Année universitaire 2021/2022
Master Mathématiques et Applications
M1 Semestre 2
Analyse fonctionnelle et Spectrale

Université de Bordeaux
Collège Sciences et Technologies
UF Math. et Interactions
Ph. Jaming

Feuille 1 : Généralités sur les espaces de Banach

0.1. **Généralités.**

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[-1,1]$ par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{n} & \text{si } x\in\left[-\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2n}\right]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

(1) Cette suite converge-t-elle simplement, uniformément sur $[-1,1]$?
(2) Dans quel espace $L^p([-1,1])$ converge-t-elle ?

Exercice 2. Montrer que ℓ^∞ et ℓ^1 sont complets.

Exercice 3. Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme

$$\|f\|_1=\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que cet espace n'est pas complet.

Exercice 4. Montrer que c_0 est séparable mais que ℓ^∞ n'est pas séparable.
Indication : Considérer l'ensemble des suites à valeurs dans 0 ou 1.
Montrer que L^∞ n'est pas séparable.

0.2. **Un peu de convexité.**

On rappelle que l'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace vectoriel E est défini par

$$\operatorname{conv} A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j\ : a_1,\ldots,a_n\in A,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in[0,1]\ \sum_{j=1}^n\lambda_j=1\right\}.$$

Il est facile de voir que $\operatorname{conv} A$ est le plus petit convexe contenant A.

Exercice 5. (1) Montrez que l'adhérence et l'intérieur d'un convexe sont convexes.
(2) Montrez le théorème de Carathéodory : *Si E est de dimension d alors*

$$\operatorname{conv} A=\bigcup_{n=1}^{d+1}\left\{\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j\ : a_1,\ldots,a_n\in A,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in[0,1]\ \sum_{j=1}^n\lambda_j=1\right\}.$$

(3) En déduire que dans $\mathbb{R}^d$, l'enveloppe convexe d'une compact est compact.
(4) Soit H un Hilbert, soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base orthonormée de H, et $x_n=\dfrac{e_n}{n}$. On définit alors $K=\{x_n, n\geq 1\}\cup\{0\}$.
   (a) Montrer que K est compact.
   (b) Soit y_n la suite définie par $y_1=\dfrac{1}{2}x_1$, $y_2=\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{4}x_2$ et plus généralement $y_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{2^k}x_k$.
   Vérifier que $y_n\in\operatorname{conv} K$, que y_n converge vers une limite $y\notin\operatorname{conv} K$.

Exercice 6. Jauge d'un convexe. Soit E un espace de Banach réel et $C\subset E$ un convexe ouvert avec $0\in C$. La jauge de C est la fonction $E\to\mathbb{R}^+$ définie par

$$j_C(x)=\inf\left\{\lambda>0\ :\ \frac{x}{\lambda}\in C\right\}.$$

(1) Déterminez $\left\{\lambda>0\ :\ \dfrac{x}{\lambda}\in C\right\}$.

(2) En déduire $j_C(x)$ lorsque C est la boule unité de C.

(3) Montrer que, pour tous $a > 0$, $j_C(ax) = aj_C(x)$.

(4) Montrer que, pour tous $x, y \in E$, $j_C(x + y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.

(5) Montrer que j_C est Lipschitzienne.

(6) Montrer que $\mathring{C} = \{x \ : \ j_C(x) < 1\}$ et $\overline{C} = \{x \ : \ j_C(x) \leq 1\}$.