Année universitaire 2021/2022
Master Mathématiques et Applications
M1 Semestre 2
Analyse fonctionnelle et Spectrale

Université de Bordeaux
Collège Sciences et Technologies
UF Math. et Interactions
Ph. Jaming

Feuille 2 : Test de Schur

(1) Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré σ-fini et $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction mesurable. On note $T_K: L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)\to L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ l'opérateur défini par $(T_Kf)(x)=\int_\Omega K(x,y)f(y)d\mu(y)$.

On suppose ici qu'il existe une partie dense $\mathcal{D}\subset L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ tel que T_Kf est bien défini pour tout $f\in\mathcal{D}$.

On suppose qu'il existe une fonction mesurable strictement positive w sur Ω et une constante $C>0$ telles que

$$\int_\Omega |K(x,y)|w(y)d\mu(y)\leq C_1w(x)\quad\text{pour presque tout } x\in\Omega \tag{1}$$

$$\int_\Omega |K(x,y)|w(x)d\mu(x)\leq C_2w(y)\quad\text{pour presque tout } y\in\Omega \tag{2}$$

(a) Soit $f\in\mathcal{D}$. En écrivant pour tout $x,y\in\Omega$

$$|K(x,y)||f(y)|=|K(x,y)|^{1/2}w(y)^{1/2}|K(x,y)|^{1/2}\frac{|f(y)|}{w(y)^{1/2}},$$

montrer que pour presque tout $x\in\Omega$, on a :

$$\int_\Omega |K(x,y)||f(y)|d\mu(y)\leq C_1^{1/2}w(x)^{1/2}\left(\int_\Omega |K(x,y)|\frac{|f(y)|^2}{w(y)}d\mu(y)\right)^{1/2}.$$

(b) En déduire que T_K se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et $\|T_K\|\leq\sqrt{C_1C_2}$. Qu'obtenez vous si $K(x,y)=e^{2i\pi xy}$ et $w(x)=1$?

(2) Première application.

(a) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{i+j}\frac{1}{\sqrt{j}}\leq\pi\frac{1}{\sqrt{i}}.$$

(b) Pour tout $i,j\in\mathbb{N}^*$, notons $K(i,j)=\frac{1}{i+j}$ et $w(j)=\frac{1}{\sqrt{j}}$. En appliquant la question 1. avec $\Omega=\mathbb{N}^*$ et μ la mesure de comptage, montrer que l'opérateur $H:\ell^2(\mathbb{N}^*)\to\ell^2(\mathbb{N}^*)$ défini par

$$\forall x\in\ell^2(\mathbb{N}^*),\ \forall i\in\mathbb{N}^*,\ (Hx)_i=\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{i+j}x_j$$

est borné sur $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ et $\|H\|\leq\pi$.

(3) Deuxième application. Soit $K:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$K(x,y)=\frac{1}{x}\mathbb{1}_{y\leq x}.$$

(a) Montrer que $K\notin L^2(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)$.

(b) En appliquant la question 1. avec $w(t)=t^{-\alpha}$ et $0<\alpha<1$, montrer que l'opérateur $A:L^2(\mathbb{R}_+^*)\to L^2(\mathbb{R}_+^*)$ défini par

$$(Af)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$$

est borné et $\|A\|\leq 2$.

(c) Calculer l'adjoint A^* de A.

(d) On admet que $AA^* = A^*A = A + A^*$. Montrer que l'opérateur $U = I - A$ est unitaire, où I désigne l'opérateur identité sur $L^2(\mathbb{R}_+^*)$.

(4) **Extension à L^p.** Soit $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On suppose maintenant qu'il existe w_1, w_2 et $C > 0$ tels que $0 < w_1, w_2 < +\infty$ et

$$\int_\Omega |K(x,y)| w_1(y)^{p'} d\mu(y) \leq C w_2(x)^{p'} \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega \tag{3}$$

$$\int_\Omega |K(x,y)| w_2(x)^{p} d\mu(x) \leq C w_1(y)^{p} \quad \text{pour presque tout } y \in \Omega \tag{4}$$

Montrez que T_K définit un opérateur borné sur $L^p(\omega, \mu)$.

(5) Troixième application. Soit $K : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x,y) = \frac{1}{x+y}.$$

En prenant $w_1(x) = w_2(x) = x^{-\frac{1}{pp'}}$ montrer que $\|T_K\|_{L^p \to L^p} \leq \dfrac{\pi}{\sin(\pi/p)}$.

On pourra ici se ramener par un changement de variable à la fonction β donnée par

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

et utiliser $B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ qui provient de l'équation fonctionnelle de la fonction Γ (formule des compléments).

En utilisant $h_\varepsilon(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{p}+\varepsilon} & \text{pour } x < 1 \\ x^{-\frac{1}{p}+\varepsilon} & \text{sinon} \end{cases}$ montrer que $\|T_K\|_{L^p \to L^p}) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi/p)}$.