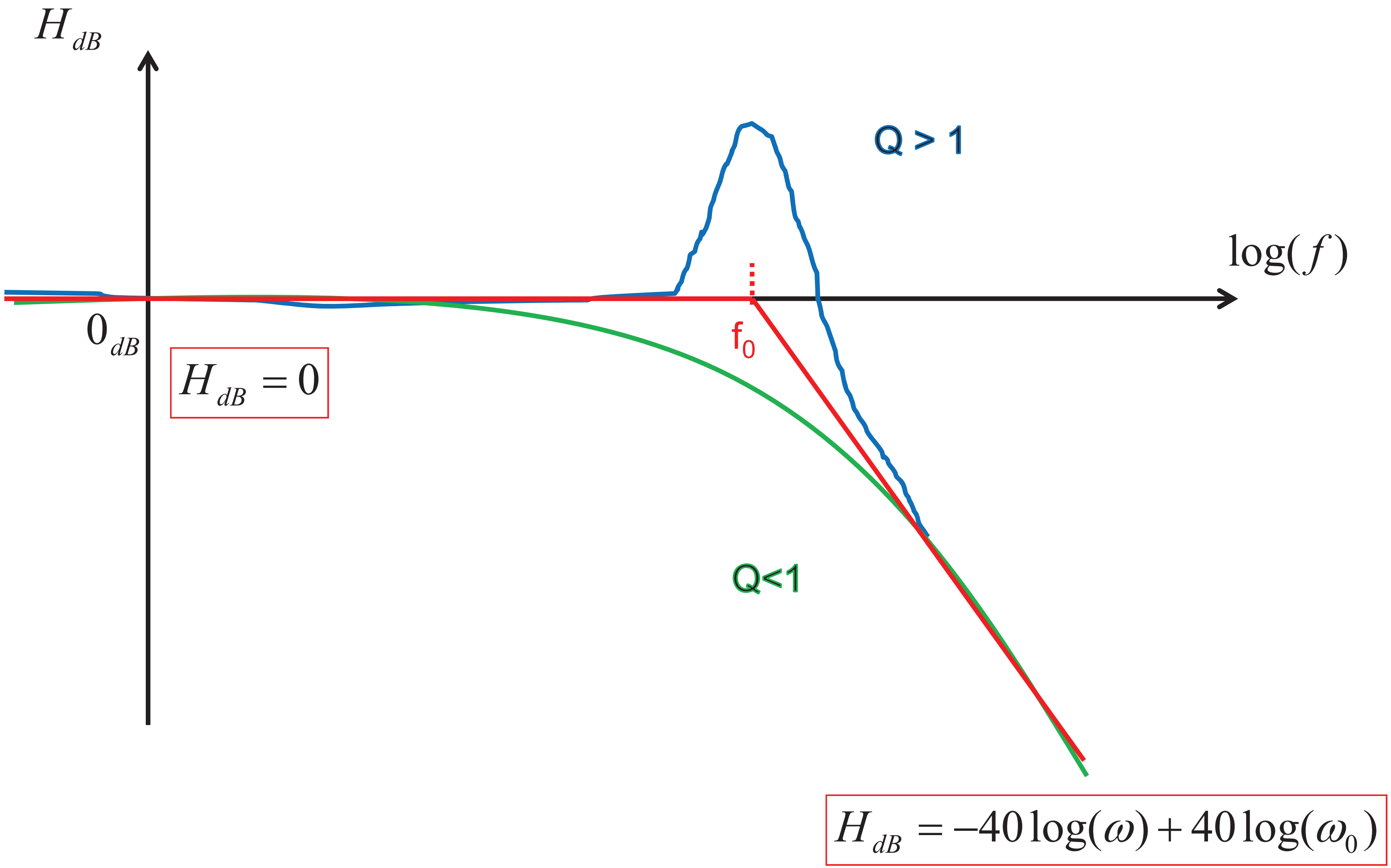
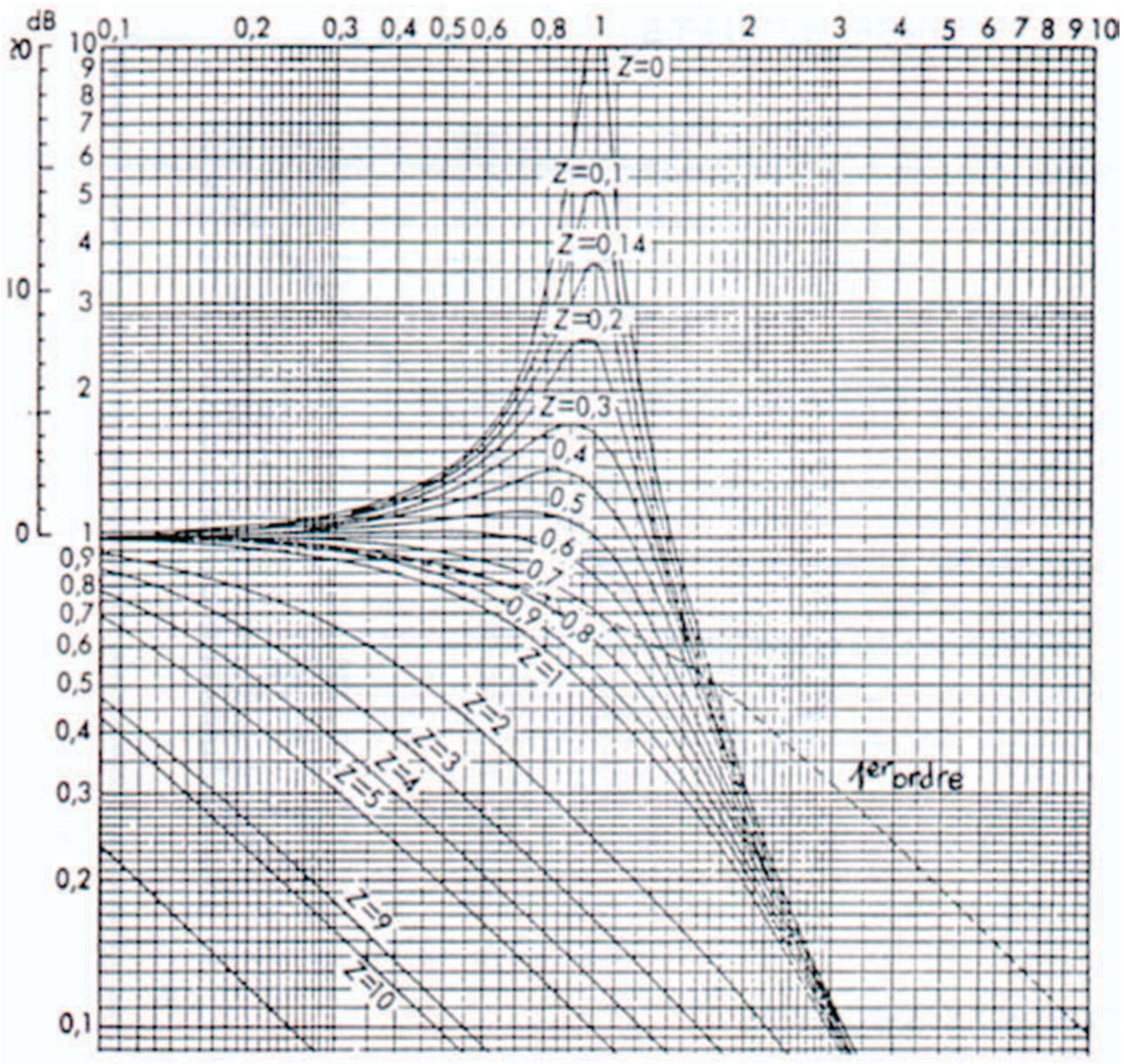


Diagramme de Bode (module)

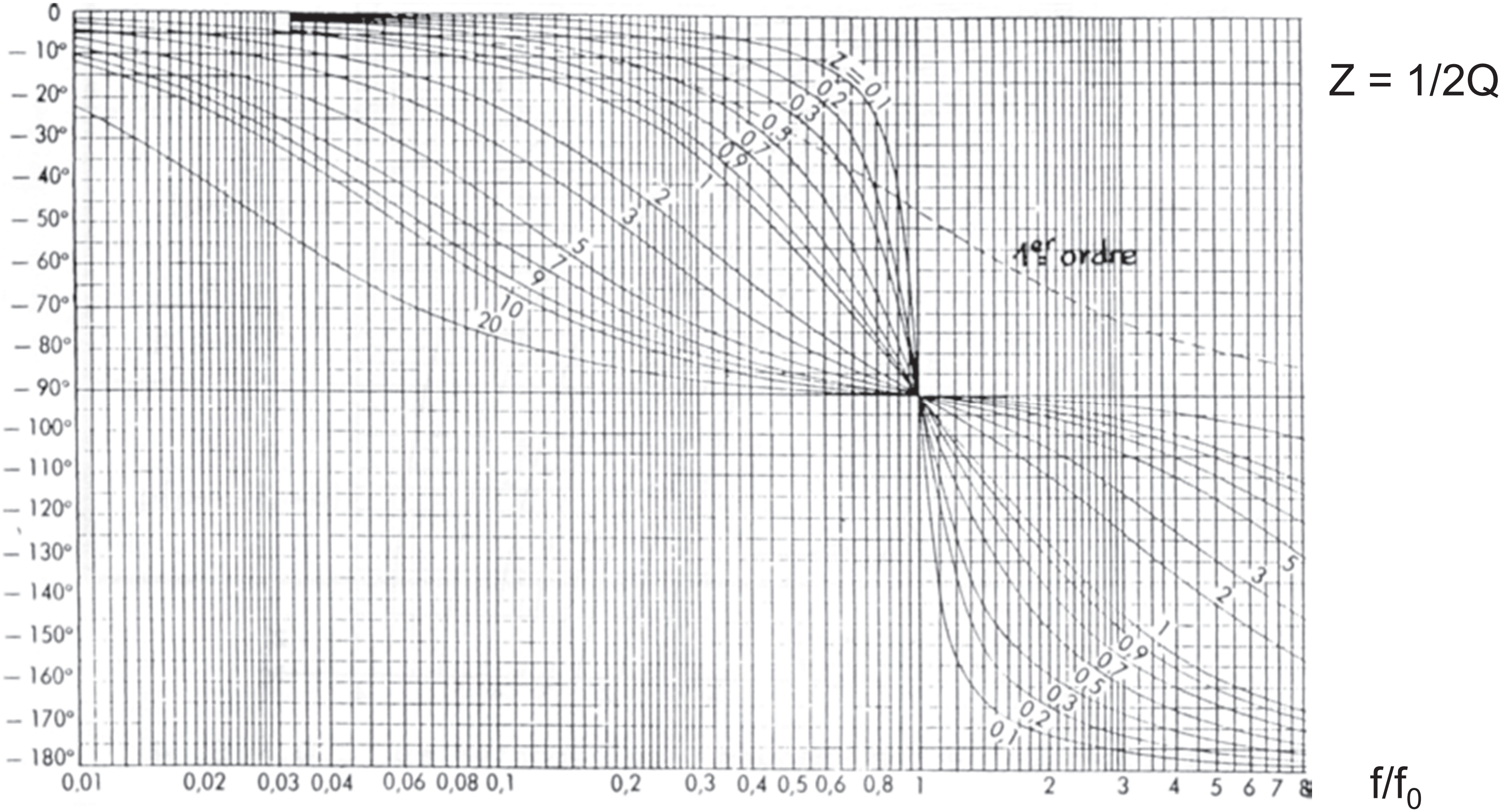


f/f$_0$

Z = 1/2Q

A_0 =1

Diagramme de Bode (phase)



Le retard de phase est lié au déphasage par la relation (5)

$$t_{\varphi}=-\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \tag{5}$$

Le signal d'entrée n'étant pas forcément une sinusoïde pure, il est intéressant de connaître le temps mis par l'énergie du signal pour atteindre la sortie. Cette durée, appelée retard de groupe, obéit à l'équation différentielle (6).

$$t_{g}=-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \tag{6}$$

On veillera à ne pas la confondre avec le retard de phase t_{φ} . La Figure 5 illustre la différence entre les retards de phase et de groupe.

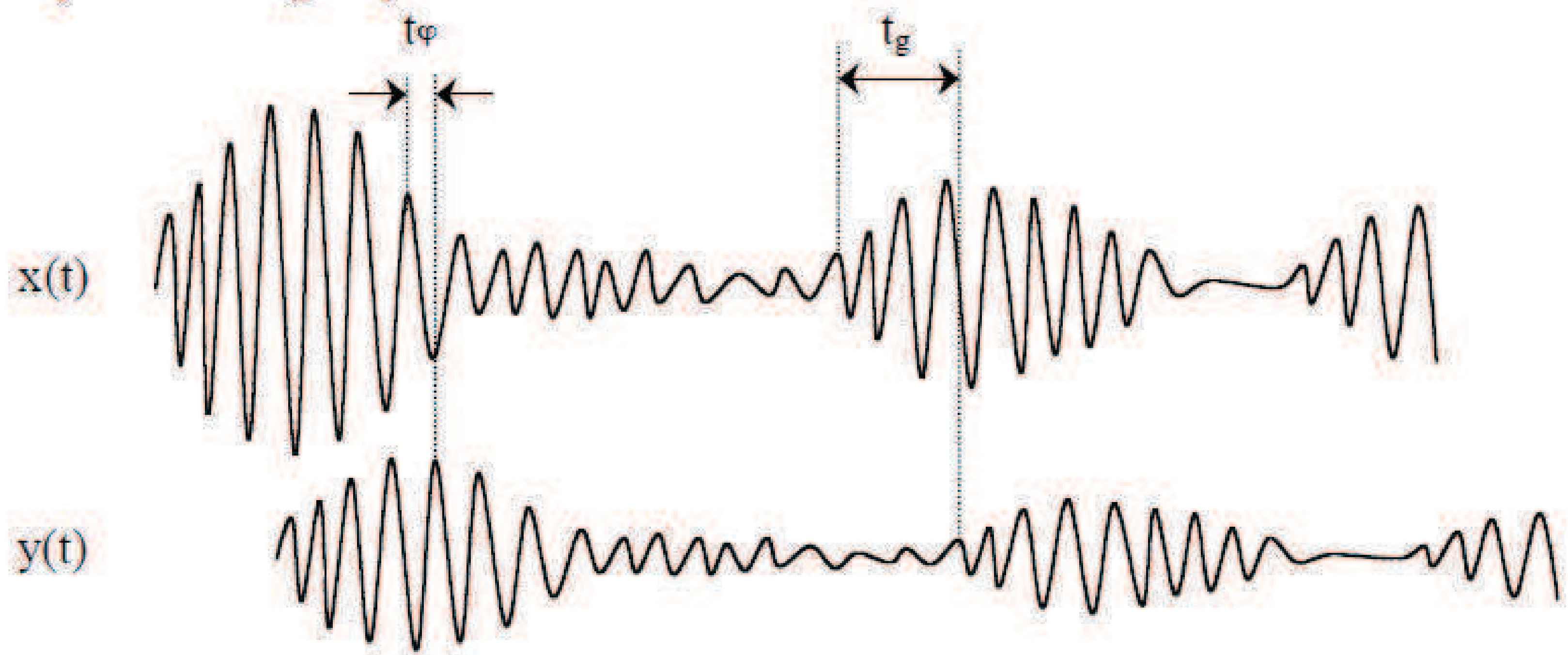


Figure 5. Définition graphique des retards de phase et de groupe

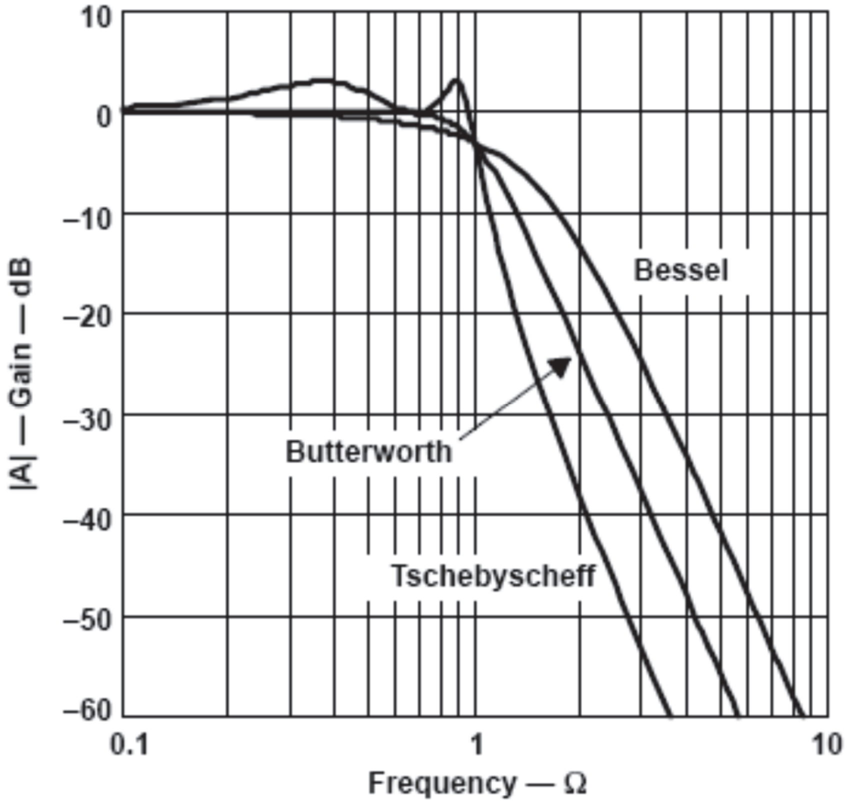
Familles de filtre

Ces familles correspondent à des écritures particulières de la fonction de transfert.
Les principales familles sont les suivantes :

- •Fonctions de Bessel
- •Fonctions de Butterworth
- •Fonctions de Chebychev

Chaque famille a ses avantages

Courbes de réponses comparées
Pour un passe bas d'ordre 4



Bessel

$$\boxed{\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{F_n(j\frac{\omega}{\omega_0})}}$$

Les fonctions Fn sont des polynômes de Bessel définis par récurrence

$$F_0(j\frac{\omega}{\omega_0}) = 1, F_1(j\frac{\omega}{\omega_0}) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}, \ldots\ldots\ldots$$

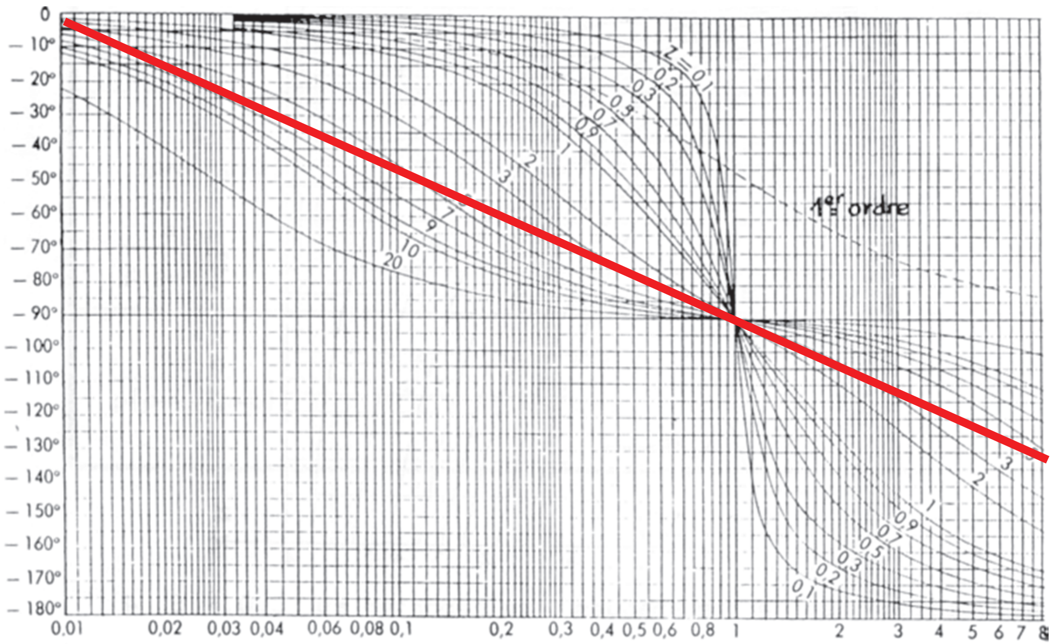
$$F_n(j\frac{\omega}{\omega_0}) = (2n-1) \times F_{n-1}(j\frac{\omega}{\omega_0}) - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \times F_{n-2}(j\frac{\omega}{\omega_0})$$

Bessel

Ces filtres sont ceux qui optimisent la régularité du retard de groupe.
Pour cette raison ils sont aussi appelés filtres à phase linéaire

$$\boxed{\varphi \approx -\tau_g \omega}$$

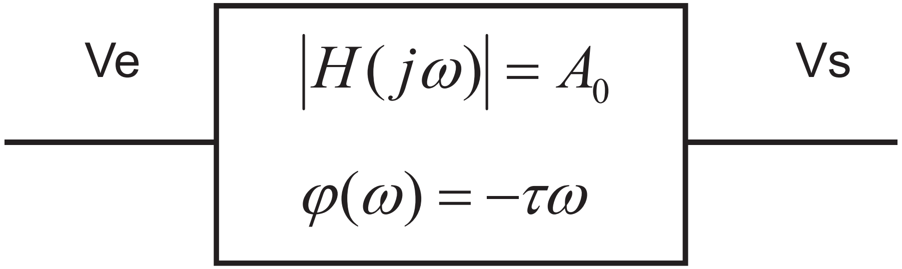
$$\tau_g = \left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$$



Si les composantes du signal sont toutes dans la bande passante du filtre, on le retrouvera simplement retardé à la sortie du filtre.

Bessel

Exemple : $v_e(t) = A1\cos(\omega_1 t)+A2\cos(\omega_2 t)+A3\cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_0 >> \omega_{1,2,3}$



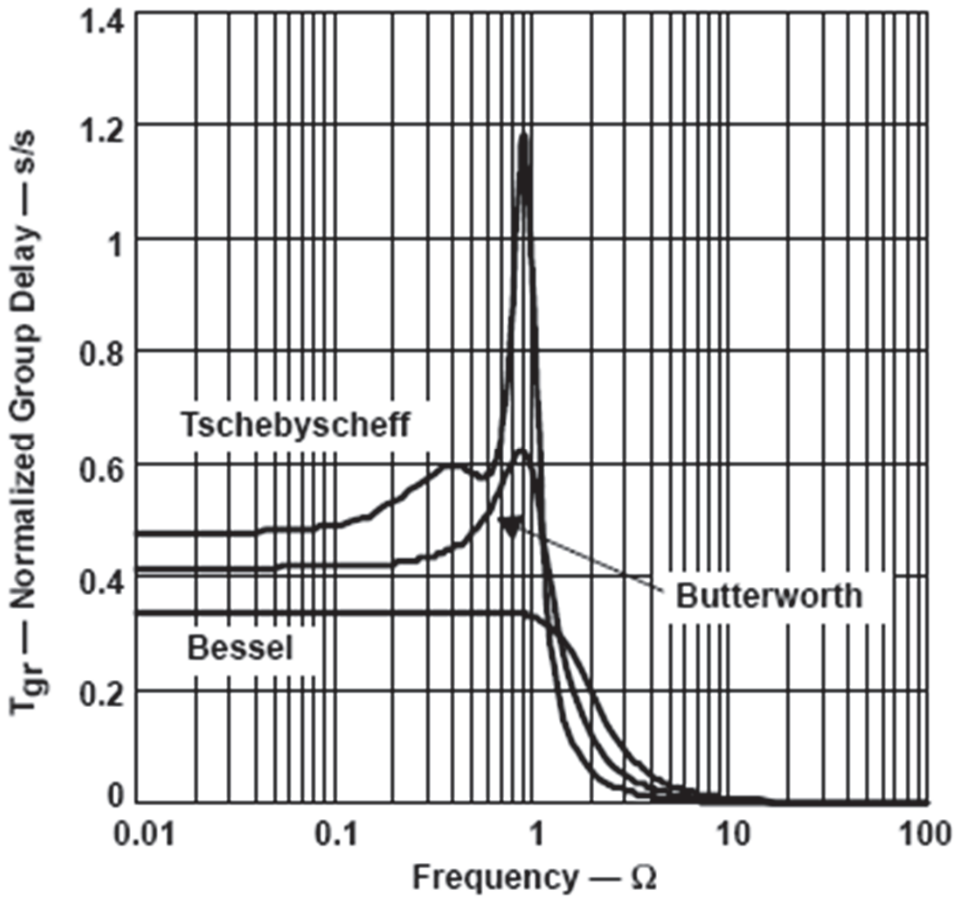
$v_s(t) = A_0\,[A1\cos(\omega_1 t+\phi_1))+A2\cos(\omega_2 t+\phi_2)+A3\cos(\omega_3 t+\phi_3)]$

$v_s(t) = A_0\,[A1\cos(\omega_1 t-\tau\omega_1))+A2\cos(\omega_2 t-\tau\omega_2)+A3\cos(\omega_3 t-\tau\omega_3)]$

$v_s(t) = A_0\,[A1\cos(\omega_1\,(t-\tau)\,)+A2\cos(\omega_2\,(t-\tau)\,)+A3\cos(\omega_3\,(t-\tau)\,)]$

$v_s(t) = A_0\,v_e(t-\tau)$

Bessel



Retard de groupe pour les différentes familles de filtres

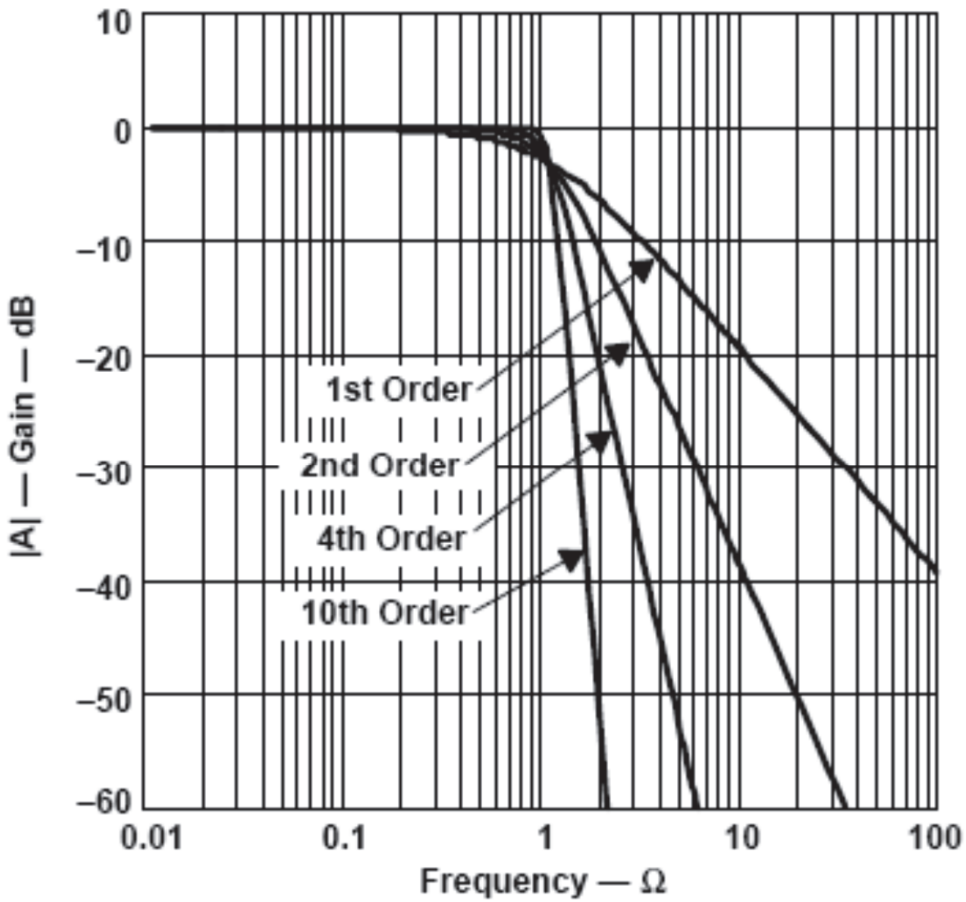
Butterworth

Les filtres de Butterworth présentent le gain le plus constant dans la bande passante.
Le module est toujours décrit par la fonction ci-dessous :

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}\right)}}$$

Où n est l'ordre du filtre. Il en découle que la fréquence caractéristique f_0 est aussi dans ce cas la fréquence de coupure à -3dB

Butterworth



Chebychev

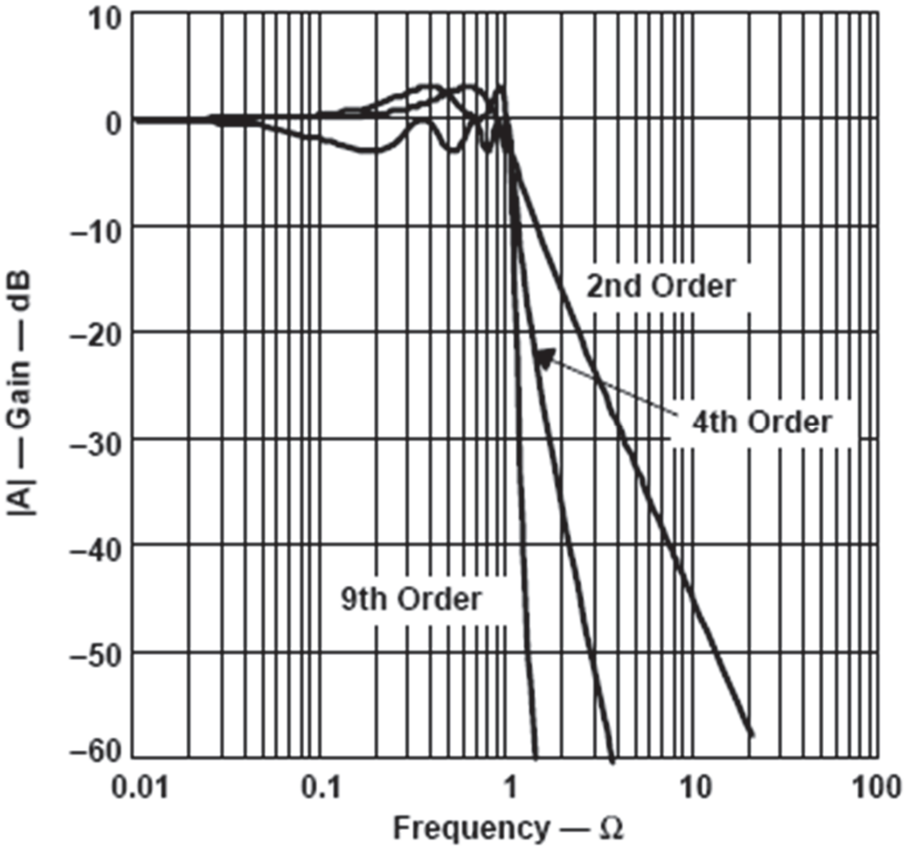
$$\boxed{\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon^2 \times C_n^2(\frac{\omega}{\omega_0}))}}}$$

$$où : C_0(\frac{\omega}{\omega_0}) = 1, C_1(\frac{\omega}{\omega_0}) = \frac{\omega}{\omega_0}, \ldots\ldots\ldots C_n(\frac{\omega}{\omega_0}) = 2 \times C_{n-1}(\frac{\omega}{\omega_0}) - C_{n-2}(\frac{\omega}{\omega_0})$$

sont les polynômes de Chebychev

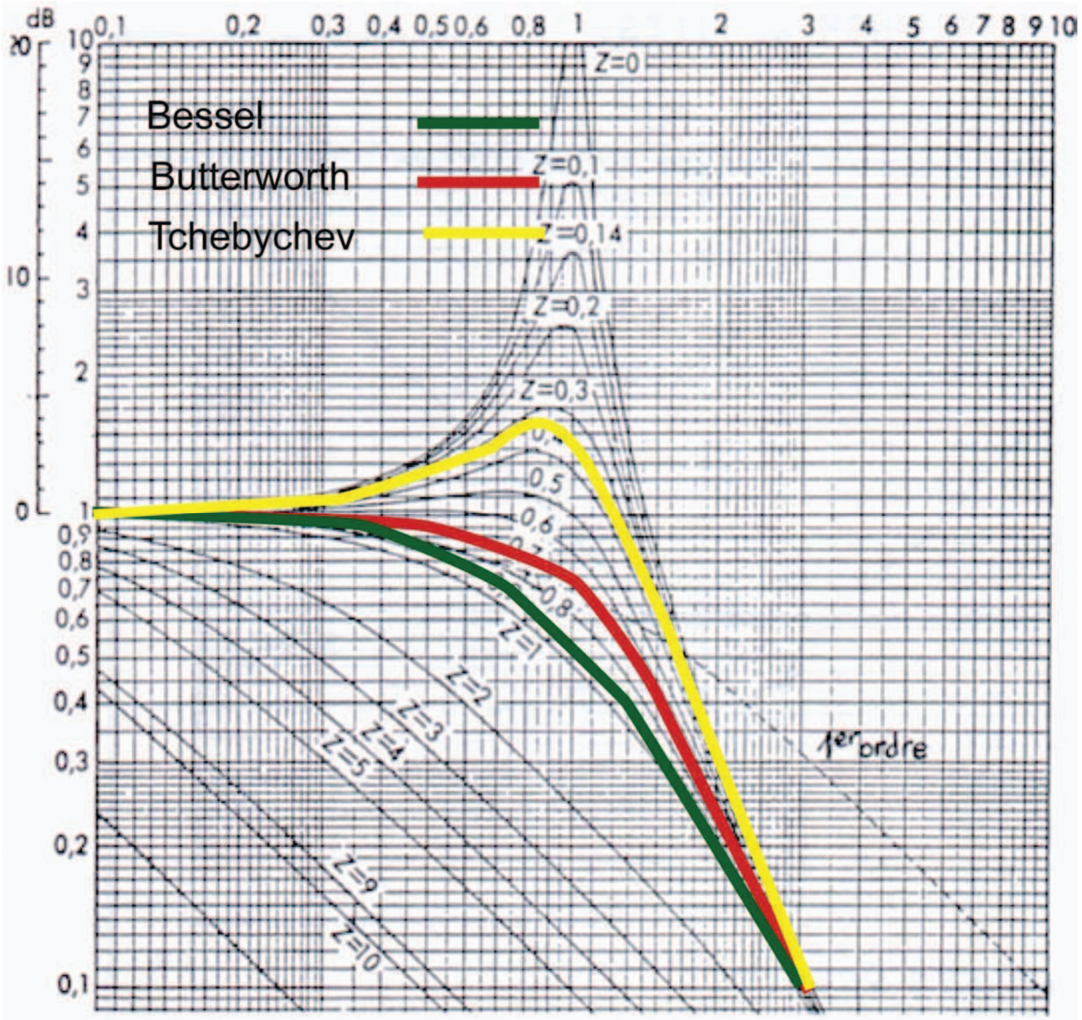
Chebychev

Contrairement à la famille Butterworth, les filtres de la famille Chebychev présentent de l'ondulation dans la bande passante. Ceci permet d'obtenir un passage plus rapide entre la bande passante et la bande d'arrêt.

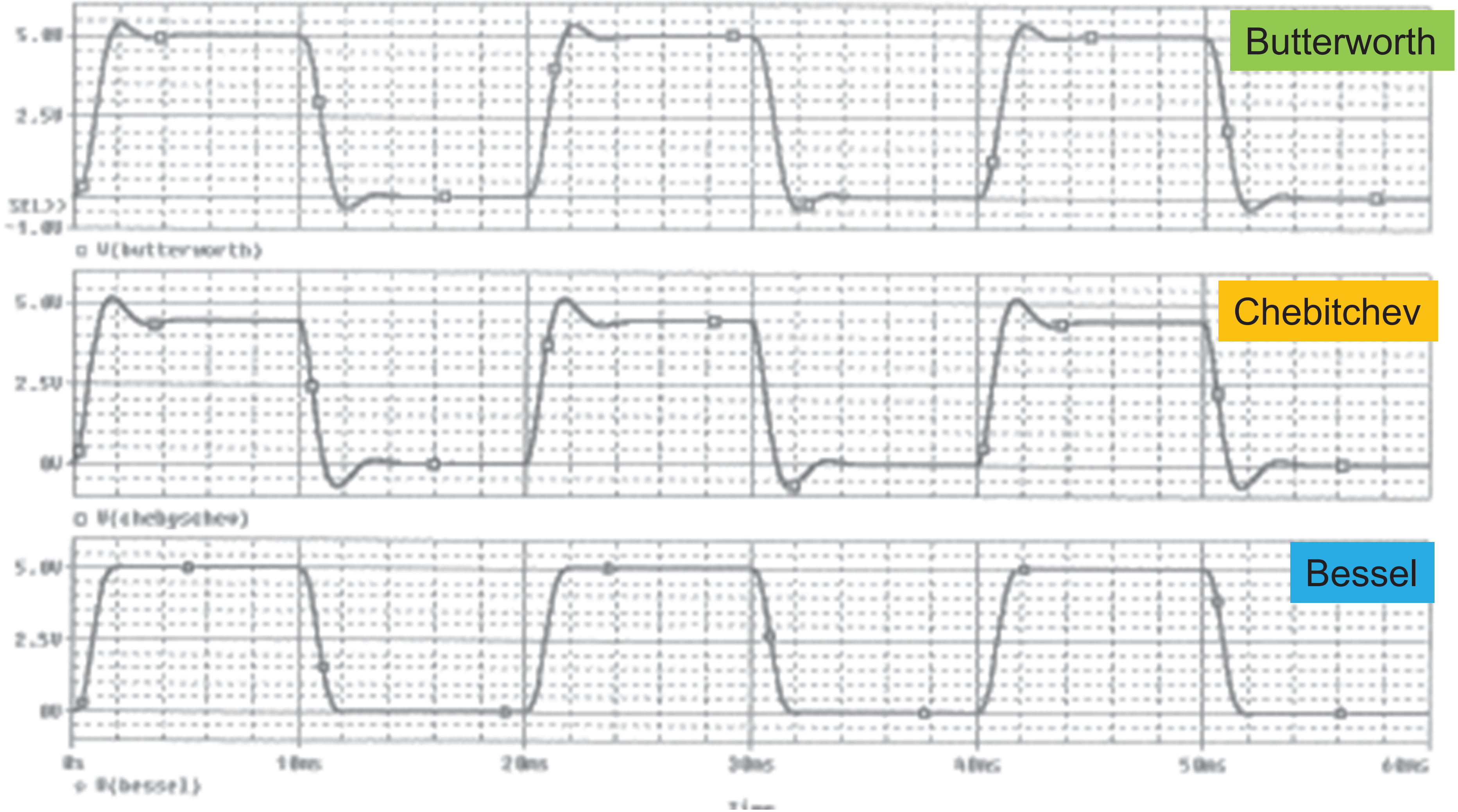


Application au passe bas d'ordre 2

a) Q=1.128 Chebyschev (ripple band = 2dB)
b) Q=0.707 Butterworth
c) Q=0.577 Bessel

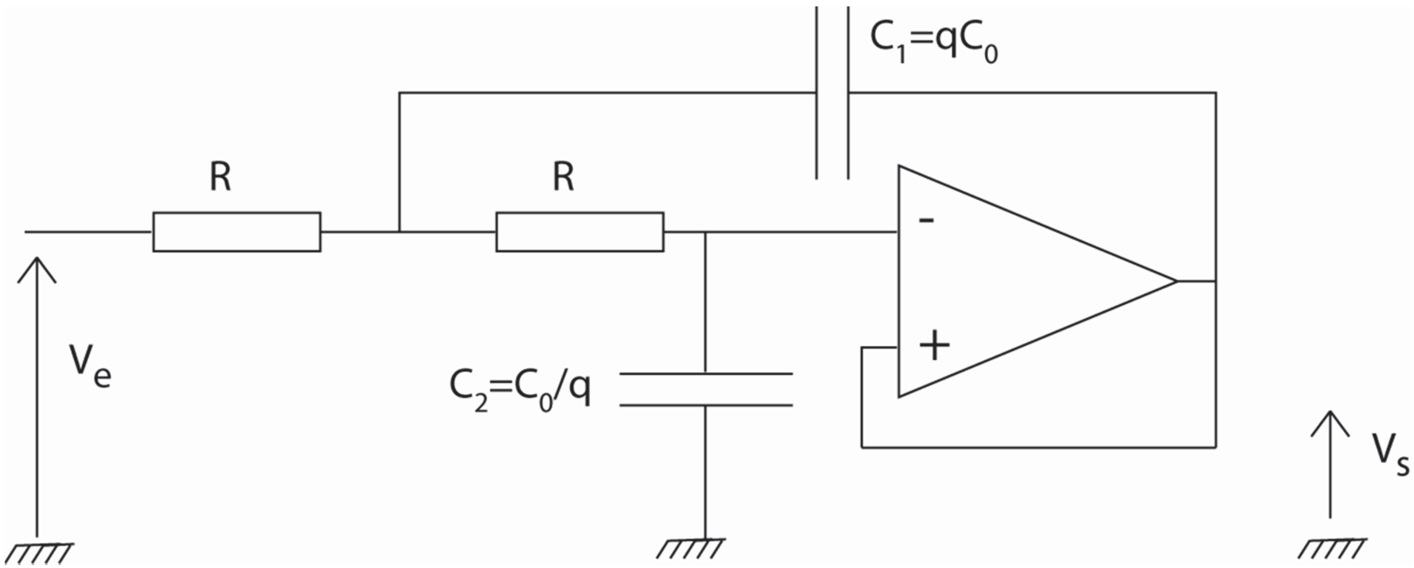


Réponse à un signal TTL



Exemple de réalisation

Il y a plusieurs circuits permettant de réaliser un filtre donné. Une des solutions est l'utilisation de cellules de Sallen-Key. Ici pour un passe-bas du 2ème ordre



$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{RC_0} \\ Q = \dfrac{q}{2} \end{cases}$$

Exemple de réalisation

Si on veut réaliser un filtre passe-bas du 2ème ordre de la famille Bessel, on utilise le tableau ci-contre

$f_n = 1{,}2742$ $Q = 0{,}57735$

avec $f_{0cellule} = f_n * f_{0filtre}$

En supposant que l'on veuille f_0= 1kHz alors la fréquence caractéristique $f_{0cellule}$ de la cellule d'ordre 2 sera : 1,274kHz (=1,2742*1kHz)

Q est le coefficient de surtension de la cellule considérée

NUMBER OF POLES	BUTTERWORTH		BESSEL		CHEBYSCHEV 0.5dB RIPPLE		CHEBYSCHEV 2dB RIPPLE	
	fn(1)	Q	fn(1)	Q	fn(2)	Q	fn(2)	Q
2	1.0	0.70711	1.2742	0.57735	1.23134	0.86372	0.907227	1.1286
3	1.0	----	1.32475	----	0.626456	----	0.368911	----
	1.0	1.0	1.44993	0.69104	1.068853	1.7062	0.941326	2.5516
4	1.0	0.54118	1.43241	0.52193	0.597002	0.70511	0.470711	0.9294
	1.0	1.3065	1.60594	0.80554	1.031270	2.9406	0.963678	4.59388
5	1.0	----	1.50470	----	0.362320	----	0.218308	----
	1.0	0.61805	1.55876	0.56354	0.690483	1.1778	0.627017	1.77509
	1.0	1.61812	1.75812	0.91652	1.017735	4.5450	0.97579	7.23228
6	1.0	0.51763	1.60653	0.51032	0.396229	0.68364	0.31611	0.9016
	1.0	0.70711	1.69186	0.61120	0.768121	1.8104	0.730027	2.84426
	1.0	1.93349	1.90782	1.0233	1.011446	6.5128	0.982828	10.4616
7	1.0	----	1.68713	----	0.256170	----	0.155410	----
	1.0	0.55497	1.71911	0.53235	0.503863	1.0916	0.460853	1.64642
	1.0	0.80192	1.82539	0.66083	0.822729	2.5755	0.797114	4.11507
	1.0	2.2472	2.05279	1.1263	1.008022	8.8418	0.987226	14.2802
8	1.0	0.50980	1.78143	0.50599	0.296736	0.67657	0.237699	0.89236
	1.0	0.60134	1.83514	0.55961	0.598874	1.6107	0.571925	2.5327
	1.0	0.89998	1.95645	0.71085	0.861007	3.4657	0.842486	5.58354
	1.0	2.5629	2.19237	1.2257	1.005984	11.5305	0.990142	18.6873

$f_{0cellule}$ est la fréquence caractéristique de la cellule considérée (c'est la fréquence de coupure à -3dB pour une cellule d'ordre 1ou la fréquence propre pour une cellule d'ordre 2)

$f_{0filtre}$ est la fréquence caractéristique du filtre complet (f_{-3dB} pour les filtres de Butterworth et Bessel ; f_{-0dB} pour les filtres de Chebychev)

Exemple de réalisation

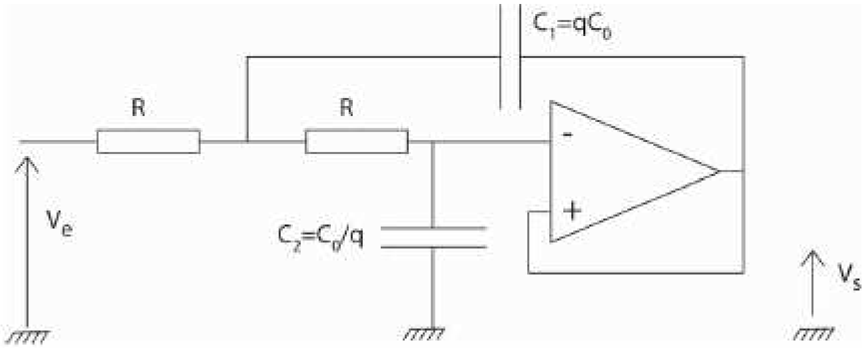
Si on veut réaliser un filtre passe-bas du 2ème ordre de la famille Bessel, alors Q = 0,57735 et f_n = 1,2742

Si on se fixe une fréquence caractéristique $f_{0filtre}$ = 1kHz, alors :

$Q = 0{,}57735 \longrightarrow q = 1{,}1547$

$f_{0filtre} = 1kHz \longrightarrow f_{0cellule} = 1{,}274kHz$

$R = 1k\Omega \longrightarrow C_0 = 124{,}9nF \longrightarrow C_1 = 144{,}2nF$, $C_2 = 108{,}2nF$



Autres types

Comment passer du passe bas au passe-haut ?

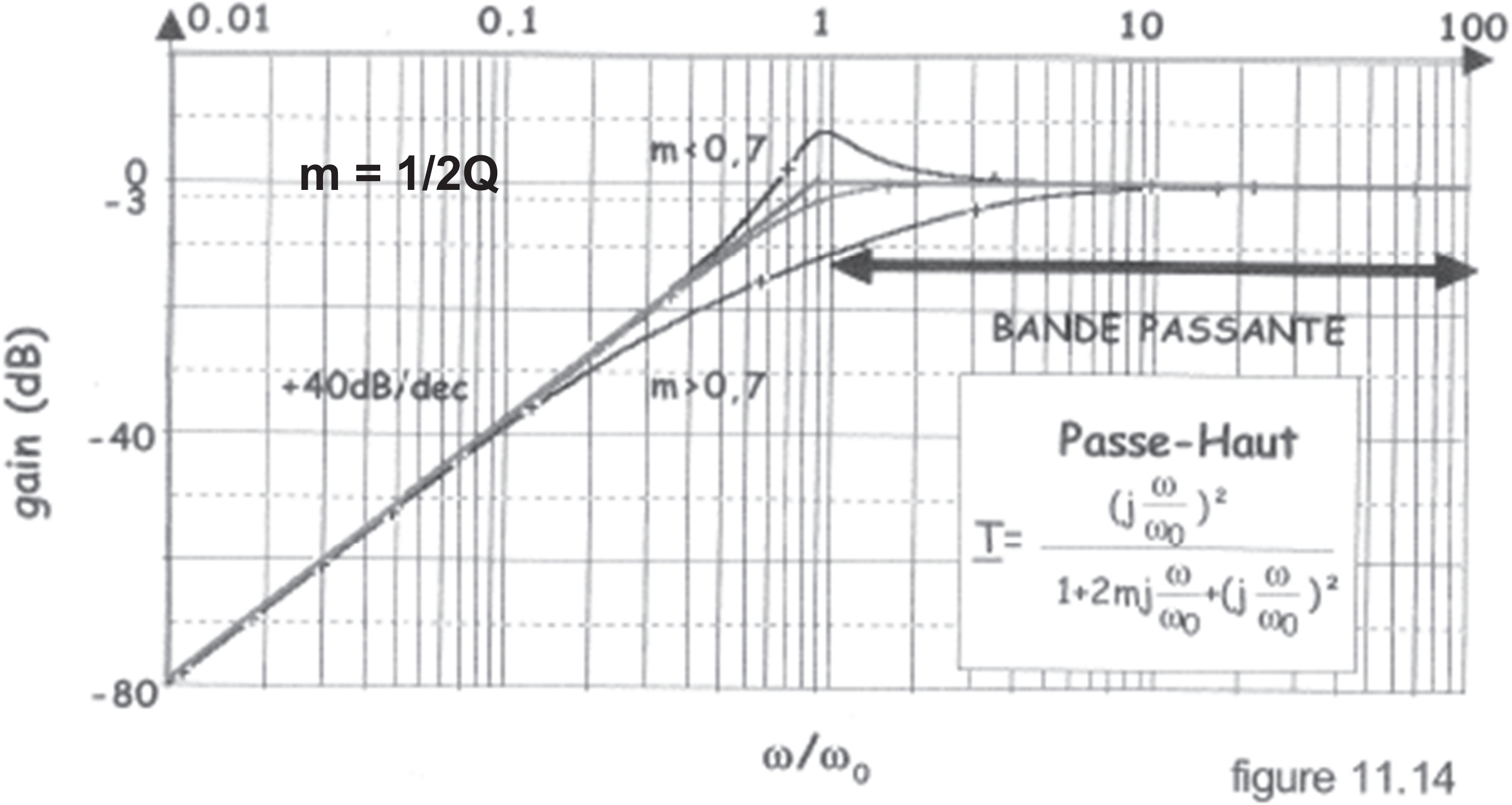
Écriture réduite en posant s = p/ω_0

En effectuant le changement de variable s→(1/s)

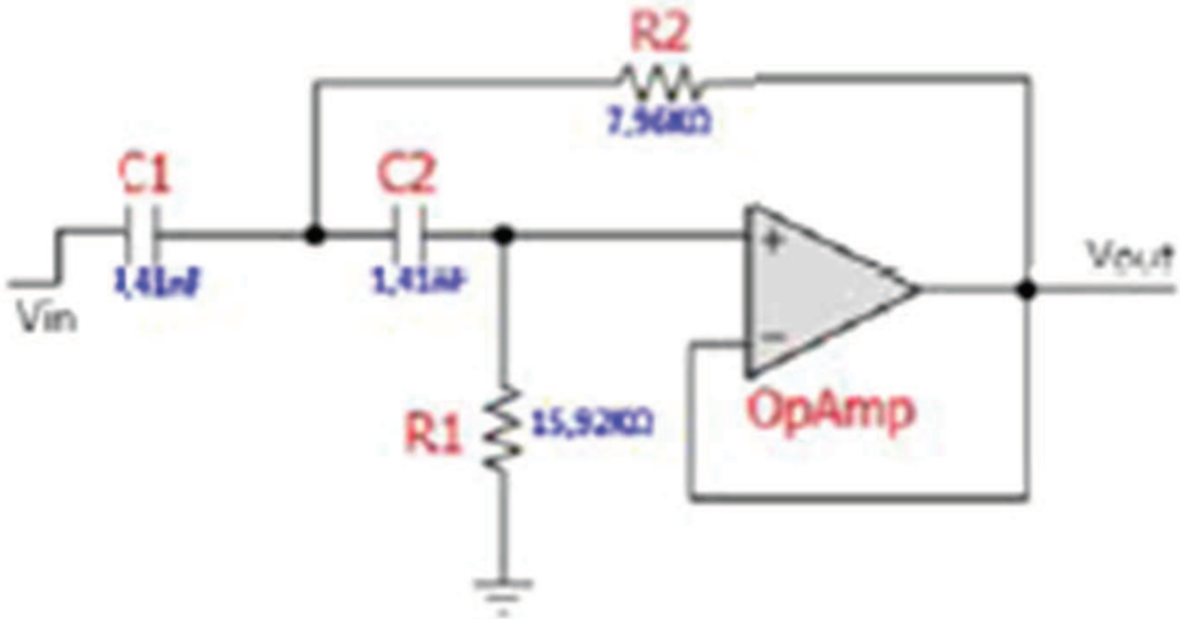
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1} \rightarrow H(s) = \frac{1}{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{Q}\frac{1}{s} + 1} = \frac{s^2}{1 + \frac{1}{Q}s + s^2}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Passe-haut 2ème ordre



Cellule Sallen-Key



Autres types

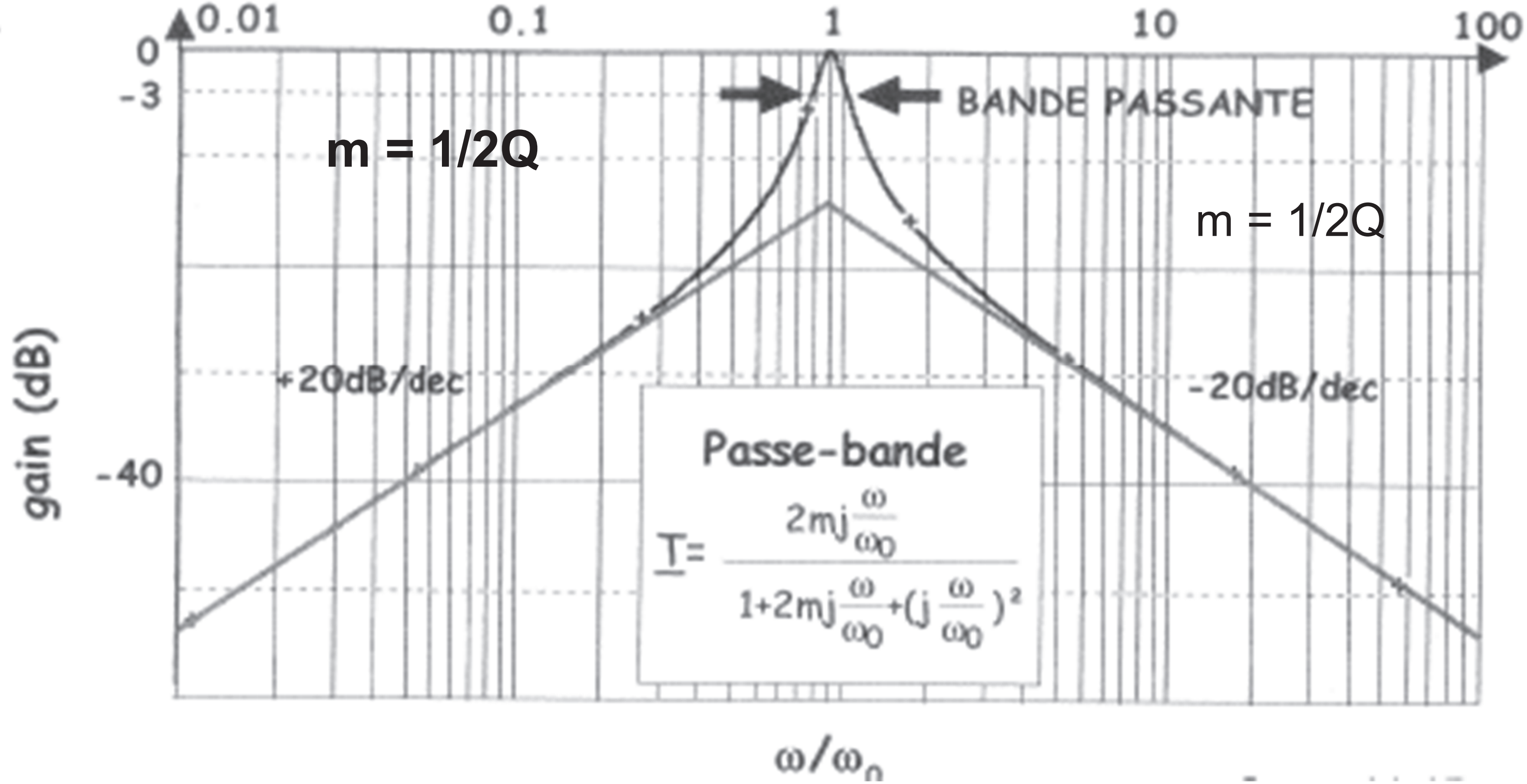
Comment passer du passe bas au passe-bande ?

Écriture réduite en posant $s = p/\omega_0$

En effectuant le changement de variable $s \rightarrow Q(s+(1/s))$

$$\boxed{H(p) = \frac{\dfrac{1}{Q}\dfrac{p}{\omega_0}}{1+\dfrac{1}{Q}\dfrac{p}{\omega_0}+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Passe-bande 2ème ordre



Passe-bande 2ème ordre