UE 4TPY502U - Analyse Fonctionelle et Probabilités

Professeur D.S. Dean - année Universitaire 2021-22

Table des matières

Chapitre 1

Equations différentielles ordinaires

1.1 Introduction

Un exemple, en physique, d'un système d'équations différentielles ordinaires est pour la position $y(t)$ et la vitesse $v(t)$ d'une particule en présence d'une force externe F. La force peut dépendre du temps t, ainsi que de la position $y(t)$ et, en présence de friction, la vitesse $v(t)$. Les équations sont

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= v(t) \\ m\frac{dv(t)}{dt} &= F\left(y(t), v(t), t\right). \end{aligned}$$

La première équation est juste la définition de la vitesse, tandis que la seconde est la deuxième loi de Newton. Il est clair que pour résoudre ces équations, nous devons spécifier des conditions aux limites. En physique, on a généralement des conditions initiales à $t = 0$: $y(0) = y_0$ et $v(0) = v_0$. Cependant, dans certains cas, les conditions aux limites peuvent impliquer le temps final T, et sont, par exemple, du type $y(0) = y_0$ et $y(T) = y_f$. Le point clé est que l'on a besoin de deux conditions aux limites pour spécifier la solution (si elle existe). Les équations de mouvement ci-dessus sont des équations différentielles couplées, où seules les premières dérivées par rapport à une seule variable, ici t le temps, apparaissent. Etant donné que le temps est la seule variable, les équations peuvent être écrites en utilisant la dérivée ordinaire d/dt et l'équation s'appelle une équation différentielle ordinaire EDO (souvent juste équation différentielle ED).

Les équations de mouvement pour $y(t)$ et $\dot{y}(t)$ peuvent également être écrites comme une seule équation

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = F\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}\right).$$

Ici, l'équation est de nouveau ordinaire car le temps t est la seule variable, mais la dérivée la plus élevée par rapport à t qui apparaît est $\frac{d^2y}{dt^2}$, et c'est donc une équation différentielle ordinaire du second ordre. L'ordre d'une équation différentielle est n si la dérivée la plus élevée de y presente est $\frac{d^n y(t)}{dt^n}$. Pour intégrer, ou résoudre, une EDO du n-ième ordre il faut spécifier n conditions aux limites, par exemple si elles sont toutes les conditions initiales, il faut donner $y(0),\ dy(0)/dt,\ d^2y(0)/dt^2, \cdots d^{n-1}y(0)/dt^{n-1}$.

Chapitre 2

Equations différentielles ordinaires linéaires

2.1 Introduction

La forme générale d'une EDO linéaire est

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} y(x) = f(x) \tag{2.1}$$

il s'agit d'une équation différentielle de l'ordre n. Un exemple physique est l'équation du mouvement d'une particule de masse m attachée à un ressort avec une constante de raideur κ, dans un milieu visqueux qui conduit à une force de frottement égale à $-\gamma v$, où v est le la vitesse de la particule. Si la position d'équilibre du ressort est à $y = 0$, la force totale sur la particule est donc

$$F(y) = -\gamma v - \kappa y.$$

Si l'accélération de la particule est a, la deuxième loi de Newton $F = ma$ donne alors

$$ma = -\gamma v - \kappa y,$$

qui donne l'équation différentielle de second ordre

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \kappa y = 0.$$

Il s'agit d'un exemple d'EDO linéaire avec des coefficients constants : $a_2(t) = m$, $a_1(t) = \gamma$ et $a_0(t) = \kappa$. Si, en plus, nous appliquons une force externe dépendante du temps $f(t)$ l'équation devient

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \kappa y = f(t).$$

C'est l'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique amorti. Notons, qu'en l'absence d'une force externe ($f = 0$), $y(t) = 0$ résout l'équation, cependant si les conditions initiales ne sont pas $y(0) = 0$ et $dy/dt(0) = 0$ cette solution n'est pas la bonne.

2.2 Opérateurs linéaires

Une équation différentielle ordinaire linéaire peut être écrite comme

$$\mathcal{L}y(x) = f(x),$$

où

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k},$$

est un opérateur linéaire sur un espace de fonctions (appelé espace de Hilbert) $\mathcal{H}$

$$\mathcal{L}: \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

Il est défini par son action sur une fonction arbitraire $y(x)$:

$$\mathcal{L}y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}y(x).$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est linéaire si, pour deux fonctions y_1 et y_2 et tous les scalaires (réels ou complexes selon le contexte) μ et λ, nous avons

$$\mathcal{L}(\lambda y_1(x) + \mu y_2(x)) = \lambda \mathcal{L}y_1(x) + \mu \mathcal{L}y_2(x).$$

Les opérateurs linéaires sur les espaces de fonctions ($\mathcal{H}$) sont l'équivalent des matrices (qui sont des opérateurs linéaires) sur des espaces vectoriels ($\mathcal{V}$)

$$L: \ \mathcal{V} \to \mathcal{V},$$

ici, L est une matrice carrée $n \times n$ si $\mathcal{V} \cong \mathbb{R}^n$. Les concepts que vous avez déjà vus dans l'algèbre linéaire peuvent être étendus aux opérateurs linéaires sur les espaces de fonctions. En analyse numérique, les espaces de fonction sont approximés par des espaces vectoriels de dimension finie. Nous écrivons

$$f_i = f(x_i)$$

où $x_i \in \Lambda$ et où Λ est un ensemble fini de points. Par exemple, sur l'intervalle $I_1 = [0, 1]$, nous pouvons prendre $\Lambda = \{0, \ 1/N, \ 2/N, \cdots 1\}$ donc le vecteur f_i appartient à un espace vectoriel de dimension finie ($d = N + 1$).

2.3 Equations différentielles linéaires homogènes

Un cas particulier d'une EDO linéaire est l'équation homogène

$$\mathcal{L}y(x) = 0.$$

Les solutions de cette équation $y_c(x)$ sont appelées solutions complémentaires de l'EDO linéaire

$$\mathcal{L}y(x) = f(x).$$

Une solution de l'équation ci-dessus $y_p(x)$ s'appelle une solution particulière. Une solution particulière donnée $y_p(x)$ peut ne pas satisfaire les n conditions aux limites de l'EDO. Cependant, nous pouvons toujours ajouter une solution complémentaire à veiller à ce que les conditions aux limites soient satisfaites :

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x).$$

Le nombre de solutions complémentaires indépendantes est de n. La façon la plus simple de voir ceci est de prendre des solutions complémentaires avec des conditions initiales données à $x = 0$ (sans perte de généralité) (pour $k = 0 \cdots n-1$ donc les n choix de k donnent n solutions)

$$\frac{d^m y_{ck}}{dx^m}(0) = 0 \text{ sauf pour } m = k \text{ où } \frac{d^k y_{ck}}{dx^k}(0) = 1.$$

La solution complète peut maintenant être écrite comme

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y_{ck}(x),$$

Les n conditions aux limites donnent maintenant n équations linéaires pour les n constantes inconnues a_k, et donc, en général, les a_k peuvent être déterminées.

2.4 Propriétés des équations homogènes linéaires de second ordre

Une équation homogène linéaire de second ordre peut être écrite comme

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + p(x)\frac{d}{dx}y(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{2.3}$$

La solution est déterminée à partir des conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$. Nous pouvons trouver deux solutions indépendantes : y_1 avec les conditions initiales $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ et y_2 avec $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. En termes de dynamique, la solution y_1 correspond à une particule qui commence à la position $y(0) = 1$ avec une vitesse zéro, $y'(0) = 0$ et le second y_2 commence à $y(0) = 0$ mais avec une vitesse de $y'(0) = 1$. La solution générale pour $y(0) = Y$ et $y'(0) = V$ est

$$y(x) = Y y_1(x) + V y_2(x),$$

une combinaison linéaire des deux solutions.

Le wronskien de deux fonctions est défini comme

$$W(f,g) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x),$$

Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont linéairement indépendantes si la condition

$$af(x) + bg(x) = 0 \ \forall \ \ x$$

implique $a = b = 0$. Deux fonctions sont linéairement dépendentes si $f(x) = cg(x)$ pour une certaine constante c. De toute évidence si f et g sont linéairement dépendantes alors $W(f,g) = 0$. Considérons le wronskien de deux solutions d'une EDO homogène linéaire et de second ordre et prenons sa dérivée

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(y_1, y_2) &= \frac{d}{dx}\left[y_1(x)\frac{d}{dx}y_2(x) - y_2(x)\frac{d}{dx}y_1(x)\right] \\ &= y_1(x)\frac{d^2}{dx^2}y_2(x) - y_2(x)\frac{d^2}{dx^2}y_1(x), \end{aligned}$$

maintenant en utilisant l'équation (2.3) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(y_1, y_2) &= y_1(x)\left(-p(x)\frac{d}{dx}y_2(x) - q(x)y_2(x)\right) - y_2(x)\left(-p(x)\frac{d}{dx}y_1(x) - q(x)y_1(x)\right) \\ &= -p(x)W(y_1, y_2). \end{aligned}$$

L'équation précédente peut être intégrée, cela donne

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \exp\left(-\int^x dx' \ p(x')\right).$$

Par exemple, si $y_1(0)$, $y_1'(0)$ et $y_2(0)$, $y_2'(0)$ sont connus alors

$$W(y_1(x), y_2(x)) = W(y_1(x), y_2(x))|_{x=0} \exp\left(-\int_0^x dx' \ p(x')\right).$$

Cela montre que, si le wronskien est non nul à un point donné, il est non nul pour toute x, tant que $\int_0^x dx' p(x')$ existe. Le wronskien est utile car si nous connaissons une solution $y_1(x)$ de l'équation homogène on peut trouver la deuxième solution comme suit :

$$y_1(x)\frac{d}{dx}y_2(x) - y_2(x)\frac{d}{dx}y_1(x) = W(x) = \exp\left(-\int^x dx' \ p(x')\right).$$

Nous pouvons intégrer l'équation comme suit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{y_2(x)}{y_1(x)} &= \frac{W(x)}{y_1(x)^2} \\ \Rightarrow \qquad & y_2(x) = y_1(x)\int^x dx' \frac{W(x')}{y_1^2(x')}. \end{aligned}$$

A titre d'exemple, considérons l'équation

$$2x^2\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 3x\frac{d}{dx}y(x) - y(x) = 0, \tag{2.9}$$

nous remarquons que $y_1(x) = 1/x$ est une solution. Pour trouver une deuxième solution nous mettons l'équation dans la forme standard comme

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{3}{2x}\frac{d}{dx}y(x) - \frac{y(x)}{2x^2} = 0,$$

à partir de laquelle nous voyons que $p(x) = \frac{3}{2x}$ (aussi $q(x) = -\frac{1}{2x^2}$). Le wronskien est donc

$$\begin{aligned} W(x) &= \exp\left(-\int^x dx' p(x')\right) = \exp\left(-\int^x dx' \frac{3}{2x'}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{3}{2}\ln(x)\right) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

En utilisant cela, nous trouvons

$$y_2(x) = \frac{1}{x}\int^x dx' \frac{1}{x'^{\frac{3}{2}}}x'^2 = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation (2.9) a la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k}{dx^k}y(x) = 0,$$

nous voyons que faire l'ansatz $y = x^\alpha$ résout cette équation donnant

$$x^\alpha \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) = 0,$$

laissant une équation polynomiale pour déterminer les valeurs possibles de α.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) = 0.$$

Notons que le polynôme est de degré n en α et donc il existe n racines (dont certains peuvent être complexes). Pour l'éq. (2.9) on trouve

$$2\alpha(\alpha-1) + 3\alpha - 1 = 2\alpha^2 + \alpha - 1 = (2\alpha-1)(\alpha+1) = 0,$$

et nous retrouvons donc $\alpha = -1$ et $\alpha = 1/2$.

2.5 Exercices

1. Quelles opérateurs, définies sur une fonction arbitraire $f(x)$ ci-dessous, sont des opérateurs linéaires ?
(i) $\mathcal{L} f(x) = x^n f(x)$
(ii) $\mathcal{L} f(x) = x^2 \frac{d}{dx} f(x)$
(iii) $\mathcal{L} f(x) = f(x) \frac{d}{dx} f(x)$
(iv) $\mathcal{L} f(x) = \int_0^x dy\ g(x-y) f(y)$.
2. Montrer que si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont des opérateurs linéaires, $\mathcal{L}'\mathcal{L}$ et $a\mathcal{L} + b\mathcal{L}'$ sont aussi des opérateurs linéaires.
3. Si
$$Xf(x) = xf(x)$$
et
$$Pf(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} f(x)$$
calculer $\mathcal{L} = [X, P]$ et $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$.
4. Montrer que $y(x) = \exp(\alpha x)$ est une solution de
$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2\frac{d}{dx} y(x) + y(x) = 0,$$
pour certaines valeurs de α. Montrer qu'il y a une seule solution pour α. Calculer le wronskien pour l'équation et utiliser votre résultat pour trouver une deuxième solution.
5. Montrer que $y(x) = x^\alpha$ est une solution de
$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) - x\frac{d}{dx} y(x) + y(x) = 0.$$
pour certaines valeurs de α. Montrer qu'il y a une seule solution pour α. Calculer le wronskien pour l'équation et utiliser votre résultat pour trouver une deuxième solution.
6. On considère l'équation
$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) - x(x+2) \frac{d}{dx} y(x) + (x+2) y(x) = 0.$$
Montrer que $y(x) = x$ est une solution. Trouver une deuxième solution.
7. On considère l'équation
$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) - (x - \frac{3}{16}) y(x) = 0.$$
Montrer que $y(x) = x^{\frac{1}{4}} \exp(2x^{\frac{1}{2}})$ est une solution. Trouver une deuxième solution.

Chapitre 3

Equations différentielles ordinaires linéaires avec coefficients constants

3.1 Introduction

Une EDO linéaire avec des coefficients constants a $a_k(x) = a_k$ $\forall k$ - une constante indépendante de x. Dans ce cas, l'équation homogène ou complémentaire de l'EDOL $\mathcal{L}y(x) = f(x)$ est

$$\mathcal{L}y_c(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} y_c(x) = 0.$$

Supposons maintenant que nous puissions trouver une solution particulière à l'équation (2.1) noté par $y_p(x)$. Comme mentionné précédemment, en général, cette solution ne satisfait pas aux conditions initiales ou aux limites. Cependant, nous pouvons trouver une solution complémentaire $y_c(x)$ telle que

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x) \tag{3.1}$$

obéit aux conditions aux limites. Notons que $y(x)$ dans Eq. (3.1) obéit à l'équation (2.1).

Afin de trouver les solutions complémentaires d'abord nous écrivons le polynôme caractéristique de l'EDO complémentaire

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{\alpha=1}^{n} (X - \lambda_\alpha),$$

ce n'est que la factorisation d'un polynôme en termes de racines qui sont données par

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0.$$

Nous savons qu'il y a n racines λ_α. En utilisant ceci, nous pouvons écrire l'équation complémentaire comme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} y_c(x) = a_n \left[\prod_{\alpha=1}^{n} (\frac{d}{dx} - \lambda_\alpha) \right] y_c(x) = 0.$$

Ici

$$\prod_{\alpha=1}^{n} (\frac{d}{dx} - \lambda_\alpha) = \prod_{\alpha=1}^{n} D_{\lambda_\alpha}$$

est un produit d'opérateurs linéaires

$$D_\lambda = (\frac{d}{dx} - \lambda),$$

qui sont définis par leur action sur une fonction arbitraire

$$D_\lambda f(x) = \frac{df(x)}{dx} - \lambda f(x).$$

Parce que les termes λ sont des constantes (indépendantes de x), ces opérateurs commutent, c-à-d

$$(\frac{d}{dx} - \lambda)(\frac{d}{dx} - \lambda') = (\frac{d}{dx} - \lambda')(\frac{d}{dx} - \lambda),$$

c'est-à-dire que l'ordre dans lequel ils sont appliqués n'a pas d'importance. Cette condition est généralement écrite comme

$$[D_\lambda, D_{\lambda'}] = D_\lambda D_{\lambda'} - D_{\lambda'} D_\lambda = 0$$

Pour tout λ_α nous voyons que y_c tel que

$$D_{\lambda_\alpha} y_c = (\frac{d}{dx} - \lambda_\alpha) y_c(x) = 0$$

est une solution de l'équation complémentaire, pour voir cela, nous poussons D_{λ_α} à l'avant du produit en utilisant la propriété de commutativité. Cela donne la solution simple.

$$y_c(x) = \exp(\lambda_\alpha x).$$

Si tous les λ_α sont différents, nous avons n solutions complémentaires linéairement indépendantes et la solution générale peut être écrite comme

$$y_c(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \exp(\lambda_\alpha x).$$

Cependant, si le polynôme caractéristique a des racines répétées, nous n'avons pas n solutions indépendantes. En général, nous pouvons écrire

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} y_c(x) = a_n \prod_{\alpha} (\frac{d}{dx} - \lambda_\alpha)^{m_\alpha} y_c(x),$$

où m_α désigne la multiplicité de la racine λ_α. Même si $m_\alpha > 1$ nous voyons que

$$(\frac{d}{dx} - \lambda_\alpha) y_c(x) = 0$$

évidemment, donne toujours une solution

$$y_c(x) = \exp(\lambda_\alpha x).$$

Cependant, nous devons trouver $m_\alpha - 1$ autres solutions. Celles-ci peuvent être obtenues à partir du fait que

$$(\frac{d}{dx} - \lambda)^m x^{m-1} \exp(\lambda x) = 0. \tag{3.2}$$

Pour voir que l'équation (3.2) est vraie, nous le prouvons par induction, ou récurrence,- il est vrai pour $m = 1$, nous postulons qu'il est vrai pour m et montrons qu'il doit alors tenir pour $m + 1$. Pour $m + 1$ nous avons

$$\begin{aligned} (\frac{d}{dx} - \lambda)^{m+1} x^m \exp(\lambda x) &= (\frac{d}{dx} - \lambda)^m (\frac{d}{dx} - \lambda) x^m \exp(\lambda x) \\ &= (\frac{d}{dx} - \lambda)^m \left(m x^{m-1} \exp(\lambda x) + x^m \lambda \exp(\lambda x) - \lambda_\alpha x^m \exp(\lambda x) \right) \\ &= m(\frac{d}{dx} - \lambda)^m x^{m-1} \exp(\lambda x) = 0, \end{aligned}$$

où la dernière ligne est vraie par l'hypothèse d'induction. Nous avons donc toutes les m_α solutions correspondant à la racine λ_α, qui sont donnés par

$$y_c(x) = \exp(\lambda_\alpha x),\ x \exp(\lambda_\alpha x),\ \cdots x^{m_\alpha - 1} \exp(\lambda_\alpha x).$$

En général, les racines du polynôme caractéristique seront complexes, mais si tous les coefficients sont réels, une racine $\lambda_\alpha = \mu_\alpha + i\omega_\alpha$ (où μ et ω sont réels) doit se produire avec son conjugué complexe $\lambda_\alpha^* = \mu_\alpha - i\omega_\alpha$. Les deux fonctions complémentaires correspondantes peuvent alors être écrites comme

$$y_c(x) = \exp(\mu_\alpha x \pm i\omega_\alpha x),$$

cependant, nous pouvons construire deux fonctions complémentaires réelles en utilisant $\exp(\pm i\omega_\alpha x) = \cos(\omega_\alpha x) \pm i \sin(\omega_\alpha x)$:

$$y_c(x) = \exp(\mu_\alpha x) \cos(\omega_\alpha x) \text{ et } y_c(x) = \exp(\mu_\alpha x) \sin(\omega_\alpha x).$$

Dans le cas où la racine λ_α a une multiplicité $m_\alpha > 1$, nous avons les solutions de la forme

$$y_c(x) = x^{m-1} \exp(\mu_\alpha x) \cos(\omega_\alpha x) \text{ et } y_c(x) = x^{m-1} \exp(\mu_\alpha x) \sin(\omega_\alpha x),$$

for $m = 1,\ \cdots,\ m_\alpha$.

Solution complémentaire pour l'oscillateur harmonique amorti

L'équation homogène pour l'oscillateur harmonique amorti est

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{dy}{dt} + \kappa y = 0.$$

Le polynôme caractéristique correspondant est

$$mX^2 + \gamma X + \kappa = 0$$

avec deux racines

$$\lambda_\pm = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\kappa m}}{2m}.$$

Lorsque $\gamma > 2\sqrt{\kappa m}$ les deux racines sont réelles et la solution générale est donnée par

$$y(t) = c_+ \exp\left([\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\kappa m}}{2m}]t\right) + c_- \exp\left([\frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\kappa m}}{2m}]t\right).$$

Lorsque $\gamma < 2\sqrt{\kappa m}$ les deux racines sont complexes, la solution générale est donnée par

$$y(t) = c_c \exp(-\frac{\gamma}{2m}t)\cos\left(\frac{\sqrt{4\kappa m - \gamma^2}}{2m}t\right) + c_s \exp(-\frac{\gamma}{2m}t)\sin\left(\frac{\sqrt{4\kappa m - \gamma^2}}{2m}t\right)$$

Notons qu'au point critique où $\gamma = 2\sqrt{\kappa m}$ nous trouvons

$$y(t) = c_0 \exp(-\frac{\gamma}{2m}t) + c_1 t \exp(-\frac{\gamma}{2m}t).$$

3.2 Solution particulière par identification

Nous considérons ici une méthode pour trouver une solution particulière $y_p(x)$ de $\mathcal{L}y_p(x) = f(x)$. Elle ne satisfait pas nécessairement les conditions aux limites, mais cela peut être corrigé en ajoutant la solution complémentaire appropriée. La méthode ne fonctionne que pour certaines formes de $f(x)$ et une méthode générale utilisant les fonctions de Green sera expliquée plus tard.

Les cas particuliers de $f(x)$ qui peuvent être résolus par cette méthode

1. $f(x) = b\exp(rx)$, chercher une solution d'essai du type $y_p(x) = c\exp(rx)$.
2. $f(x) = b_1\cos(rx) + b_2\sin(rx)$, chercher une solution d'essai du type $y_p(x) = c_1\cos(rx) + c_2\sin(rx)$.
3. $f(x) = b_1\exp(rx)\cos(sx) + b_2\exp(rx)\sin(sx)$, chercher une solution d'essai du type $y_p(x) = c_1\exp(rx)\cos(sx) + c_2\exp(rx)\sin(sx)$.

4. $f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \cdots + b_N x^N$, chercher une solution d'essai du type $y_p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \cdots + c_M x^M$ (où $M \leq N + n$).

Dans le cas où $f(x)$ est la somme des fonctions du type ci-dessus, rechercher une solution qui est la somme des solutions d'essai respectives. Remarque, lorsque $f(x)$ est proportionnel une solution complémentaire $y_c(x)$ de l'équation, $y_c(x)$ ne peut pas être la solution particulière car évidemment $\sum_{k=0}^{n} a_k d^k y_c(x)/dx^k = 0 \neq f(x)$! Dans ce cas, nous devrions essayer la solution $y_p(x) = cxy_c(x)$.

Exemples

Considérons l'oscillateur harmonique amorti avec une force externe $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$. L'équation du mouvement est

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{dy}{dt} + \kappa y(t) = f_0 \cos(\omega t). \tag{3.4}$$

Nous cherchons ici une solution du type $y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ en remplaçant ceci en éq. (3.4) donne

$$-m\omega^2[c_1 \cos(\omega t)+c_2 \sin(\omega t)]+\gamma\omega[-c_1 \sin(\omega t)+c_2 \cos(\omega t)]+\kappa[c_1 \cos(\omega t)+c_2 \sin(\omega t)] = f_0 \cos(\omega t)$$

L'inspection des coefficients de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ dans ce qui précède donne

$$\begin{aligned} -m\omega^2 c_1 + \gamma\omega c_2 + \kappa c_1 &= f_0 \\ -m\omega^2 c_2 - \gamma\omega c_1 + \kappa c_2 &= 0. \end{aligned}$$

et donc nous trouvons

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{f_0(\kappa - m\omega^2)}{\gamma^2\omega^2 + (\kappa - m\omega^2)^2} \\ c_2 &= \frac{f_0\gamma\omega}{\gamma^2\omega^2 + (\kappa - m\omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Considérons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \exp(x). \tag{3.9}$$

Ici, le polynôme caractéristique est

$$X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2 = 0.$$

La solution complémentaire est donc de la forme $y_c(x) = d_0 \exp(x) + d_1 x \exp(x)$ - donc nous ne pouvons pas essayer $y_{p0}(x) = c_0 \exp(x)$ ou $y_{p1}(x) = c_1 x \exp(x)$, mais nous devons essayer x fois une combinaison de ces solutions - cependant $xy_{p0}(x) \propto y_{p1}(x)$ est encore une solution à l'équation homogène. Nous essayons donc $y_c(x) = cx^2 \exp(x)$. Dans l'équation (3.9) cela donne

$$\begin{aligned}
& [\frac{d^2}{dx^2}(x^2 \exp(x) - 2\frac{d}{dx}(x^2 \exp(x)) + x^2 \exp(x)]c = \exp(x) \\
\Rightarrow \quad & [(x^2+4x+2)\exp(x) - 2(x^2+2x)\exp(x) + x^2 \exp(x)]c = \exp(x) \\
\Rightarrow \quad & 2c \exp(x) = \exp(x) \Rightarrow c = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3.3 Exercices

1. Déterminer la solution de
$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\frac{df}{dt} + 5f = 0$$
vérifiant les conditions aux limites $f(0) = 1$ et $\dot{f}(0) = 0$.
2. Déterminer la solution de
$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\frac{df}{dt} + 5f = \exp(-t)\cos(3t)$$
vérifiant les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $\dot{f}(0) = 0$.
3. Déterminer la solution de
$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 6\frac{df}{dt} + 9f = \exp(-t)$$
vérifiant les conditions aux limites $f(0) = 0$ and $\dot{f}(0) = \lambda$.
4. Déterminer la solution de
$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \exp(-x)$$
vérifiant les conditions aux limites $y(0) = 1$ and $y'(0) = \exp(-1)$.
5. Déterminer la solution générale de
$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 12\frac{dy}{dx} + 16y = 32x - 8.$$
6. Deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ obéissent aux équations couplées linéaires
$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} - 2y &= -\sin(t) \\
\frac{dy}{dt} + 2x &= 5\cos(t)
\end{aligned}$$
En prenant la dérivée de la première équation par rapport à t, trouver une équation différentielle de deuxième ordre pour la function $x(t)$. Trouver la solution pour les conditions aux limites $x(0) = 3$ et $y(0) = 2$.

7. Deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ obéissent aux équations couplées linéaires

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + n^2x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dy}{dt} + n^2y &= \mu\frac{dx}{dt}, \end{aligned}$$

montrer que pour les conditions aux limites $x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = \lambda$

$$y(t) = \frac{1}{2}\mu\lambda t^2(1 - \frac{1}{3}nt)\exp(-nt).$$

Chapitre 4

La méthode des fonctions de Green

4.1 Introduction

Lorsque nous analysons l'EDO linéaire

$$\mathcal{L}y(x) = f(x)$$

nous avons vu que l'étape la plus difficile est de trouver une solution particulière $y_p(x)$. Même si la solution que nous trouvons ne satisfait pas les conditions aux limites, nous pouvons les satisfaire en ajoutant une solution complémentaire y_c. Dans un espace vectoriel de dimension finie, la solutio à l'équation

$$L\mathbf{y} = \mathbf{f}$$

est

$$\mathbf{y} = L^{-1}\mathbf{f},$$

où (quand il existe) $LL^{-1} = I$. Ici, nous verrons qu'en général un opérateur inverse $\mathcal{L}^{-1}$ existe sur l'espace des fonctions mais d'abord nous devons trouver l'opérateur d'identité I.

4.2 Théorie des distributions

La fonction de Heaviside est définie comme

$$\begin{aligned}\theta(x) &= 1 \text{ pour } x > 0 \\ \theta(x) &= 0 \text{ pour } x < 0.\end{aligned}$$

Par symétrie á $x = 0$, nous choisissons $\theta(0) = 1/2$. La fonction de Heaviside peut être définie comme une limite de la fonction Fermi

$$n_F(x, \beta) = \frac{\exp(\beta x)}{1 + \exp(\beta x)} = \frac{1}{1 + \exp(-\beta x)},$$

comme

$$\theta(x) = \lim_{\beta\to\infty} n_F(x,\beta).$$

La fonction Heaviside peut également être écrite en utilisant la fonction sgn (ce qui est impaire)

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(x) &= 1 \text{ pour } x > 0\\ \mathrm{sgn}(x) &= -1 \text{ pour } x < 0.\end{aligned}$$

comme

$$\theta(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x)+1}{2}. \tag{4.5}$$

La fonction de Dirac est définie comme la dérivé de la fonction de Heaviside

$$\delta(x) = \theta'(x).$$

Clairement $\delta(x) = 0$ quand $x \neq 0$ mais il n'est pas défini à $x = 0$. Cependant, nous pouvons considérer

$$D_f = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \delta(y)f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \theta'(y)f(y).$$

La seule contribution non nulle á l'intégrale provient d'une petite region $[-\epsilon,\epsilon]$ et donc

$$D_f = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy\ \theta'(y)f(y) = [\theta(y)f(y)]_{-\epsilon}^{\epsilon} - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy\ \theta(y)f'(y),$$

(intégration par partie). Maintenant, tant que $f'(y)$ existe á $y = 0$, on voit que lorsque $\epsilon \to 0$ le second terme est nul tandis que le premier terme donne

$$D_f = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \delta(y)f(y) = f(0),$$

car

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon)\theta(\epsilon) &= f(0)\\ \lim_{\epsilon\to 0} f(-\epsilon)\theta(-\epsilon) &= 0.\end{aligned}$$

Cela montre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\ f(y)\delta(y-x) = f(x).$$

A partir la représentation Eq. (4.5) nous voyons que

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x),$$

et comme sgn est une fonction impaire (la dérivé d'une fonction impaire est paire et la dérivée d'une fonction paire est impaire), nous voyons que $\delta(x) = \delta(-x)$ et $\delta(y-x) = \delta(x-y)$ et donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\ \delta(x-y) f(y) = f(x).$$

Nous voyons également que

$$\begin{aligned} \int_a^b dy\ \delta(x-y) f(y) &= f(x) \text{ si } x \in [a,b] \\ &= 0 \text{ if } x \notin [a,b]. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que l'opérateur d'identité sur l'espace de fonctions est donné par

$$If(x) = \int dy\ \delta(x-y) f(y) = f(x).$$

4.3 Fonction de Green

La fonction de Green d'un opérateur linéaire $\mathcal{L}$ est la solution de l'équation

$$\mathcal{L}G(x,z) = \delta(x-z),$$

sur un intervalle $[a,b]$ (où l'opérateur $\mathcal{L}$ agit sur la variable x). Une solution particulière de l'EDO linéaire

$$\mathcal{L}y(x) = f(x)$$

est donnée par

$$y_p(x) = \int_a^b dz\ G(x,z) f(z). \tag{4.9}$$

Pour voir cela, nous agissons avec l'opérateur $\mathcal{L}$ sur les des deux côtés de l'équation (4.9) pour obtenir, pour $x \in [a,b]$,

$$\mathcal{L}y_p(x) = \int_a^b dz\ \mathcal{L}G(x,z) f(z) = \int_a^b dz\ \delta(x-z) f(z) = f(x).$$

4.4 Calcul de la fonction de Green pour systèmes d'ordre 2

Les fonctions de Green peuvent être utilisées pour résoudre les EDO de n'importe quel ordre, la théorie générale est expliquée dans la section (9.1).

Habituellement, lorsqu'on étudie les fonctions de Green, nous considérons des conditions limites homogénes. Pour les équations différentielles de second ordre, si le problème est défini sur l'intervalle $[a,b]$, les conditions aux limites homogènes mixtes prennent la forme

$$\begin{aligned} A_a y(a) + B_a y'(a) &= 0 \\ A_b y(b) + B_b y'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cas où $B_a = 0$ la condition au limite à $x = a$ est $y(a) = 0$, cela s'appelle une condition au limite de Dirichlet. Lorsque $A_a = 0$ la condition aux limite résultante $y'(a) = 0$ est appelée condition au limite de Neumann.

Pour une EDO de deuxième ordre écrit sous la forme standard, la fonction de Green obéit

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,z) + p(x)\frac{d}{dx}G(x,z) + q(x)G(x,z) = \delta(x-z) \tag{4.12}$$

Sauf au point $x = z$, l'équation de la fonction Green est tout simplement la même que l'équation homogène et nous avons donc

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,z) + p(x)\frac{d}{dx}G(x,z) + q(x)G(x,z) = 0 \tag{4.13}$$

L'équation (4.13) a deux solutions complémentaires $y_{c1}(x)$ et $y_{c2}(x)$, afin que nous puissions écrire

$$G(x,z) = A_{1-}(z)y_{c1}(x) + A_{2-}(z)y_{c2}(x), \;\; x < z \tag{4.14}$$

$$G(x,z) = A_{1+}(z)y_{c1}(x) + A_{2+}(z)y_{c2}(x), \;\; x > z \tag{4.15}$$

Les quatre coefficients $A_{1\pm}(z)$ et $A_{2\pm}(z)$ dépendent de z. Les conditions aux limites donnent deux équations pour ces coefficients et les conditions de raccordement donnent deux autres, les coefficients peuvent donc être déterminés. Les conditions de raccordement sont (i) $G(x,z)$ est continue à $x = z$ et (ii) la condition de saut à $x = z$. La condition de saut est obtenue par l'intégration de (4.12) par rapport à x entre $z_- = z - \epsilon$ et $z_+ = z + \epsilon$ pour $\epsilon \to 0$:

$$\int_{z_-}^{z_+} dx \;\left[\frac{d^2}{dx^2}G(x,z) + p(x)\frac{d}{dx}G(x,z) + q(x)G(x,z)\right] = \int_{z_-}^{z_+} dx\; \delta(x-z) \tag{4.16}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}G(x,z)|_{x=z_+} - \frac{d}{dx}G(x,z)|_{x=z_-} = 1 \tag{4.17}$$

Seule la première intégrale sur la gauche dans Eq. (4.16) contribue parce que $\frac{d}{dx}G(x,z)$ est discontinue à $x = z$, les deux dernières intégrales donnent zéro parce que $\epsilon \to 0$. La condition dans l'équation (4.17) est appelée condition de saut.

En termes de solutions données dans les équations (4.14) et (4.15), les conditions correspondantes sont donc

$$A_{1+}(z)y_{c1}(z) + A_{2+}(z)y_{c2}(z) = A_{1-}(z)y_{c1}(z) + A_{2-}(z)y_{c2}(z) \;\; \text{continuité}$$

$$A_{1+}(z)\frac{dy_{c1}}{dx}(z) + A_{2+}(z)\frac{dy_{c2}}{dx}(z) - A_{1-}(z)\frac{dy_{c1}}{dx}(z) - A_{2-}(z)\frac{dy_{c2}}{dx}(z) = 1 \;\; \text{condition de saut}$$

La solution à l'équation $\mathcal{L}y = f$, avec les mêmes conditions limites homogènes que $G(x,z)$, est donc donné par

$$y(x) = \int_a^b dz\; G(x,z)f(z) = \underbrace{\int_a^x dz\; G(x,z)f(z)}_{\text{région } x>z} + \underbrace{\int_x^b dz\; G(x,z)f(z)}_{\text{région } x<z}$$

Notons que si les deux conditions limites homogènes sont données au point initial $x = a$ ils sont forcement $G(a, z) = 0$ et $dG(x, z)/dx|_{x=a} = 0$. Cela signifie que pour les coefficients $A_{1-}(z)$ et $A_{2-}(z)$ nous avons

$$\begin{aligned} A_{1-}(z)y_{c1}(a) + A_{2-}(z)y_{c2}(a) &= 0 \\ A_{1-}(z)\frac{dy_{c1}}{dx}(a) + A_{2-}(z)\frac{dy_{c2}}{dx}(a) &= 0 \end{aligned}$$

La solution de ces équations est $A_{1-}(z) = A_{2-}(z) = 0$ et donc la fonction Green est telle que $G(x, z) = 0$ pour $x < z$. Pour les conditions initiales décrites ici, le point final $x = b$ n'est pas spécifié et peut être considéré comme $b = \infty$, donc

$$\begin{aligned} y(x) = \int_a^\infty dz\ G(x, z)f(z) &= \underbrace{\int_a^x dz\ G(x, z)f(z)}_{\text{région } x>z} + \underbrace{\int_x^b dz\ G(x, z)f(z)}_{\text{région } x<z\text{- où } G(x,z)=0} \\ &= \int_a^x dz\ G(x, z)f(z). \end{aligned}$$

Le fait que $G(x, z) = 0$ pour $x < z$ est un exemple de *causalité*, la force appliqué à l'instant z ne peut influencer que la solution pour les temps $x > z$ et pas les temps précédents ($x < z$).

Nous obtenons donc

$$y(x) = \underbrace{\int_a^x dz\ [A_{1+}(z)y_{c1}(x) + A_{2+}(z)y_{c2}(x)]f(z)}_{\text{région } x>z}$$

Exemple utilisant les fonctions de Green

Nous résolvons ici l'EDO linéaire

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + y(x) = \mathrm{cosec}(x),$$

avec conditions aux limites $y(0) = y(\pi/2) = 0$ en utilisant la fonction de Green (rappel $\mathrm{cosec}(x) = 1/\sin(x)$).

La fonction de Green obéit

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, z) + G(x, z) = \delta(x - z).$$

Sauf à $x = z$,

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, z) + G(x, z) = 0.$$

Le système pour y a des conditions aux limites homogènes et, en conséquence, nous appliquons ces conditions aux limites à G qui donne $G(0,z)=0$ and $G(\pi/2,z)=0$ Le polynôme caractéristique pour l'EDO homogène est

$$X^2+1=0,$$

ainsi, les solutions complémentaires sont des combinaisons linéaires de $\exp(\pm ix)$ ou $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Pour $x<z$ nous avons, car $G(0,z)=0$,

$$G(x,z)=A_-(z)\sin(x),$$

et pour $x>z$ nous avons, car $G(\pi/2,z)=0$,

$$G(x,z)=A_+(z)\cos(x).$$

La continuité de G à $x=z$ donne

$$A_-(z)\sin(z)=A_+(z)\cos(z),$$

Ici la condition de saut est

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(x,z)|_{x=z_+}-\frac{d}{dx}G(x,z)|_{x=z_-} &= 1\\ \Rightarrow -A_+(z)\sin(z)-A_-(z)\cos(z) &= 1.\end{aligned}$$

Nous trouvons donc

$$\begin{aligned}A_+(z)\cos(z)-A_-(z)\sin(z) &= 0 \text{ continuité}\\ -A_+(z)\sin(z)-A_-(z)\cos(z) &= 1 \text{ condition de saut.}\end{aligned}$$

La solution est $A_-(z)=-\cos(z)$ and $A_+(z)=-\sin(z)$. La fonction de Green est donc

$$\begin{aligned}G(x,z) &= -\cos(z)\sin(x)\ ,x<z\\ G(x,z) &= -\sin(z)\cos(x)\ ,x>z.\end{aligned}$$

La solution de l'EDO est donc

$$\begin{aligned}y(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\ G(x,z)\mathrm{cosec(z)}\\ &= -\int_0^x dz\ \sin(z)\cos(x)\ \mathrm{cosec(z)}-\int_x^{\frac{\pi}{2}} dz\ \cos(z)\sin(x)\ \mathrm{cosec(z)}\\ &= -\cos(x)\int_0^x dz-\sin(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} dz\ \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.\\ &= -\cos(x)[z]_0^x-\sin(x)\left[\ln[\sin(z)]\right]_x^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -x\cos(x)+\sin(x)\ln[\sin(x)].\end{aligned}$$

Nous pouvons également résoudre l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + y(x) = f(x),$$

avec les mêmes conditions aux limites ci-dessus en notant qu'elle a exactement la même fonction de Green $G(x, z)$. La solution est

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz\ G(x,z)f(z) \\ &= -\int_0^x dz\ \ \sin(z)\cos(x)\ f(z) - \int_x^{\frac{\pi}{2}} dz\ \ \cos(z)\sin(x)\ f(z). \end{aligned}$$

Par exemple, si $f(x) = \sin(2x)$ nous avons

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int_0^x dz\ \ \sin(z)\cos(x)\sin(2z) - \int_x^{\frac{\pi}{2}} dz\ \ \cos(z)\sin(x)\sin(2z) \\ &= -\cos(x)\int_0^x dz\ 2\sin^2(z)\cos(z) - \sin(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} dz\ 2\sin(z)\cos^2(z) \\ &= -2\cos(x)\left[\frac{1}{3}\sin^3(z)\right]_0^x - 2\sin(x)\left[-\frac{1}{3}\cos^3(z)\right]_x^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{2}{3}\cos(x)\sin^3(x) - \frac{2}{3}\sin(x)\cos^3(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x) \end{aligned}$$

La fonction de Green dépend de l'opérateur $\mathcal{L}$ dans l'EDO et des conditions aux limites, mais pas de la fonction $f(x)$.

Considérons le système

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + y(x) = f(x),$$

avec conditions aux limites $y(0) = y'(0) = 0$. Ici nous avons

$$\begin{aligned} G(x,z) &= A_-(z)\sin(x) + B_-(z)\cos(x)\ \ x < z \\ G(x,z) &= A_+(z)\sin(x) + B_+(z)\cos(x)\ \ x > z. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites à $x = 0$ donne $A_-(z) = B_-(z) = 0$. La continuité de G at $x = z$ donne

$$A_+(z)\sin(z) + B_+(z)\cos(z) = 0,$$

et la condition de saut donne

$$A_+(z)\cos(z) - B_+(z)\sin(z) = 1. \tag{4.42}$$

Utilisons $B_+(z) = -A_+(z)\sin(z)/\cos(z)$ (continuité) dans éq. (4.42) :

$$\begin{aligned} A_+(z)\left[\cos(z) + \frac{\sin^2(z)}{\cos(z)}\right] &= 1 \\ \Rightarrow A_+(z) = \cos(z) \Rightarrow B_+(z) = -\sin(z). \end{aligned}$$

Donc pour $x > z$

$$G(x,z) = \cos(z)\sin(x) - \sin(z)\cos(x) = \sin(x-z).$$

La solution particulière qui vérifie les conditions aux limites homogènes données est donc

$$y_p(x) = \int_0^x dz\ \sin(x-z)f(z). \tag{4.45}$$

Si les conditions initiales ne sont pas homogènes mais ont la forme $y(0) = a$ et $y'(0) = b$ on écrit simplement

$$y(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + y_p(x)$$

où $y_p(x)$ est donné par Eq. (4.45), c'est la solution générale à† l'EDO. Les conditions aux limites à $x = 0$ donnent

$$\begin{aligned} a &= \alpha \\ b &= \beta, \end{aligned}$$

où nous avons utiliséeé $y_p(0) = 0$ et $y_p'(0) = 0$. EÉtant donnéeé un ensemble de conditions aux limites pour une EDO, il est préférable de trouver la fonction de Green pour les conditions aux limites lorsqu'elles sont rendues homogénes, trouver la solution particuliére correspondante, et puis la solution compléte en ajoutant la solution complémentaire requise. Par exemple, les conditions aux limites sont $y(a) = C$ et $y'(b) = D$, prendre les conditions aux limites homogénes pour que la fonction de Green : $G(a,z) = 0$ et $\frac{d}{dx}G(x,z)|_{x=b} = 0$. La solution compléte est alors donnée par

$$y(x) = \int_a^b dz\ G(x,z)f(z) + Ay_{c1}(x) + By_{c2}(x),$$

où $y_{c1}(x)$ et $y_{c2}(x)$ sont les deux solutions complémentaires. Les coefficients A et B sont alors facilement déterminéés à partir des conditions aux limite :

$$\begin{aligned} C &= Ay_{c1}(a) + By_{c2}(a) \\ D &= Ay_{c1}'(b) + By_{c2}'(b). \end{aligned}$$

4.5 Exercices

1. On rappel la definition de $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) f(x) = f(0),$$

pour toute fonction $f(x)$. A partir de cette définition montrer que

—
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0).$$

—
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta'(x) f(x) = -f'(0)$$

—
$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}.$$

— Si $h(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction avec $h(x_i) = 0$ pour un nombre fini de points x_i,
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(h(x)) f(x) = \sum_i \frac{f(x_i)}{|h'(x_i)|}.$$

2. On considère la fonction
$$\delta(\beta, x) = \frac{\beta}{2} \exp(-\beta|x|),$$

pour $\beta > 0$.
Dessiner la courbe de $\delta(\beta, x)$, comment évolue la courbe lorsque β augmente ?
Montrer que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(\beta, x) x^n &= 0 \text{ pour } n \text{ impair} \\ &= \frac{n!}{\beta^n} \text{ pour } n \text{ pair.} \end{aligned}$$

Pour une fonction $f(x)$ analytique (tel que son developement de Taylor $f(x) = \sum_n f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$ existe partout), montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \lim_{\beta \to \infty} \delta(\beta, x) f(x) = f(0),$$

et que donc
$$\lim_{\beta \to \infty} \delta(\beta, x) = \delta(x).$$

Demontrer un résultat similaire pour la fonction, mais dans la limite $\beta \to 0$,

$$\delta(\beta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp(-\frac{x^2}{2\beta}).$$

Intégrale utile :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \exp(-\frac{x^2}{2\beta}) = \sqrt{2\pi\beta}$$

3. Trouver la function de Green

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x,z) - G(x,z) = \delta(x-z)$$

avec comme conditions aux limites $G(0,z) = 0$ et $G(1,z) = 0$.

4. Soit y_1 et y_2 sont des solutions linéairement indépendantes de,

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + p(x) \frac{d}{dx} y(x) + q(x) y(x) = 0$$

avec les conditions aux limites $y_1(0) = 0$ et $y_2(1) = 0$. Montrer que la fonction de Green

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x,z) + p(x) \frac{d}{dx} G(x,z) + q(x) G(x,z) = \delta(x-z),$$

sur $0 \le x, \ z \le 1$, avec conditions aux limites $G(0,z) = 0$ et $G(1,z) = 0$, peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} G(x,z) &= \frac{y_1(x) y_2(z)}{W(z)} \ 0 \le x < z \\ G(x,z) &= \frac{y_2(x) y_1(z)}{W(z)} \ z < x \le 1 \end{aligned}$$

où $W(z) = W[y_1(z), y_2(z)]$ est le Wronskian de y_1 et y_2.

5. Utiliser le résultat de la question precédente pour trouver la fonction de Green

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x,z) + 3 \frac{d}{dx} G(x,z) + 2G(x,z) = \delta(x-z)$$

sur $0 \le x, \ z \le 1$, avec les conditions aux limites $G(0,z) = 0$ et $G(1,z) = 0$. Utiliser votre résultat pour résoudre

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 3 \frac{d}{dx} y(x) + 2y(x) = f(x, x_0)$$

ou

$$\begin{aligned} f(x, x_0) &= 0 \ , \ 0 < x < x_0 \\ f(x, x_0) &= 1 \ , \ x_0 < x < 1, \end{aligned}$$

pour (i) $x < x_0$ et (ii) $x > x_0$ (les conditions aux limites sont $y(0) = y(1) = 0$).

6. Trouver la fonction de Green

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,z) + 3\frac{d}{dx}G(x,z) = \delta(x-z)$$

pour $0 \le x,\ z \le 1$, avec les conditions aux limites $G(0,z) = 0$ et $\frac{d}{dx}G(1,z) = 0$. Utiliser votre résultat pour trouver la solution de

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 3\frac{d}{dx}y(x) = f(x),$$

avec $y(0) = 1$ et $y'(1) = 6$.

Chapitre 5

Solutions en forme de série

5.1 Introduction

Ici, nous considérons les équations différentielles de la forme

$$\frac{d^2}{dz^2}y(z) + p(z)\frac{d}{dz}y(z) + q(z)y(z) = 0. \tag{5.1}$$

En général, nous prenons $z \in \mathbb{C}$. Une fonction sur $\mathbb{C}$ s'appelle analytique àà $z = z_0$ s'il a une représentation convergente en séérie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Le développement de Laurent (développement de Taylor étendue aux fonctions complexes) montre que

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}f(z)|_{z=z_0}.$$

Le point z_0 est un *point ordinaire* de l'EDO Eq. (5.1) si $p(z)$ et $q(z)$ sont analytiques ´à $z = z_0$.

Si p ou q diverge à $z = z_0$ alors $z = z_0$ est appelé un point singulier de l'EDO. Cependant, même si le point $z = z_0$ est singulier, la solution y peut Ítre finie à $z = z_0$. Si $(z - z_0)p(z)$ et $(z - z_0)^2 q(z)$ sont finis à $z = z_0$ une solution finie $y(z)$ existe à $z = z_0$ et dans ce cas le point $z = z_0$ s'appelle *point singulier régulier*. Un point singulier qui ne satisfait pas ces critéres est appelé *point singulier irrègulier* ou *point singulier essentiel.*

L'équation de Legendre est

$$(1 - z^2)\frac{d^2}{dz^2}y(z) - 2z\frac{d}{dz}y(z) + l(l+1)y(z) = 0,$$

où l est une constante. Nous l'écrivons sous la forme standard

$$\frac{d^2}{dz^2}y(z) - \frac{2z}{1-z^2}\frac{d}{dz}y(z) + \frac{l(l+1)}{1-z^2}y(z) = 0,$$

et donc

$$\begin{aligned} p(z) &= -\frac{2z}{1-z^2} \\ q(z) &= \frac{l(l+1)}{1-z^2}. \end{aligned}$$

Nous voyons que $z=0$ est un point ordinaire alors que $z=\pm 1$ sont des points singuliers réguliers. Pour $z=1$ nous avons

$$\begin{aligned} (z-1)p(z) &= \frac{2z}{1+z} \\ (z-1)^2 q(z) &= \frac{l(l+1)(1-z)}{1+z}, \end{aligned}$$

et donc $z=1$ est donc un point singulier régulier.

Le comportement de l'EDO prés de $z=\infty$ peut éêtre analyséé en utilisant la variable $w=1/z$ et en examinant l'équation résultante à $w=0$. Nous utilisons

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{dy}{dw}}{\frac{dz}{dw}} = -w^2\frac{dy}{dw}$$

et

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -w^2\left(\frac{d}{dw}[-w^2\frac{dy}{dw}]\right) = w^4\frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\frac{dy}{dw}.$$

En termes de w l'EDO de Legendre devient

$$\begin{aligned} (1-\frac{1}{w^2})\left(w^4\frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\frac{dy}{dw}\right) + \frac{2}{w}w^2\frac{dy}{dw} + l(l+1)y &= 0 \\ w^2(w^2-1)\frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\frac{dy}{dw} + l(l+1)y &= 0. \end{aligned}$$

Ecrite sous la forme standard

$$\begin{aligned} p(w) &= \frac{2w}{w^2-1} \\ q(w) &= \frac{l(l+1)}{w^2(w^2-1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, à $w=0$ $p(w)$ est fini mais $q(w)$ diverge, cependant $w^2q(w)$ est fini, donc le point $w=0$ est un point singulier régulier.

5.2 Solutions en série autour de points ordinaires

Autour d'un point ordinaire, nous recherchons des solutions de la forme

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Nous utilisons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \\
\frac{d^2}{dz^2} y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Nous utilisons cette expression dans l'EDO, les coefficients de z^n sur le côté gauche de l'équation doivent tous être égauxà à zéro. Cela donne une relation de récurrence entre les coefficients a_n qui peuvent être utilisés pour trouver les solutions. Considérons

$$\frac{d^2}{dz^2} y(z) + y(z) = 0,$$

autour du point ordinaire $z = 0$. Nous trouvons ici

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

Les termes dans la deuxiéme somme sont proportionnels à z^n mais sont proportionnels à z^{n-2} dans la premiére somme. En suite, nous écrivons la premiére somme afin que les coefficients soient également de la forme z^n en écrivant $m = n - 2 \Rightarrow n = m + 2$ donc la somme passe de $m = -2$ à ∞

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} z^m,$$

car les termes avec $m = -2$ sont $m = -1$ nuls. Maintenant, nous appelons simplement m n et écrivons

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n.$$

L'EDO devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] z^n = 0.$$

L'équation ci-dessus est vraie pour tout z donc chaque coefficient de z^n doit être nul, donc nous trouvons la relation de récurrence

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0.$$

Si on suppose que $a_0 \neq 0$ on trouve

$$\begin{aligned} n = 0 \Rightarrow a_2 &= -\frac{a_0}{2} \\ n = 2 \Rightarrow a_4 &= -\frac{a_2}{4 \times 3} = \frac{a_0}{4 \times 3 \times 2} \\ n = 2m \Rightarrow a_{2m} &= \frac{a_0(-1)^m}{(2m)!}. \end{aligned}$$

En supposant que $a_1 = 0$ on voit que $a_3 = 0, \cdots a_{2m+1} = 0$ et donc nous avons la solution

$$y(z) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = a_0 \cos(z).$$

Pour trouver une autre solution, nous supposons que $a_1 \neq 0$ mais $a_0 = 0$. Cela donne

$$\begin{aligned} n = 1 \Rightarrow a_3 &= -\frac{a_1}{3 \times 2} \\ n = 3 \Rightarrow a_5 &= -\frac{a_3}{5 \times 4} = \frac{a_0}{5 \times \times 4 \times 3 \times 2} \\ n = 2m+1 \Rightarrow a_{2m+1} &= \frac{a_1(-1)^m}{(2m+1)!}. \end{aligned}$$

Cela donne la deuxiéme solution

$$y(z) = a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} = a_1 \sin(z).$$

La solution générale est donc

$$y(z) = a_0 \cos(z) + a_1 \sin(z).$$

L'équation

$$\frac{d^2}{dz^2} y(z) - \frac{2}{(1-z)^2} y(z) = 0$$

a un point ordinaire à $z = 0$. Utilisant la solution en forme de série et en multipliant par $(1-z)^2$ donne

$$\begin{aligned} (1 - 2z + z^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (z^{n-2} - 2z^{n-1} + z^n) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 0. \end{aligned}$$

Nous écrivons maintenant toutes les sommes pour avoir des termes de la forme z^n

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)na_{n+1} + a_n n(n-1) - 2a_n] = 0.$$

Le fait que tous les coefficients de z^n soient nulles donne maintenant la relation récurrence

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)na_{n+1} + (n(n-1) - 2)a_n = 0.$$

donc

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)na_{n+1} + (n^2 - n - 2)a_n &= 0 \\ (n+1))[(n+2)a_{n+2} - 2na_{n+1} + (n-2)a_n] &= 0 \\ \Rightarrow (n+2)a_{n+2} - 2na_{n+1} + (n-2)a_n &= 0. \end{aligned}$$

Cette équation détermine les valeurs de a_n pour $n \geq 2$ si a_1 et a_0 sont données. Nous voyons qu'une solution de la relation est $a_n = a_0$, ce qui donne

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 z^n = \frac{a_0}{1-z}.$$

Les premières équations pour les a_n sont

$$\begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow 2a_2 - 2a_0 = 0 \\ n = 1 &\Rightarrow 3a_3 - 2a_2 - a_1 = 0 \\ n = 2 &\Rightarrow 4a_4 - 4a_3 = 0 \\ n = 3 &\Rightarrow 5a_5 - 6a_4 + a_3 = 0. \end{aligned}$$

Si on pose $a_4 = a_3 = 0$ nous trouvons aussi que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 5$. L'équation pour $n = 0$ donne $a_0 = a_2$ et celle pour $n = 1$ donne $a_1 = -2a_2 = -2a_0$, et donc

$$y(z) = a_0 - 2a_0 z + a_0 z^2 = a_0(1-z)^2.$$

Cette solution montre que certaines solutions peuvent être des polynômes finis où $a_n = 0$ pour $n > N$. Ces solutions sont importantes car elles convergent pour tous z, elles seront discutées plus tard. Le point clé est que le coefficient de a_n devient zero pour une valeur $n = m$ (ici $m = 2$) et donc a_{m+1} et a_{m+2} peuvent être nuls pendant que $a_m \neq 0$.

5.3 Solution autour d'un point singulier régulier

En général, nous pouvons déplacer le point z_0 autour duquel on étudie une solution,àà $z_0 = 0$ en écrivant $\zeta = z - z_0$. Autour de $z = 0$ l'EDO prend la forme

$$\frac{d^2}{dz^2}y(z) + p(z)\frac{d}{dz}y(z) + q(z)y(z) = 0.$$

Si $z = 0$ est un point singulier régulier, alors $zp(z)$ et $z^2q(z)$ sont analytiques et donc

$$
\begin{aligned}
zp(z) &= t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n \\
z^2 q(z) &= s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n.
\end{aligned}
$$

Un thd́oréme dû à Fuchs affirme qu'il existe au moins une solution à l'EDO sous la forme d'une série de Frobenius

$$
y(z) = z^{\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{5.29}
$$

où $a_0 \neq 0$. Nous écrivons l'EDO comme

$$
\frac{d^2}{dz^2} y(z) + \frac{t(z)}{z} \frac{d}{dz} y(z) + \frac{s(z)}{z^2} y(z) = 0. \tag{5.30}
$$

En utilisant la série Eq. (5.29) dans l'équation (5.30) donne

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sigma + n)(\sigma + n - 1) z^{\sigma+n-2} + t(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sigma + n) z^{\sigma+n-2} + s(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\sigma+n-2} = 0.
$$

Divisons par $z^{\sigma-2}$

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sigma + n)(\sigma + n - 1) z^n + t(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sigma + n) z^n + s(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.
$$

Maintenant, posons $z = 0$ - tous les termes avec $n > 1$ sont maintenant nuls et nous trouvons

$$
a_0 \sigma(\sigma - 1) + t(0) a_0 \sigma + s(0) a_0 = 0.
$$

Maintenant, comme nous l'avons précisé que $a_0 \neq 0$ nous trouvons l'équation *indicielle* pour σ :

$$
\sigma(\sigma - 1) + t(0)\sigma + s(0) = 0,
$$

qui, en général, a deux racines complexes. En général, la plus grande solution σ_1 conduit á une solution sous la forme d'une série de Frobenius, la forme de la seconde solution dépend de la relation entre σ_1 and σ_2.

5.3.1 $\sigma_1 - \sigma_2 \notin \mathbb{Z}$

Si $\sigma_1 - \sigma_2 \notin \mathbb{Z}$, alors les deux solutions en série

$$
y_1(z) = z^{\sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad y_2(z) = z^{\sigma_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,
$$

sont clairement deux solutions linéairement indépendantes (y_1/y_2 n'est pas une constante car $\sigma_1 - \sigma_2$ n'est pas un nombre entier).

Exemple

Considérons les solutions de

$$4z\frac{d^2}{dz^2}y(z) + 2\frac{d}{dz}y(z) + y(z) = 0.$$

Dans la forme standard, cette EDO est

$$\frac{d^2}{dz^2}y(z) + \frac{1}{2z}\frac{d}{dz}y(z) + \frac{1}{4z}y(z) = 0.$$

En conséquence, $p(z) = 1/2z$ et $q(z) = 1/4z$, mais le point $z = 0$ est un point singulier régulier car $t(z) = zp(z) = 1/2$ et $s(z) = z^2q(z) = z/4$ sont analytiques à $z = 0$. La substitution de la série Frobenius dans l'EDO donne

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n z^{n+\sigma-2} + \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)a_n z^{n+\sigma-1} + \frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+\sigma} = 0$$

La division par $z^{\sigma-2}$ donne maintenant

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n z^{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)a_n z^{n} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+1} &= 0\\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n[(n+\sigma)(n+\sigma-1) + \frac{1}{2}(n+\sigma) + \frac{1}{4}z] &= 0.\end{aligned}$$

Si nous posons $z = 0$, nous trouvons l'équation indicielle

$$\sigma(\sigma-1) + \frac{1}{2}\sigma = \sigma(\sigma - \frac{1}{2}) = 0.$$

Nous obtenons donc $\sigma_1 = 1/2$ et $\sigma_2 = 0$. Notons que $\sigma_1 - \sigma_2 = 1/2 \notin \mathbb{Z}$, alors nous attendons deux solutions sous la forme de la série Frobenius. La relation de récurrence est

$$a_n[(n+\sigma)(n+\sigma-1) + \frac{1}{2}(n+\sigma)] + \frac{1}{4}a_{n-1} = 0.$$

Quand $\sigma_1 = 1/2$ nous trouvons

$$\begin{aligned}a_n[n^2 + \frac{1}{2}n] + \frac{1}{4}a_{n-1} &= 0\\ \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(2n+1)}.\end{aligned}$$

La relation de récurrence donne maintenant

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{a_0}{2\times 3}\\ a_2 &= -\frac{a_1}{4\times 5} = \frac{a_0}{2\times 3\times 4\times 5}\\ a_n &= \frac{a_0(-1)^n}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

La solution correspondante est

$$\begin{aligned} y_1(z) &= a_0 z^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} [z^{\frac{1}{2}}]^{2n+1} = a_0 \sin(z^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Dans le cas où $\sigma = 0$ la relation de récurrence est

$$\begin{aligned} a_n[n^2 - n + \frac{1}{2}n] + \frac{1}{4}a_{n-1} &= 0 \\ \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{4n^2 - 2n} = -\frac{a_{n-1}}{2n(2n-1)} \end{aligned}$$

La solution à la relation de récurrence est

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!},$$

et nous trouvons

$$y_2(z) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} [z^{\frac{1}{2}}]^{2n} = \cos(z^{\frac{1}{2}}).$$

La solution générale l'équation est

$$y(z) = c_2 \sin(z^{\frac{1}{2}}) + c_1 \cos(z^{\frac{1}{2}}).$$

5.3.2 $\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z} \neq 0$

Si les deux racines de l'équation indicielle sont différentes par un nombre entier non nul, alors les deux séries de Frobenius peuvent correspondre à des solutions indépendantes, mais elles peuvent également donner la même solution.

Considérons l'EDO

$$z(z-1)\frac{d^2}{dz^2}y(z) + 3z\frac{d}{dz}y(z) + y(z) = 0, \tag{5.42}$$

autour de $z = 0$. Dans la forme standard, nous avons

$$\frac{d^2}{dz^2}y(z) + \frac{3}{z-1}\frac{d}{dz}y(z) + \frac{1}{z(z-1)}y(z) = 0. \tag{5.43}$$

Voici $p(z) = 3/(z-1)$ et est analytique à $z = 0$, mais $q(z) = 1/z(z-1)$ n'est pas analytique à $z = 0$ donc le point est singulier. Cependant, nous avons $s(z) = z^2 q(z) = z/(z-1)$ qui est analytique à $z = 0$, et donc le point $z = 0$ est un point singulier régulier. En utilisant la série de Frobenius dans l'équation (5.43) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n z^{n+\sigma-2} + \frac{3}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)a_n z^{n+\sigma-1} + \frac{1}{z(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+\sigma} = 0,$$

et en divisant par $z^{\sigma-2}$ nous trouvons

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(n+\sigma)(n+\sigma-1)z^n + \frac{3z}{z-1}(n+\sigma)z^n + \frac{z}{(z-1)}z^n\right] = 0. \tag{5.44}$$

En posant $z = 0$, nous obtenons l'équation indicielle

$$\sigma(\sigma-1) = 0,$$

donc $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_1 - \sigma_2 = 1 \in \mathbb{Z}$. Multiplication de l'équation (5.44) par $(z-1)$ donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(n+\sigma)(n+\sigma-1)z^n(z-1) + 3z(n+\sigma)z^n + zz^n\right] = 0.$$

Maintenant, nous écrivons la somme pour que chaque terme ait les mêmes coefficients de z^n

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[(n-1+\sigma)(n+\sigma-2)a_{n-1} - (n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n + 3(n-1+\sigma)a_{n-1} + a_{n-1}\right] = 0.$$

La relation de récurrence est donc

$$(n-1+\sigma)(n+\sigma-2)a_{n-1} - (n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n + 3(n-1+\sigma)a_{n-1} + a_{n-1} = 0,$$

et, en simplifiant, nous trouvons

$$(n+\sigma-1)a_n = (n+\sigma)a_{n-1}.$$

Pour le cas $\sigma = 1$, nous trouvons

$$a_n = \frac{(n+1)}{n}a_{n-1},$$

nous voyons donc que

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a_0 \\ a_2 &= \frac{3}{2}a_1 = 3a_0 \\ a_n &= (n+1)a_0, \end{aligned}$$

en conséquence

$$\begin{aligned} y_1(z) &= a_0 z \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = a_0 z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\ &= a_0 z \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = a_0 z \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

Si nous prenons la solution $\sigma = 0$ nous trouvons la relation de récurrence

$$(n-1)a_n = n a_{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1}.$$

Comme $a_0 \neq 0$, on voit que $a_1 = \infty$, donc la solution n'existe pas. Nous devons donc trouver une autre méthode pour trouver une seconde solution. Une deuxiéme solution peut être trouvée en utilisant le wronskien. La méthode la plus simple est la méthode des dérivéés, cependant les cas où nous avons besoin de cette méthode sont assez rares et nous l'expliquons dans l'annexe 9.3.

5.4 Solutions polynomiales

Une solution polynomiale à une EDO prend la forme

$$y(z) = z^{\sigma} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n,$$

où $\sigma \in \mathbb{N}$. Le dégré du polynôme est $N + \sigma$. Ces solutions sont importantes en physique car elles sont analytiques partout. Considérons

$$\frac{d^2}{dz^2} y(z) - 2z \frac{d}{dz} y(z) + \lambda y(z) = 0.$$

Le point $z = 0$ est ordinaire et nous trouvons la relation de récurrence

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n - \lambda)a_n = 0,$$

et donc

$$a_{n+2} = \frac{(2n-\lambda)a_n}{(n+2)(n+1)}.$$

Nous pouvons avoir deux types de solutions, dont un avec $a_0 \neq 0$ mais $a_1 = 0$ qui ne contient que des puissances de z (n) paires et l'autre où $a_0 = 0$ mais $a_1 \neq 0$ qui n'a que des puissances de z (n) impaires. Nous voyons que si $\lambda = 2m$ pour $m \in \mathbb{N}$ alors les solutions série se terminent à $n = m$ (bien sûr, une série entière finie n'est qu'un polynôme).

Dans la mécanique quantique, ce mécanisme conduit à la quantification de l'énergie (ce qui correspond à λ dans l'équation de Schrödinger).

Par exemple, pour $\lambda = 4$, nous avons la solution

$$\begin{aligned} a_2 &= a_0 \frac{-4}{2} \\ a_4 &= 0 \end{aligned}$$

et donc

$$y(z) = a_0(1 - 2z^2).$$

5.5 Exemple - oscillateur harmonique quantique

L'équation de Schrödinger pour les fonctions d'onde indépendantes du temps d'un oscillateur harmonique est

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi(x) = E\psi(x),$$

où E est l'énergie de la fonction d'onde. Si nous effectuons le changement de variables $x = \alpha y$ l'équation devient

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m\alpha^2}\frac{d^2}{dy^2}\psi(y) + \frac{\alpha^2}{2}m\omega^2 y^2\psi(y) &= E\psi(y) \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\psi(y) + \frac{\alpha^4}{2\hbar^2}m^2\omega^2 y^2\psi(y) &= \frac{\alpha^2 m}{\hbar^2}E\psi(y). \end{aligned}$$

Maintenant, si nous choisissons $\frac{\alpha^4}{\hbar^2}m^2\omega^2 = 1$, et donc $\alpha = \sqrt{\hbar/m\omega}$, nous trouvons

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\psi(y) + \frac{1}{2}y^2\psi(y) = \frac{1}{\hbar\omega}E\psi(y) = \epsilon\psi(y) \tag{5.54}$$

La variable y correspond à la distance mesurée en unit'es de l'échelle de longueur quantique α et $\epsilon = E/\hbar\omega$ est l'énergie mesurée en unités de l'échelle d'énergie quantique $\hbar\omega$. Notons que $\psi_0(y) = \exp(-y^2/2)$ obéit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\psi_0(y) + \frac{1}{2}y^2\psi_0(y) &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left[-y\exp(-\frac{y^2}{2})\right] + \frac{1}{2}y^2\exp(-\frac{y^2}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\exp(-\frac{y^2}{2}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\psi_0(y) + \frac{1}{2}y^2\psi_0(y) = \frac{1}{2}\psi_0(y),$$

et donc ψ_0 est une fonction d'onde stationnaire d'énergie $\epsilon_0 = 1/2$ (donc $E_0 = \hbar\omega/2$). Remarquons que

$$\int dx\ \psi(x)^2 = 1 \Rightarrow \alpha \int dy\ \psi(y)^2 = 1.$$

car la fonction d'onde doit être normalisée. Il est essentiel, pour une fonction d'onde ψ, que $\int dy\ \psi(y)^2$ existe pour qu'il puisse être normalisée en multipliant par la constante appropriée. Nous recherchons d'autres fonctions d'ondes sous la forme

$$\psi(y) = H(y) \exp(-\frac{y^2}{2}).$$

En utilisant cela dans l'équation (5.54), nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(-y\exp(-\frac{y^2}{2})H(y) + \exp(-\frac{y^2}{2})\frac{dH}{dy}(y)\right) + \frac{1}{2}y^2\exp(-\frac{y^2}{2})H(y) &= \epsilon\exp(-\frac{y^2}{2})H(y) \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{d^2H}{dy^2}(y) + y\frac{dH}{dy}(y) + \frac{1}{2}H(y) = \epsilon H(y). \end{aligned}$$

L'équation de Hermite est

$$\frac{d^2H}{dy^2}(y) - 2y\frac{dH}{dy}(y) + 2\nu H(y) = 0 \tag{5.59}$$

et donc l'équation (5.58) est l'équation d'Hermite avec $2\nu = 2\epsilon - 1$. Le point $y = 0$ est un point ordinaire de l'équation d'Hermite. Si nous posons $H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ dans l'équation (5.59) nous trouvons

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)y^{n-2} - 2a_n n y^n + 2\nu a_n y^n = 0 \\ \Rightarrow &\sum_{n=0}^{\infty}[a_{n+2}(n+2)(n+1) - 2a_n n + 2\nu a_n]y^n, \end{aligned}$$

qui donne la relation de récurrence

$$a_{n+2} = 2a_n\frac{n-\nu}{(n+2)(n+1)}. \tag{5.62}$$

Nous voyons qu'il existe des solutions où $a_0 \neq 0$ et $a_1 = 0$ qui sont des fonctions d'onde paires (symétriques) et des solutions où $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ qui sont des fonctions d'ondes impaires (antisymétriques). Pour $n \gg 1$ nous trouvons que, pour les solutions paires $n = 2m$,

$$\frac{a_{2m+2}}{a_{2m}} \approx \frac{2}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow a_{2m} \approx a_0\frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)\cdots 1} \approx \frac{a_0}{m!}$$

et donc pour $y \gg 1$
$$H(y) \approx a_0 \sum_m \frac{1}{m!} y^{2m} \approx a_0 \exp(y^2).$$
Mais maintenant nous avons
$$\psi(y) = \exp(-\frac{1}{2}y^2)H(y) \approx a_0 \exp(\frac{1}{2}y^2).$$
La solution n'est pas bonne car $\psi^2(y) \to \infty$ quand $y \to \infty$. Nous trouvons la même problème pour les solutions impaires. La série doit donc être finie, c'est-à-dire un polynôme.

Pour avoir des solutions polynômes, nous devons avoir $\nu = m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Si nous prenons $\nu = 0$, nous retrouvons la solution ψ_0 avec $H_0(y) = \textit{const}$. (La constante est déterminée à partir de la normalisation de la fonction d'onde). La solution ψ_0 corresponde à l'état fondamental - l'état ayant la plus basse énergie. En conséquence, nous trouvons que
$$2\nu = 2\epsilon - 1 = 2m \Rightarrow \epsilon = m + \frac{1}{2} \Rightarrow E = (m + \frac{1}{2})\hbar\omega,$$
c'est la quantification des niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique.

Nous pouvons utiliser Eq. (5.62) pour construire les polynômes d'Hermite. Nous avons vu que $H_0(0) = a_0$, pour H_1 nous cherchons un polynôme impair, nous posons donc $a_0 = 0$ et $\nu = 1$. Ici $a_1 \neq 0$, mais nous trouvons $a_3 = 0$ quand $n = \nu = 1$ dans Eq. (5.62), et donc $H_1(z) = a_1 z$. Quand $\nu = 2$ nous avons
$$a_2 = -2a_0 \Rightarrow H_2(z) = a_0(1 - 2z^2).$$
Quand $\nu = 3$, nous trouvons
$$a_3 = -2a_1(1-3)/(3 \cdot 2) = -2/3 \Rightarrow H_3(z) = a_1(z - \frac{2}{3}z^3)$$
Pour la solution générale, quand $\nu = m \in \mathbb{Z}^+$, pour $n \leq \nu$ et ν (et donc ensuite n) pair
$$\frac{a_n}{a_{n-2}} = -2\frac{\nu + 2 - n}{n(n-1)} = \frac{(-2)^{\frac{n}{2}}}{(-2)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{(n-2)!}{n!} \frac{(\nu + 2 - n)!!}{(\nu - n)!!}$$
où $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 2$ pour n pair et $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 1$ pour n impair. Nous trouvons donc
$$a_n n!(\nu - n)!!(-2)^{\frac{-n}{2}} = a_{n-2}(n-2)!(\nu - [n-2])!!(-2)^{\frac{-n+2}{2}},$$
c'est-à-dire
$$a_n n!(\nu - n)!!(-2)^{\frac{-n}{2}} = c,$$

où c est un constante, et donc

$$a_n = c(-1)^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(\nu - n)!!n!}$$

Pour n pair $n!! = (n/2)!2^{\frac{n}{2}}$, pour n impair on utilise $n!!(n-1)!! = n!$ et donc $n!! = n!/([(n-1)/2]!2^{\frac{n-1}{2}})$, donc

$$a_n = c(-1)^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(\frac{\nu-n}{2})!2^{\frac{\nu-n}{2}} n!} = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-\frac{\nu}{2}} \frac{1}{(\frac{\nu-n}{2})!n!}$$

Nous trouvons donc

$$H_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\frac{\nu}{2}} a_{2m} x^{2m} = c \sum_{m=0}^{\frac{\nu}{2}} 2^{2m-\frac{\nu}{2}} (-1)^m \frac{1}{\frac{\nu-2m}{2}!(2m)!} x^{2m},$$

en physique la forme standard est

$$H_\nu(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{\nu}{2}]} (-1)^k \frac{1}{k!(\nu-2k)!} (2x)^{\nu-2k}.$$

5.6 Exercices

1. Déterminer la nature (ordinaire, singulier régulier et singulier irrégulier) des points $z = 0$, $z = 1$ et $z = \infty$ pour les EDOs suivantes

$$z(z-1)\frac{d^2}{dz^2}y(z) + [c - (a+b+1)z]\frac{d}{dz}y(z) - aby(z) = 0$$

$$(1-z)^2\frac{d^2}{dz^2}y(z) - z\frac{d}{dz}y(z) + \nu^2 y(z) = 0$$

$$z\frac{d^2}{dz^2}y(z) + (1-z)\frac{d}{dz}y(z) + \nu y(z) = 0$$

2. Trouver deux solutions en série autour de $z = 0$ de l'EDO (équation de Legendre)

$$(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}y(z) - 2z\frac{d}{dz}y(z) + \lambda y(z) = 0.$$

   Déduire que quand $\lambda = n(n+1)$ (pour $n \in \mathbb{Z}$), qu' une des deux séries est un polynome $U_n(z)$, et que c'est la solution paire si n est pair et la solution impair quand n est impair. Donner les polynomes $U_2(z)$, $U_3(z)$ et $U_4(z)$ (*attention* : si n est impair il existe une solution paire en z mais le série n'est pas polynôme).

3. Trouver les solutions, en série en z, de
$$4z\frac{d^2}{dz^2}y(z) + 2(1-z)\frac{d}{dz}y(z) - y(z) = 0.$$
Identifier une des solutions et la vérifier par substitution directe.
4. Trouver les solutions, en série en z, de
$$\frac{d^2}{dz^2}y(z) + 2(z-\alpha)\frac{d}{dz}y(z) + 4y(z) = 0.$$
en termes de $\zeta = z - \alpha$. Trouver, en forme de série, deux solutions indépendantes autour de $\zeta = 0$. En déduire que la solution générale est
$$y(z,\alpha) = A(z-\alpha)\exp(-[z-\alpha]^2) + B\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-4)^m m!}{(2m)!}(z-\alpha)^{2m},$$
oú A et B sont des constantes arbitraires.
5. Montrer que $z = 0$ est un point singulier régulier de l'EDO
$$z^2\frac{d^2}{dz^2}y(z) - \frac{3}{2}z\frac{d}{dz}y(z) + (1+z)y(z) = 0,$$
et que les indices sont $\sigma = 2$ et $\sigma = 1/2$. Montrer que la solution générale est
$$y(z) = a_0 z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)2^{2n}z^n}{(2n+3)!} + b_0\left(z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{3}{2}} - \frac{z^{\frac{1}{2}}}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}z^n}{n(n-1)(2n-3)!}\right).$$
6. Montrer que $z = 0$ est un point singulier régulier de l'EDO
$$z\frac{d^2}{dz^2}y(z) - 2\frac{d}{dz}y(z) + y(z)z = 0.$$
Montrer que les solutions de l'équation indicielle sont diffèrentes d'un entier mais que les deux solutions correspondantes sont linéairement independantes et sont données par
$$\begin{aligned} y_1(z) &= a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2nz^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ y_2(z) &= b_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$
En utilisant le développement en série de $\sin(z)$ et $\cos(z)$, montrer que
$$y_1(z) = a_0[\sin(z) - z\cos(z)].$$
Calculer le wronskien et utiliser votre résultat pour trouver $y_2(z)$. *Intégrale utile* :
$$\int dz\frac{z^2}{(\sin(z) - z\cos(z))^2} = \frac{z\sin(z) + \cos(z)}{z\cos(z) - \sin(z)}.$$

7. Trouver les solutions, en série en z, de

$$z\frac{d^2}{dz^2}y(z) - 2\frac{d}{dz}y(z) + 9z^5y(z) = 0.$$

Trouver les expressions explicites y_1 et y_2 pour ces solutions et calculer leur wronskien W. Comparer votre résultat avec le calcul direct de W à partir de l'EDO.

Chapitre 6

théorie de Sturm-Liouville

6.1 Espaces de fonctions

Comme indiqué précédmment, l'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ mappe des fonctions à des fonctions de la même maniére qu'une matrice mappe les vecteurs aux vecteurs. En physique, l'espace fonctionnel rencontré le plus souvent (en raison de son apparition naturelle dans la mécanique quantique) est $\mathcal{H}^2([a,b],\omega(x))$ qui est l'espace vectoriel des fonctions munies d'un produit scalaire entre deux fonctions

$$(f,g) = \int_a^b dx\ \omega(x) f^*(x) g(x)$$

(si $z \in \mathbb{C}$ et $z = x + iy$ pour x et $y \in \mathbb{R}$: $z^* = x - iy$). Ce type d'espace vectoriel de fonctions s'appelle un espace de Hilbert. La fonction $\omega(x) > 0\ \forall\ x \in [a,b]$. La définition ci-dessus satisfait aux critéres généraux d'un produit scalaire.

1. $(f,g) = (g,f)^*$
2. $(f,ag) = a(f,g)$ pour $a \in \mathbb{C}$.
3. $(f,f) = 0 \iff f = 0$.

Les éléments matriciels des opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert sont donnés par

$$(f,\mathcal{L}g) = \int_a^b dx\ \omega(x) f^*(x) \mathcal{L}g(x).$$

L'adjoint $\mathcal{L}^\dagger$ d'un opérateur linéaire $\mathcal{L}$ est défini par

$$(f,\mathcal{L}g) = (\mathcal{L}^\dagger f, g).$$

Dans la mécanique quantique, les observables physiques réels correspondent aux valeurs propres des opérateurs de la mécanique quantique. Une fonction propre $f_\lambda(x)$ d'un opérateur linéaire est défini à partir de

$$\mathcal{L} f_\lambda = \lambda f_\lambda,$$

où λ est la valeur propre et $f_\lambda(x) \neq 0$. Une fonction propre normalisée est telle que

$$(f_\lambda, f_\lambda) = 1.$$

Les valeurs propres correspondant aux observables physiques doivent être réelles, une maniére de garantir qu'un opérateur posséde des valeurs propres réelles est de s'assurer qu'il est auto-adjoint, c'est-à-dire

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger.$$

Les valeurs propres des opérateurs auto-adjoints sont réelles

Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$, les valeurs propres de $\mathcal{L}$ sont réelles. Pour voir cela, nous considérons

$$(f_\lambda, \mathcal{L} f_\lambda) = (f_\lambda, \lambda f_\lambda) = \lambda (f_\lambda, f_\lambda)$$

Aussi

$$\begin{aligned}
(f_\lambda, \mathcal{L} f_\lambda) &= (\mathcal{L}^\dagger f_\lambda, f_\lambda) = (\mathcal{L} f_\lambda, f_\lambda) \\
&= (\lambda f_\lambda, f_\lambda) = (f_\lambda, \lambda f_\lambda)^* = (\lambda (f_\lambda, f_\lambda))^* = \lambda^* (f_\lambda, f_\lambda).
\end{aligned}$$

En comparant ces deux équations et notant que $(f_\lambda, f_\lambda) = 1$ on voit que $\lambda = \lambda^*$ donc λ est réelle.

Les fonctions propres avec différent valeurs propres sont orthogonales

Considérons deux valeurs propres différentes λ et μ d'un opérateur auto adjoint $\mathcal{L}$, c'est-à-dire.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} f_\lambda &= \lambda f_\lambda \\
\mathcal{L} f_\mu &= \mu f_\mu.
\end{aligned}$$

Prenons le produit scalaire de la premiére équation avec f_μ pour trouver

$$\begin{aligned}
(f_\mu, \mathcal{L} f_\lambda) &= \lambda (f_\mu, f_\lambda) \\
= (\mathcal{L}^\dagger f_\mu, f_\lambda) &= (\mathcal{L} f_\mu, f_\lambda) = (\mu f_\mu, f_\lambda) = \mu (f_\mu, f_\lambda).
\end{aligned}$$

Donc

$$(\mu - \lambda)(f_\mu, f_\lambda) = 0,$$

et si $\mu \neq \lambda$ nous trouvons $(f_\mu, f_\lambda) = 0$.

6.2 Probléme de Sturm-Liouville

Un probléme de Sturm-Liouville est l'équation

$$\mathcal{L}y(x) = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)y(x) = \lambda\omega(x)y(x),$$

avec un ensemble de conditions aux limites, de type Sturm-Liouville, qui sont choisis de sorte que l'opérateur, définit à travers son action sur une fonction arbitraire f,

$$Lf = \frac{1}{\omega(x)}\left(-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}f(x)\right] + q(x)f(x)\right),$$

est auto adjoint. En termes de L le probléme de Sturm-Liouville devient le probléme de valeur propre

$$Ly = \lambda y.$$

A fin de trouver $L^\dagger$ nous utilisons

$$(f, Lg) = \int_a^b dx\ f^*(x)\left(-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right] + q(x)g(x)\right) = (L^\dagger f, g)$$

Pour voir ce que $L^\dagger$ est, nous devons faire agir les opérateurs sur f^* plutôt que g. Nous faisons cela par une premiére d'intégration par partie pour trouver

$$(f, Lg) = \left[-f^*(x)p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]_a^b + \int_a^b dx\ \frac{d}{dx}f^*(x)\left[p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right] + q(x)g(x)f^*(x),$$

ensuite une deuxiéme intégration par partie donne

$$\begin{aligned}
&(f, Lg)\\
= &-\left[f^*(x)p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]_a^b + \left[\frac{d}{dx}f^*(x)p(x)g(x)\right]_a^b + \int_a^b dx\ g(x)\left(-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}f^*(x)\right] + q(x)f^*(x)\right)\\
= &-\left[f^*(x)p(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]_a^b + \left[\frac{d}{dx}f^*(x)p(x)g(x)\right]_a^b + \int_a^b dx\ \omega(x)g(x)Lf^*(x)\\
= &\ f^*(a)p(a)\frac{d}{dx}g(a) - \frac{d}{dx}f^*(a)p(a)g(a) + \frac{d}{dx}f^*(b)p(b)g(b) - f^*(b)p(b)\frac{d}{dx}g(b) + (Lf, g)
\end{aligned}$$

Nous trouvons donc $(f, Lg) = (Lf, g) \Rightarrow L = L^\dagger$ si

$$p(a)[f^*(a)\frac{d}{dx}g(a) - \frac{d}{dx}f^*(a)g(a)] + p(b)[\frac{d}{dx}f^*(b)g(b) - f^*(b)\frac{d}{dx}g(b)] = 0,$$

ou

$$p(a)[f^*(a)g'(a) - f'^*(a)g(a)] + p(b)[f'^*(b)g(b) - f^*(b)g'(b)]$$

Il existe un certain nombre de cas généraux de conditions aux limites où l'opérateur L est auto-adjoint. Les termes à chaque point limite peuvent s'annuler de façcon identique si, par exemple au point limite $x = a$, $p(a) = 0$ ou si $f^*(a)g'(a) - f'^*(a)g(a) = 0$. Ce second cas est vrai lorsque les fonctions f et g obééissent à une condition limite homogéne de la forme $Ay(a) + By'(a) = 0$, car ici on peut écrire

$$\begin{aligned} g'(a) &= -\frac{A}{B}g(a) \\ f'(a) &= -\frac{A}{B}f(a) \end{aligned}$$

et donc

$$f^*(a)g'(a) - f'^*(a)g(a) = -f^*(a)g(a)\frac{A}{B} + f^*(a)g(a)\frac{A}{B} = 0.$$

Nous trouvons la même à $x = b$. Sinon, nous pouvons aussi avoir $p(a) = 0$. Un dernier cas, assez commun, est celui où le systéme est périodique et où donc $p(a) = p(b)$, et aussi $y(a) = y(b)$ et $y'(a) = y'(b)$.

définition d'un systéme Sturm Liouville

(I) Equation pour les fonctions propres de la forme

$$\mathcal{L}y(x) = \lambda\omega(x)y(x),$$

avec

$$\mathcal{L}y(x) = -\left[\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)y(x),$$

ou la même équation écrite comme

$$Ly(x) = \lambda y(x),$$

avec

$$Ly(x) = \frac{1}{\omega(x)}\left(-\left[\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)y(x)\right).$$

(II) Conditions limites

(a) Conditions aux limites réguliéres de la forme :

1. Conditions aux limites homogénes aux points a et b

(b) Conditions aux limites irréguliéres ou singuliers de la forme :

1. Conditions aux limites homogénes à a et $p(b) = 0$ et aucune condition aux limites à $x = b$ - ou des conditions aux limites homogénes à b et $p(a) = 0$ et aucune condition aux limites à $x = a$.
2. $p(a) = p(b)$ et les conditions aux limites périodiques.
3. $p(a) = p(b) = 0$ et aucune condition aux limites.
4. L'intervalle $[a, b]$ est infini et les solutions doivent être choisies telles que (y, y) existe (normalisation de la fonction d'onde en mécanique quantique).

Propreétés mathématiques

1. Les valeurs propres d'un systéme de Sturm-Liouville sont non dégénéérées, c'est-à-dire si $Ly_1 = \lambda y_1$ et $Ly_2 = \lambda y_2$ alors $y_2 = cy_1$ où y_1 est une constante - voir les exercices.
2. Si $f \in \mathcal{H}$ et y_k sont les fonctions propres normalisées avec valeurs propres λ_k alors nous pouvons exprimer f sur la base des fonctions propres

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k y_k(x), \tag{6.12}$$

avec $f_k = (y_k, f) = \int_a^b dx\ y_k^*(x) f(x) \omega(x)$. Une preuve grossiére est de supposer que $f(x)$ peut être écrit comme la somme dans l'équation (6.12) et prend le produit scalaire avec y_n

$$(y_n, f) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (y_n, y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta_{nk} = f_n. \tag{6.13}$$

3. La fonction delta de Dirac sur $\mathcal{H}$ peut être écrite comme

$$\delta(x - y) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(y) y_n^*(y) y_n(x).$$

Rappelons que la définition de la fonction delta est la suivante : pour toute fonction $f \in \mathcal{H}$

$$\int_a^b dy\ \delta(x - y) f(y) = f(x).$$

Ici nous avons

$$\int_a^b dy [\sum_{n=0}^{\infty} \omega(y) y_n^*(y) y_n(x)] f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)(y_n, f) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n y_n(x) = f(x).$$

4. Nous pouvons résoudre des problémes inhomogénes de la forme

$$\mathcal{L}y(x) = -\left[\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} y(x)\right] + q(x) y(x) = f(x),$$

avec les mêmes conditions aux limites que le probléme homogéne. Nous savons déjà que la solution peut être écrit avec la fonction de Green comme

$$y(x) = \int_a^b dx' G(x, x') f(x'),$$

avec la fonction de Green définie comme $\mathcal{L}G(x,x') = \delta(x-x')$. Nous écrivons l'équation inhomogéne comme

$$Ly = \frac{f}{\omega},$$

(rappelons que $L = \omega^{-1}\mathcal{L}$). Ensuite, nous recherchons une solution de la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x),$$

et nous exprimons f/ω comme $f(x)/\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_k y_k(x)$ avec $\mu_k = (y_k, f/\omega)$ en utilisant équation (6.13) . Cela donne

$$Ly = \frac{f(x)}{\omega(x)} \Rightarrow \sum_n a_n \lambda_n y_n = \sum_n \mu_n y_n$$

et donc $a_n = \mu_n/\lambda_n$ et

$$y(x) = \sum_n \frac{\mu_n}{\lambda_n} y_n(x) = \sum_n [\int_a^b dx' \frac{1}{\lambda_n} \omega(x') y_n^*(x') \frac{f(x')}{\omega(x')}] y_n(x) = \int_a^b dx' G(x,x') f(x'),$$

où G est donc la fonction de Green

$$G(x,x') = \sum_n \frac{y_n^*(x') y_n(x)}{\lambda_n}.$$

Nous voyons donc que $G(x,x') = G^*(x',x)$. Nous pouvons vérifier que c'est bien la fonction de Green en remarquant que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}G(x,x') &= \omega(x) L G(x,x') = \omega(x) L \sum_n \frac{y_n^*(x') y_n(x)}{\lambda_n} \\
&= \omega(x) \sum_n \frac{y_n^*(x') L y_n(x)}{\lambda_n} = \sum_n y_n^*(x') \omega(x) y_n(x) = \left(\sum_n y_n(x') \omega(x) y_n^*(x) \right)^* \\
&= \delta(x'-x)^* = \delta(x-x')
\end{aligned}$$

5. Solution d'équations aux dérivées partielles avec dépendance temporelle. Souvent nous rencontrons des équations de la forme

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x)\right] + q(x) y(x) = \kappa \omega(x) \frac{\partial}{\partial t} y,$$

où les conditions aux limites sont indépendantes du temps ; par exemple dans l'équation de Schrödinger dépendant du temps (où $\kappa \propto i\hbar$) et équation de diffusion (où $\kappa < 0$). Ici nous pouvons chercher une solution de la forme

$$y(x,t) = \sum_n \phi_n(t) y_n(x).$$

L'équation est maintenant écrite comme

$$Ly = \kappa \frac{\partial}{\partial t} y \Rightarrow \sum_n \lambda_n \phi_n(t) y_n(x) = \sum_n \dot{\phi}_n(t) y_n(x).$$

Cela montre que

$$\kappa \dot{\phi}_n(t) = \lambda_n \phi_n(t) \Rightarrow \phi_n(t) = \phi_n(0) \exp(\frac{\lambda_n}{\lambda} t),$$

et donc

$$y(x,t) = \sum_n \phi_n(0) \exp(\frac{\lambda_n}{\kappa} t) y_n(x).$$

Les coefficients $\phi_n(0)$ sont déterminés à partir des conditions initiales au temps $t = 0$: $y(x,0) = y_{init}(x)$

$$y_{init}(x) = \sum_n \phi_n(0) y_n(x) \Rightarrow \phi_n(0) = (y_n, y_{init}) = \int_a^b dx' \omega(x') y_n^*(x') y_{init}(x').$$

6.3 Exemples de systèmes de Sturm-Liouville

6.3.1 Equation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger stationnaire pour une particule confinée à un intervalle fini $[a, b]$ par un potentiel $V(x)$ (qui est infini en dehors de $[a, b]$), est

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x).$$

Les conditions aux limites sont réguliéres : $\psi(a) = \psi(b) = 0$ car la fonction d'onde doit disparaître pour $x > b$ et $x < a$ mais est continue. Aussi nous avons $\int dx' |\psi(x)|^2 = (\psi, \psi) = 1$. Nous avons donc $p(x) = \hbar^2/2m$, $q(x) = V(x)$, $\omega(x) = 1$ et $\lambda = E$. Par exemple, dans le cas où $V = 0$ et lorsque $a = 0$ et $b = L$, les fonctions propres ont la forme

$$\psi = A_k \sin(kx),$$

à partir de la condition aux limites à $x = 0$, cependant la condition à $x = L$ donne $k = n\pi/L$ où $n \in \mathbb{Z}^+$ (notons que $k \in \mathbb{R}$ car $\sinh(kL) \neq 0$). Les fonctions propres normalisées sont alors

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi n x}{L}),$$

avec valeurs propres $\lambda_n = \hbar^2 \pi^2 n^2 / 2mL^2$. D'aprés la théorie générale de Sturm Liouville, nous savons que les fonctions propres ayant des n différents sont orthogonales, c'est-à-dire

$$(\psi_n, \psi_m) = 0 \text{ si } m \neq n.$$

Nous pouvons vérifier cela directement :

$$(\psi_n, \psi_m) = \frac{2}{L}\int_0^L dx \sin(\frac{\pi n x}{L}) \sin(\frac{\pi m x}{L}).$$

Maintenant nous utilisons la formule trigonométrique $\sin(a)\sin(b) = (\cos(a-b) - \cos(a+b))/2$ pour trouver

$$\begin{aligned}(\psi_n, \psi_m) &= \frac{1}{L}\int_0^L dx \cos(\frac{\pi(n-m)x}{L}) - \cos(\frac{\pi(n+m)x}{L}) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-m}\sin(\frac{\pi(n-m)x}{L}) - \frac{1}{n+m}\sin(\frac{\pi(n+m)x}{L})\right]_0^L = 0\end{aligned}$$

quand $n \neq m$. Quand $m = n$, nous voyons que $(\psi_n, \psi_n) = 1$ montrant que les fonctions propres sont correctement normalisées.

Notons que $y_{-n}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(-\frac{\pi n x}{L}) = -y_n(x)$ donc n et $-n$ correspondent à la même valeur propre et function propre.

6.3.2 Transformation des équations en forme de Sturm Liouville

L'équation de Legendre

L'équation de Legendre est

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2x\frac{d}{dx}y(x) + l(l+1)y(x) = 0,$$

pour $x \in [-1, 1]$. Nous écrivons ceci sous la forme standard

$$-\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{2x}{1-x^2}\frac{d}{dx}y(x) = \frac{l(l+1)}{1-x^2}y(x)$$

Cela a la forme

$$-\left[\frac{d^2}{dx^2}y(x) + a(x)\frac{d}{dx}y(x) + b(x)y(x)\right] = 0,$$

nous écrivons maintenant

$$-\left[\frac{d}{dx}(\exp(\int^x a(x')dx')\frac{d}{dx}y(x)) + b(x)y\exp(\int^x a(x')dx')\right] = 0,$$

donc $p(x) = \exp(\int^x a(x')dx')$. Ici

$$p(x) = \exp(\ln(1-x^2)) = (1-x^2)$$

et

$$b(x)\exp(\int^x a(x')dx') = -l(l+1),$$

afin que nous puissions écrire l'équation comme

$$-\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{d}{dx}y(x)) = l(l+1)y(x).$$

On peut donc identifier $\lambda = l(l+1)$ $p(x) = (1-x^2)$, $\omega(x) = 1$ et $q(x) = 0$. Puisque $p(1) = p(-1) = 0$ le probléme est irréguliére/singulier.

Equation de Tchebyshev

L'équation de Tchebyshev est

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}y(x) - x\frac{d}{dx}y(x) + n^2y(x) = 0,$$

pour $x \in [0,1]$. Ici $a(x) = -x/(1-x^2)$ et $\int dx\ a(x) = \ln(1-x^2)/2$, nous pouvons donc l'écrire comme

$$-\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}y(x)) = n^2\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ici $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = 0$, $\lambda = n^2$ et $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

6.3.3 Exemple

Considérons l'équation

$$(1+x)^2\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2(1+x)\frac{d}{dx}y(x) + \lambda y(x) = 0,$$

avec comme conditions aux conditions aux limites $y(0) = y(1) = 0$. Ici $a(x) = 2/(1+x)$ et donc

$$-\frac{d}{dx}\left([1+x]^2\frac{d}{dx}y(x)\right) = \lambda y(x),$$

cette équation a la forme de Sturm Liouville, avec $q(x) = 0$ et $\omega(x) = 1$. Nous cherchons les fonctions propres de la forme $y(x) = (1+x)^\sigma$ car l'équation est homongène en termes de la variable $(1+x)$. Ceci donne

$$\begin{aligned}
&(1+x)^\sigma[\sigma(\sigma-1) + 2\sigma + \lambda] = 0 \\
&\Rightarrow \sigma^2 + \sigma + \lambda = 0 \\
&\Rightarrow \sigma = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2}
\end{aligned}$$

Nous avons $y(0) = 0$ and $y(1) = 0$ et donc

$$y(x) = A_+(1+x)^{\sigma_+} + A_-(1+x)^{\sigma_-},$$

avec

$$\begin{aligned} y(0) &= A_+ + A_- = 0 \\ y(1) &= 2^{\sigma_+}A_+ + 2^{\sigma_-}A_- = 0. \end{aligned}$$

Ces équations linéaires ont la forme $W\mathbf{a} = \mathbf{0}$, où

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2^{\sigma_+} & 2^{\sigma_-} \end{pmatrix}$$

Cette équation a des solutions non nulles si det(W) = 0, (et donc zéro est une valeur propre de la matrice W). Ceci implique

$$2^{\sigma_-} = 2^{\sigma_+} \Rightarrow \exp(\sigma_- \ln(2)) = \exp(\sigma_+ \ln(2)).$$

Cela donne

$$\sigma_+ \ln(2) = \sigma_- \ln(2) + 2\pi ni \Rightarrow (\sigma_+ - \sigma_-)\ln(2) = \ln(2)\sqrt{1-4\lambda} = 2\pi ni$$

où $n \in \mathbb{Z}$. Les $\sigma_\pm$ sont complexes et

$$1 - 4\lambda = -\frac{4\pi^2 n^2}{\ln^2(2)} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{\ln^2(2)}.$$

Si nous supposons, au début, que $\sigma_\pm = -1/2 \pm i\omega$ avec $\omega = \sqrt{4\lambda - 1}/2$ nous écrivons

$$y(x) = A_+(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{i\omega} + A_-(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-i\omega}.$$

Cependant nous pouvons utiliser

$$(1+x)^{i\omega} = \exp(i\omega \ln[1+x]) = \cos(\omega \ln[1+x])) + i \sin(\omega \ln[1+x])),$$

pour écrire

$$y(x) = A_1(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cos(\omega \ln[1+x])) + A_2(1+x)^{-\frac{1}{2}} \sin(\omega \ln[1+x])).$$

Les conditions aux limites impliquent que

$$y(0) = 0 = A_1 \Rightarrow A_1 = 0$$

et

$$y(1) = 0 = A_2 2^{-\frac{1}{2}} \sin(\omega \ln[2])) \Rightarrow \sin(\omega \ln[2])) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{\ln(2)} \; n \in \mathbb{Z}.$$

Ceci donne ma meme résultat pour les valeurs propres

$$\omega = \sqrt{4\lambda - 1} = \frac{n\pi}{\ln(2)} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{\ln^2(2)}.$$

Les fonctions propres sont

$$y_n(x) = N_n(1+x)^{-\frac{1}{2}} \sin(\frac{n\pi}{\ln(2)} \ln[1+x])), \ \lambda = \frac{1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{\ln^2(2)}, \tag{6.24}$$

avec N_n (facteur de normalisation) chosi tel que

$$(y_n, y_n) = \int_0^1 dx \ y_n^2(x) = 1,$$

donc

$$\begin{aligned}
1 &= N_n^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(1+x)} \sin^2(\frac{n\pi}{\ln(2)} \ln[1+x])) = \frac{N_n^2}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{(1+x)} (1 - \cos((\frac{2n\pi}{\ln(2)} \ln[1+x]))) \\
&= \frac{N_n^2}{2} \left(\ln(2) - \mathrm{Re} \int_0^1 dx \frac{1}{(1+x)} \exp(i(\frac{2n\pi}{\ln(2)} \ln[1+x])) \right) = \frac{N_n^2}{2} \left(\ln(2) - \mathrm{Re} \int_0^1 dx \frac{1}{(1+x)^{(1-i\frac{2n\pi}{\ln(2)})}} \right) \\
&= \frac{N_n^2}{2} \left(\ln(2) - \mathrm{Re} \frac{\ln(2)}{2n\pi i} [2^{i\frac{2n\pi}{\ln(2)}} - 1^{i\frac{2n\pi}{\ln(2)}}] \right) = \frac{N_n^2}{2} \ln(2)
\end{aligned}$$

et donc

$$N_n = \sqrt{\frac{2}{\ln(2)}}$$

Notons que les valeurs propres correspondent à $n = 1, \ 2, \ 3 \cdots$, la fonction qui correspond à $n = 0$ dans Eq. (6.24) est zéro et donc n'est pas une fonction propre.

6.4 Exercices

1. Soit y_1 et y_2 deux fonctions propres d'un système de Sturm-Liouville, avec des conditions aux limites réguliers, de même valeur propre λ, c-à-d

$$Ly_1 = \lambda y_1 \quad Ly_2 = \lambda y_2.$$

   Montrer que $y_1 = cy_2$ où c est une constante. (*Indice : calculer le wronksien* $W(y_1, y_2)$).
2. Mettre l'équation de Hermite

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - 2x \frac{d}{dx} y(x) + 2\alpha y(x) = 0 \quad x \in (-\infty, \infty)$$

   sous la forme standard de Sturm-Liouville.

3. Mettre l'équation de Laguerre

$$x\frac{d^2}{dx^2}y(x) + (1-x)\frac{d}{dx}y(x) + \alpha y(x) = 0 \quad x \in [0,\infty)$$

sous la forme standard de Sturm-Liouville.

4. Déterminer les valeurs propres et les fonctions propre pour chacun des problèmes de Sturm-Liouville suivant :

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \lambda y(x) = 0 \text{ sur } [0,L] \text{ avec } y(0) = 0, \text{ et } y'(L) = 0.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \lambda y(x) = 0 \text{ sur } [0,L] \text{ avec } y'(0) = 0, \text{ et } y'(L) = 0.$$

Dans les deux cas, donner la représentation de $\delta(x-y)$ et de la fonction de Green ayant les mêmes conditions aux limites.

Utiliser vos résultats pour résoudre

$$-\frac{d^2}{dx^2}y(x) = \theta(x - x_0)$$

pour $x,\ x_0 \in [0,L]$ avec conditions aux limites $y(0) = 0$ et $y'(L) = 0$.

Trouver la solution à Eq. (4) par inspection, en cherchant les solutions du type $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ pour $x < x_0$ et $x > x_0$. (*Astuce :* La solution de Eq. (4) doit avoir $y(x)$ et $y'(x)$ continue at $x = x_0$ - pour quoi ?)

5. Considérons la diffusion de la chaleur entre deux points isolants $x = 0$ et $x = 1$.

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t).$$

La condition de flux de chaleur nulle aux limites $x = 0$ et $x = 1$ impose les conditions aux limites de Neumann $T'(0) = T'(1) = 0$. Nous allons résoudre cette équation avec les conditions initiales $T(x) = \theta(x - x_0)$.

Trouver les valeurs et fonctions propres, normalisées, pour le problème de Sturm-Liouville

$$\kappa\frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} = -\lambda_n y(x),$$

avec conditions aux limites $y'(0) = y'(1) = 0$. Maintenant chercher la solution de Eq. (5) sous la forme

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(t)y_n(x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial \phi_n(t)}{\partial t} = -\lambda_n \phi(t).$$

Trouver les valeurs $\phi_n(0)$ à partir de la condition initiale

$$T(x, 0) = \theta(x - x_0).$$

Trouver la limite de $T(x, t)$ aux grand temps - commentaires ?

6. Résoudre l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t).$$

avec les mêmes conditions aux limites et initiales que la question précédente et en plus $\frac{\partial T(x,0)}{\partial t} = 0$.

7. Montrer que l'équation, sur $[-\pi, \pi]$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + a\delta(x) y(x) + \lambda y(x) = 0,$$

avec comme conditions aux limites $y(\pm\pi) = 0$, a des valeurs propres λ qui obeit

$$\tan(\pi\sqrt{\lambda}) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{a}$$

(*Astuce :* intégrer l'équation entre $-\epsilon$ et ϵ pour $\epsilon \to 0$ pour trouver les conditions de raccordement entre les solutions pour $x < 0$ et $x > 0$).

Dans quelles conditions existe-t-il une valeur propre $\lambda < 0$?

Montrer qu'il existe une fonction propre $y_0(x)$ avec $\lambda = 0$ et trouver cette fonction propre.

Ce problème correspond à quel problème en mécanique quantique ?

Chapitre 7

Equations aux derivées partielles

7.1 Equations aux derivées partielles du premier ordre - méthode de caractéristiques

Une EDP linéaire homogéne du premier ordre prend la forme.

$$a(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Considérons la courbe caractééristique dans le plan (x, y) définie comme la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)}$$

La solution à cette équation peut toujours être écrite sous la forme implicite $\Phi(x, y) = C$ où C est la constante d'intégration. Nous avons donc

$$d\Phi = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = 0$$

quand $\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)}$, donc

$$d\Phi = 0 = dx\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{b(x,y)}{a(x,y)}\right] = 0,$$

et en conséquence

$$a(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

Cependant, si

$$u(x,y) = f(\Phi(x,y)),$$

où f est une fonction arbitraire différentiable d'une variable, nous voyons aussi que

$$a(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}=f'(\Phi)[a(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial y}]=0$$

La solution générale est donc

$$u(x,y)=f(\Phi(x,y))$$

Prenons l'exemple

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0.$$

Ici nous trouvons l'équation caractéristique

$$-\frac{dy}{x}=dx\Rightarrow y+\frac{1}{2}x^2=C$$

donc nous pouvons identifier la fonction Φ comme

$$\Phi(x,y)=y+\frac{1}{2}x^2$$

et la solution générale est

$$u(x,y)=f(y+\frac{1}{2}x^2).$$

Notons que la solution à l'EDP peut généralement être déterminée uniquement en spécifiant la valeur de $u(x,y)$ le long d'une courbe dans le plan (x,y). Dans le probléme précédent si nous spécifions que $u(x,0)=\exp(-x^2)$ nous trouvons

$$\exp(-x'^2)=f(\frac{1}{2}x'^2),$$

maintenant si nous écrivons $\frac{1}{2}x'^2=x\Rightarrow x'=\sqrt{2x}$ nous trouvons

$$f(x)=\exp(-2x^2)\Rightarrow u(x,y)=\exp(-2[y+\frac{1}{2}x^2])=\exp(-2y-x^2).$$

En trois dimensions, nous avons

$$a(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+b(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+c(x,y,z)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}=0. \qquad (7.1)$$

Ici les équations caractéristiques sont

$$\frac{dx}{a(x,y,z)}=\frac{dy}{b(x,y,z)}=\frac{dz}{c(x,y,z)}$$

Parce que nous devons spécifier deux conditions initiales, pour y et z à $x = 0$ par exemple, il y a deux constantes d'intégration C_1 et C_2 et deux fonctions telles que

$$\Phi_1(x, y, z) = C_1 \ , \Phi_2(x, y, z) = C_2,$$

la solution générale est maintenant

$$u(x, y, z) = f(\Phi_1(x, y, z), \Phi_2(x, y, z)),$$

où f est une fonction arbitraire differéntiable de deux variables. Par exemple

$$z\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} - x\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = 0.$$

donc

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{1}$$

Cela donne $dx/dz = z$ donc $x = z^2/2 + A$, nous avons alors $dy/dz = -x \Rightarrow y = -z^3/6 - Az + B$. Donc $x - z^2/2 = A$ est une constante et $B = y + z^3/6 + Az = y + z^3/6 + z(x - z^2/2)$ est une autre constante. Ceci implique

$$\Phi_1(x, y, z) = x - \frac{z^2}{2}, \ \Phi_2(x, y, z) = y + zx - \frac{z^3}{3},$$

et la solution générale est $u(x, y, z) = f\left(x - z^2/2, y + zx - z^3/3\right)$. Les conditions initiales sont données sur une surface, par exemple, sur la surface $z = 0$, si $u(x, y, 0) = x^2 + y^2$ on trouve

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

et donc

$$u(x, y, z) = (x - \frac{z^2}{2})^2 + (y + zx - \frac{z^3}{3})^2.$$

Les équations non-homogénes de la forme

$$a(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = c(x, y)$$

peuvent être résolues si on peut trouver une solution particuliére $u_p(x, y)$ par inspection, la solution générale est alors donné par

$$u(x, y) = u_p(x, y) + u_c(x, y),$$

où $u_c(x, y)$ est la solution générale de l'équation homogéne associée

$$a(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Une méthode plus générale existe pour les équations non homogénes, qui peuvent même être non linéaires. Considérons les équations de la forme

$$a(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=c(x,y)f(u), \tag{7.4}$$

où f peut être une fonction arbitraire de u (le cas que nous avons considéré juste au-dessus était où f est une constante), donc l'équation peut être non-linéaire. Nous cherchons une solution implicite de la forme $F(x,y,u)=0$. Prennant des dérivées partielles de $F(x,y,u)=0$ par rapport à x et y donne

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Reportant les formes résultantes pour $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ dans Eq. (7.4) donne alors

$$a(x,y)\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial y}+c(x,y)f(u)\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial u}=0$$

Nous pouvons maintenant résoudre cela en utilisant la méthode utilisée pour résoudre l'équation. (7.1) avec la correspondance $u=z$.

Exemple (i)

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+y\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=\sin(x)$$

avec les conditions aux limites $u(x,x)=-\cos(x)+x^2\exp(-2x)$. La solution est donnée par $F(x,y,u)=0$ où

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,u)+y\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,u)+\sin(x)\frac{\partial}{\partial u}F(x,y,u)=0$$

L'équation des caractéristiques est

$$dx=\frac{dy}{y}=\frac{du}{\sin(x)}$$

Maintenant

$$dx=\frac{dy}{y}\Rightarrow \ln(y)-x=C_1\Rightarrow \Phi_1(x,y,u)=\ln(y)-x$$

aussi

$$dx=\frac{du}{\sin(x)}\Rightarrow u+\cos(x)=C_2\Rightarrow \Phi_2(x,y,u)=u+\cos(x).$$

Nous avons donc la solution implicite

$$F(u+\cos(x),\ln(y)-x)=0$$

La solution explicite est

$$u(x,y) + \cos(x) = f(\ln(y) - x) \Rightarrow u(x,y) = f(\ln(y) - x) - \cos(x)$$

Les conditions aux limites donnent

$$f(\ln(x) - x) - \cos(x) = -\cos(x) + x^2 \exp(-2x),$$

donc

$$f(\ln(x) - x) = x^2 \exp(-2x) = \exp(2\ln(x) - 2x) \Rightarrow f(x) = \exp(2x).$$

La solution est donc

$$u(x,y) = \exp(2\ln(y) - 2x) - \cos(x) = y^2 \exp(-2x) - \cos(x)$$

Exemple (ii)

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} - Cu = 0$$

où A, B et C sont des constantes. La fonction F satisfait

$$A\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial x} + B\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial y} + Cu\frac{\partial F(x,y,u)}{\partial u} = 0.$$

Cela correspond à

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{Cu}.$$

Nous trouvons donc

$$Bx - Ay = C_1 \Rightarrow \Phi_1(x,y,u) = Bx - Ay$$

et

$$u = C_2 \exp(\frac{C}{A}x). \Rightarrow \Phi_2(x,y,u) = u\exp(-\frac{C}{A}x).$$

Cela donne la solution

$$F(x,y,u) = G(Bx - Ay, u\exp(-\frac{C}{A}x)) = 0. \tag{7.5}$$

La relation implicite $G(X,Y) = 0$ peut être écrite comme une relation explicite $Y = f(X)$, donc à partir de l'équation (7.5) on trouve $u\exp(-\frac{C}{A}x) = f(Bx - Ay)$ qui donne la solution

$$u(x,y) = \exp(\frac{C}{A}x)f(Bx - Ay).$$

Exemple (iii)

$$\frac{\partial f(k,t)}{\partial t} = -k^2 f(k,t) + \frac{\partial f(k,t)}{\partial k}.$$

D'abord on l'écrit comme

$$\frac{\partial f(k,t)}{\partial t} - \frac{\partial f(k,t)}{\partial k} = -k^2 f(k,t)$$

La solution est donnée par $F(t,k,f) = 0$ avec

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial k} - k^2 f(k,t)\frac{\partial F}{\partial f} = 0.$$

Nous avons donc l'équation des caractéristiques

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dk}{1} = -\frac{df}{fk^2}.$$

Nous trouvons donc

$$t + k = C_1 \text{ et } \ln(f) - \frac{k^3}{3} = C_2.$$

Ceci donne $F(t+k, \ln(f) - \frac{k^3}{3}) = 0$ et donc

$$\ln(f) - \frac{k^3}{3} = g(t+k),$$

et

$$f(k,t) = \exp(\frac{k^3}{3})G(t+k).$$

Si nous imposons la condition initiale $f(k,0) = \exp(-iky)$, nous trouvons

$$\exp(-iky) = \exp(\frac{k^3}{3})G(k) \Rightarrow G(k) = \exp(-\frac{k^3}{3})\exp(-iky),$$

et donc finalement,

$$f(k,t) = \exp(\frac{k^3}{3})\exp(-\frac{[k+t]^3}{3})\exp(-i[k+t]y).$$

Une autre application de la méthode des caractéristiques concerne l'étude des équations de transport de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + g(u)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = h(u)$$

On cherche une solution comme

$$F(u(x,t),x,t) = 0 \Rightarrow dF = 0$$

Nous trouvons donc (par rapport au variations de x et t)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\end{aligned}$$

et dans l'EDP originale nous trouvons

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial u}} - g(u)\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}} = h(u)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + g(u)\frac{\partial F}{\partial x} + h(u)\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

Pour le cas

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + g(u)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = h(u)$$

les équations des caractéristiques sont

$$dt = \frac{dx}{g(u)} = \frac{du}{h(u)}$$

Dans le cas

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + g(u)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

nous avons

$$h(u) = 0 \Rightarrow du0 \Rightarrow= u = C_1 = \Phi_1(x,t,u)$$

donne une première function constante. Car u est constant nous pouvons aussi écrire

$$x - g(u)t = C_2 \Rightarrow C_2 = x - g(u)t = \Phi_2(x,t,u)$$

La solution est donc

$$F(u, x - g(u)t) = 0 \Rightarrow u(x,t) = f(x - g(u)t).$$

Mais notons que nous avons pas, dans ce cas trouvé une équation explicite pour u.

Exemple avec ondes de choc :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + (1+u)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

avec conditions initiales $u(x,0) = u_0(x)$ avec $u_0(x) = 1$ pour $x \leq 0$, $u_0(x) = 1 - x$ pour $0 < x < 1$, $u_0(x) = 0$ pour $x \geq 1$. Nous trouvons donc

$$u(x,t) = f(x - (1 + u(x,t))t)$$

À partir des conditions initiales

$$u_0(x) = f(x)$$

et donc

$$u(x,t) = u_0(x - (1 + u(x,t))t)$$

Pour $x \ll 0$

$$u(x,t) = u_0(x - 2t) = 1$$

et on voit que cette solution est valable pour $x - 2t < 0 \Rightarrow x < 2t$

Pour $x \gg 0$

$$u(x,t) = u_0(x - t) = 0,$$

et ici on voit que la solution est valable pour $x - t > 1 \Rightarrow x > 1 + t$

Dans le cas qui rest $x - (1 + u(x,t))t \in [0,1]$ donc $2t < x < 1 + t$, nous trouvons

$$u(x,t) = u_0(x-(1+u(x,t))t) = 1-(x-(1+u(x,t))t) \Rightarrow u(x,t)(1-t) = 1-x+t \Rightarrow u(x,t) = \frac{1-x+t}{1-t}.$$

La solution diverge a $t = 1$, cela correspond à une onde de choc !

7.2 Méthode de caractéristiques pour les EDP linéaires de second ordre

Une EDP linéaire peut être écrite comme

$$\mathcal{L}_\alpha u = a_\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c_\alpha(x,y)u = f(x,y).$$

Si une EDP de second ordre prend la forme

$$\mathcal{L}_\beta \mathcal{L}_\alpha u = f(x,y),$$

nous pouvons le résoudre en écrivant $w = \mathcal{L}_\alpha u$ et en résolvant ensuite EDP de premier ordre

$$\mathcal{L}_\beta w = f(x,y),$$

en utilisant les méthodes expliquées plus tôt, puis en résolvant l'équation

$$\mathcal{L}_\alpha u = w(x,y).$$

A titre d'exemple, considérons l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Comme les coefficients sont constants, nous voyons par inspection que l'équation peut s'écrire

$$\mathcal{L}_+\mathcal{L}_- u = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathcal{L}_- &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

La solution à $\mathcal{L}_+ w = 0$ est

$$w = f(x - ct),$$

donc

$$\mathcal{L}_- u = f(x - ct). \tag{7.12}$$

Notons que $\mathcal{L}_- F(x - ct) = 2F'(x - ct)$ et donc une solution particulière de Eq. (7.12) est $u_p(x,t) = F(x - ct)$ si

$$2F'(z) = f(z),$$

avec $z = x - ct$, nous avons donc

$$F(z) = \frac{1}{2}\int^z du f(u).$$

La solution à l'équation homogène $\mathcal{L}_- u = 0$ est

$$u_c(x,t) = g(x + ct),$$

et donc la solution générale est

$$u(x,t) = g(x + ct) + F(x - ct) = f_+(x + ct) + f_-(x - ct).$$

Les solutions f_+ correspondent aux ondes de vitesse c, et les solutions f_- aux ondes de vitesse $-c$. Nous pouvons vérfier cette solution en notant que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-\mathcal{L}_+$. Cela donne

$$\mathcal{L}(f_+ + f_-) = \mathcal{L}_+\mathcal{L}_- f_+ + \mathcal{L}_-\mathcal{L}_+ f_- = 0.$$

Cette méthode fonctionne toujours avec des EDPs de la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + a\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u + b\frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 0$$

où a et b sont des constantes. Nous écrivons

$$[\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_1\frac{\partial}{\partial y}][\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial}{\partial y}]u = 0,$$

avec $(\lambda_1 + \lambda_2) = -a$ et $\lambda_1\lambda_2 = b$. λ_1 et λ_2 sont donc les racines de l'équation quadratique

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

La solution générale est donc

$$u(x, y) = f_1(y + \lambda_1 x) + f_2(y + \lambda_2 x).$$

Nous pouvons directement vérifier que $u(x, y) = f(y + \lambda x)$ est une solution :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + a\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u + b\frac{\partial^2}{\partial y^2}u = f''(y + \lambda x)[\lambda^2 + a\lambda + b] = 0.$$

Si l'équation quadratique pour λ a une seule racine ($\lambda_1 = \lambda_2$).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\lambda \mathcal{L}_\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

Nous pouvons donc écrire $\mathcal{L}_\lambda w = 0$ avec $\mathcal{L}_\lambda u = w$. Cela donne

$$w(x, y) = f(\lambda x + y)$$

et

$$\mathcal{L}_\lambda u = \frac{\partial}{\partial x}u - \lambda\frac{\partial}{\partial y}u = f(\lambda x + y).$$

Nous voyons qu'une solution particulière de cette équation est

$$u = xf(\lambda x + y),$$

car

$$\mathcal{L}_\lambda u = x\mathcal{L}_\lambda f(\lambda x + y) + (\mathcal{L}_\lambda x)f(\lambda x + y) = x \times 0 + 1 \times f(\lambda x + y) = f(\lambda x + y).$$

La solution générale est donc

$$u(x, y) = g(\lambda x + y) + xf(\lambda x + y).$$

A titre d'exemple, résolvons l'EDP

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 0$$

avec conditions aux limites $u(0, y) = 0$ and $u(x, 1) = x^2$. Posons $u = f(y + \lambda x)$, qui donne $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ et donc $\lambda = -1$ est la seule racine, la solution générale est donc

$$u(x, y) = g(y - x) + xf(y - x).$$

A partir des conditions aux limites nous trouvons

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 = g(-y) \\ u(x, 1) &= x^2 = g(1 - x) + xf(1 - x) \Rightarrow f(1 - x) = x \Rightarrow f(x) = 1 - x. \end{aligned}$$

La solution est donc $u(x, y) = x(1 - y + x)$.

7.3 La méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables s'avère utile pour une grande variété d'EDP, notamment de second ordre, avec des conditions initiales et des conditions aux limites spatiales donnés. La méthode peut être utilisée pour résoudre les équations de diffusion, d'onde et de Schrödinger (avec ou sans dépendance temporelle).

L'équation de Laplace est la forme indépendante du temps des équations d'onde et de diffusion. Il se produit également dans la gravité newtonienne et l'électrostatique lorsqu'aucune masse ou charge n'est présente. L'équation de Laplace est

$$\nabla^2\phi = 0$$

dans une région $\mathcal{D}$ avec les conditions aux limites spécifiées sur $\partial\mathcal{D}$, la surface de $\mathcal{D}$. Deux types de conditions aux limites sont communs (i) Dirichlet - où la valeur de ϕ est donnée sur $\partial\mathcal{D}$ (ii) Neumann -où la valeur de $\nabla\phi \cdot \mathbf{n}$, où $\mathbf{n}$ est la normale de la surface $\mathcal{D}$, est donnée sur $\partial\mathcal{D}$. Certains problèmes ont des conditions aux limites mixtes, les conditions aux limites Dirichlet sur certaines parties de $\partial\mathcal{D}$ et Neumann sur le reste. Par exemple, en deux dimensions, considérons $\partial\mathcal{D} = \{x \in [0, L],\ y \in [0, \infty)\}$, avec les conditions aux limites de Dirichlet $\phi(x, 0) = \phi_o(x)$, $\phi(0, y) = 0$, $\phi(0, L) = 0$ et $\phi(x, \infty) = 0$ (le domaine montré dans la Fig. (7.1) dans la limite $H \to \infty$). La condition aux limite pour $y = 0$ est compatible avec les conditions aux limites à $x = 0$ et $x = L$ si $\phi_o(0) = \phi_o(L) = 0$. L'équation de Laplace est

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x, y) = 0.$$

La méthode de séparation des variables consiste à faire l'ansatz $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ où X et Y sont deux fonctions inconnues. Reportant cela dans l'équation de Laplace donne

$$Y(y)X''(x) + X(x)Y''(y) = 0,$$

nous écrivons maintenant toutes les fonctions qui dépendent de x d'un côté de l'équation et les fonctions qui dépendent de y de l'autre

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

La seule façon que cette équation peut être satisfaite est si

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K = -\frac{X''(x)}{X(x)},$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante indépendante de x et y. L'équation pour Y est alors

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K \Rightarrow Y''(y) - KY(y) = 0.$$

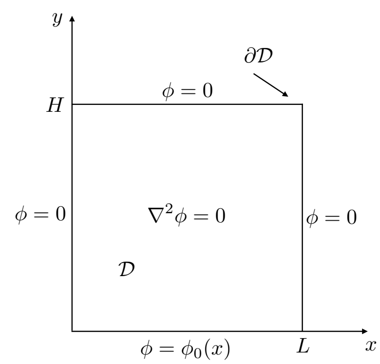

FIGURE 7.1 – Domaine rectangulaire $\mathcal{D}$ pour l'équation de Laplace avec conditions aux limites Dirichlet. Le surface ∂D est un rectangle de largeur L et hauteur H.

Cela a deux solutions $Y(y) = \exp(-\sqrt{K}y)$ et $Y(y) = \exp(\sqrt{K}y)$. Comme $\phi(y) \to 0$ quand $y \to \infty$ nous devons choisir la solution $Y(y) = \exp(-\sqrt{K}y)$ et aussi $K > 0$ pour que $\sqrt{K} \in \mathbb{R}$. Maintenant, l'équation pour X est

$$-X''(x) = KX,$$

avec les conditions aux limites $X(0) = X(L) = 0$. Notons que la solution doit toujours être une solution oscillante dans la variable entre deux surfaces où $\phi = 0$ (ici x) (car seules les solutions oscillantes peuvent généralement commencer à zéro et retourner à zéro). Nous trouvons donc un probléme de Sturm Liouville (où $\lambda = K$) avec des solutions de la forme

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L})$$

où $n = 1,\ 2,\ 3\cdots$ et $K = n^2\pi^2/L^2$. La solution

$$\phi_n(x, y) = Y_n(y)X_n(x) = \exp(-\frac{n\pi y}{L})\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L}),$$

résout l'équation de Laplace et vérifie les conditions aux limites à $y = \infty$ et $x = 0$ et $x = L$ mais ne satisfait pas (sauf par chance) aux conditions aux limites $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$. Cependant la solution générale à l'équation (parce que l'équation de Laplace est linéaire) peut s'écrire

$$\phi(x, y) = \sum_n a_n Y_n(y)X_n(x)$$

où a_n sont des constantes déterminées à partir de

$$\phi(x,0) = \phi_0(x) = \sum_n a_n X_n(x).$$

Maintenant, en utilisant la théorie de Sturm Liouville, nous pouvons écrire

$$a_n = (X_n, \phi_0) = \int_0^L dx\ X_n(x)\phi_0(x) = \int_0^L dx\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L})\phi_0(x)$$

car ici $\omega(x) = 1$. La solution est donc

$$\phi(x,y) = \sum_n \left[\frac{2}{L}\int_0^L dx \sin(\frac{n\pi x}{L})\phi_0(x)\right]\exp(-\frac{n\pi y}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L}).$$

Par exemple, si

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= x \text{ pour } x \in [0, L/2] \\
\phi_0(x) &= L - x \text{ pour } x \in [L/2, L],
\end{aligned}$$

nous utilisons

$$\int_0^{L/2} dxx\sin(\frac{n\pi x}{L}) = \left[-\frac{L}{n\pi}x\cos(\frac{n\pi x}{L})\right]_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2} dx\cos(\frac{n\pi x}{L}) = -\frac{L^2}{2n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}),$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{L/2}^L dx(L-x)\sin(\frac{n\pi x}{L}) &= \int_0^{L/2} dyy\sin(\frac{n\pi(L-y)}{L}) = -\int_0^{L/2} dyy\sin(\frac{n\pi y}{L})\cos(n\pi) \\
&= -(-1)^n[-\frac{L^2}{2n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})].
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^L dx\ \phi_0(x)\sin(\frac{n\pi x}{L}) = (1-(-1)^n)[-\frac{L^2}{2n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})],$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^L dx\ \phi_0(x)\sin(\frac{n\pi x}{L}) &= 2\frac{L^2}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n+1}{2}}, \text{ pour } n \text{ impair}, \\
&= 0 \text{ pour } n \text{ pair}.
\end{aligned}$$

La solution est donc

$$\phi(x,y) = 4L\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2\pi^2}(-1)^{m+1}\exp(-\frac{(2m+1)\pi y}{L})\sin(\frac{(2m+1)\pi x}{L}),$$

où nous avons écrit $n = 2m + 1$. Considérons maintenant l'équation de Laplace en deux dimensions où les conditions aux limites sont données en coordonnées polaires (ρ, ϕ) comme $\Phi(R, \phi) = \Phi_0(\phi)$. En coordonnées polaires

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\Phi + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\Phi = 0.$$

Nous écrivons $\Phi(\rho, \phi) = P(\rho)\Theta(\phi)$ qui donne

$$-\frac{1}{\Theta(\phi)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\Theta(\phi) = \frac{1}{P(\rho)}\rho\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho}P\right] = K.$$

L'équation pour Θ est donc

$$\Theta'' = -K\Theta. \tag{7.20}$$

Les conditions aux limites pour ϕ sont périodiques $\Theta(\phi+2\pi) = \Theta(\phi)$, car la solution ne peut pas prendre deux valeurs différentes au même point dans l'espace ! Les deux solutions pour Θ obtenues à partir de l'équation (7.20) sont $\cos(\sqrt{K}\phi)$ et $\sin(\sqrt{K}\phi)$. La condition aux limite périodique implique que (i) $K > 0$ et aussi que $2\pi\sqrt{K} = 2\pi m$ où $m = 0,\ 1,\ 2, \cdots$, donc $K = m^2$. Les solutions sont donc $\cos(m\phi)$ et $\sin(m\phi)$. L'équation pour P devient alors

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho}P\right] - m^2 P = 0.$$

Cette équation est homogéne dans la variable ρ donc on cherche des solutions de la forme

$$P(\rho) = \rho^p,$$

et cela donne

$$p^2 = m^2 \Rightarrow p = \pm m.$$

Quand $m = 0$ on a une solution $P(\rho) = Const.$ et une autre $P(\rho) = \ln(\rho)$. Cependant si nous imposons que la solution est finie dans $\mathcal{D}$ et que $0 \in \mathcal{D}$, nous ne pouvons prendre ques les solutions avec $p = m \geq 0$. Ceci donne des solutions de la forme $\Phi_m(\rho, \phi) = \rho^m[a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)]$. La solution générale est donc

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m[a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)].$$

Les a_m et b_m sont determinées à partir de la condition au limite

$$\Phi(R, \phi) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R^m[a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)] = \Phi_0(\phi). \tag{7.21}$$

La fonction $\Phi_0(\phi)$ est cependant aussi périodique en ϕ et donc elle a une représentation en série de Fourier

$$\Phi_0(\phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}[A_m\cos(m\phi) + B_m\sin(m\phi)], \tag{7.22}$$

alors quand nous comparons l'Eq. (7.21) avec l'Eq. (7.22) on trouve $a_0 = A_0$, $a_n = A_n/R^n$ et $b_n = B_n/R^n$. Notons, que si le probléme est spécifié dans la région où $\rho > R$ alors, dans la plupart des problémes physiques, les solutions doivent rester finies quand $\rho \to \infty$ et nous devons prendre des solutions $R(\rho) = \rho^{-m}$.

La solution la plus générale est

$$\Phi(\rho,\phi) = a_0 + b_0\ln(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m\cos(m\phi) + a'_m\sin(m\phi)]\rho^m + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m\cos(m\phi) + b'_m\sin(m\phi)]\rho^{-m}.$$

L'équation de Laplace en trois dimensions en coordonnées sphèériques est

$$\nabla^2 W = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}W\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}W\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}W = 0$$

Si nous supposons que la solution est indépendante de ϕ alors l'équation simplifie comme $W = W(r,\theta)$ et nous trouvons

$$\nabla^2 W = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}W\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}W\right) = 0$$

Nous cherchons une solution $W(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ pour trouver

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R(r)\right)}{R(r)} = -\frac{\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d}{d\theta}\Theta(\theta)\right)}{\Theta(\theta)} = \lambda$$

L'équation pour Θ est

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d}{d\theta}\Theta\right) = -\lambda\Theta$$

Si nous faisons le changement de variables $u = \cos(\theta)$ nous trouvons

$$\frac{d}{d\theta}f = \frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}f = -\sin(\theta)\frac{d}{du}f = -\sqrt{1-u^2}\frac{d}{du}f,$$

et donc

$$\frac{d}{du}\left([1-u^2]\frac{d}{du}\Theta\right) = -\lambda\Theta.$$

C'est l'équation de Legendre. Nous savons qu'il a des solutions polynomiales pour $\lambda = l(l+1)$ où $l = 0,\ 1,\ 2\cdots$. Lorsque la solution de la série n'est pas polynomiale, on peut montrer que les solutions divergent à $u = \pm 1$ et ne peuvent donc pas être des solutions physiquement pertinentes.

La solution à

$$\frac{d}{du}\left([1-u^2]\frac{d}{du}\Theta(u)\right) + l(l+1)\Theta(u) = 0,$$

avec $\Theta(1) = 1$ est le polynôme de Legendre de degré l, noté $P_l(u)$. L'équation est dans la forme Sturm Liouville, avec $p(u) = 1 - u^2$, $q(u) = 0$ et $\lambda = l(l+1)$.

L'équation pour le R_l correspondant est alors

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R_l(r)\right) - l(l+1)R_l(r) = 0,$$

c'est homogéne en R, donc on cherche des solutions de la forme $R(r) = r^p$ ce qui donne

$$p(p+1) - l(l+1) = 0 \Rightarrow (p-l)(p+l+1) = 0,$$

donc $p = l$ ou $p = -(l+1)$. Les solutions dans un domaine contenant $r = 0$ doivent avoir $p \geq 0$ pour rester finies à $r = 0$. Les solutions qui sont finies comme $r \to \infty$ doivent avoir $p < 0$.

Pour $l = 0$ nous avons la solution $u = 1/r$. Nous voyons aussi que pour $\mathbf{r} \neq \mathbf{t}$,

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{t}|}$$

est aussi une solution. En effet, si nous définissons la nouvelle variable $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{t}$, dans le nouveau systéme de coordonnées

$$u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}'|},$$

et

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Maintenant, si nous choisissons $\mathbf{t} = t\mathbf{e}_z$ nous voyons que

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{t}|} = U(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2tr\cos(\theta) + t^2}}.$$

Cependant pour $r > t$ nous savons que la solution de l'équation de Laplace, indépendante de ϕ, a la forme générale

$$U(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos(\theta)).$$

Si nous définissons P_l tel que $P_l(1) = 1$, nous trouvons que, en posant $\theta = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2tr + t^2}} = \frac{1}{r-t} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{r^l} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{1}{r^{l+1}}.$$

Maintenant, en comparant les coefficients de $1/r^{l+1}$, nous voyons que

$$a_l = t^l,$$

et donc quand on met $r = 1$ on trouve la représentation suivante pour la fonction génératrice des polynômes de Legendre

$$g(u,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tu + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(u). \tag{7.23}$$

D'aprés la théorie de Sturm Liouville, nous savons que les polynômes de l différents sont orthogonaux, c'est-à-dire

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^{1} du\ P_n(u) P_m(u) = 0 \text{ quand } n \neq m$$

rappelons ici que nous avons $\omega(u) = 1$. Pour trouver la normalisation, nous écrivons

$$g^2(u,t) = \frac{1}{1 - 2tu + t^2} = [\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(u)]^2 = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n t^m P_n(u) P_m(u),$$

maintenant une intégration sur $u \in [-1, 1]$ donne

$$\int_{-1}^{1} du\, \frac{1}{1 - 2tu + t^2} = \left[-\frac{1}{2t}\ln(1 - 2tu + t^2)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{t}[\ln(1+t) - \ln(1-t)] = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} du\ P_n^2(u).$$

Maintenant, en utilisant le développement de Taylor

$$\begin{aligned} \ln(1+t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} \\ \ln(1-t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}, \end{aligned}$$

nous trouvons

$$\frac{1}{t}[\ln(1+t) - \ln(1-t)] = \frac{1}{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right) = \frac{2}{t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1},$$

et donc

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}du\ P_n^2(u).$$

Maintenant, en comparant les coefficients de t^{2n} nous obtenons

$$\int_{-1}^{1}du\ P_n^2(u)=\frac{2}{2n+1}.$$

En utilisant la fonction génératrice, nous pouvons démontrer un certain nombre de propriétés importantes des polynômes de Legendre (voir TD).

En termes de θ la condition d'orthogonalité devient

$$\int_0^{\pi}d\theta\sin(\theta)\ P_n(\cos(\theta))P_m(\cos(\theta)=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Parité

$$P_n(-u)=(-1)^nP_n(u)$$

Relation de récurrence

$$(2n+1)uP_n(u)=(n+1)P_{n+1}(u)+nP_{n-1}(u)$$

L'utilisation de la relation de récurrence est le moyen le plus simple de générer les polynômes de Legendre. En commencant par $P_0(0)=1$ et $P_1(u)=u$ qui peuvent être facilement obtenus à partir de la solution de série, ou la fonction génératrice, nous pouvons écrire

$$(n+1)P_{n+1}(u)=(2n+1)uP_n(u)-nP_{n-1}(u),$$

pour $n=1$ cela donne $2P_2(u)=3u^2-1$ et donc

$$P_2(u)=\frac{1}{2}(3u^2-1).$$

Les cinq premiers polynômes de Legendre sont

$$\begin{aligned}
P_0(u) &= 1\\
P_1(u) &= u\\
P_2(u) &= \frac{1}{2}(3u^2-1)\\
P_3(u) &= \frac{1}{2}(5u^3-3u)\\
P_4(u) &= \frac{1}{8}(35u^4-30u^2+3)
\end{aligned}$$

Formule de Rodrigues

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{du^n}\left[(u^2-1)^n\right].$$

La preuve est assez compliquéée et la fonction génératrice et les relations de récurrence sont beaucoup plus utiles.

Considérons l'équation de Laplace pour un potentiel électrostatique $V(r,\theta,\phi)$. avec des conditions aux limites données sur la surface de la sphére de rayon R comme $V(R,\theta,\phi) = U(\theta)$, et $V(\infty,\theta,\phi) = 0$. Comme les conditions aux limites sont indépendantes de ϕ, nous recherchons une solution $V(r,\theta)$ qui est également indépendante de ϕ.

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos(\theta)) \text{ pour } r < R$$

et

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos(\theta)) \text{ pour } r > R.$$

La continuité de V à $r = R$ donne

$$\frac{b_n}{R^{n+1}} = a_n R^n.$$

Nous avons aussi

$$V(R,\theta) = U(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos(\theta)).$$

en multipliant par $\sin(\theta)P_m(\cos(\theta))$ et en intégrant sur $\theta \in [0,\pi]$ nous trouvons

$$\int_0^\pi d\theta \sin(\theta)P_m(\theta)U(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \int_0^\pi d\theta \sin(\theta)P_m(\cos(\theta))P_n(\cos(\theta)) = a_m R^m \frac{2}{2m+1},$$

et donc

$$a_m = \frac{2m+1}{2R^m}\int_0^\pi d\theta \sin(\theta)P_m(\cos(\theta))U(\theta),$$

la solution pour $r < R$ est alors

$$V(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{2m+1}{2R^m}\int_0^\pi d\theta \sin(\theta)P_m(\theta)U(\theta)\right] r^m P_m(\cos(\theta)).$$

Considérons l'exemple d'une sphére, où le potentiel sur la surface est 1 pour $z > 0$ et -1 pour $z < 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U(\theta) &= 1 \text{ quand } \theta \in [0,\pi/2] \\ U(\theta) &= -1 \text{ quand } \theta \in [\pi/2,\pi]. \end{aligned}$$

En posant $u = \cos(\theta)$ cela devient

$$\begin{aligned} U(u) &= 1 \text{ quand } u \in [0,1] \\ U(u) &= -1 \text{ quand } u \in [-1,0]. \end{aligned}$$

Nous devons calculer les termes

$$c_m = \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) P_m(\cos(\theta)) U(\theta) = \int_{-1}^1 du P_m(u) U(u) = \int_{-1}^1 du P_m(u) \mathrm{sgn}(u).$$

Il y a beaucoup de méthodes pour évaluer les intégrales du formulaire ci-dessus. Nous pouvons parfois utiliser la relation de récurrence mais nous pouvons aussi utiliser la fonction génératrice. Nous écrivons

$$\gamma(t) = \sum_{m=0}^\infty c_m t^m = \int_{-1}^1 du [\sum_{m=0}^\infty t^m P_m(u)] \mathrm{sgn}(u) = \int_{-1}^1 du g(u,t) \mathrm{sgn}(u),$$

où $g(u,t)$ est la fonction génératrice pour les polynômes de Legendre donnée en Eq. (7.23). Donc

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \int_{-1}^1 du \frac{1}{\sqrt{1-2tu+t^2}} \mathrm{sgn}(u) = \int_0^1 du \frac{1}{\sqrt{1-2tu+t^2}} - \int_{-1}^0 du \frac{1}{\sqrt{1-2tu+t^2}} \\ &= \left[-\frac{1}{t}\sqrt{1-2tu+t^2} \right]_0^1 - \left[-\frac{1}{t}\sqrt{1-2tu+t^2} \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{1}{t}(1-t) + \frac{1}{t}\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{t}(1+t) + \frac{1}{t}\sqrt{1+t^2} \\ &= 2[\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{t}] \\ &= 2\frac{1}{t}[1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2!}t^4 + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}\frac{1}{4!}t^8 \cdots - 1] \\ &= 2\sum_{n=1}^\infty t^{2n-1} \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2} \cdots \frac{-n}{2}\frac{1}{n!} = t + 2\sum_{n=2}^\infty t^{2n-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}(2n-3)!!, \end{aligned}$$

où $n!! = 1 \times 3 \times 5 \cdots (n-2) \times n$ pour n impair et $n!! = 2 \times 4 \times 6 \cdots (n-2) \times n$ pour n pair. Nous trouvons

$$\sum_{n=0}^\infty c_n t^n = t + 2\sum_{n=2}^\infty t^{2n-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}(2n-3)!!,$$

donc $c_n = 0$ pour n pair, $c_1 = 1$ et

$$c_{2n-1} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}(2n-3)!! = 2\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!(2n-1)}(2n-1)!!.$$

Nous pouvons également écrire

$$c_{2n+1} = 2\frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}(2n-1)!!$$

enfin d'obtenir, finalement,

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(2m+1)+1}{2R^{2m+1}} c_{2m+1} r^{2m+1} P_{2m+1}(\cos(\theta)) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{2m+1}}{R^{2m+1}} P_{2m+1}(\cos(\theta))(4m+3)\frac{(-1)^m}{2^{m+1}(m+1)!}(2m-1)!! \end{aligned}$$

7.4 Exercices

1. Trouver les solutions des EDP suivantes

$$(1)\ \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}u = 0$$

avec les conditions aux limites $u(x,0) = x^2$, et

$$(2)\ \frac{\partial}{\partial x}u + y\frac{\partial}{\partial y}u = 0$$

avec les conditions aux limites $u(x,1) = \exp(-4x)$

2. Trouver les solutions générales des EDP suivantes

$$(1)\ \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial z}u = 0$$

$$(2) y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$(3)\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$$

$$(4)\ 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 3u = \sin(x-y)$$

Indice pour (4) : Chercher une solution particulière sous la forme $u = A\sin(x-y) + B\cos(x-y)$.

3. Trouver la solution générale de l'EDP

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \frac{\partial^2}{\partial y^2}u + 4\frac{\partial}{\partial y}u - 4u = 0.$$

(*Astuce* Montrer que $\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4\frac{\partial}{\partial y} + 4 = B^2 = (\frac{\partial}{\partial y} - 2)^2$, ensuite utiliser l'indice $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$!)

4. Montrer la solution de $\nabla^2\phi(x, y) = 0$ dans la région $y > 0$, $0 < x < L$, avec conditions aux limites $\phi(x, \infty) = 0$, $\partial\phi(0, y)/\partial x = 0$, $\phi(L, y) = 0$ et $\phi(x, 0) = f(x)$ est

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-(n + \frac{1}{2})\frac{\pi y}{L}\right) \cos\left((n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}\right)$$

avec

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx\ f(x) \cos\left((n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}.\right)$$

Trouver la solution quand $f(x) = \frac{1}{\epsilon}\theta(\epsilon - x)$, où $\epsilon \in (0, 1)$.

5. Considérons $\nabla^2 u = 0$, pour un potentiel électrique (qui est donc continue) à deux dimensions, avec conditions aux limites $u(\rho, \phi) = 2\cos(\phi)$ pour $\rho = 1$ et $\rho = 2$ et avec $u(\rho, \phi) = \rho\cos(\phi)$ quand $\rho \to \infty$. Trouver la solution dans les régions $\rho \in (0, 1]$, $\rho \in [1, 2]$ et $\rho > 2$.

6. En prenant le dérivé par rapport à t de

$$g(u, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tu + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(u),$$

trouver l'équation de récurrence

$$(2n + 1)uP_n(u) = (n + 1)P_{n+1}(u) + nP_{n-1}(u)$$

7. En prenant le dérivé par rapport à u de

$$g(u, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tu + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(u),$$

trouver l'équation de récurrence

$$P'_{n+1}(u) + P'_{n-1}(u) = 2uP'_n(u) + P_n(u)$$

8. Utiliser la fonction génératrice pour montrer

$$P_n(-u) = (-1)^n P_n(u)$$

9. Utiliser la fonction génératrice des polynômes de Legendre

$$g(u,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tu+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(u)$$

pour calculer les cinq premiers polynômes de Legendre.

10. Etant donné que $P_0(u) = 1$ et $P_1(u) = u$ calculer $P_2(u)$, $P_3(u)$ et $P_4(u)$ à partir de l'équation de récurrence

$$(2n+1)uP_n(u) = (n+1)P_{n+1}(u) + nP_{n-1}(u)$$

11. Calculer les trois premiers polynômes de Legendre en utilisant la formule de Rodrigues

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{du^n}\left[(u^2-1)^n\right].$$

12. Une surface sphérique conductrice, de rayon R, est placée dans un champ électrique uniforme $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_z$. Parce que la surface est conductrice, le potentiel sur la surface sphérique est constante. Le potentiel électrique obéit à l'équation de Laplace

$$\nabla^2 U = 0,$$

avec comme conditions aux limites

$$U(R,\theta,\phi) = \phi_0,$$

c'est-à-dire que U est constant sur la surface conductrice, et

$$U(r,\theta,\phi) \sim -E_0 r\cos(\theta) \text{ quand } r \to \infty.$$

Montrer que pour $r \to \infty$ que nous pouvons écrire

$$U = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r},$$

où $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, et que nous avons donc un champ électrique

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \mathbf{E}_0,$$

quand $r \to \infty$. Trouver le potentiel U pour $r < R$ et $r > R$, (*indice* $\cos(\theta) = P_1(\cos(\theta))$).

Chapitre 8

Théorie des Probabilités

8.1 Définitions : propriéétéés des espaces de probabilités

Espace de probabilité

(a) Ω - ensemble universel de tous les éévénements/observations possibles dans un systéme

(b) $\mathcal{F}$ - toutes les combinations d'événements possibles en Ω. Propriétés de $\mathcal{F}$:

1. Si $A,\ B \in \mathcal{F},\ A \cup B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$ ($A^c = \Omega \setminus A$).
3. $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(c) P mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, est une fonction $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ telle que

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.
2. Si $A_1,\ A_2 \cdots A_n \in \mathcal{F}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ (c-à-d les événements s'excluent mutuellement)

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

Défintion : Si $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $\{A_i\}$ est une *partition* de Ω.

Le triple $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s'appelle un espace de probabilité.

Exemple Une lancée d'une pièce truquée

Ensemble universel

$$\Omega = \{P,\ F\} \equiv \{\text{Pile},\ \text{Face}\}$$

Champ σ

$$\mathcal{F} = \{\emptyset,\ P,\ F,\ \Omega\}$$

Mesure de probabilité

$$P(\emptyset) = 0,\ P(P) = p,\ P(F) = 1 - p,\ P(\Omega) = 1$$

Propriétés de l'espace de probabilité

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. Si $B \supseteq A$ - $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, généralisation aux multiples ensembles :

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n).$$

Preuve - voir plus tard.

Exemple : Quelle est la probabilité que pour un groupe de n personnes au moins deux aient la même date d'anniversaire ? A = événement au moins deux aient le même anniversaire. Il est plus facile à calculer A^c - personne n'a le même anniversaire. $N = 365$ nombre de jours par an.

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 \times \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N} \times \cdots \frac{N-n+1}{N}$$

car, la probabilité que la deuxième personne n'ait pas le même anniversaire que la première personne est $(N-1)/N$, la probabilité que la troisième personne n'ait pas le même anniversaire que les deux premières personnes est $(N-2)/N$ etc.

$$P(A) = 1 - \frac{N!}{(N-n)!N^n}$$

Pour $N = 365$ et $n = 50$, $P(A) \approx 0,97$.

8.2 Probabilités conditionelles et indépendence

Définition de probabilité conditionelle : Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle qu'on voit l'événement A si on sait que B arrive est (probabilité de A sachant B) :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

où d'une façon plus intuitive

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Pour tous événements A et B

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Preuve : $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ est une union disjointe, $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$ car $B \cap B^c = \emptyset$. Donc

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Indépendence : Intuitivement un événement A est indépendant d'un événement B si $P(A|B) = P(A)$, c'est-à-dire que le fait qu'on voit B n'a aucun effet sur la probabilité d'observer A

Définition : les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Notons que ceci implique que $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)P(B)/P(B) = P(A)$, en accord avec l'idée intuitive.

Une famille d'ensembles $\{A_i \ , i \in I\}$ est indépendante si

$$P(\cap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

pour tous sous-ensembles finis J de I.

Théorème de Bayes : Si $A_1, \ A_2, \ \cdots A_n$ est une partition de Ω

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}$$

Preuve : $P(A_i|B)P(B) = P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i) = P(B|A_i)P(A_i)$ et donc

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Mais $\cup_j (B \cap A_j) = B$ est une partition de B est donc $P(B) = \sum_{j=1}^n P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)$ - CFD.

Exemple Nous avons deux boites I et II. Boite I contient deux balles blanches et trois balles bleues, boite II contient 3 balles blanches et quatres balles bleues. On prend une balle au hasard dans la boite I (la première balle) et on la met dans la boite II. Ensuite on prend une balle (la balle finale) dans la boite II - quelle est la probabilité qu'elle soit bleue ?

Solution : A = *événement balle finale est bleue*, B= *événement première balle était bleue*

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Alors $P(B) = 3/5$ (3 bleues parmi 3 bleues plus deux blanches) ; $P(B^c) = 2/5$. Si B nous avons $4+1 = 5$ balles bleues et 3 balles blanches dans boite II, donc $P(A|B) = 5/8$; si B^c nous avons 4 balles bleues et 4 balles blanches dans boite II, donc $P(A|B^c) = 4/8 = 1/2$

$$P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{15}{40} + \frac{8}{40} = \frac{23}{40}$$

Exemple : M. Martin a deux enfants - au moins un de ses enfants est une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ? On suppose que pour la naissance d'un seul enfant $P(F) = P(G) = 1/2$. L'information est X = au moins un des enfants est une fille. Selon Bayes

$$P(F \cap F|X) = \frac{P(F \cap F \cap X)}{P(X)}.$$

Nous voyons que $P(X) = 1 - P(G \cap G) = 1 - P(G)^2 = 3/4$. Mais clairement $P(F \cap F \cap X) = P(F \cap F)$. Nous avons $P(F \cap F) = 1/4$ donc

$$P(F \cap F | X) = \frac{P(F \cap F \cap X)}{P(X)} = \frac{P(F \cap F)}{P(X)} = \frac{1}{3}.$$

8.3 Variables aléatoires

Définition : Une variable aléatoire est une fonction

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemple : Un dé $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $X(n) = n$.

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1],\ F(x) = P(X \leq x).$$

Remarque $F(\infty) = 1$.

Fonction Indicatrice : Si $A \subset \Omega$

$$I_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

est la fonction indicatrice de A.

$$I(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in A; \quad I(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin A.$$

Remarques :

$$I_{A \cap B} = I_A I_B$$

$$I_{A^c} = 1 - I_A$$

$$\begin{aligned} I_{A \cup B} = 1 - I_{A^c \cap B^c} &= I - I_{A^c} I_{B^c} \\ &= 1 - (1 - I_A)(1 - I_B) = I_A + I_B - I_A I_B \\ &= I_A + I_B - I_{A \cap B}. \end{aligned}$$

Défintion : Valeur Moyenne

$$\langle f(X) \rangle = \sum_x f(x) P(X = x)$$

Remarque : valeur moyenne est une opération linéaire, pour a et $b \in \mathbb{R}$

$$\langle af(X) + bg(X) \rangle = a \langle f(X) \rangle + b \langle g(X) \rangle$$

Valeur moyenne de fonctions de plusieurs variables aléatoires

$$\langle f(X,Y)\rangle = \sum_x \sum_y f(x,y) P(X = x \cap Y = y).$$

Si X et Y sont indépendants

$$\langle f(X)g(Y)\rangle = \sum_x \sum_y f(x)g(y) P_X(X = x) P_Y(Y = y),$$

car pour X et Y indépendants $P(X = x \cap Y = y) = P_X(X = x)P_Y(Y = y)$ où $P_X(X = x)$ est la distribution de X et $P_Y(Y = y)$ est la distribution de Y. Nous trouvons donc

$$\begin{aligned}\langle f(X)g(Y)\rangle &= \sum_x \sum_y f(x)g(y) P_X(X = x) P_Y(Y = y) = [\sum_x f(x) P_X(X = x)] \times [\sum_y g(y) P_Y(Y = y)] \\ &= \langle f(X)\rangle \langle g(Y)\rangle.\end{aligned}$$

Pour plusieurs variables aléatoires indépendants $X_1,\ X_2 \cdots X_n$ nous avons

$$\langle \prod_{i=1}^N f_i(X_i)\rangle = \prod_{i=1}^N \langle f_i(X_i)\rangle$$

ce résultat est très important en physique statistique.

Exemple si $X = n$ pour un dé. Ici $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ avec $p_n = 1/6$

$$\langle X\rangle = \sum_x x P(X = x) = \sum_n n p_n = \sum_{n=1}^6 n\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{6\times 7}{2} = \frac{7}{2},$$

où nous avons utilisé

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$$

Si $X = I_A$ - la fonction indicatrice de l'ensemble A

$$\langle I_A\rangle = P(A)\times 1 + (1 - P(A))\times 0 = P(A)$$

Notons

$$I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{A\cap B},$$

donc

$$\langle I_{A\cup B}\rangle = \langle I_A + I_B - I_{A\cap B}\rangle = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

Mais aussi

$$1 - I_{\cup_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i})$$

et donc

$$I_{\cup_{i=1}^n A_i} = 1-\prod_{i=1}^n (1-I_{A_i}) = 1-1+\sum_{i=1}^n I_{A_i} - \sum_{1\le i<j}^n I_{A_i}I_{A_j} + \sum_{1\le i<j<k}^n I_{A_i}I_{A_j}I_{A_k}\cdots+(-1)^{n+1}I_{A_1}I_{A_2}\cdots I_{A_n}$$

donc

$$I_{\cup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n I_{A_i} - \sum_{1\le i<j}^n I_{A_i\cap A_j} + \sum_{1\le i<j<k}^n I_{A_i\cap A_j\cap A_k}\cdots + (-1)^{n+1} I_{\cap_{i=1}^n A_i}.$$

Prenons la valeur moyenne pour trouver

$$P(\cup A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1\le i<j}^n P(A_i\cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k}^n P(A_i\cap A_j\cap A_k)\cdots+(-1)^{n+1}P(\cap_{i=1}^n A_i).$$

8.4 Distributions discrètes

Bernouilli : Une expérience où la probabilité de succès est p et la probabilité d'échec est $q = 1-p$. Variable aléatoire $X = 1$ si succès, $X = 0$ si échec. Donc $p_0 = 1-p$, $p_1 = p$.
Distribution géometrique : Pour la distribution de Bernouilli, nous réalisons l'expérience (tous indépendants) jusqu'à ce que celle-ci soit un succès. Désignons par N le nombre d'expériences requises. Calculons $p_n = P(N = n)$, clairement $N \in \{1,\ 2,\ 3\cdots\}$, et $p_n =$ probabilité de $n-1$ échecs suivi d'un succès, donc

$$p_n = q^{n-1}p.$$

Normalisation

$$\sum_n p_n = p\sum_{n=1}^\infty q^{n-1} = p\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{p}{1-q} = 1$$

Distribution binomiale : Si nous faisons N expériences la probabilité qu'il y a n succès est donnée par la distribution binomiale. Pour calculer la probabilité de n succès nous remarquons qu'il doit y avoir n succès parmi les N experiènces. La probabilité que n expériences données soient des succès et les autres $N-n$ sont des échecs (par exemple experiénces numéros 1 à n sont des succès et les $N-n$ suivantes sont des échecs) est $p^n q^{N-n}$. Le nombre de façons distinctes de choisir les n succès parmi les N expériences est

$$\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \frac{N!}{(N-n)!n!}.$$

Nous trouvons donc

$$p_n = \frac{N!}{(N-n)!n!}p^n q^{N-n} \text{ pour } n \in \{0,\ 1,\ 2,\cdots,\ N\}.$$

Distribution de Poisson : La distribution de Poisson est importante pour la théorie de la radioactivité et le gaz parfait.

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!}\exp(-\lambda), \text{pour } n \in \{0,\ 1,\ 2, \cdots, \infty\}$$

Distribution multinomiale : Expérience avec k résultats possibles avec probabilités p_k (donc $\sum_{i=1}^k p_i = 1$). Pour N expériences quelle est la probabilité qu'il y ait n_i expériences ayant le résultat i (donc $\sum_{i=1}^k n_i = N$) est donnée par la distribution multinomiale

$$P(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} \begin{pmatrix} & N & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{pmatrix}.$$

Ici

$$\begin{pmatrix} & N & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{pmatrix} =$$

nombre de façons distinctes de mettre n_i balles de couleur i (couleurs distinctes) dans N boites

Nous voyons que, par récurrence,

$$\begin{pmatrix} & N & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & N & \\ n_1 & & N-n_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & N-n_1 & \\ n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix},$$

car nous pouvons d'ábord chosir les n_1 boites où nous mettons les n_1 balles de couleur 1. Ensuite nous devons choisir des façons distinctes de mettre les n_i balles de couleur i (avec $i = 2$, $i = 3, \cdots,\ i = k$) dans les $N - n_1$ boites qui restent. Nous trouvons donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} & N & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{pmatrix} &= \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \times \begin{pmatrix} & N-n_1 & \\ n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} \\
&= \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!} \begin{pmatrix} & N-n_1-n_2 & \\ n_3 & \cdots & n_k \end{pmatrix} \\
&= \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}
\end{aligned}$$

8.5 Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire telle avec $X \in \mathbb{Z}$. La fonction génératrice de X est

$$G(z) = \langle z^X \rangle = \sum_n p_n z^n,$$

où $p_n = P(X = n)$. Si X et Y sont deux variable aléatoires indépendantes la fonction génératrice de leur somme $Z = X + Y$ est donnée par

$$G_Z(z) = \langle z^{X+Y} \rangle = \langle z^X z^Y \rangle = \langle z^X \rangle \langle z^Y \rangle = G_X(z) G_Y(z)$$

La fonction G est très utile pour calculer les espérances. Notons que

$$\frac{dG}{dz} = \langle X z^{X-1} \rangle,$$

donc

$$\langle X \rangle = \frac{dG}{dz}|_{z=1},$$

aussi

$$\frac{d^2G}{dz^2} = \langle X(X-1) z^{X-2} \rangle,$$

et donc

$$\langle X(X-1) \rangle = \frac{d^2G}{dz^2}|_{z=1}.$$

Pour la loi binomiale

$$G(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n p^n (1-p)^{N-n} \binom{N}{n} = (zp + (1-p))^N = (zp+q)^N,$$

où $q = 1-p$.

Méthode alternative - nous pouvons écrire $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, où $X_i = 1$ avec probabilité p et 0 avec probabilité $q = 1-p$. Ici p est la probabilité du succès de l'expérience i. Les X_i sont indépendantes donc

$$\langle G(z) \rangle = \prod_{i=1}^{N} \langle z^{X_i} \rangle = (pz+q)^N$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dz} &= Np(zp+q)^{N-1} \\ \frac{d^2G}{dz^2} &= N(N-1)p^2(zp+q)^{N-2}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= Np(p+q)^{N-1} = Np \\ \langle X(X-1) \rangle &= N(N-1)p^2(p+q)^{N-2} = N(N-1)p^2. \end{aligned}$$

Définition : variance

$$\mathrm{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2.$$

La variance est aussi connue comme l'écart quadratique moyen, car

$$\mathrm{Var}(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle.$$

Par conséquence $\mathrm{Var}(X) \geq 0$, notons que $\mathrm{Var}(X) = 0 \Rightarrow X = \langle X \rangle$ avec probabilité 1. Pour la loi binomiale

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \langle X(X-1) \rangle + \langle X \rangle - \langle X \rangle^2 \\
&= N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 \\
&= Np(1-p) = Npq.
\end{aligned}$$

Pour la distribution géometrique,

$$p_n = pq^{n-1}$$

avec $n \geq 1$. Ici

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} pq^n z^{n+1} \\
&= pz \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^n = \frac{pz}{1-qz}.
\end{aligned}$$

$$\frac{dG(z)}{dz} = \frac{p}{1-qz} + \frac{pzq}{(1-qz)^2} = \frac{p}{(1-qz)^2}.$$

Nous avons donc

$$\langle X \rangle = \frac{dG(z)}{dz}|_{z=1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Application : Problème du collectionneur de vignettes - Un collectionneur cherche à avoir toutes les vignettes N d'une série mais à l'achat le numéro de la vignette est inconnu (comme les jouets dans les paquets de céréales par exemple). Combien faut-il faire d'achats pour avoir la collection complète de N vignettes ?

Au premier achat il trouve une nouvelle vignette avec la probabilité $p = 1$. Après qu'il ait déjà trouvé n vignettes, il trouve une nouvelle avec une probabilité $p_n = (N-n)/N$. La distribution du nombre d'achats pour réussir à en trouver une nouvelle est géometrique avec une probabilité de succès de p_n. Le nombre moyen d'achats pour trouver la nième vignette est donc

$$a_n = \frac{1}{p_n} = \frac{N}{N-n},$$

Le nombre moyen d'achats est donc

$$A_N = \sum_{n=0}^{N-1} a_n = N \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N-n},$$

dans la somme on écrit $m = N - n$, et donc $m = 1, \cdots N$

$$A_N = N \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m}.$$

Pour N grand nous pouvons écrire

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m} \approx \int_{1}^{N} \frac{dx}{x} = \ln(N),$$

et donc $A_N \approx N\ln(N)$.

8.6 Variables aléatoires continues

Définition : densité de probabilité d'une variable aléatoire X

$$p(u)du = P(X \in [u, u+du]).$$

Définition : fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\ du.$$

Remarque : normalisation-

$$(i)\ \int_{-\infty}^{\infty} p(u)\ du = 1.$$

$$(ii)\ P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} p(u)\ du = 1.$$

Pour $B \in \mathbb{R}$,

$$(iii)\ P(x \in B) = \int_{B} p(u)\ du.$$

Exemples :

(i) Distribution uniforme, $X \in [a, b]$

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{1}{b-a}\ a \leq x \leq b \\ &= 0 \qquad \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

(ii) Distribution exponentielle de paramètre $\lambda(> 0)$

$$p(u) = \lambda \exp(-\lambda u) \quad u \geq 0.$$

(iii) Distribution gaussienne (distribution normale) - $N(\mu, \sigma^2)$

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}) \qquad -\infty < \mu < \infty.$$

Valeurs moyennes

$$\langle g(X)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(u)g(u)\ du$$

Remarque utile, si X a une densité de probabilité $p(u)$

$$\langle \delta(x-X)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} du\ p(u)\delta(x-u) = p(x).$$

Exemple : Pour la distribution gaussienne $N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{array}{rcl} \langle X\rangle & = & \mu \\ \mathrm{Var}(X) & = & \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 = \sigma^2. \end{array}$$

$$\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} duup(u) = \int_{-\infty}^{\infty} duu\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}),$$

maintenant posons $u = y + \mu$

$$\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy(y+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}).$$

Mais notons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}) = 1,$$

c'est la normalisation de la densité de probabilité $N(0, \sigma^2)$. À savoir

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \exp(-\frac{au^2}{2}) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Nous trouvons donc

$$\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \mu\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}) = \mu$$

Pour calculer la variance on utilise

$$\mathrm{Var}(X) = \langle (X-\langle X\rangle)^2\rangle = \langle (X-\mu)^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} du(u-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

Nous posons $y = u - \mu$ qui donne

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}).$$

Pour calculer cette intégrale nous rappelons

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \ \exp(-a\frac{y^2}{2}) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}},$$

en prenant la derivée partielle par rapport à a, nous trouvons

$$\frac{\partial I(a)}{\partial a} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dy\ y^2 \exp(-a\frac{y^2}{2}) = -\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{2\pi},$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\ y^2 \exp(-a\frac{y^2}{2}) = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}\sqrt{2\pi}.$$

Nous obtenons donc (pour $a = \sigma^{-2}$)

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{\sigma^{-3}}\sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

Nous pouvons utiliser la même astuce pour calculer les moments de la distribution exponentielle

$$\langle X^n \rangle = \lambda \int_0^{\infty} u^n \exp(-\lambda\mu).$$

On définit

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} du \exp(-\lambda u) = \frac{1}{\lambda},$$

et donc

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} I(\lambda) = (-1)^n \int_0^{\infty} duu^n \exp(-\lambda u) = (-1)^n n! \frac{1}{\lambda^{n+1}}.$$

Nous trouvons

$$\int_0^{\infty} duu^n \exp(-\lambda\mu) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}},$$

et donc

$$\langle X^n \rangle = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

8.7 Distribution de Poisson et la radioactivité

Nous modélisons une source de rayonnement de la manière suivante. À partir du temps $t = 0$, on note $N(t)$ le nombre d'émissions radioactives jusqu'au temps t. Dans un intervalle de temps infinitésimal $[t, t + dt]$, la probabilité d'une émission radioactive est λdt , où λ est le *taux* d'émission. On note $P(n, t)$ la distribution de probabilité de $N(t)$. Remarquons que $N(t + dt) = n$ si (i) $N(t) = n$ et il n'y a pas d'émission entre t et $t + dt$ ou (ii) si $N(t + dt) = n - 1$ et qu'il y a une émission entre t et $t + dt$, donc

$$P(n, t + dt) = P(n, t)(1 - \lambda dt) + P(n - 1, t)\lambda dt$$

Nous utilisons

$$P(n, t + dt) = P(n, t) + dt\frac{\partial}{\partial t}P(n, t)$$

pour trouver (nous ne gardons que les termes d'ordre dt car nous allons prendre la limite $dt \to 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t}P(n,t) = \lambda P(n-1,t) - \lambda P(n,t) \tag{8.24}$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons la fonction génératrice

$$G(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n,t).$$

Nous multiplions Eq. (8.24) par z^n et ensuite faisons la somme sur n :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\partial}{\partial t}P(n,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n[\lambda P(n-1,t) - \lambda P(n,t)] \\ \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n,t) &= \lambda\sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n-1,t) - \lambda\sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n,t) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial t}G(z,t) = \lambda\sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n-1,t) - \lambda G(z,t).$$

En remarquant que $P(-1,t) = 0$ nous écrivons maintenant

$$\frac{\partial}{\partial t}G(z,t) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} z^n P(n-1,t) - \lambda G(z,t)$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial t}G(z,t) = z\lambda\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} P(n-1,t) - \lambda G(z,t).$$

Nous écrivons $n-1=m$ dans la première somme afin d'obtenir

$$\frac{\partial}{\partial t}G(z,t) = z\lambda\sum_{m=0}^{\infty} z^{m} P(m,t) - \lambda G(z,t),$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial t}G(z,t) = z\lambda G(z,t) - \lambda G(z,t) = -\lambda(1-z)G(z,t)$$

La solution est

$$G(z,t) = G(z,0)\exp(-\lambda(1-z)t).$$

Nous remarquons que

$$G(z,0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,0)z^n = 1$$

car $P(0,0)=1$ et $P(n,0)=0$ pour $n>1$. Maintenant nous écrivons

$$G(z,t)=\exp(-\lambda(1-z)t)=\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-\lambda t)\frac{[\lambda t]^n z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}P(n,t)z^n,$$

et donc nous voyons

$$P(n,t)=\frac{[\lambda t]^n}{n!}\exp(-\lambda t),$$

c'est la distribution de Poisson !

Notez que la probabilité qu'il n'y ait pas d'émission avant le temps t est donnée par

$$P(0,t)=\exp(-\lambda t).$$

Si T_1 est le temps de la première emission nous voyons que

$$P(T_1>t)=\exp(-\lambda t)=\int_t^{\infty}p_1(u)du,$$

où p_1 est la densité de probabilité de T_1. En prenant la derivée d'Eq. (8.7), nous trouvons

$$p_1(t)=\lambda\exp(-\lambda t),$$

c'est la distribution exponentielle. La distribution exponentielle apparaît souvent en physique, elle décrit les statistiques de réactions chimiques simples. La distribution exponentielle n'a pas de mémoire. En sachant que $T_1>t'$, pour $t>0$ selon Bayes

$$P(T_1>t'+t|T_1>t')=\frac{P(T_1>t'+t\cap T_1>t')}{P(T>t')}=\frac{P(T_1>t'+t)}{P(T>t')}=\frac{\exp(-\lambda[t'+t])}{\exp(-\lambda t')}=\exp(-\lambda t),$$

c'est le même résultat pour $t'=0$!

8.8 Fonctions de variables aléatoires continues

Soit X une variable aléatoire avec densité de probabilité $p(x)$, si $Y=y(X)$ est une fonction de X, alors Y est donc une autre variable aléatoire. Si $y(x)$ est une bijection (donc $y^{-1}(x)$ existe), calculons la densité de probability $f(y)$ de Y.

$$P(X\in[x,\ x+dx])=P(Y\in[y+dy])\Rightarrow p(x)|dx|=f(y)|dy|$$

Nous trouvons donc

$$f(y)=p(x)\frac{1}{|\frac{dy}{dx}|},$$

où $x = y^{-1}(y)$. S'il y a plusieurs solutions x telles que $y(x) = y$ nous trouvons que

$$f(y) = \sum_{x:y(x)=y} p(x) \frac{1}{|\frac{dy}{dx}|}$$

On peut aussi utiliser

$$f(y) = \langle \delta(Y - y) \rangle = \langle \delta(y(X) - y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ p(x) \delta(y(x) - y)$$

Proche à x' tel que $y(x') = y \Rightarrow x' = y^{-1}(y)$ nous pouvons écrire

$$y(x) = y(x') + y'(x')(x - x') = u + y'(y^{-1}(y))(x - y^{-1}(y)),$$

donc

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) \delta(y'(y^{-1}(y))(x - y^{-1}(y))) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) \delta(x - y^{-1}(y))) \frac{1}{|y'(y^{-1}(y))|}$$

(voir chapître sur les fonctions de Green et la fonction de Dirac). Nous obtenons donc $f(y) = p(y^{-1}(y)) \frac{1}{|\frac{dy}{dx}(y^{-1}(y))|}$, Dans le cas où plusieurs solutions $x = y(x)$ existent, nous retrouvons le résultat d'Eq. (8.8).

Exemple : (i) $p(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, pour $x \in [0, \infty]$, $Y = X^3$.

$$f(y) = p(x) | \frac{1}{|\frac{dy}{dx}|} (\text{ pour } y(x) = y) = \exp(-\lambda x) \frac{1}{3x^2} \text{ pour } y(x) = y.$$

Ici $y(x) = x$ a une seule solution $x = y^{\frac{1}{3}}$, donc

$$f(y) = \frac{\exp(-\lambda y^{\frac{1}{3}})}{3y^{\frac{2}{3}}}$$

pour $y > 0$ et $f(y) = 0$ pour $y < 0$.

Exemple : (ii) $p(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})/\sqrt{2\pi}$, $Y = X^2$, ici il y a deux solutions à $x^2 = y$, $x = \pm\sqrt{y}$. Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$f(y) = \sum_{x=\pm\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) \frac{1}{|2x|} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y}{2}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp(-\frac{y}{2})$$

notons que $f(y) = 0$ pour $y < 0$.

Exemple : (iii) $p(x) = 1, \ x \in [0, 1]$ (distribution uniforme), , $Y = X^3$. Une seule solution à $y = x^3$ pour $x \in [0, 1]$, clairement $Y \in [0, 1]$.

$$f(y) = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}.$$

8.9 Théorème Central Limite

Fonction caractéristique : Soit $p(x)$ la densité de probabilité d'une variable aléatoire X. La *fonction caractéristique* de X est la transformée de Fourier de $p(x)$

$$\tilde{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) \exp(-ikx) = \langle \exp(-ikX) \rangle.$$

Exemple pour $N(0, \sigma^2)$ $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$,

$$\tilde{p}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \exp(-ikx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{(x+ik\sigma^2)^2}{2\sigma^2} - \frac{k^2\sigma^2}{2}).$$

Nous posons $y = x + ik\sigma^2$ et trouvons

$$\tilde{p}(k) = \frac{\exp(-\frac{k^2\sigma^2}{2})}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty+ik\sigma^2}^{\infty+ik\sigma^2} dy \exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}).$$

Avec l'analyse complexe on peut démontrer

$$\int_{-\infty+ik\sigma^2}^{\infty+ik\sigma^2} dy \exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}),$$

donc comme si $ik\sigma^2$ était reél, et donc

$$\tilde{p}(k) = \exp(-\frac{k^2\sigma^2}{2}).$$

Considèrons n variables aléatoires indépendants X_i, $1 \leq i \leq n$ ayant la même distribution de probabilité $p(x)$. Considère leur somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Si $\langle X_i \rangle = \mu$ nous pouvons définir des nouvelles variables aléatoires $Y_i = X_i - \mu$ qui sont par construction de moyenne nulle, $\langle Y_i \rangle = \langle X_i - \mu \rangle = \mu - \mu = 0$. Cependant

$$\mathrm{Var}(Y_i) = \langle Y_i^2 \rangle - \langle Y_i \rangle^2 = \langle Y_i^2 \rangle = \langle (X_i - \mu)^2 \rangle = \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$$

Considèrons la variable aléatoire

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

La fonction caractéristique de R_n est donnée par

$$\tilde{\rho}_n(k) = \langle \exp(-ikR_n) \rangle = \langle \exp(-\frac{ik}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i) \rangle = \langle \prod_{i=1}^{n} \exp(-\frac{ik}{\sqrt{n}} Y_i) \rangle.$$

Maintenant nous utilisons que les Y_i sont indépendantes pour écrire

$$\tilde{\rho}_n(k) = \prod_{i=1}^{n} \langle \exp(-\frac{ik}{\sqrt{n}} Y_i) \rangle = \langle \exp(-\frac{ik}{\sqrt{n}} Y) \rangle^n,$$

où Y a la même distribution que les Y_i.

Si n est grand et la distribution de Y est assez sympa nous pouvons écrire

$$\langle \exp(-\frac{ik}{\sqrt{n}} Y) \rangle = \langle 1 - \frac{ik}{\sqrt{n}} Y - \frac{k^2}{2n}(Y^2 + \frac{f(k,Y,n)}{\sqrt{n}}) \rangle = 1 - \frac{k^2}{2n}\sigma^2 + \frac{g(k,n)}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Maintenant nous utilisons le résultat

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{x}{n})^n \to \exp(-x)$$

pour trouver

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}_n(k) = \exp(-\frac{k^2\sigma^2}{2}),$$

c'est-à-dire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $N(0, \sigma^2)$. Nous pouvons donc écrire dans la limite de n grand

$$R_n = Q,$$

où Q est Gaussienne avec $\langle Q \rangle = 0$ et $\mathrm{Var}(Q) = \sigma^2$. On peut aussi écrire que $Q = \sigma G$ où G est $N(0,1)$ (exercise facile). Pour un grand nombre de mesures X_i nous estimons la valeur moyenne de la variable aléatoire X par

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu + \frac{1}{n} \sum_i Y_i = \mu + \frac{1}{\sqrt{n}} R_n,$$

et donc pour grand n nous trouvons

$$M_n = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} G.$$

Donc pour n très grand M_n converge vers sa valeur moyenne, avec un écart gaussien qui devient petit comme $1/\sqrt{n}$.

Comme application imaginons une pièce de monnaie truquée avec $P(\text{Pile}) = p$ et $P(\text{Face}) = q = 1 - p$. Soit $X_i = 1$ si pile, et $N = \sum_{i=1}^{n} X_i$ le nombre total de piles. Nous avons

$$\mu = \langle X \rangle = p$$

et

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = p \times 1 + q \times 0 - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Nous trouvons donc

$$\frac{1}{n} N = p + \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} G \Rightarrow N = np + \sqrt{pq} G \sqrt{n}$$

Si $p = q = 1/2$ et $n = 100$ nous attendons que $N = 50 + G \times 10/2 = 50 + 5G$ où G est de l'ordre de 1.

8.10 Exercises

1. Une sac contient cinq balles, trois noires et deux blanches. On tire au hasard une balle et la jete dans une poubelle. On tire maintenant une deuxième balle du sac. Quelle est la probabilité que le deuxième balle soit noire ?
2. M. Martin habite à Agen. Toutes les heures (y compris la nuit) un train part pour Bordeaux et un autre pour Toulouse. Chaque train part toujours à la même minute de chaque heure (mais la minute n'est pas la même pour le train de Toulouse et le train de Bordeaux). M. Martin arrive à la gare d'Agen à un temps aléatoire chaque jour et il prend le premier train qui arrive à la gare d'Agen (il n'aime pas attendre). A la fin de l'année M. Martin se rend compte qu'il est allé à Toulouse trois fois plus souvent qu'à Bordeaux, comment est-ce possible ?
3. Seulement deux usines dans le monde produisent les *bidules*. 20% des bidules de l'usine I et 5% des bidules de l'usine II sont défaillants. L'usine I produit deux fois plus de bidules que l'usine II par semaine. Quelle est la probabilité qu'un bidule acheté au hasard marche ? Si le bidule est défaillant, quelle est la probabilité qu'il vienne de l'usine I ?
4. Il y a trois stations de ski dans les Pyrénées A,B et C. Il y a deux routes entre A et B et deux routes entre B et C. Chacune des routes est fermée à cause de la neige avec une probabilité p indépendamment de l'état des autres routes. Quelle est la probabilité de pouvoir voyager entre A et C ?
5. Montrer que $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$.
6. Calculer la fonction génératrice pour la distribution de Poisson. Calculer la moyenne et variance pour la distribution de Poisson ?
7. La variable aléatoire X a une densité de probabilité uniforme sur $[0, 1]$, c'est-à-dire $p(x) = 1$ pour $x \in [0, 1]$ et $p(x) = 0$ ailleurs.
   (a) Calculer la valeur moyenne de X^2, $\langle X^2 \rangle$.
   (b)Pour $a \in [0, 1]$ calculer la probabilité que $X > a$, notée $P(X > a)$.
   (c) Soit $b \in [0, 1]$ tel que $b > a$, sachant que $X > a$ calculer la probabilité que $X > b$, notée $P(X > b|X > a)$.

(d) La variable aléatoire Y est donnée par $Y = -\ln(X)$, trouver la densité de probabilité $\rho(y)$ de Y.

8. Une variable aléatoire X est tirée d'une distribution avec une densité de probabilité

$$\begin{aligned} p(x) &= \lambda \exp(-\lambda x) \quad \text{pour } x \geq 0 \\ &= 0 \qquad\qquad\quad\;\; \text{pour } x < 0 \end{aligned}$$

avec $\lambda > 0$.

(a) Calculer $\langle X^n \rangle$ pour n entier et positif.

(b)Calculer la probabilité que $X > a$ (pour $a > 0$), notée $P(X > a)$.

(c) Si $b > a > 0$, calculer la probabilité que $X > b$ sachant que $X > a$, c'est-à-dire $P(X > b|X > a)$.

(d) Soit $Y = \ln(X)$, trouver la densité de probabilité de Y.

(e) Soit $X_1,\ X_2, \cdots X_m$, m variables aléatoires indépendantes tirées de la même distribution. On définit par X_{max} le maximum parmi les m variables et par X_{min} le minimum. Calculer la densité de probabilité de X_{max} et de X_{min}.

9. Un dé est lancé six fois, quelle est la probabilité que le numero six apparait au moins une fois.

10. Soit X une variable aléatoire uniformement distribuée sur $[0, 1]$, c'est-à dire que X a une densité de probablilité

$$p(x) = 1 \quad x \in [0, 1]$$

Trouver une fonction g tel que la variable aléatoire $Y = g(X)$ a une densité de probabilité

$$f(y) = \exp(-y) \quad y \in [0, \infty)$$

Chapitre 9

Annexe

9.1 Calcul de la fonction de Green pour systèmes d'ordre n

Sauf au point $x = z$, l'équation de la fonction Green est tout simplement la même que l'équation homogéne et nous avons donc

$$\begin{aligned} G(x,z) &= \sum_c A_{c-}(z) y_{c-}(x) \text{ for } a < x < z \\ G(x,z) &= \sum_c A_{c+}(z) y_{c+}(x) \text{ for } z < x < b, \end{aligned}$$

où $\sum_c$ indique la somme sur les solutions compléémentaires possibles. Les coefficients $A_{c\pm}$ dépendent de z. Nous avons vu que la dérivéée de la fonction Heaviside produit une fonction de Dirac, aussi une des dérivées dans l'équation de la fonction de Green doit produire une fonction de Dirac,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} G(x,z) = \delta(x-z).$$

C'est la dérivéée la plus éélevée $k = n$ qui doit donner une fonction de Dirac (sinon, nous verrons des dérivées de la fonction de Dirac). CÇa signifie que $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} G(x,z)$ doit être discontinu à $x = z$ (localement G est proportionel à la fonction Heaviside) mais que $\frac{d^k}{dx^k} G(x,z)$ pour $k < n-1$ doit être continu. Nous écrivons maintenant, en supposant que $a_n(x) \neq 0$

$$\frac{d^n}{dx^n} G(x,z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)} \frac{d^k}{dx^k} G(x,z) = \frac{\delta(x-z)}{a_n(x)}.$$

Maintenant, nous intégrons cette équation entre $z_- = z - \epsilon$ et $z_+ = z + \epsilon$ pour $\epsilon \to 0$ et nous trouvons la condition de saut

$$\begin{aligned}
\int_{z_-}^{z_+} dx \left[\frac{d^n}{dx^n} G(x,z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)} \frac{d^k}{dx^k} G(x,z) \right] &= \int_{z_-}^{z_+} dx \frac{\delta(x-z)}{a_n(x)}, \\
\Rightarrow \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} G(x,z)|_{x=z_+} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} G(x,y)|_{x=z_-} = \frac{1}{a_n(z)}.
\end{aligned}$$

Les conditions de raccordement au point $x = z$ sont

$$\begin{aligned}
G(z_+, z) &= G(z_-, z) \\
\frac{d}{dx} G(x,z)|_{x=z_+} &= \frac{d}{dx} G(x,z)|_{x=z_-} \\
&\cdots \\
\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} G(x,z)|_{x=z_+} &= \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} G(x,z)_{x=z_-} \\
\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} G(x,z)|_{x=z_+} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} G(x,z)|_{x=z_-} &= \frac{1}{a_n(z)}.
\end{aligned}$$

Si $G(x,z)$ satisfait les conditions aux limites homogénes à $x = a$ et $x = b$ respectivement, c'est-à-dire $\sum_c A_{c-}(z) y_{c-}(x)$ satisfait les conditions au limite à $x = a$ (s'il y en a) et $\sum_c A_{c+}(z) y_{c+}(x)$ satisfait les conditions au limite à $x = b$ (s'il y en a), alors la solution

$$y_p(x) = \int_a^b dz\ G(x,z) f(z) = \underbrace{\int_a^x dz \sum_c A_{c+}(z) y_{c+}(x) f(z)}_{\text{région } x>z} + \underbrace{\int_x^b dz\ \sum_c A_{c-}(z) y_{c-}(x) f(z)}_{\text{région } x<z}$$

les satisfait également. Les conditions de raccordement à $x = z$ deviennent

$$\begin{aligned}
\sum_c A_{c-}(z) y_{c+}(z) &= \sum_c A_{c+}(z) y_{c-}(y) \\
\sum_c A_{c+}(z) \frac{d}{dx} y_{c+}(x)|_{x=z} &= \sum_c A_{c-}(z) \frac{d}{dx} y_{c-}(x)|_{x=z} \\
&\cdots \\
\sum_c A_{c+}(z) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} y_{c+}(x)|_{x=z} &= \sum_c A_{c-}(y) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} y_{c-}(x)|_{x=z} \\
\sum_c A_{c+}(y) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y_{c+}(x)|_{x=z} - \sum_c A_{c-}(y) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y_{c-}(x)|_{x=z} &= \frac{1}{a_n(z)}.
\end{aligned}$$

9.2 Autre méthode pour trouver les solutions particulières des EDOs

Consièrons l'EDO

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + p(x)\frac{d}{dx}y(x) + q(x)y(x) = f(x).$$

Si deux solutions complémentaires de l'EDO homogène

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + p(x)\frac{d}{dx}y(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

$y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont connues, essayons une solution de la forme

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

Nous avons cependant une seule équation pour deux fonctions $A(x)$ et $B(x)$. On propose donc d'imposer la condition supplémetaire

$$y_1(x)\frac{dA(x)}{dx} + y_2(x)\frac{dB(x)}{dx} = 0.$$

Nous trouvons donc

$$\frac{dy_p(x)}{dx} = A(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + B(x)\frac{dy_2(x)}{dx},$$

et

$$\frac{d^2y_p(x)}{dx^2} = A(x)\frac{y_1^2(x)}{dx^2} + B(x)\frac{y_2^2(x)}{dx^2} + \frac{dA(x)}{dx}\frac{y_1(x)}{dx} + \frac{dB(x)}{dx}\frac{y_2(x)}{dx}$$

Dans l'EDO nous trouvons

$$\begin{aligned}&A(x)\frac{y_1^2(x)}{dx^2} + B(x)\frac{y_2^2(x)}{dx^2} + \frac{dA(x)}{dx}\frac{y_1(x)}{dx} + \frac{dB(x)}{dx}\frac{y_2(x)}{dx}\\ &+p(x)[A(x)\frac{y_1(x)}{dx} + B(x)\frac{y_2(x)}{dx}] + q(x)[A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)] = f(x)\end{aligned}$$

Donc en utilisant l'EDO

$$\frac{dA(x)}{dx}\frac{y_1(x)}{dx} + \frac{dB(x)}{dx}\frac{y_2(x)}{dx} = f(x)$$

Nous devons donc resourde le système linéaire

$$\begin{aligned}y_1'(x)A'(x) + y_2'(x)B'(x) &= f(x)\\ y_1(x)A'(x) + y_2(x)B'(x) &= 0\end{aligned}$$

pour $A'(x)$ et $B'(x)$.

La solution est

$$\begin{aligned} A'(x) &= -\frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)} \\ B'(x) &= \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)}. \end{aligned}$$

En intégrant nous trouvons

$$\begin{aligned} A(x) &= -\int^x dx' \frac{f(x')y_2(x')}{W(y_1,y_2)} \\ B(x) &= \int^x dx' \frac{f(x')y_1(x')}{W(y_1,y_2)}. \end{aligned}$$

9.3 Méthode pour trouver la deuxiéme solution en série

Une deuxiéme solution peut être trouvée en utilisant le wronskien. Cependant, la méthode la plus simple est la méthode des dérivéés. Nous définissons la série Frobenius comme une fonction de z et σ,

$$y(z,\sigma) = z^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma) z^n,$$

qui est une solution à $\sigma = \sigma_1$. Maintenant, nous notons que

$$\mathcal{L}y(z,\sigma) = z^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} z^n A_n(a_0, \cdots, a_k, \cdots, \sigma),$$

où

$$A_n(a_0, \cdots, a_k, \cdots, \sigma) = 0$$

est la relation de récurrence pour les coefficients a_n pour $n > 1$ et $A_0(\sigma) = 0$ est l'équation indicielle

$$A_0(\sigma) = a_0(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2).$$

Comme les termes $A_n = 0$ pour $n > 1$ nous avons

$$\mathcal{L}y(z,\sigma) = z_0^\sigma(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2). \tag{9.17}$$

Racines répétées

Si $\sigma_1 = \sigma_2$ on trouve

$$\mathcal{L}y(z,\sigma) = z^\sigma(\sigma-\sigma_1)^2.$$

Nous prenons la derivée par rapport au σ et ensuite nous posons $\sigma = \sigma_1$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\mathcal{L}y(z,\sigma) = \mathcal{L}\frac{\partial}{\partial\sigma}y(z,\sigma) = \ln(z)z^\sigma(\sigma-\sigma_1)^2 + 2z^\sigma(\sigma-\sigma_1).$$

Cela montre que

$$\mathcal{L}\frac{\partial}{\partial\sigma}y(z,\sigma)|_{\sigma=\sigma_1} = 0,$$

et donc

$$y_2(z) = \frac{\partial}{\partial\sigma}y(z,\sigma)|_{\sigma=\sigma_1}$$

est une deuxiéme solution indépendante de l'EDO.

$\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas, nous multiplions l'Eq. (9.17) par $\sigma - \sigma_2$ pour trouver

$$(\sigma-\sigma_2)\mathcal{L}y(z,\sigma) = \mathcal{L}(\sigma-\sigma_2)y(z,\sigma) = z_0^\sigma(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)^2,$$

et en prenant $\partial/\partial\sigma$ des deux côtés et en posant $\sigma = \sigma_2$ nous trouvons

$$\mathcal{L}\frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma-\sigma_2)y(z,\sigma)|_{\sigma=\sigma_2} = 0,$$

et donc

$$y_2(z) = \frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma-\sigma_2)y(z,\sigma)|_{\sigma=\sigma_2},$$

est une deuxiéme solution indépendante.

Aã titre d'exemple, considérons l'équation (5.42). La relation de récurrence pour σ est

$$a_n = \frac{(n+\sigma)}{n+\sigma-1}a_{n-1},$$

et donc

$$a_n = a_0\frac{(n+\sigma)}{\sigma}.$$

Cela donne

$$y(z,\sigma) = a_0 z^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(n+\sigma)}{\sigma}.$$

La deuxiéme solution est donnée par, rappelons $\sigma_2 = 0$,

$$
\begin{aligned}
y_2(z) &= \frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma-\sigma_2)y(z,\sigma)|_{\sigma=\sigma_2} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\sigma a_0 z^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(n+\sigma)}{\sigma}\right]_{\sigma=\sigma_2} \\
&= \left[\ln(z) a_0 z^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} z^n (n+\sigma) + a_0 z^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right]_{\sigma=0} \\
&= \ln(z) a_0 \sum_{n=0}^{\infty} z^n n + \frac{a_0}{1-z} = z\ln(z) a_0 \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} n + \frac{a_0}{1-z} = z\ln(z) a_0 \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{a_0}{1-z} \\
&= z\ln(z) a_0 \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} + \frac{a_0}{1-z} = a_0\left(\frac{\ln(z)z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z}\right)
\end{aligned}
$$

9.4 DSI 2017

Durée 1h20

1. Fonctions de Green

Considérons la fonction de Green, pour $x,\ z \in \mathbb{R}$.

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,z) - m^2 G(x,z) = \delta(x-z),$$

où x a les dimensions physique $[L]$ d'une longueur. Les conditions aux limites sont $G(-\infty, z) = G(\infty, z) = 0$.

1. Donner les dimensions physiques de $\delta(x)$, $G(x,z)$ et m.
2. Calculer la fonction de Green $G(x,z)$ pour $x < z$ et $x > z$.

2. Solution en série des ODEs

Trouver deux solutions sous la forme d'une série, autour de $z = 0$, de

$$\frac{d^2}{dz^2}y(z) + z\frac{d}{dz}y(z) + y(z) = 0.$$

9.5 DSI 2018

Durée : 1h20

1. Donner la définition du wronskien $W(f,g)$ de deux fonctions f et g.
2. Montrer que si $W(f,g) = 0$ alors $g(x) = cf(x)$ où c est une constante.
3. Nous considérons l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + p(x)\frac{d}{dx}y(x) + q(x)y(x) = 0$$

Cette équation est-elle linéaire ?

4. Combien de conditions aux limites sont nécessaires pour trouver une solution unique à cette équation ?
5. Si y_1 (x) et $y_2(x)$ sont deux solutions indépendantes de cette équation, montrer que $y(x) = ay_1(x)+by_2(x)$ est également une solution lorsque a et b sont des constantes.
6. Montrer que
$$W(y_1(x), y_2(x)) = \exp(-\int^x dx' p(x')).$$
7. Montrer que
$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) - 3x \frac{d}{dx} y(x) + 4y(x) = 0$$
a une solution $y_1(x) = x^2$ et trouver une deuxième solution.
8. Trouver la fonction de Green sur $[0, \pi]$
$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, z) + G(x, z) = \delta(x - z),$$
avec conditions aux limites
$$\frac{d}{dx} G(x, z)|_{x=0} = 0 \text{ et } G(\pi, z) = 0.$$

9.6 DSI 2019

Durée : 1h20

1. Wronskien

1. Donner la définition du wronskien $W(f, g)$ de deux fonctions f et g.
2. Montrer que si $W(f, g) = 0$ alors $g(x) = cf(x)$ où c est une constante.
3. Nous considéérons l'ééquation
$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + p(x) \frac{d}{dx} y(x) + q(x)y(x) = 0$$
Cette équation est-elle linéaire ?
4. Combien de conditions aux limites sont nécessaires pour trouver une solution unique à cette ééquation ?
5. Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions indépendantes de cette équation, montrer que $y(x) = ay_1(x)+by_2(x)$ est également une solution lorsque a et b sont des constantes.
6. Montrer que
$$W(y_1(x), y_2(x)) = \exp(-\int^x dx' p(x')).$$

7. Montrer que
$$x\frac{d^2}{dx^2}y(x)-(x+2)\frac{d}{dx}y(x)+2y(x)=0$$
a une solution $y_1(x)=\exp(x)$.
8. Calculer $W(y_1(x),y_2(x))$ où y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (7).
9. Trouver une deuxième solution $y_2(x)$ d'équation (7).
10. Trouver la solution de l'équation (7) pour $x\geq 1$ avec les conditions initiales $y(1)=e+5,\ y'(1)=e+4$.

2. Fonctions de Green

1. Donner la solution générale de
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+3\frac{d}{dx}y(x)=0.$$
2. Trouver la fonction de Green sur $[0,1]$
$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,z)+3\frac{d}{dx}G(x,z)=\delta(x-z),$$
avec conditions aux limites
$$G(0,z)=0 \text{ et } \frac{d}{dx}G(x,z)|_{x=1}=0.$$
3. Utiliser votre résultat pour écrire la solution de
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+3\frac{d}{dx}y(x)=f(x),$$
avec comme conditions aux limites $y(0)=1,\ y'(1)=6$.

9.7 DSI 2020

Durée 1h20

1. Wronskien

1. Donner la définition du wronskien $W(f,g)$ de deux fonctions f et g.
Considéérons l'équation
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+p(x)\frac{d}{dx}y(x)+q(x)y(x)=0$$
2. Donner la formule pour le wronskien $W(x)=W(y_1(x),y_2(x))$ des solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ en termes de $p(x)$

3. Donner la formule pour la solution $y_2(x)$ en terms de $W(x)$ et $y_1(x)$
4. Calculer le wronskien de l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}\right)\frac{d}{dx}y(x) + \frac{2x+1}{x(1+x)^2}y(x) = 0 \ (1)$$

5. Utiliser le fait que

$$y_1(x) = 1 + x$$

   est une solution à Eq. (1) pour trouver une deuxième solution $y_2(x)$ à Eq. (1)
6. Donner la solution générale à Eq. (1).
7. Trouver la solution à Eq. (1) avec conditions aux limites $y(0) = 1$ et $y(1) = 4-2\ln(2)$

2. Fonctions de Green

1. Ecrire le polynôme caractéristique $p(X)$ de l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + y(x) = 0 \ (2)$$

2. Donner les racines du polynôme caractéristique.
3. Ecrire la solution générale à Eq. (2).
4. Trouver la fonction de Green $G(x, z)$

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,z) - 2\frac{d}{dx}G(x,z) + G(x,z) = \delta(x-z),$$

   sur $[0, 1]$ avec conditions aux limites $G(0, z) = 0$ et $G(1, z) = 0$. Donner votre résultat pour (i) $x < z$ et (ii) $x > z$.

9.8 Examen 2017

Durée 3h00

Equations différentielles ordinaires

1. Trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = 0.$$

2. Trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = \cos(x).$$

3. Donner la solution de la question précéndente avec les conditions aux limites $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Equations aux dérivées partielles

1. Trouver la solution de
$$\exp(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + \exp(y)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 0$$
avec $u(x,0) = \exp(-3x)$.
2. Trouver la solution de
$$\exp(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + \exp(y)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = u^2(x,y)$$
avec $u(x,0) = 1/(\exp(-2x) - \exp(-x) + 1)$.

Equation de Legendre Considérons l'équation de Legendre, sur $x \in [-1,1]$
$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y(x) = 0.$$

1. Le point $x = 0$ est quel genre de point (ordinaire, singulier réguilier où singulier irréguilier) ?
2. Trouver les solutions en série de cette équation autour de $x = 0$, montrer qu'il existe deux solutions indépendants, une paire comme fonction de x et l'autre impaire. *Vous n'avez pas besoin de donner la forme générale des coefficients de la série, juste la relation de récurrence entre les coefficients.*
3. Montrer que quand $l = n$ pour $n \in \mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots\}$ il existe une solution polynôme $P_l(x)$ à cette équation. Trouver les solutions avec la condition au limite $P_l(1) = 1$ pour $l = 0$, $l = 1$, $l = 2$ et $l = 3$.
4. Calculer le wronskien $W(x)$ de l'équation de Legendre, utiliser votre résultat pour trouver une deuxième solution $Q_0(x)$ pour les cas $l = 0$.
5. Ecrire l'équation (9.8) sous la forme Sturm-Liouville.
6. Donner les valeurs de (i) $\int_{-1}^{1} dx\ P_1(x)P_2(x)$, ii) $\int_{-1}^{1} dx\ P_1(x)P_3(x)$ et (iii) $\int_{-1}^{1} dx\ P_1(x)P_2(x)$ et (iv) $\int_{0}^{1} dx\ P_1(x)P_3(x)$.

9.9 Examen 2018

18/12/2018 - Durée : 3h00

1. Equations différentielles ordinaires

1. Trouver la solution générale de l'équation
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + 5y(x) = 0.$$

2. Trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + 5y(x) = 5x^2 + x + 5.$$

3. Donner la solution de la question précédente avec les conditions aux limites $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

2. Equations aux dérivées partielles

1. Trouver la solution de générale de

$$x(1+y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + y(1+x)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 0.$$

2. Trouver la solution de générale de

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + 2xy\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = u(x,y).$$

   Utiliser votre résultat pour trouver la solution quand $u(x,1) = x^3$.

3. Solutions en série

Considérons l'équation

$$(x-1)(x-2)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + (4x-6)\frac{dy(x)}{dx} + 2y(x) = 0$$

1. Le point $x = 0$ est quel genre de point (ordinaire, singulier régulier où singulier irrégulier) ?
2. Nous cherchons les solutions sous la forme de série $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Donner $y'(x)$ et $y''(x)$ également sous forme de série.
3. Montrer que les coefficients a_n obéit à l'équation de récurrence

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}a_{n+1}$$

4. Résoudre l'équation de récurrence en écrivant

$$a_n = \lambda^n.$$

   et trouver les valuers de λ.
5. Trouver alors deux solutions indépendantes de l'équation (1).

4. Equation d'onde avec amortissement

L'équation d'onde, en présence de frottement, pour une corde fixée au points $x = 0$ et $x = L$ est

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Le système a comme conditions aux limites $u(0,t) = 0$ et $u(L,t) = 0$.

1. Cherchons une solution par separation de variables $u(x,t) = X(x)T(t)$, trouver les équations pour X et T.
2. Montrer que
$$X''(x) = -KX(x),$$
et expliquer pourquoi $K > 0$.
3. Montrer que les solutions $X(x)$ prennent la forme
$$X_n(x) = A_n \sin(k_n x),$$
et trouver les valeurs possibles de k_n.
4. Trouver les valeurs de A_n telles que les $X_n(x)$ sont normalisées, c'est-à-dire
$$\int_0^L dx\ X_n^2(x) = 1.$$
5. Montrer que les solutions $u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x)$ sont telles que
$$\ddot{T}_n(t) + \gamma \dot{T}_n(t) + k_n^2 T_n(t) = 0.$$
6. Montrer que la solution générale pour $T_n(t)$ est
$$T_n(t) = \exp(-\frac{\gamma}{2}t)\left(A_{n+}\exp(\omega_n t) + A_{n-}\exp(-\omega_n t)\right),$$
où A_{n+} et A_{n-} sont constantes. Calculer ω_n. Montrer que si $k_n > \gamma/2$ alors ω_n est purement imaginaire et si non ω_n est réel.
7. Expliquer pourquoi la solution générale de l'équation est
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x),$$
et donc montrer que
$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_n \exp(-\frac{\gamma}{2}t)\left(A_{n+}\exp(\omega_n t) + A_{n-}\exp(-\omega_n t)\right)\sin(k_n x)$$
8. Trouver les valeurs de A_{n+} et A_{n-} pour les conditions initiales $u(x,0) = 0$ et $\dot{u}(x,0) = \delta(x - \frac{L}{2})$.

9.10 Examen 2019

12/12/2019 - Durée : 3h00

1. Equations différentielles ordinaires

1. Trouver la solution générale de l'équation
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = 0.$$
2. Trouver la solution générale de l'équation
$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = \exp(x)$$
3. Donner la solution de la question précédente pour $x \in [0, \pi/2]$ avec les conditions aux limites $y(0) = 2$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 2\exp(\frac{\pi}{2})$.

2. Equations aux dérivées partielles

1. Trouver la solution de générale de
$$\sin(y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + \cos(x)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 0.$$
Utiliser votre résultat pour trouver la solution quand $u(0,y) = \cos^3(y)$
2. Trouver la solution de générale de
$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + 2xy\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = u^2(x,y).$$
Utiliser votre résultat pour trouver la solution quand $u(0,y) = y^3$.

3. Solutions en série

Considérons l'équation
$$x\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{dy(x)}{dx} - \frac{\alpha^2}{4}y(x) = 0$$

1. Le point $x = 0$ est quel genre de point (ordinaire, singulier régulier où singulier irrégulier) ?
2. Nous cherchons les solutions sous la forme de série $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$. Donner $y'(x)$ et $y''(x)$ également sous forme de série.
3. Trouver l'équation indicelle pour σ et montrer qu'elle a comme solutions $\sigma = 0$ et $\sigma = 1/2$.

4. Montrer que pour la solution $\sigma = 1/2$ l'équation de recurrence pour les coefficients a_n s'écrit
$$a_n = \frac{\alpha^2 a_{n-1}}{(2n+1)2n}.$$
5. Montrer que cette solution est donnée par
$$y_{1/2}(x) = \frac{a_0}{\alpha} \sinh(\alpha\sqrt{x})$$
6. Trouver la solution $y_0(x)$ qui correspond à la solution $\sigma = 0$.
7. Ecrire l'équation (9.10) en fonction de la variable $z = \sqrt{x}$ et résoudre l'équation correspondante et verifier vos résultats précédents.

4. Equation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur sur $[0, \infty)$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$
avec comme conditions aux limites $u(0,t) = U_0 + \alpha \sin(\omega t)$ et $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = U_0$. Ici $\kappa > 0$ est la conductivité thermique. La condition au limite en $x = 0$ représente une variation locale de la temperature due à une échauffement/refroidissement locale autour de $x = 0$.

1. En posant $u(x,t) = U_0 + \theta(x,t)$, trouver l'équation pour $\theta(x,t)$ ainsi que ses conditions aux limites.
2. On considère un champ $Z(x,t)$ complexe qui obéit à
$$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2}$$
avec conditions aux limites $Z(0,t) = \alpha \exp(i\omega t)$ et $\lim_{x\to\infty} Z(x,t) = 0$. Montrer qu'on peut écrire $\theta(x,t) = \mathrm{Im}(Z(x,t))$ (partie imaginaire de $Z(x,t)$).
3. Trouver l'équation pour $\phi(x,t) = \mathrm{Re}(Z(x,t))$ (partie réel de $Z(x,t)$) ainsi que ses conditions aux limites.
4. Pour résoudre l'équation (2) utiliser la méthode de separation des variables : $Z(x,t) = T(t)X(x)$. Montrer que
$$\frac{\frac{dT(t)}{dt}}{T(t)} = \lambda,$$
où λ est une constante et déterminer l'équation pour $X(x)$.
5. Montrer que $\lambda = i\omega$.
6. Trouver la solution pour $X(x)$ (astuce $(1+i)^2/2 = i$) et en déduire la solution pour $Z(x,t)$.
7. Déterminer $\theta(x,t)$.

9.11 Examen 2020

1. Equations différentielles ordinaires

1. Trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 3\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = 0.$$

2. Trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 3\frac{d}{dx}y(x) + 2y(x) = \exp(2x)$$

3. Donner la solution de la question précédente pour $x \in [0,1]$ avec les conditions aux limites $y(0) = 2$ et $y(1) = e + 2e^2$.

2. Equations aux dérivées partielles

1. Trouver la solution de générale de

$$\exp(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) - \exp(y)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 0.$$

   Utiliser votre résultat pour trouver la solution quand $u(x,0) = \exp(x)$

2. Trouver la solution de générale de

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + v\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = u(x,t)(1 - u(x,t)),$$

   où v est une constante. Utiliser votre résultat pour trouver la solution quand

$$u(x,0) = \frac{1}{1+\exp(x)}.$$

3. Solutions en série

Considérons l'équation de Bessel

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + x\frac{dy(x)}{dx} + x^2y(x) = 0. \ (1)$$

1. Le point $x = 0$ est quel genre de point (ordinaire, singulier régulier où singulier irrégulier) ?
2. Nous cherchons les solutions sous la forme de série $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$. Donner $y'(x)$ et $y''(x)$ également sous forme de série.
3. Trouver l'équation indicelle pour σ et montrer qu'elle a comme seule solution $\sigma = 0$
4. Trouver l'équation de recurrence pour les a_n quand $\sigma = 0$.

5. Montrer que $a_n = 0$ pour n impair.
6. Montrer que
$$y(x) = a_0 J_0(x)$$
est une solution où
$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}.$$
7. Calculer le wronskien pour Eq. (1) et utiliser le résultat pour exprimer une deuxième solution à Eq. (1) sous forme d'une intégrale qu'on ne calculera pas.

4. Equation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur sur $[0, H]$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ (1)$$
avec comme conditions aux limites (de Neumann)
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=H} = 0.$$
On définit
$$M(t) = \int_0^H dx u(x,t).$$
1. Montrer que $M(t)$ est une constante indépendant du temps.
2. On consider l'opérateur
$$L = -\kappa \frac{d^2}{dx^2},$$
sur l'espace de fonctions $\mathcal{H}$ qui satisfait des conditions aux limites
$$\frac{df(x)}{dx}|_{x=0} = \frac{df(x)}{dx}|_{x=H} = 0.$$
3. Si (f, g) est une produit scalaire entre deux fonctions f et $g \in \mathcal{H}$ donner la défintion de l'adjoint $L^\dagger$ de L.
4. Si
$$(f, g) = \int_0^H dx f(x) g(x)$$
montrer que $L = L^\dagger$ sur $\mathcal{H}$.
5. Trouver les fonctions propres ϕ_λ tels que
$$L\phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda.$$
et montrer que $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{H^2}$ pour $n = 0,\ 1,\ 2, \cdots$ sont les valeurs propres correspondantes.

6. Ecrire les fonctions propres tels qu'ils sont normalisées c-à-d $(\phi_{\lambda_n}, \phi_{\lambda_n}) = 1$
7. On exprime une fonction $f \in \mathcal{H}$ sur la bases des fonctions propres :

$$f(x) = \sum_n a_n \phi_{\lambda_n}(x)$$

   donner la formule pour les coefficients a_n.
8. Si nous écrivons $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\phi_{\lambda_n}(x)$, trouver l'équation pour $a_n(t)$.
9. Trouver la solution de Eq. (1) dans $[0, H]$ avec comme conditions initiales $u(x,0) = \delta(x - x_0)$ pour $x_0 \in [0, H]$.
10. Trouver la limite de $u(x,t)$ quand $t \to \infty$.