Année universitaire 2021/2022
Master Mathématiques et Applications
M1 Semestre 2
Analyse fonctionnelle et Spectrale

Université de Bordeaux
Collège Sciences et Technologies
UF Math. et Interactions
Ph. Jaming

Feuille 3

Exercice 1. On muni l'espace $\mathcal{C}^1([0,1])$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ et on considère l'applications linéaire $Df = f'$.

(1) Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_n(x) = x^n(1-x)^n$. Étudier les convergences simples et uniforme des suites (f_n) et (f_n').

(2) Montrer que D n'est pas continue.

(3) Montrer que le graphe de D est fermé. Interprétez.

Exercice 2. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes.

(1) On suppose que $a \in \ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que pour tout $(b_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$, on a $(a_nb_n)_{n\geq 0} \in \ell^1(\mathbb{N})$.

(2) Réciproquement, on suppose que pour tout $(b_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum_{n\geq 0}(a_nb_n)_{n\geq 0}$ converge.

(a) Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que
$$S_N(b) := \sum_{n=0}^{N} a_nb_n$$
est une forme linéaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$ dont on calculera la norme.

(b) Montrer que $a \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 3. On rappelle qu'une application $a\ :\ E \times F \to G$ bilineaire est continue si et seulement si
$$\exists C > 0, \quad \forall (x,y) \in E \times F, \quad \|a(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|.$$

(1) Soient E, F, G des espaces normés, E ou F étant complets. Soit $a\ :\ E \times F \to G$ une application bilineaire. Montrer que pour que a soit continue, il faut et il suffit que pour tout $(x_0, y_0) \in E\times F$, les applications $y \mapsto a(x_0, y)$ et $x \mapsto a(x, y_0)$ soient continues (on dit que les applications partielles sont continues, ou encore que a est séparément continue).

(2) Ici on prend $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme
$$\|P\|_1 := \int_0^1 |P(x)|dx.$$
On considère $a : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par
$$a(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$
Montrer que les applications partielles sont continues, mais que a n'est pas continue (on pourra pour cela évaluer la fonction pour des monômes bien choisis). Interprétez.

Exercice 4.

(1) Soit E un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés telle que
$$\cup_{n\geq 1} F_n = E.$$
Montrer que $\cup_{n\geq 1} \mathring{F}_n$ est un ouvert dense dans E.

(2) Soit E un espace vectoriel normé.

(a) Montrer que tout sous-espace vectoriel strict de E est d'intérieur vide.

(b) Montrer qu'un espace de Banach ne peut être une réunion dénombrable de sous-espace strict fermés.

(c) Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui en fasse un espace de Banach ?

Exercice 5. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ telle que , pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} f(nx) = 0.$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

(1) Faire une démonstration élémentaire si on suppose de plus que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $\epsilon > 0$, en utilisant le théorème de Baire pour des fermés biens choisis, montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < u < v$, et $n \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $x \in [u, v]$ et tou $m \geq n$,

$$|f(mx)| \leq \epsilon.$$

(3) Étudier $\cup_{m \geq n}[mu, mv]$, puis montrer la propriété demandée.

Exercice 6. Soit f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n(x) := n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)).$$

Attention, on ne suppose pas que f' est continue !

(1) Montrer que f_n converge simplement et donner sa limite.

(2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $F_p := \{x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq p,\ \forall n \geq 1\}$. Montrer qu'au moins un des F_p contient un intervalle non vide.

(3) En déduire que f est lipschitzienne sur un intervalle non vide.

Exercice 7. Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ une application linéaire bornée. On note T^n la composée de T avec elle-même, n-fois *i.e.* $T^1 = T$ et $T^{j+1}x = T\big(T^j x\big)$.

On suppose que pour tout $x \in E$, il existe un entier n_x tel que $T^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que pour tout $x \in E$, $T^n(x) = 0$ *i.e.* que T est *nilpotent*.
Indication : considérer $F_n = \{x \in E : T^n x = 0\}$.