Filtres analogiques

I- Synthèse d'un filtre actif passe-bas de type Butterworth

Question 1 -

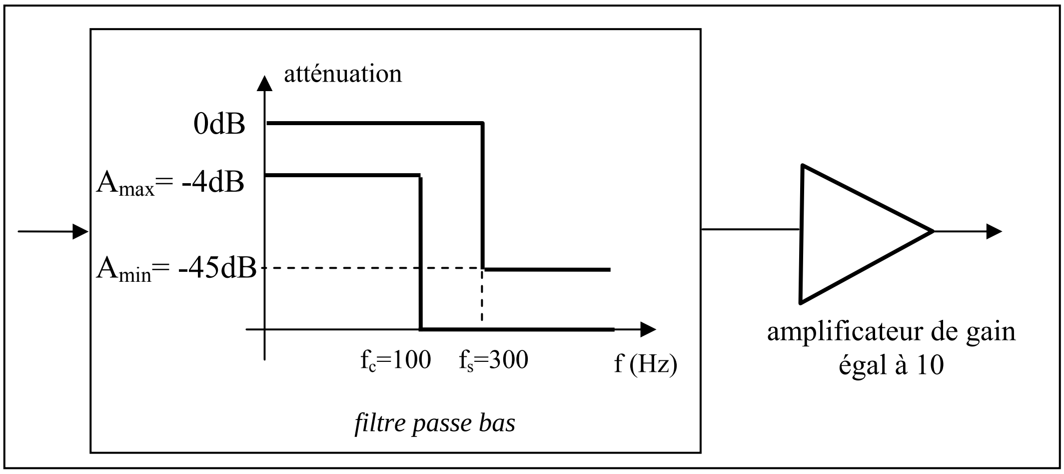


Figure 2 : *le filtre est réalisé par la mise en cascade d'un filtre passe bas et d'un amplificateur de gain égal à 10.*

Question 2 :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left(1+\left[\frac{\omega}{\omega_0}\right]^{2n}\right)^{1/2}} \qquad (1)$$

Quand $\omega \to 0$, $|H(j\omega)| \to 1$ soit 0 dB

Quand $\omega \to \infty$, $|H(j\omega)| \to 0$ soit $-\infty$ dB

Quand $\omega \to \omega_0$, $|H(j\omega)| = \frac{1}{\left(1+\left[\frac{\omega_0}{\omega_0}\right]^{2n}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$, d'où : $20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -3\text{dB}$,

ω_0 est donc bien la pulsation de coupure à -3dB

Question 3 :

$$20\log_{10}|H(j\omega_c)| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\left(1+\left[\frac{\omega_c}{\omega_0}\right]^{2n}\right)^{1/2}}\right) = A_{max} \qquad (1)$$

et $20\log_{10}|H(j\omega_s)| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\left(1+\left[\frac{\omega_s}{\omega_0}\right]^{2n}\right)^{1/2}}\right) = A_{min}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \left(\frac{1}{\left(1+\left[\frac{\omega_c}{\omega_0}\right]^{2n}\right)^{1/2}}\right) = 10^{A_{max}/20}$ et $\left(\frac{1}{\left(1+\left[\frac{\omega_s}{\omega_0}\right]^{2n}\right)^{1/2}}\right) = 10^{A_{min}/20}$

On élève au carré : $\left(\frac{1}{\left(1+\left[\frac{\omega_c}{\omega_0}\right]^{2n}\right)}\right) = 10^{A_{max}/10}$ et $\left(\frac{1}{\left(1+\left[\frac{\omega_s}{\omega_0}\right]^{2n}\right)}\right) = 10^{A_{min}/10}$

$\left(1+\left[\frac{\omega_c}{\omega_0}\right]^{2n}\right) = \frac{1}{10^{A_{max}/10}} = 10^{-A_{max}/10}$ d'où : $\left[\frac{\omega_c}{\omega_0}\right]^{2n} = 10^{-A_{max}/10} - 1$ (3)

et $\left(1+\left[\frac{\omega_s}{\omega_0}\right]^{2n}\right) = \frac{1}{10^{A_{min}/10}} = 10^{-A_{min}/10}$ d'où : $\left[\frac{\omega_s}{\omega_0}\right]^{2n} = 10^{-A_{min}/10} - 1$ (4)

On divise l'expression (3) par (4) : $\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]^{2n} = \frac{10^{-A_{max}/10} - 1}{10^{-A_{min}/10} - 1}$

On prend le logarithme : $\log_{10}\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]^{2n} = 2n\log_{10}\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right] = \log_{10}\left(\frac{10^{-A_{max}/10} - 1}{10^{-A_{min}/10} - 1}\right)$

d'où : $\boxed{n = \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{-A_{max}/10} - 1}{10^{-A_{min}/10} - 1}\right)}{2\log_{10}\left[\frac{\omega_c}{\omega_s}\right]}}$

De la relation (3) : $\left[\frac{\omega_c}{\omega_0}\right]^{2n} = 10^{-A_{max}/10} - 1$, on tire : $\left[\frac{\omega_c}{\omega_0}\right] = \left(10^{-A_{max}/10} - 1\right)^{1/2n}$ d'où

$$\boxed{\omega_0 = \frac{\omega_c}{\left(10^{-A_{max}/10} - 1\right)^{1/2n}}}$$

Application numérique : $n = \dfrac{\log_{10}\left(\dfrac{10^{4/10} - 1}{10^{45/10} - 1}\right)}{2\log_{10}\left[\dfrac{100x2\pi}{300x2\pi}\right]} \approx 4{,}5$, on prend $\boxed{n = 5}$

On calcule la pulsation de coupure à -3 dB : $f_0 = \dfrac{f_c}{\left(10^{-A_{max}/10} - 1\right)^{1/2n}} = \dfrac{100}{\left(10^{4/10} - 1\right)^{1/10}}$

d'où $\boxed{f_0 = 95{,}95\text{Hz}}$

Question 4 :

En reportant A_{max} et A_{min} , on retrouve bien un ordre compris entre 4 et 5.

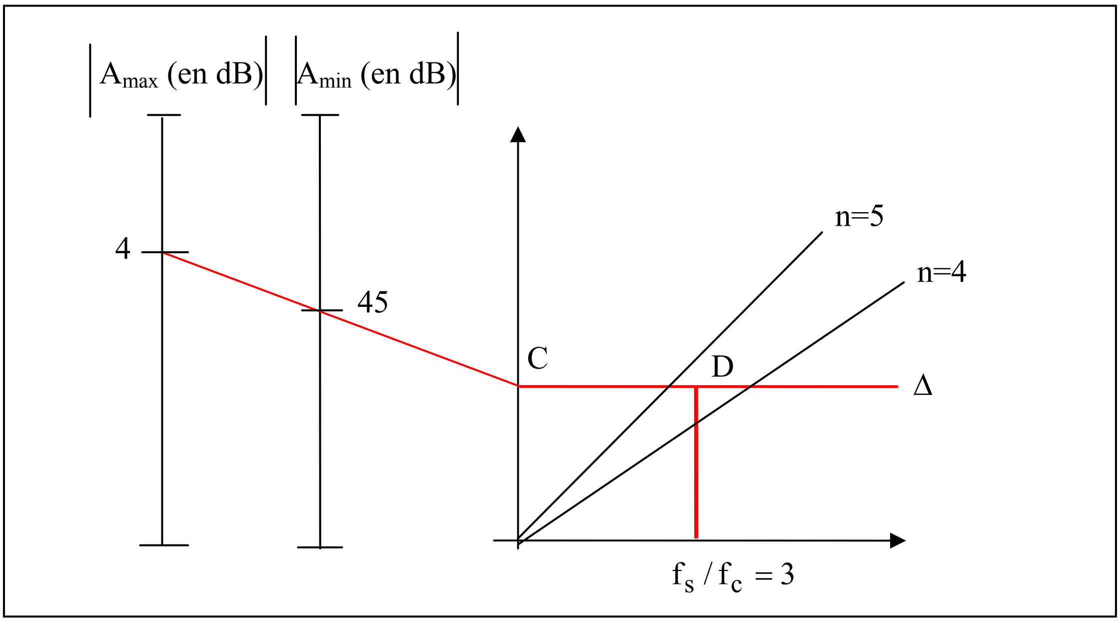


Figure 3 : *Abaque pour trouver l'ordre n d'un filtre passe-bas de type Butterworth.*

II- Réalisation du filtre

Question 5 :

	valeur de Q	valeur de ω_0
premier filtre d'ordre 2	0,618	$2\,\pi\,95{,}95\text{rds}^{-1}$
deuxième filtre d'ordre 2	1,618	$2\,\pi\,95{,}95\text{rds}^{-1}$
filtre ordre 1	------	$2\,\pi\,95{,}95\text{rds}^{-1}$

Question 6 :

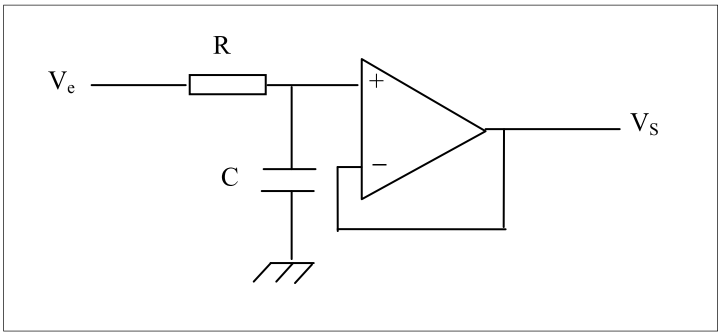


Figure 4 : *Filtre passe bas du premier ordre*

$V^+(p) = \frac{1/Cp}{R+1/Cp} V_e(p) = \frac{1}{1+RCp} V_e(p)$, $V^-(p) = V_s(p)$ et $V^+ \approx V^-$ car le gain de l'AOP est supposé infini, d'où : $\frac{1}{1+RCp} V_e(p) = V_s(p)$ soit : $\boxed{H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1+RCp}}$

L'intérêt de l'AOP est que le filtre présente une impédance de sortie quasiment nulle, en conséquence on peut charger le filtre sans modifier la fonction de transfert. Bien entendu il y a une limite à la charge, le courant débité ne doit pas excéder une certaine valeur fixée par l'AOP

Question 7 : $H(p) = \frac{1}{1+pRC}$, posons $RC = \frac{1}{\omega_0}$, d'où : $H(p) = \frac{\omega_0}{p+\omega_0}$, on obtient bien la forme standard de l'équation (2). Si on prend $R = 10k\Omega$, alors $C = \frac{1}{R\omega_0} = 165{,}9nF$

Question 8 :

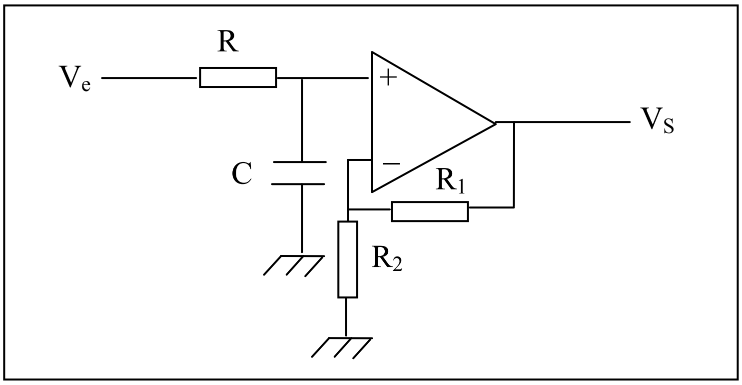


Figure 5 : *Filtre passe bas avec gain pour* $f \to 0$

$V^+(p) = \frac{1/Cp}{R+1/Cp} V_e(p) = \frac{1}{1+RCp} V_e(p)$, $V^-(p) = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_s(p)$ et $V^+ \approx V^-$ car le gain de l'AOP est supposé infini, d'où : $\frac{1}{1+RCp} V_e(p) = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_s(p)$ soit :

$\boxed{H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{1+RCp}}$ on en déduit que $A_{LP} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$

Valeur de R_1 : $10 = 1 + \frac{R_1}{1}$ d'où : $\boxed{R_1 = 9k\Omega}$

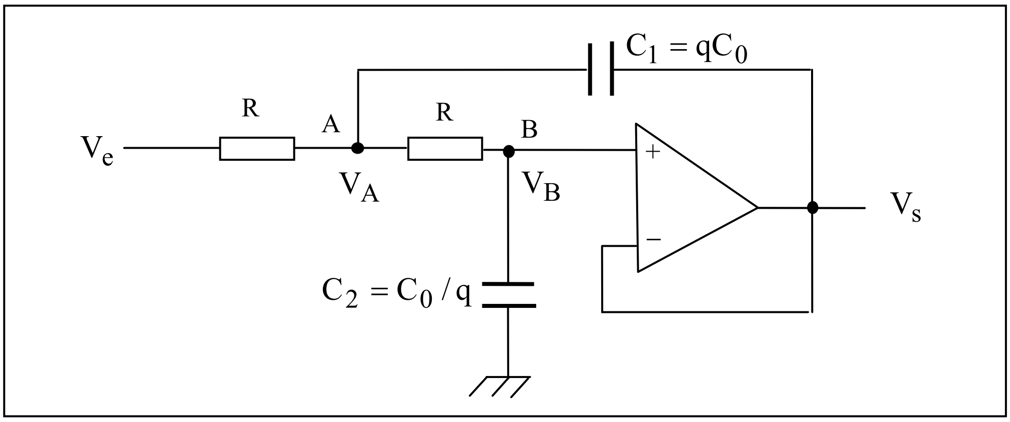


Figure 6 : *Cellule de Sallen Key pour la réalisation d'un filtre d'ordre 2*

Question 9 : $V^- = V_s$ et comme l'AOP est supposé parfait (gain infini) $V^+ \approx V^-$ d'où : $V_B = V_s$

Equation au nœud A : $\frac{V_e - V_A}{R} + \frac{V_s - V_A}{R} + (V_s - V_A)C_1 p = 0$ (1)

Equation au noeud B : $\frac{V_A - V_s}{R} + (0 - V_s)C_2 p = 0$ (2)

Question 10 : De l'équation (2), on tire V_A : $V_A = V_s(1 + RC_2 p)$

Réécrivons l'équation (1) en regroupant les termes en V_e, V_s et V_A sous la forme : $V_e + V_s(1 + RC_1 p) - V_A(2 + RC_1 p) = 0$

Remplaçons V_A par son expression, on obtient :

$V_e + V_s(1 + RC_1 p) - V_s(1 + RC_2 p)(2 + RC_1 p) = 0$

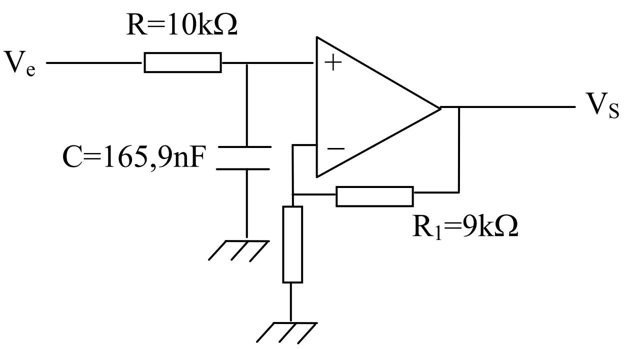
Regroupons les termes en V_s : $V_e - V_s(1 + 2RC_2 p + R^2 C_1 C_2 p^2) = 0$

D'où : $\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 2RC_2 p + 1} = \frac{\frac{1}{R^2 C_1 C_2}}{p^2 + \frac{2}{RC_1} p + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}$, avec $C_1 = qC_0$ et $C_2 = \frac{C_0}{q}$, d'où : $\boxed{\frac{V_s}{V_e} = \frac{\frac{1}{R^2 C_0^2}}{p^2 + \frac{2}{RqC_0} p + \frac{1}{R^2 C_0^2}}}$. Comparons cette expression à la forme standard de l'équation (3) $\frac{V_s}{V_e} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + p\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$ on obtient : $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC_0}}$ et $\boxed{Q = \frac{q}{2}}$

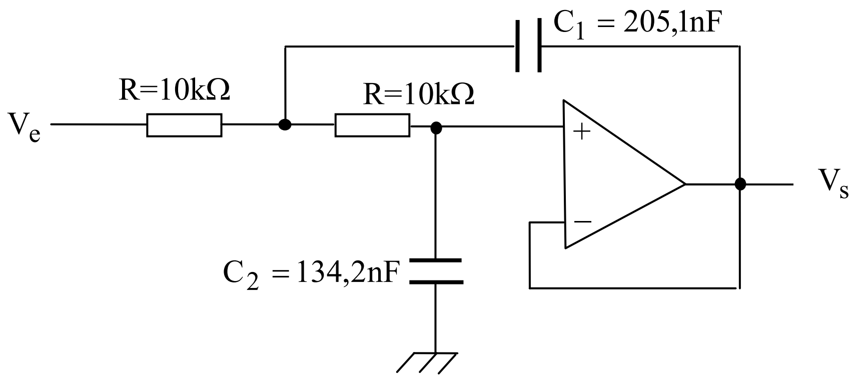
Question 11 : Si on prend $R = 10k\Omega$, on obtient $C_0 = \dfrac{1}{R\omega_0} = 165{,}9nF$

	valeur de Q	**valeur de** ω_0	**R**	C_1	C_2
premier filtre d'ordre 2	0,618	$2\,\pi\,95{,}95rds^{-1}$	10 kΩ	205,1nF	134,2nF
deuxième filtre d'ordre 2	1,618	$2\,\pi\,95{,}95rds^{-1}$	10 kΩ	537,0nF	51,2nF

Question 12 :
Ordre 1 :



Premier filtre d'ordre 2 :



Deuxième filtre d'ordre 2 :