

Notes de Cours
Outils physiques pour la géologie
(4TTR 302U)

Bertrand Dauphole & Bernard Pons
Université de Bordeaux

Objectif du cours

L'objectif de ce cours est de comprendre :

- *la caractérisation d'un matériau d'intérêt géologique (dans l'état cristallin) par l'étude de ses propriétés optiques,*
- *les phénomènes d'élasticité et de contraintes lithostatiques menant à la déformation des roches et à la sismicité.*

Compétences minimales à acquérir

- *appréhender la notion d'onde, assimiler les phénomènes de polarisation et d'interférences d'ondes électromagnétiques, savoir relier la structure cristalline des roches à l'anisotropie de leurs propriétés optiques, afin de comprendre la caractérisation des roches à l'aide du microscope polarisant (pétrographie).*
- *comprendre la notion d'élasticité, de contrainte et de déformation des solides avec son application aux roches terrestres en présentant le principe d'isostasie, l'étirement, la compression et les contraintes lithostatiques, et la conséquence de ces contraintes, à savoir une introduction à la sismologie et aux ondes élastiques.*

Sommaire

Partie I – Optique ondulatoire

I-1. Ondes et propagation des ondes

| | |
|--|----|
| 1.1. Notion d'onde | 3 |
| 1.2. Equation de propagation | 4 |
| 1.3. Ondes harmoniques et sinusoïdales | 4 |
| 1.4. Ondes à 3 dimensions – Fronts d'onde | 6 |
| 1.5. Ondes électromagnétiques | 8 |
| 1.6. Intensité d'une onde électromagnétique | 9 |
| 1.7. Propagation dans les milieux isotropes – Indice de réfraction et principe de Fermat | 11 |
| 1.8. Onde polychromatique – Lumière blanche et dispersion | 14 |

I-2. Polarisation des ondes électromagnétiques dans les milieux isotropes

| | |
|---|----|
| 2.1. États de polarisation | 19 |
| 2.1.1. Polarisation linéaire – états P | 20 |
| 2.1.2. Polarisation circulaire – états D et G | 21 |
| 2.1.3. Polarisation elliptique – états E | 24 |
| 2.2. Production d'ondes transversales polarisées | 27 |
| 2.2.1. Dichroïsme et polaroïds | 28 |
| 2.2.2. Loi de Malus | 28 |

I-3. Interférences et diffraction

| | |
|--|----|
| 3.1. Interférences de 2 sources ponctuelles : cohérence | 31 |
| 3.1.1. Ordre d'interférence | 35 |
| 3.1.2. Interfrange | 36 |
| 3.1.3. Contraste | 36 |
| 3.2. Interférences de 2 sources ponctuelles polychromatiques | 36 |
| 3.3. Principe de Huygens ; fentes de Young | 39 |
| 3.4. Diffraction de la lumière | 41 |
| 3.5. Interférences + diffraction | 44 |

Partie II – Optique cristalline

II. Polarisation et propagation des ondes polychromatiques dans les milieux anisotropes – biréfringence

| | |
|--|----|
| 1. État cristallin et biréfringence | 50 |
| 2. Classification des cristaux | 51 |
| 2.1. Système isotrope | 51 |
| 2.2. Systèmes contenant un axe de symétrie d'ordre supérieur à 2 : uniaxes | 51 |
| 2.3. Systèmes ne contenant pas d'axe de symétrie d'ordre supérieur à 2 : biaxes | 53 |
| 2.4. Exemples d'indices | 54 |
| 2.5. Définition des axes optiques | 55 |
| 2.6. Calcul de l'inclinaison V des axes optiques par rapport à l'axe n_g | 56 |
| 3. Décomposition de la polarisation dans un milieu cristallin | 58 |
| 3.1. Milieux uniaxes | 58 |
| 3.2. Milieux biaxes | 59 |
| 4. Marche des rayons lumineux dans un milieu cristallin. Déphasage et différence de marche | 60 |
| 4.1. Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isotrope | 60 |
| 4.2. Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu biréfringent | 61 |
| 5. Lame onde, 1/2 onde et 1/4 onde – Spectre cannelé | 63 |
| 6. Le microscope polarisant – Orthoscopie | 71 |

Partie III – Élasticité, contrainte et déformation des roches

III-1. Introduction à l'élasticité

| | |
|--|----|
| 1.1. Déformation élastique des solides | 85 |
| 1.1.1. Exemple des ressorts | 85 |
| 1.1.2. Contrainte | 86 |
| 1.2. Régimes de déformation | 86 |
| 1.2.1. Types de déformations des corps rigides | 86 |
| 1.2.2. Régimes de déformation | 86 |
| 1.3. Contrainte et déformation | 87 |
| 1.3.1. Traction–compression uniaxiale | 87 |

| | |
|---|-----|
| 1.3.1.a. Allongement dans l'axe | 87 |
| 1.3.1.b. Loi de Hooke | 88 |
| 1.3.1.c. Élargissement | 89 |
| 1.3.2. Cisaillement | 90 |
| 1.3.3. Compression isostatique | 91 |
| 1.3.4. Types de déformation | 91 |
| 1.3.5. Cas des grandes déformations | 92 |
| 1.4. Pourquoi les lois sont-elles linéaires ? | 92 |
| 1.5. Compléments : déformation des roches | 93 |
| III-2. Contrainte et déformation dans les solides terrestres | |
| 2.1. Structure de la Terre | 97 |
| 2.2. Contrainte dans la Terre solide | 98 |
| 2.3. Force de volume et force de surface | 98 |
| 2.4. Équilibre hydrostatique – Isostasie | 99 |
| 2.5. Facteur d'étirement et de compression | 100 |
| 2.5.1. Facteur d'étirement | 100 |
| 2.5.2. Facteur de compression | 101 |
| 2.6. Contrainte déviatorique | 102 |
| III-3. Introduction à la sismologie | |
| 3.1. Introduction | 107 |
| 3.2. Vibrations des solides – équation de propagation | 109 |
| 3.3. Propagation des ondes | 111 |
| 3.3.1. Types d'ondes | 111 |
| 3.3.2. Vitesse des ondes | 111 |
| Annexes | |
| Annexe A. Constantes physiques utilisées | 115 |
| Annexe B. Relations de trigonométrie utiles | 116 |
| Annexe C. Rappel sur l'ellipse | 117 |

Partie I

OPTIQUE ONDULATOIRE

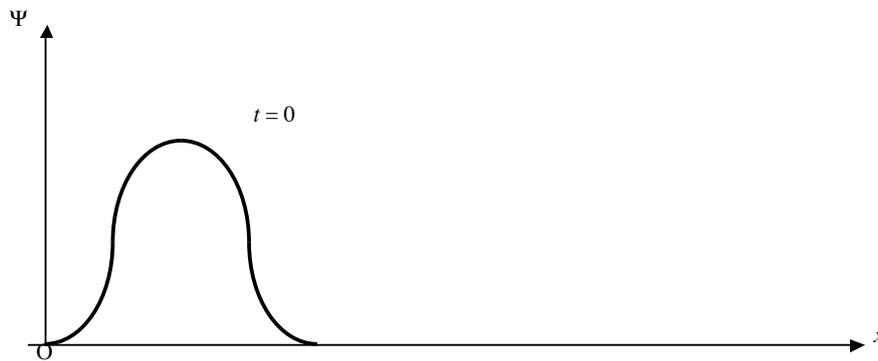
Chapitre 1

Ondes et propagation des ondes

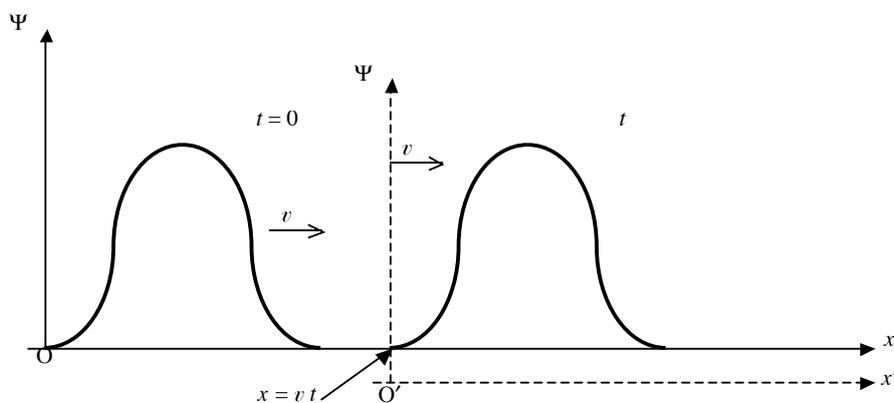
1.1. Notion d'onde

Si une propriété physique dont l'écart à sa valeur d'équilibre dépend d'un paramètre de position et du temps, elle peut être décrite par une fonction $\Psi(x, y, z, t)$ appelée fonction d'onde.

Considérons une demi-corde infinie, à l'extrémité de laquelle on applique un ébranlement au temps $t = 0$. On a : $\Psi(x, t = 0) = f(x)$.



Cet ébranlement va se propager dans l'espace (le long de la corde) et dans le temps (pour $t > 0$) avec la vitesse v .



Si on définit un référentiel (x', Ψ) glissant le long de x avec la vitesse v , alors l'ébranlement est à tout instant décrit par $\Psi(x, t) = f(x')$.

Mais on a :

$$x = x' + vt \quad \text{soit} \quad x' = x - vt$$

avec vt qui correspond à la distance OO' . Alors la fonction d'onde associée à l'ébranlement est :

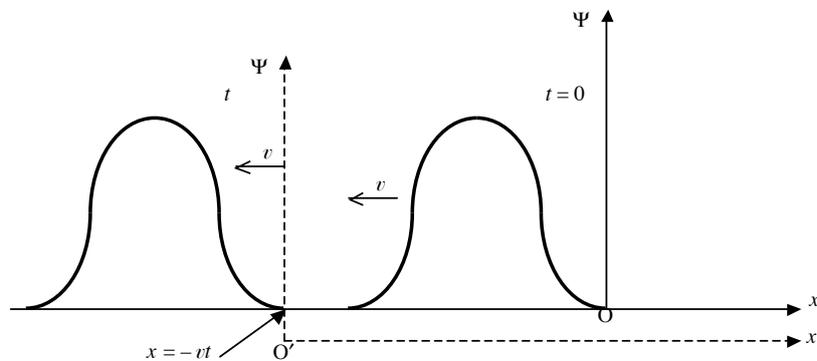
$$\Psi(x,t) = f(x') = f(x - vt) \quad (1.1)$$

et l'ébranlement se propage à la vitesse v dans la direction des $x > 0$.

Si l'ébranlement se propage dans la direction des $x < 0$, alors $x' = x + vt$ et la fonction d'onde associée à l'ébranlement est :

$$\Psi(x,t) = f(x') = f(x + vt) \quad (1.2)$$

et l'ébranlement se propage à la vitesse v dans la direction des $x < 0$.



Exemples :

- La fonction $\Psi(x,t) = e^{-x+3t} = e^{-(x-3t)}$ est bien une fonction d'onde qui se déplace vers les $x > 0$ à la vitesse $v = 3 \text{ m.s}^{-1}$.
- La fonction $\Psi(x,t) = t \sin(3x)$ n'est pas une fonction d'onde. Elle n'est pas de la forme $f(x \mp vt)$.

1.2. Équation de propagation

La propagation d'une onde dans l'espace et dans le temps est gouvernée par l'équation d'onde :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}} \quad (1.3)$$

où v est la vitesse de propagation.

Les solutions de cette équation d'onde sont les fonctions d'onde :

$$\Psi(x,t) = f(x - vt) \text{ pour la propagation dans le sens des } x > 0 ;$$

$$\Psi(x,t) = g(x + vt) \text{ pour la propagation dans le sens des } x < 0 .$$

La solution générale est de la forme $\Psi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$, les fonctions f et g pouvant bien entendu être nulles.

1.3. Ondes harmoniques et sinusoïdales

Si la propriété étudiée est périodique dans l'espace (et dans le temps), on lui associe alors une (ou la somme) de fonctions d'onde telle que :

$$\boxed{\Psi(x,t) = A \sin[k(x \mp vt)]} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Psi(x,t) = A \cos[k(x \mp vt)]} \quad (1.4)$$

Ces ondes sont dites harmoniques (ou sinusoïdales).

- A est l'**amplitude** maximale de l'onde.
- k est une constante introduite de façon à ce que le produit $k(x \mp vt)$ soit en radians : on l'appelle le **nombre d'onde angulaire**, ou comme on le verra plus tard, le module du **vecteur d'onde**.

La fonction d'onde se répète selon une période spatiale, appelée **longueur d'onde** λ (unités : mètre) telle que $\Psi(x \pm \lambda, t) = \Psi(x, t)$. On a alors :

$$\begin{aligned} A \sin[k((x \pm \lambda) \mp vt)] &= A \sin[k(x \mp vt)] \\ k((x \pm \lambda) \mp vt) &= k(x \mp vt) \pm 2\pi \\ kx \pm k\lambda \mp kvt &= kx \mp kvt \pm 2\pi \end{aligned}$$

On a ainsi le vecteur d'onde (exprimé en rad/m) :

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad (1.5)$$

La fonction d'onde se répète selon une période temporelle, appelée **période** τ (unités : seconde) dont l'inverse est appelé **fréquence de l'onde** ν (unité : s^{-1} ou Hz). La fonction d'onde est telle que $\Psi(x, t \pm \tau) = \Psi(x, t)$. On a alors :

$$\begin{aligned} A \sin[k(x \mp v(t + \tau))] &= A \sin[k(x \mp vt)] \\ k(x \mp v(t + \tau)) &= k(x \mp vt) \mp 2\pi \\ kx \mp kvt \mp kv\tau &= kx \mp kvt \mp 2\pi \end{aligned}$$

avec $k = 2\pi/\lambda$, on a :

$$\frac{2\pi}{\lambda} v\tau = 2\pi$$

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda\nu} \quad (1.6)$$

On utilise souvent la notion de **pulsation** ω (ou fréquence angulaire) pour caractériser la périodicité temporelle de l'onde (la pulsation est exprimé en rad/s) :

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{v}{\lambda} = kv} \quad (1.7)$$

Alors :

$$\boxed{\Psi(x,t) = A \sin[k(x \mp vt)] = A \sin(kx \mp \omega t)} \quad (1.8)$$

L'argument de la fonction sinusoïdale est appelé **phase** de l'onde harmonique :

$$\boxed{\phi = kx \mp \omega t} \quad (1.9)$$

De façon plus générale, la phase s'écrit :

$$\boxed{\phi = kx \mp \omega t + \varepsilon} \quad (1.10)$$

où ε est la phase initiale (ou phase à l'origine) qui n'est pas forcément nulle (les référentiels d'espace et de temps sont relatifs).

1.4. Ondes à 3 dimensions – fronts d'onde

Nous n'avons jusqu'ici considéré que des ondes se propageant selon 1 seule dimension. Le cas le plus général concerne la propagation dans l'espace à 3 dimensions ; l'équation d'onde s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2}} \quad (1.12)$$

On distingue principalement deux solutions à cette équation :

• **L'onde plane :**

La première solution est appelée onde plane, et est de la forme :

$$\boxed{\Psi(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \vec{r} \mp \omega t)} \quad (1.13)$$

On a toujours :

$$\|\vec{k}\| = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{et} \quad v = \lambda v = \frac{\omega}{k}$$

et la direction de propagation est donnée par la direction du vecteur d'onde \vec{k} . À un instant t donné (soit à $\omega t = Cte$), les points de l'espace où la phase (et donc l'amplitude de l'onde) est constante sont tels que :

$$\vec{k} \vec{r} = Cte$$

Cette équation définit un plan perpendiculaire à \vec{k} ; en effet, si deux points sont repérés par les vecteurs position \vec{r}_0 et \vec{r}_1 , on a alors :

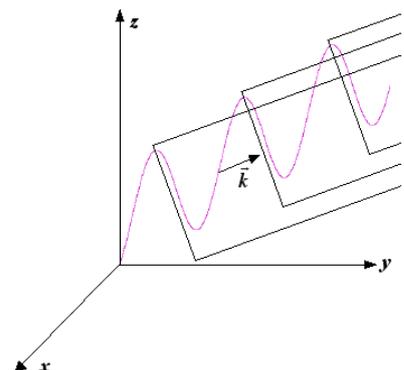
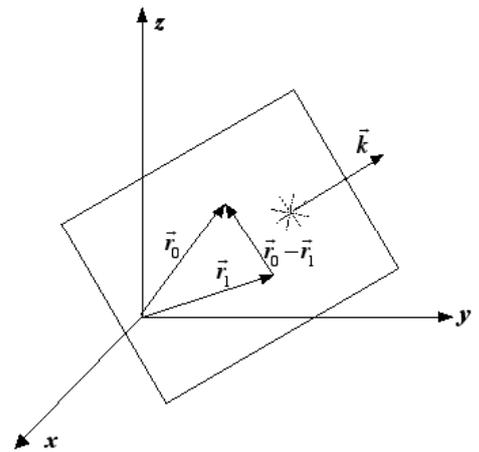
$$\vec{k} \vec{r}_0 = \vec{k} \vec{r}_1 \quad \text{soit} \quad \vec{k} (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = 0$$

donc :

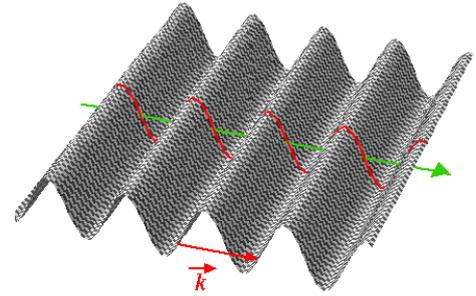
$$\vec{r}_0 - \vec{r}_1 \perp \vec{k}$$

L'ensemble des points équiphases ($\phi = Cte$) est appelé **front d'onde** ; ici le front d'onde est un **plan**.

L'onde plane est définie par une infinité de fronts d'onde plans, tous parallèles entre eux et perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} . Entre les fronts d'onde, l'onde varie sinusoidalement.



Une bonne image d'une onde plane, en 2 dimensions, est une mer infinie sur laquelle les vagues uniformes proviennent de $-\infty$ et vont jusqu'à $+\infty$.



• **L'onde sphérique :**

La deuxième solution est appelée onde sphérique, et est de la forme :

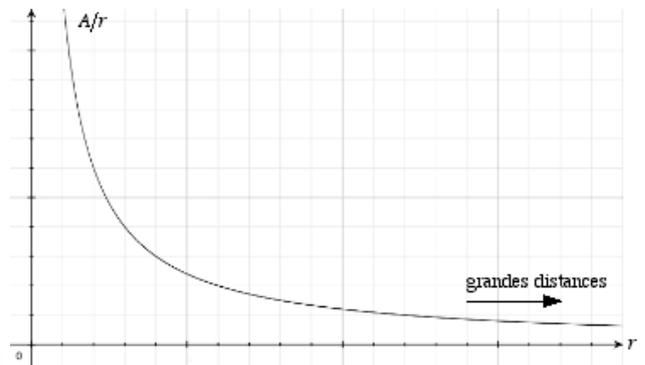
$$\Psi(r,t) = \frac{A}{r} \sin(kr \mp \omega t) \tag{1.14}$$

où $k = \|\vec{k}\|$ et $r = \|\vec{r}\|$.

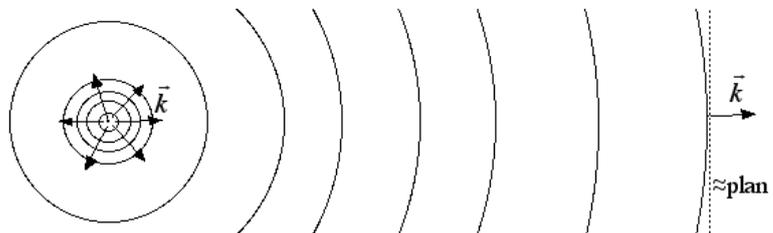
Ici, l'onde est émise ($-\omega t$) ou converge ($+\omega t$) vers un point de façon radiale.

Les **fronts d'onde** sont définis par $kr = \text{Cte}$ soit $r = \text{Cte}$: ce sont donc des **surfaces de sphère** dont le centre est le point émetteur (ou récepteur). L'amplitude de l'onde sphérique décroît de façon inversement proportionnelle à la distance séparant le point d'observation de la source.

À très grande distance, l'amplitude est si faible qu'elle peut être considérée constante (≈ 0). De plus, le front d'onde est alors une sphère de si grande dimension qu'elle peut localement être assimilée à un plan.



À très grande distance de la source, l'onde sphérique est assimilable à une onde plane.



Exercice :

Montrer que la fonction d'onde plane est solution de l'équation d'onde à 3 dimensions

• L'onde plane est de la forme :

$$\Psi(\vec{r},t) = A \sin(\vec{k}\vec{r} \mp \omega t) = A \sin(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t)$$

car on a le produit scalaire de $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$ par $\vec{r}(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[Ak_x \cos(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t) \right] = -Ak_x^2 \sin(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[Ak_y \cos(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t) \right] = -Ak_y^2 \sin(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[Ak_z \cos(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t) \right] = -Ak_z^2 \sin(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t)$$

on a alors :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -Ak^2 \sin(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t) = -k^2 \Psi$$

car : $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

De plus :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mp \omega \cos(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t) \right] = -\frac{1}{v^2} \omega^2 \Psi$$

Finalement :

$$-k^2 \Psi = -\frac{1}{v^2} \omega^2 \Psi$$

On retrouve bien l'équation d'onde avec $v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$

1.5. Ondes électromagnétiques

Nous avons introduit la notion de fonction d'onde pour représenter une propriété physique qui varie dans l'espace et dans le temps. Cette propriété est souvent un champ. Dans le cas d'une onde sonore, c'est le champ de vibration colinéaire à la direction de propagation : on dit alors que l'onde est longitudinale. Dans le cas de la lumière, les propriétés sont les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} obéissant tous deux à l'équation d'onde (1.12). Les champs, perpendiculaires entre eux, sont perpendiculaires à la direction de propagation \vec{k} : on parle alors d'onde transversale (fig. 1.1).

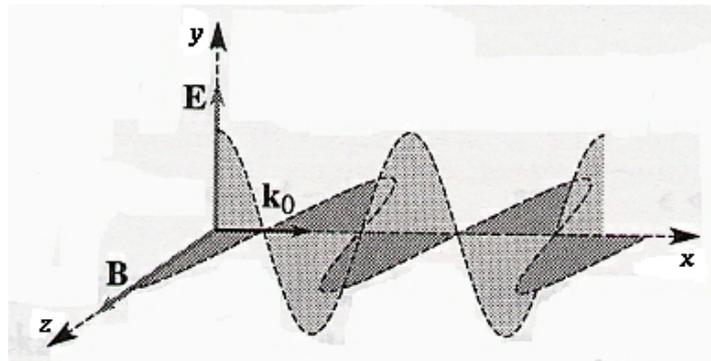


figure 1.1 : Onde électromagnétique plane.

Dans le cas d'une onde électromagnétique plane se propageant selon l'axe (Ox) :

$$\vec{k} = \|\vec{k}\| \hat{e}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{e}_x$$

Les champs électrique et magnétique s'écrivent (en supposant que les directions de \vec{E} et \vec{B} sont constantes dans le temps) :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_y(x,t)\hat{e}_y = E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{e}_y \\ \vec{B} &= B_z(x,t)\hat{e}_z = B_0 \sin(kx - \omega t)\hat{e}_z \end{aligned} \quad (1.15)$$

On peut montrer que les amplitudes E_0 et B_0 sont reliés par $B_0 = E_0/v$, par l'équation de Maxwell, soit $B = E/v$ (cette relation est aussi valable pour les ondes sphériques).

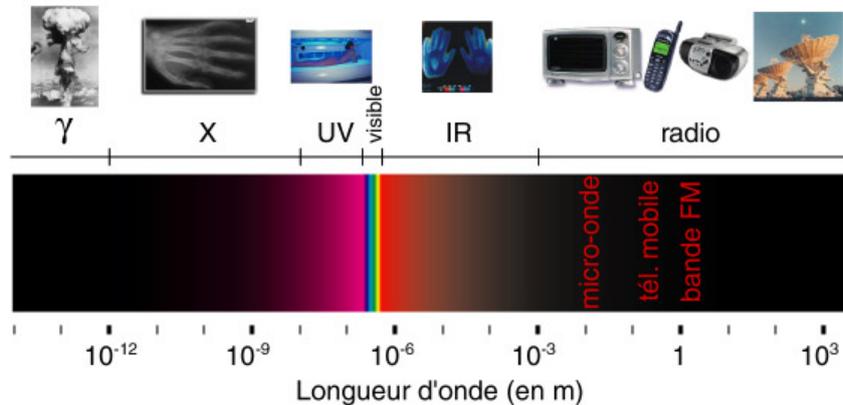


figure 1.2 : Spectre électromagnétique.

tableau 1.1 : Spectre électromagnétique en fréquence et en longueur d'onde.

| nom | fréquence | longueur d'onde (vide) | utilisation |
|-----------------|--|-----------------------------|-------------------------------------|
| ondes radio | $\rightarrow 10^9$ Hz | $\rightarrow 30$ cm | radio, TV |
| micro-ondes | $10^9 \rightarrow 3 \times 10^{11}$ Hz | 30 cm \rightarrow 1 mm | radar, communications |
| infrarouge | $3 \times 10^{11} \rightarrow 4 \times 10^{14}$ Hz | 1 mm \rightarrow 7800 Å | |
| visible | $4 \times 10^{14} \rightarrow 8 \times 10^{14}$ Hz | 7800 Å \rightarrow 3800 Å | |
| ultraviolet | $8 \times 10^{14} \rightarrow 3 \times 10^{17}$ Hz | 3800 Å \rightarrow 10 Å | |
| rayons X | $3 \times 10^{17} \rightarrow 5 \times 10^{19}$ Hz | 10 Å \rightarrow 0,06 Å | radiographie, fort pouvoir ionisant |
| rayons γ | 5×10^{19} Hz \rightarrow | 0,06 Å \rightarrow | réactions nucléaires |

1.6. Intensité d'une onde électromagnétique

La notion d'onde est souvent palpable, et physiquement mesurable, par l'énergie qu'elle transporte, sous forme de chaleur, de luminosité, ...

L'énergie est propagée dans l'espace selon la direction de propagation de l'onde. Dans le cas d'une onde électromagnétique, on définit le **flux d'énergie** (c'est-à-dire l'énergie par unité de surface à l'instant t) par la quantité vectorielle appelée **vecteur de Poynting** :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} \quad (\text{en W/m}^2) \quad (1.16)$$

où μ est la perméabilité du milieu dans lequel se propage l'onde.

\vec{S} est bien colinéaire à \vec{k} . En effet, comme \vec{E} et \vec{B} sont éléments d'un plan (P), par définition $\vec{E} \wedge \vec{B} \perp (P)$ (\vec{k} est aussi perpendiculaire à ce plan).

De plus, $\vec{E} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{E} \wedge \vec{B} = \|\vec{E}\| \|\vec{B}\| \hat{k}$ où $\hat{k} = \vec{k}/k$ est le vecteur unitaire repérant la direction de propagation. On a alors :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \|\vec{E}\| \|\vec{B}\| \hat{k}$$

Or E et B sont reliés par $B = E/v$, d'où :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu v} \|\vec{E}\|^2 \hat{k} \propto \|\vec{E}\|^2 \hat{k} \quad (1.17)$$

Le flux d'énergie d'une onde électromagnétique est proportionnel au carré du champ électrique associé.

Dans le cas d'une onde harmonique, le flux varie en tout point et en tout temps. Or toute détection physique de l'énergie de l'onde s'effectue toujours sur un temps long devant la période temporelle de l'onde (par exemple, pour une onde centimétrique $\lambda \approx 1 \text{ cm}$ et $\tau \approx 10^{-11} \text{ s}$, ce qui est un temps trop court pour une mesure).

On mesure donc la valeur moyenne de S dans le temps. Ce qui revient à calculer la valeur moyenne sur une période τ , soit pour une onde plane :

$$\langle S \rangle_{\tau} = \left\langle \frac{1}{\mu v} E^2(x, t) \right\rangle_{\tau}$$

$$\langle S \rangle_{\tau} = \left\langle \frac{1}{\mu v} E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \right\rangle_{\tau}$$

soit l'intégrale sur la période :

$$\langle S \rangle_{\tau} = \frac{1}{\mu v} E_0^2 \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \sin^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2\mu v} E_0^2 \quad (1.18)$$

car sur une période : $\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \sin^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2}$ (ce qui sera vu en TD).

Pour une onde sphérique, on a la même écriture avec $E(r, t) = \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega t)$ et on trouve :

$$\langle S \rangle_{\tau} = \frac{1}{2\mu v} \frac{E_0^2}{r^2} \quad (1.19)$$

L'énergie totale propagée s'obtient en intégrant $\langle S \rangle_{\tau}$ sur tout l'espace :

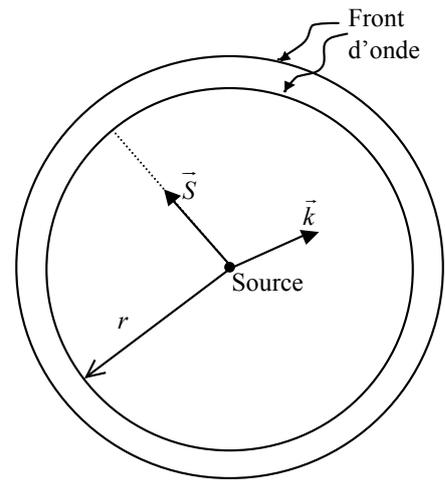
- **dans le cas d'une onde plane**, l'énergie émise par la source se retrouve à tout instant sur un plan infini (front d'onde). *L'énergie totale propagée est alors infinie* car $\langle S \rangle_{\tau} = \text{Cte}$. Cela illustre bien qu'une onde plane n'est qu'un outil mathématique qui n'a aucune réalité physique.

- **dans le cas d'une onde sphérique**, l'énergie émise par la source se retrouve à tout instant sur une sphère de rayon r (qui est le front d'onde avec \vec{S} radial) et donc de surface $4\pi r^2$. L'énergie totale est alors :

$$\begin{aligned} P &= \langle S \rangle_{\tau} 4\pi r^2 \\ &= \frac{1}{\mu v} \frac{E_0^2}{r^2} 4\pi r^2 \\ &= \frac{1}{\mu v} 4\pi E_0^2 \end{aligned}$$

Ici le terme 4π correspond à l'angle solide de l'espace et E_0^2 est la puissance de la source (au facteur $1/\mu v$ près).

Dans le cas de l'onde sphérique, la puissance est bien finie et constante quelque soit le rayon r de la sphère considérée (et quelque soit t) ; on retrouve en fait la puissance totale de la source.



1.7. Propagation dans les milieux isotropes (Indice de réfraction et principe de Fermat)

Il est bien connu que le son ne se propage pas dans le vide. Comme il a été déjà mentionné, une onde sonore est longitudinale et représente en fait un champ de vibration se propageant comme une onde de choc (entre particules). La vitesse de propagation d'une onde sonore dépend donc du milieu dans lequel elle se propage ; sa fréquence étant invariante, sa longueur d'onde dépendra donc aussi du milieu (selon $v = v\lambda$ avec $v = \text{Cte}$). On notera que dans l'air la vitesse du son est $v \approx 330 \text{ m.s}^{-1}$.

Au contraire, une onde électromagnétique se propage le plus rapidement dans le vide avec $v = c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ (c est la célérité). Plus le milieu est dense, moins l'onde se propage rapidement^(1.1). La vitesse v de propagation dans le milieu est alors reliée à la vitesse c de propagation dans le vide par la quantité n (sans dimension) appelée **indice de réfraction** :

$$\boxed{v = \frac{c}{n}} \quad (1.20)$$

Plus le milieu est dense, plus n est important et plus la vitesse de propagation est faible.

La fréquence ν de l'onde est la même quel que soit le milieu. Il s'ensuit que la longueur d'onde dépend du milieu traversé selon :

$$v = \nu \lambda_{\text{milieu}} \quad \text{et} \quad c = \nu \lambda_{\text{vide}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{milieu}} = \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n}$$

La longueur d'onde est d'autant plus faible que le milieu est dense.

Deux ondes se propageant selon le même axe, mais dans des milieux différents, parcourent pendant un temps Δt des distances différentes :

^(1.1) Sous l'effet du champ \vec{E} incident, le milieu se polarise. Cette polarisation entraîne à son tour un champ opposé au champ initial. Le champ total est alors plus faible que le champ incident. Au fur et à mesure de sa propagation, l'onde incidente s'amointrit.

$$r_1 = v_1 \Delta t = \frac{c \Delta t}{n_1} \quad \text{et} \quad r_2 = v_2 \Delta t = \frac{c \Delta t}{n_2}$$

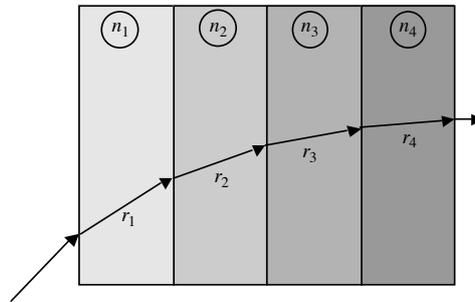
On introduit alors la **longueur de chemin optique LCO** :

$$\boxed{LCO = \text{indice} \times \text{longueur géométrique} = n \times r} \quad (1.21)$$

Pendant le temps Δt , les deux ondes précédentes parcourent la même LCO :

$$LCO_1 = n_1 r_1 = c \Delta t \quad \text{et} \quad LCO_2 = n_2 r_2 = c \Delta t$$

La notion de LCO est aussi très utile lors de l'écriture d'une onde traversant plusieurs milieux.



On ne se soucie pas du changement de longueur d'onde λ dans chaque milieu et écrivons la fonction d'onde sous la forme :

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 \sin(k_{\text{vide}} LCO \mp \omega t) \\ &= \Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{vide}}}(n_1 r_1 + \dots + n_i r_i + \dots) \mp \omega t\right) \end{aligned}$$

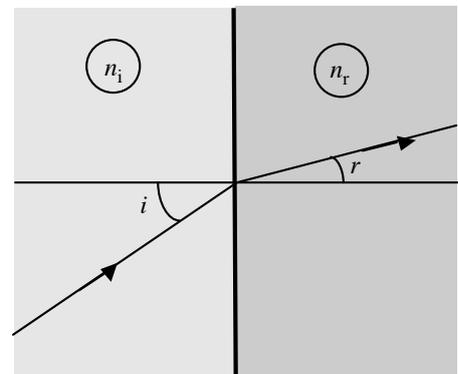
Dorénavant, le milieu sera toujours pris en compte dans l'écriture de la fonction d'onde via la LCO avec $k = 2\pi/\lambda_{\text{vide}}$ selon l'équation de dessus.

☞ Note : dans le vide, la LCO correspond à la longueur géométrique car $n_{\text{vide}} = 1$.

Pourquoi la direction de propagation d'une onde change à l'interface de deux milieux ?

Cela résulte du **principe de Fermat** : un rayon lumineux se propageant entre deux points, quels que soient les milieux traversés, suit un chemin qui correspond à une valeur stationnaire de la LCO. Le parcours effectif est celui pour lequel la dérivée de la LCO est nulle.

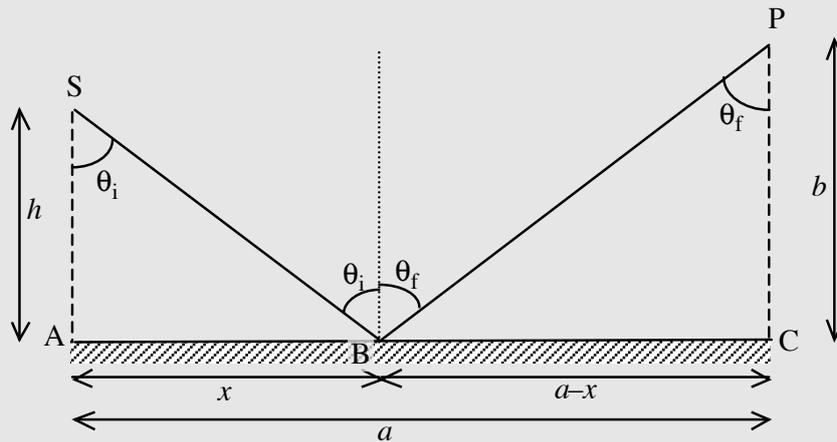
Si la dérivée de la LCO est nulle, alors la LCO varie très peu autour de ce parcours effectif. Partout ailleurs, la LCO varie beaucoup dès lors que l'on s'écarte d'un parcours virtuel, ce qui n'est pas physique.



Exercice :

Retrouver les lois de Descartes pour la réflexion et la réfraction à l'aide du principe de Fermat.

- Pour la réflexion, on considère le schéma suivant :



La longueur de chemin optique s'écrit :

$$LCO = n(\overline{SB} + \overline{BP}) = n\left(\sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (a-x)^2}\right)$$

La LCO n'est fonction que de x , et selon le principe de Fermat :

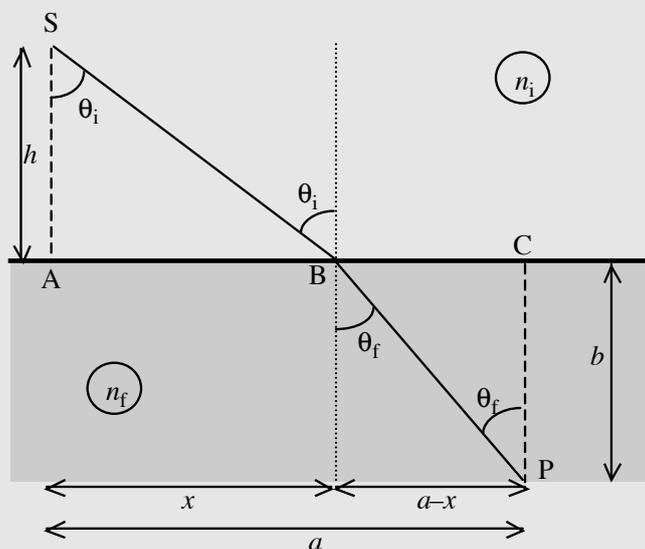
$$\frac{dLCO}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[n\left(\sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (a-x)^2}\right)\right] = 0$$

soit :

$$\frac{nx}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{n(a-x)}{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{AB}{SB} - \frac{BC}{BP} = 0 \Rightarrow \sin\theta_i - \sin\theta_f = 0$$

On a donc bien, pour la réflexion : $\theta_i = \theta_f$

- Pour la réfraction, on considère le schéma suivant :



La longueur de chemin optique s'écrit :

$$LCO = n_i \overline{SB} + n_f \overline{BP} = n_i \sqrt{h^2 + x^2} + n_f \sqrt{b^2 + (a-x)^2}$$

La LCO n'est fonction que de x , et selon le principe de Fermat :

$$\frac{dLCO}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[n_i \sqrt{h^2 + x^2} + n_f \sqrt{b^2 + (a-x)^2} \right] = 0$$

soit :

$$\frac{n_i x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{n_f (a-x)}{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0 \Rightarrow n_i \frac{AB}{SB} - n_f \frac{BC}{BP} = 0 \Rightarrow n_i \sin \theta_i - n_f \sin \theta_f = 0$$

On a donc bien, pour la réfraction : $n_i \sin \theta_i = n_f \sin \theta_f$

1.8. Onde polychromatique. Lumière blanche et dispersion.

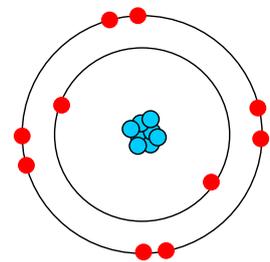
Nous n'avons jusqu'ici considéré que des ondes associées à une seule longueur d'onde : ces ondes sont dites **monochromatiques**. Or, aucune onde n'est réellement monochromatique : même un laser a une certaine largeur $\Delta\omega$ autour de la pulsation ω_0 que l'on peut relier à un étalement $\Delta\lambda$ autour de λ_0 ($\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$). Donc en fait, toute onde est une superposition d'ondes monochromatiques : on obtient alors des ondes **polychromatiques**.

La lumière issue d'un tube néon en est un bon exemple. En effet, on sait qu'un tel faisceau lumineux peut être décomposé lors de la traversée d'un prisme de verre, par ex., en un spectre discret de raies de couleurs différentes et bien séparées. On parle de **dispersion** de la lumière par le prisme.

Avant de comprendre le phénomène de dispersion, nous allons brièvement décrire l'origine de ces raies (ondes monochromatiques) composant la lumière blanche (polychromatique).

Le tube néon contient des atomes (Ne) que l'on peut classiquement représenter comme un électron orbitant autour d'un noyau lourd (en fait la structure électronique du néon est plus compliquée : il existe plusieurs électrons gravitant autour du noyau, mais chaque électron peut être considéré individuellement, ce qui ne nuit pas à la discussion qui suit).

Seules quelques orbites d'énergies bien déterminées sont probables ; à l'équilibre, l'électron se trouve sur la plus petite orbite. Lors de la décharge électrique (fig. 1.4), on communique de l'énergie à chaque atome Ne ; il s'ensuit une transition de l'électron vers une orbite plus diffuse (plus l'orbite est grande, plus l'énergie électronique est grande). Cependant, l'atome veut revenir dans sa position d'équilibre afin de minimiser son énergie (tout système physique est dans son état d'énergie minimum à l'équilibre) : l'électron retourne spontanément sur l'orbite minimum.



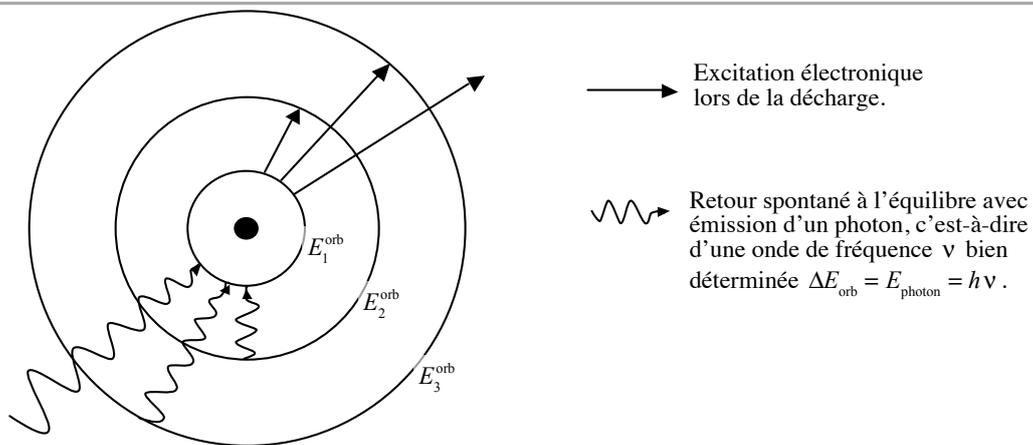


figure 1.4 : Excitation et désexcitation d'un atome en fonction des différentes couches électroniques.

Cette diminution d'énergie atomique s'accompagne de l'émission de quanta d'énergie, appelés **photons**, tels que $E_{\text{photon}} = E_2^{\text{orb}} - E_1^{\text{orb}} = \Delta E_{\text{orbite 2} \rightarrow \text{orbite 1}}$ (car il faut que l'énergie totale se conserve).

On notera que $E_{\text{photon}} = h\nu$ où h est la constante de Planck ($h = 6,626 \times 10^{-34}$ J.s). Ces photons sont les constituants élémentaires de l'onde électromagnétique émise à la fréquence ν lors de la transition électronique.

Comme plusieurs orbites excitées peuvent être accédées par l'électron lors de la décharge électrique, plusieurs fréquences ν (donc plusieurs λ) bien distinctes peuvent être émises lors de la désexcitation spontanée : l'atome de néon émet un spectre de raies (chaque longueur d'onde permise par désexcitation) comme le montre la figure 1.5.

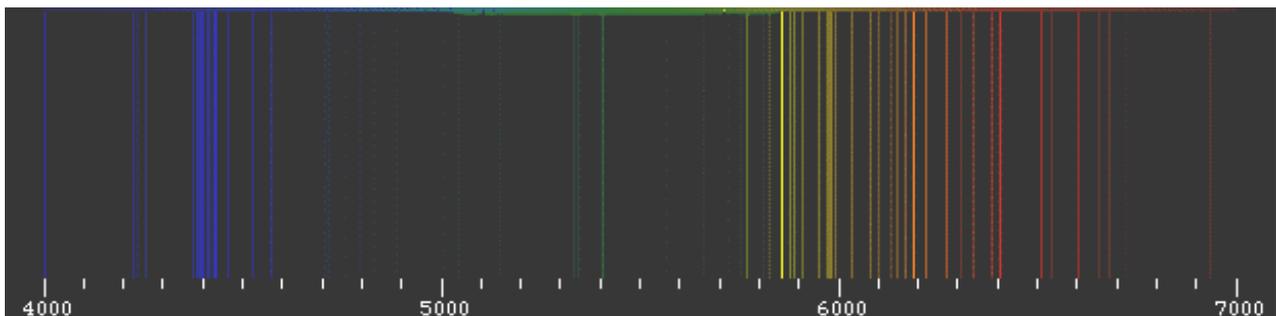


figure 1.5 : Spectre de raies de l'atome de néon. Chaque raie correspond à l'émission d'un quanta de lumière à une longueur d'onde donnée.

Voyons maintenant pourquoi le prisme décompose la lumière blanche. Nous avons vu qu'une onde monochromatique de longueur d'onde λ se propage dans un milieu avec la vitesse $v = c/n$ où n est l'indice de réfraction (d'autant plus grand que le milieu est dense). **Dans certains milieux** (verre, quartz, ...) **l'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde**^(1.2), on a $n(\lambda)$: on dit que le milieu est **dispersif**. Ex : pour le verre, on peut avoir une variation de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde comme indiquée sur la figure 1.6.

(1.2) Dans le cas où un système optique possède un indice de réfraction variant avec la longueur d'onde, l'indice de réfraction donné dans la littérature correspond à l'indice de réfraction pour une radiation de référence : la raie D de l'hélium ($\lambda = 587,6$ nm), car cette raie lumineuse est proche du milieu du spectre visible.

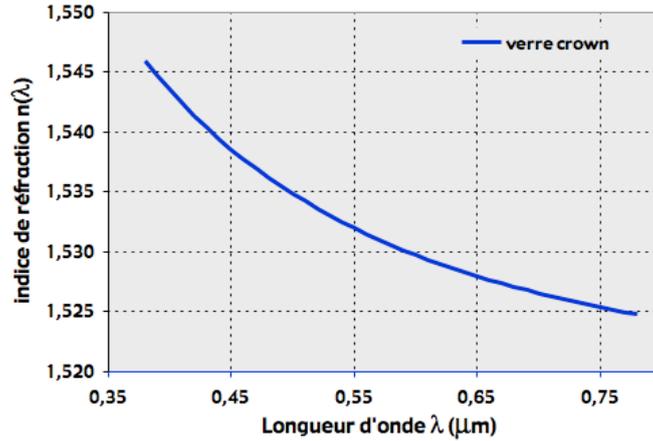


figure 1.6 : Variation schématique de l'indice $n(\lambda)$ d'un verre (verre crown de télescope) en fonction de la longueur d'onde λ .

Aussi chaque onde monochromatique sera, lors de l'entrée dans le prisme, déviée de façon différente selon :

$$\sin i = n(\lambda) \sin r(\lambda)$$

Il en va de même lors de la sortie du prisme :

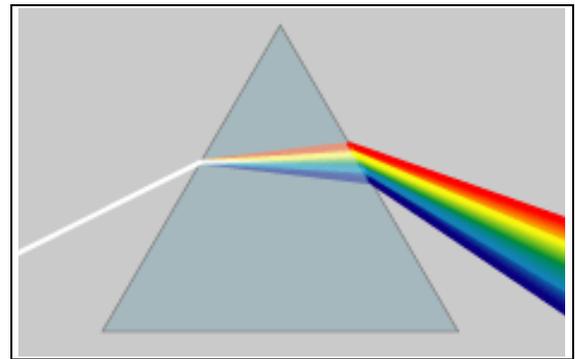
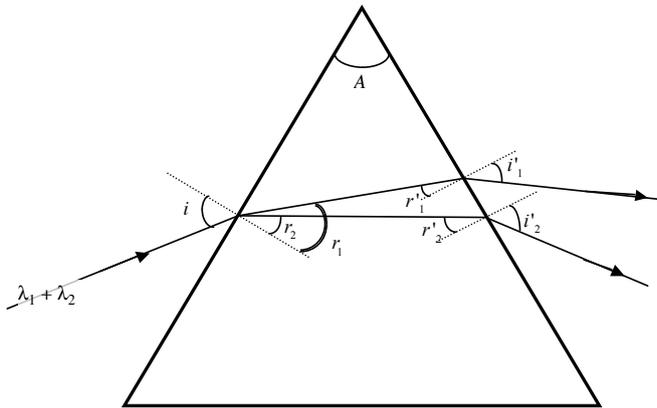
$$n(\lambda) \sin r'(\lambda) = \sin i'(\lambda)$$

avec :

$$r(\lambda) + r'(\lambda) = A$$

où A est l'angle au sommet du prisme.

Il y a alors **dispersion** de la lumière incidente blanche par le prisme.



Exemple :

On considère un prisme d'angle au sommet $A = 60^\circ$ et d'indice pour le rayon rouge $n_r = 1,50$ et pour le rayon bleu $n_b = 1,52$. On fait pénétrer dans ce prisme un rayon lumineux rouge et un rayon lumineux bleu sous l'incidence $i = 30^\circ$.

• Pour le rayon rouge :

$$\sin 30^\circ = 1,50 \sin r_r \quad \Rightarrow \quad r_r = 19,47^\circ$$

$$r_r + r'_r = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad r'_r = 40,53^\circ$$

$$1,50 \sin 40,53^\circ = \sin i'_r \quad \Rightarrow \quad i'_r = 77,09^\circ$$

• Pour le rayon bleu :

$$\sin 30^\circ = 1,52 \sin r_b \quad \Rightarrow \quad r_b = 19,20^\circ$$

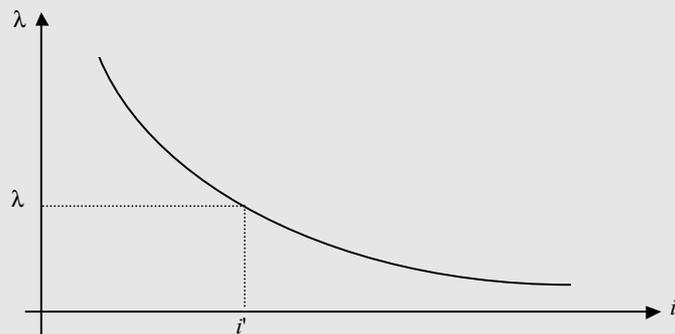
$$r_b + r'_b = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad r'_b = 40,80^\circ$$

$$1,52 \sin 40,80^\circ = \sin i'_b \quad \Rightarrow \quad i'_b = 83,31^\circ > i'_r$$

Application : spectroscopie à prisme (à voir en TP)

La spectroscopie à prisme consiste à déterminer les λ constituant la lumière blanche issue d'une lampe inconnue afin de déterminer la nature du gaz constituant l'ampoule (les diverses λ sont caractéristiques du gaz — les orbites électroniques sont différentes suivant la nature atomique).

On procède comme suit : on utilise d'abord une lampe étalon (Hg-Cd) dont on connaît les longueurs d'onde λ . On repère la déviation de chaque raie à la sortie du prisme et on établit la correspondance $\lambda = f(i')$, comme la représentation ci-dessous.



On place alors devant le prisme la lampe de gaz inconnu. On mesure les i' résultants et on en déduit les λ correspondants à l'aide de la courbe étalon précédemment établie. Les λ connues, on est en mesure de déterminer la nature du gaz (à l'aide des longueurs d'onde tabulées).

Chapitre 2

Polarisation des ondes électromagnétiques dans les milieux isotropes

Nous n'avons jusqu'ici considéré que des ondes électromagnétiques dont le vecteur champ électrique restait dans un plan fixe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_y$$

La direction du champ électrique \vec{E} définit l'état de polarisation de l'onde électromagnétique. Lorsque cette direction reste fixe au cours du temps, on dit que l'onde est polarisée linéairement (fig. 2.1).

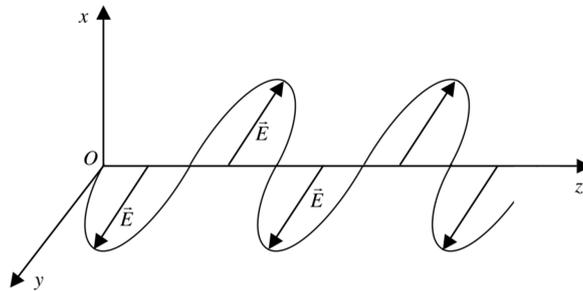


figure 2.1 : Représentation de l'onde $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_y$. La direction de propagation est selon l'axe Oz, le champ \vec{E} est toujours dirigé selon l'axe Oy quelque soit le temps t : l'onde est polarisée linéairement.

Nous allons maintenant étudier la superposition de deux ondes polarisées linéairement, de même fréquence et dont les champs électriques associés sont perpendiculaires (l'étude de la superposition de deux ondes dont les champs électriques sont coplanaires sera l'objet du chapitre 3). Aussi, nous nous restreignons toujours à la propagation dans les milieux isotropes (la propagation dans les milieux anisotropes sera étudiée dans la partie II).

2.1. États de polarisation

Soient deux ondes de même fréquence se propageant dans la direction des z positifs (fig. 2.2), dont les champs électriques sont définis comme :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_1 \cos(kz - \omega t + \varepsilon_1) \hat{e}_x \\ \vec{E}_2 = E_2 \cos(kz - \omega t + \varepsilon_2) \hat{e}_y \end{cases}$$

où les déphasages à l'origine ε_1 et ε_2 sont indépendants du temps.

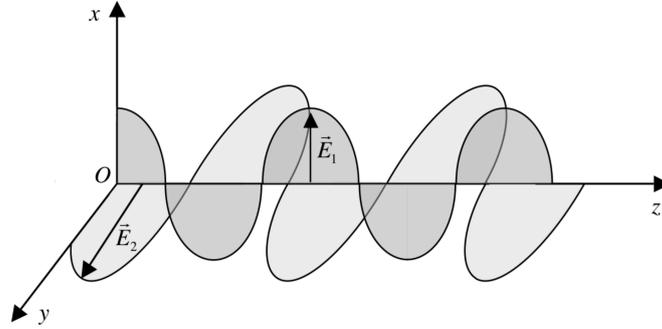


figure 2.2 : Représentation des champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 . La direction de propagation est selon l'axe Oz , le champ \vec{E}_1 est dirigé selon l'axe Ox et le champ \vec{E}_2 est dirigé selon l'axe Oy . Les amplitudes ne sont pas obligatoirement identiques. Les déphasages ε_1 et ε_2 à l'origine font que ces ondes ne sont pas nulles à l'origine.

On définit le retard de phase de \vec{E}_2 par rapport à \vec{E}_1 par :

$$\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

Si on choisit une position et un temps (z_0, t_0) tel que $(kz_0 - \omega t_0) = -\varepsilon_1$, on a :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z_0, t_0) = E_1 \cos(kz_0 - \omega t_0 + \varepsilon_1) \hat{e}_x = E_1 \cos(-\varepsilon_1 + \varepsilon_1) \hat{e}_x = E_1 \hat{e}_x \\ \vec{E}_2(z_0, t_0) = E_2 \cos(kz_0 - \omega t_0 + \varepsilon_2) \hat{e}_y = E_2 \cos(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \hat{e}_y = E_2 \cos(\varepsilon) \hat{e}_y \end{cases}$$

De même, si on choisit une position et un temps (z'_0, t'_0) tel que $(kz'_0 - \omega t'_0) = -\varepsilon_2$, on a :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z'_0, t'_0) = E_1 \cos(-\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \hat{e}_x = E_1 \cos(-\varepsilon) \hat{e}_x \\ \vec{E}_2(z'_0, t'_0) = E_2 \cos(-\varepsilon_2 + \varepsilon_2) \hat{e}_y = E_2 \hat{e}_y \end{cases}$$

On peut donc choisir une origine de référentiel tel que, à (z, t) quelconque, le champ total s'écrit :

$$\vec{E}(z, t) = E_1 \cos(kz - \omega t + \varepsilon_1) \hat{e}_x + E_2 \cos(kz - \omega t + \varepsilon_2) \hat{e}_y$$

ou
$$\vec{E}(z, t) = E_1 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + E_2 \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \hat{e}_y$$

ou
$$\vec{E}(z, t) = E_1 \cos(kz - \omega t - \varepsilon) \hat{e}_x + E_2 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_y$$

Ces trois écritures de l'onde résultante sont équivalentes.

☛ On rencontre aussi dans la littérature l'écriture des ondes sous la forme $E = E_0 \cos(\omega t - kz - \varepsilon)$ qui est une écriture équivalente à $E = E_0 \cos(kz - \omega t + \varepsilon)$ puisque $\cos(a) = \cos(-a)$, mais il faut faire attention au signe donné au déphasage ε (c'est-à-dire ne pas utiliser l'écriture de $E = E_0 \cos(kz - \omega t - \varepsilon)$ pour éviter les erreurs de détermination du sens de rotation de la polarisation). On peut aussi rencontrer l'écriture des ondes avec la notation complexe $E = E_0 \exp[i(kz - \omega t + \varepsilon)]$ qui trouve son utilité pour les calculs compliqués.

2.1.1. Polarisation linéaire – états P

Considérons l'onde résultante sous l'écriture suivante :

$$\vec{E}(z, t) = E_1 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + E_2 \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \hat{e}_y$$

Si $\varepsilon = m\pi$ avec $m \in \mathbb{N}$, alors :

$$\vec{E}(z,t) = E_1 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + E_2 \cos(kz - \omega t + m\pi) \hat{e}_y$$

si m est pair :

$$\vec{E}(z,t) = (E_1 \hat{e}_x + E_2 \hat{e}_y) \cos(kz - \omega t)$$

si m est impair :

$$\vec{E}(z,t) = (E_1 \hat{e}_x - E_2 \hat{e}_y) \cos(kz - \omega t)$$

Le vecteur $E_1 \hat{e}_x \pm E_2 \hat{e}_y$ est constant au cours du temps. Sa direction est fixe : l'onde résultante est polarisée linéairement ; on dit qu'elle est dans l'état **P** (fig. 2.3).

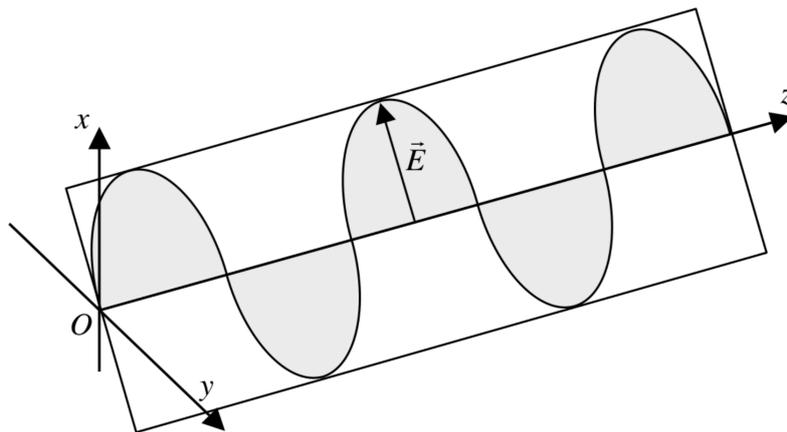
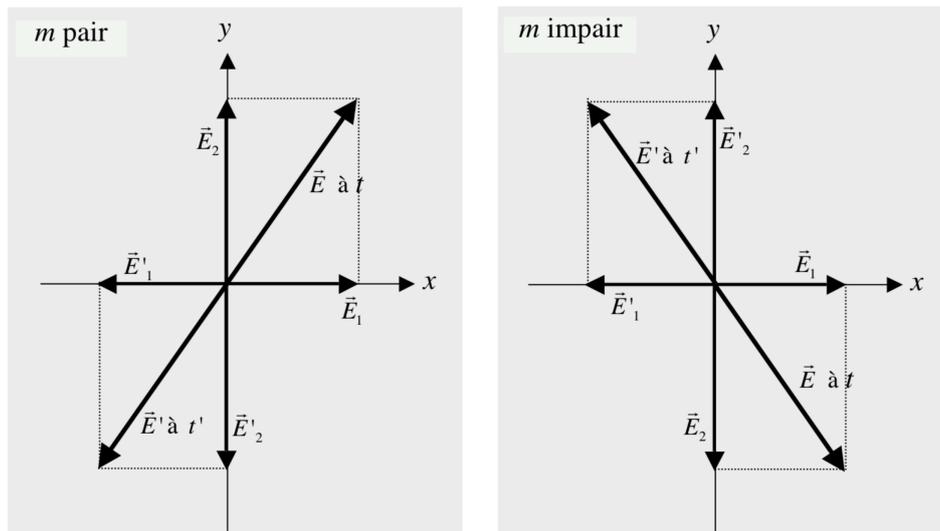


figure 2.3 : La direction de polarisation est fixe, c'est une polarisation linéaire – état P

2.1.2. Polarisation circulaire – états D et G

Considérons toujours l'onde résultante sous l'écriture suivante :

$$\vec{E}(z,t) = E_1 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + E_2 \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \hat{e}_y$$

De plus on va considérer que les amplitudes sont identiques $E_1 = E_2 = E$.

$$\vec{E}(z,t) = E \left[\cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \hat{e}_y \right]$$

Si $\varepsilon = \pi/2 + 2m\pi$ ($m \in \mathbb{N}$), alors :

$$\vec{E}(z,t) = E \left[\cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + \cos(kz - \omega t + \pi/2) \hat{e}_y \right]$$

$$\vec{E}(z,t) = E \left[\cos(kz - \omega t) \hat{e}_x - \sin(kz - \omega t) \hat{e}_y \right] \quad \text{car } \cos(a + \pi/2) = -\sin a$$

Si $\varepsilon = -\pi/2 + 2m\pi$ ($m \in \mathbb{N}$), alors :

$$\vec{E}(z,t) = E \left[\cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + \cos(kz - \omega t - \pi/2) \hat{e}_y \right]$$

$$\vec{E}(z,t) = E \left[\cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + \sin(kz - \omega t) \hat{e}_y \right] \quad \text{car } \cos(a - \pi/2) = \sin a$$

Le module de \vec{E} reste constant ($|\vec{E}| = E_1 = E_2 = E$), mais sa direction dépend de z et de t . En fait, dans le référentiel (x, y) , \vec{E} est un vecteur de norme E et faisant avec l'axe Oy un angle $(kz - \omega t)$. Les composantes du vecteur \vec{E} à l'instant t sont les champs primaires \vec{E}_1 et \vec{E}_2 . L'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une hélice de rayon E .

Pour connaître le sens de rotation du champ \vec{E} , on se met dans le cas d'un observateur (récepteur, capteur, ...) qui se trouve dans la direction de propagation et qui regarde l'onde venir vers lui :

- si l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une hélice qui tourne dans le sens trigonométrique, on dira que l'onde a une **polarisation circulaire gauche**^(2.1) ou que c'est un **état G** de polarisation
- si l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une hélice qui tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique (sens des aiguilles d'une montre), on dira que l'onde a une polarisation circulaire droite ou que c'est un état D de polarisation.

Exemples :

- Si $\varepsilon = \pi/2$ le champ résultant s'écrit :

$$\vec{E}(z,t) = E \left[\cos(kz - \omega t) \hat{e}_x - \sin(kz - \omega t) \hat{e}_y \right]$$

On regarde l'état de l'onde à une position quelconque, par exemple $z = 0$. On a :

$$\vec{E}(0,t) = E \left[\cos(-\omega t) \hat{e}_x - \sin(-\omega t) \hat{e}_y \right]$$

$$\vec{E}(0,t) = E \left[\cos(\omega t) \hat{e}_x + \sin(\omega t) \hat{e}_y \right]$$

Or $\omega = \frac{2\pi}{T}$; l'onde peut s'écrire :

$$\vec{E}(0,t) = E \left[\cos(2\pi t/T) \hat{e}_x + \sin(2\pi t/T) \hat{e}_y \right]$$

On regarde maintenant l'orientation du champ $\vec{E}(0,t)$ à différents temps t :

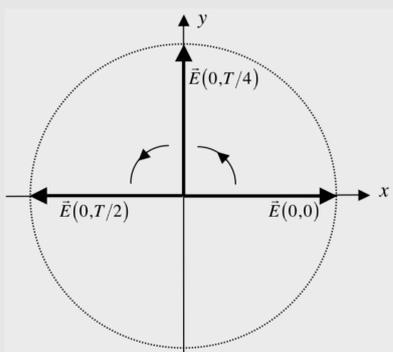
$$\text{à } t = 0 \quad \vec{E}(0,0) = E \hat{e}_x$$

$$\text{à } t = T/4 \quad \vec{E}(0,T/4) = E \left[\cos(\pi/2) \hat{e}_x + \sin(\pi/2) \hat{e}_y \right] = E \hat{e}_y$$

$$\text{à } t = T/2 \quad \vec{E}(0,T/2) = E \left[\cos(\pi) \hat{e}_x + \sin(\pi) \hat{e}_y \right] = -E \hat{e}_x$$

^(2.1) Les termes de polarisation circulaire droite ou gauche sont les termes utilisés en optique. En général (électromagnétisme), on parle d'*héllicité positive ou négative* selon que l'extrémité du vecteur \vec{E} tourne dans le sens trigonométrique (sens positif) ou inverse (sens négatif).

Traçons l'évolution de l'extrémité du vecteur $\vec{E}(0,t)$:



Au cours du temps, l'onde tourne dans le sens trigonométrique. C'est donc une onde de **polarisation circulaire gauche**, soit un **état G**.

- Si $\varepsilon = -\pi/2$ le champ résultant s'écrit :

$$\vec{E}(z,t) = E \left[\cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + \sin(kz - \omega t) \hat{e}_y \right]$$

On regarde l'état de l'onde à une position quelconque, par exemple $z = 0$. On a :

$$\vec{E}(0,t) = E \left[\cos(-\omega t) \hat{e}_x + \sin(-\omega t) \hat{e}_y \right]$$

$$\vec{E}(0,t) = E \left[\cos(\omega t) \hat{e}_x - \sin(\omega t) \hat{e}_y \right]$$

Or $\omega = \frac{2\pi}{T}$; l'onde peut s'écrire :

$$\vec{E}(0,t) = E \left[\cos(2\pi t/T) \hat{e}_x - \sin(2\pi t/T) \hat{e}_y \right]$$

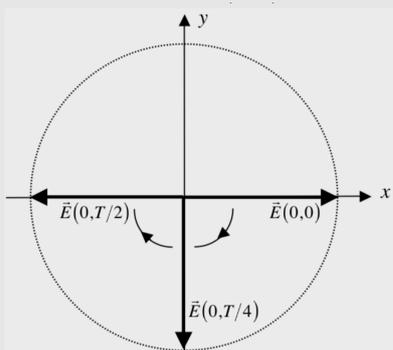
On regarde maintenant l'orientation du champ $\vec{E}(0,t)$ à différents temps t :

$$\text{à } t = 0 \quad \vec{E}(0,0) = E \hat{e}_x$$

$$\text{à } t = T/4 \quad \vec{E}(0,T/4) = E \left[\cos(\pi/2) \hat{e}_x - \sin(\pi/2) \hat{e}_y \right] = -E \hat{e}_y$$

$$\text{à } t = T/2 \quad \vec{E}(0,T/2) = E \left[\cos(\pi) \hat{e}_x - \sin(\pi) \hat{e}_y \right] = -E \hat{e}_x$$

Traçons l'évolution de l'extrémité du vecteur $\vec{E}(0,t)$:



Au cours du temps, l'onde tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique. C'est donc une onde de **polarisation circulaire droite**, soit un **état D**.

En résumé :

- si $\varepsilon = \pi/2$:
 - l'hélice tourne dans le sens trigonométrique,
 - l'onde est d'hélicité positive ($\varepsilon > 0$) ou dite positive,
 - l'onde est **polarisée circulairement à gauche**,
 - c'est un **état G** de polarisation.
- si $\varepsilon = -\pi/2$:
 - l'hélice tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique,
 - l'onde est d'hélicité négative ($\varepsilon < 0$) ou dite négative,
 - l'onde est **polarisée circulairement à droite**,
 - c'est un **état D** de polarisation.

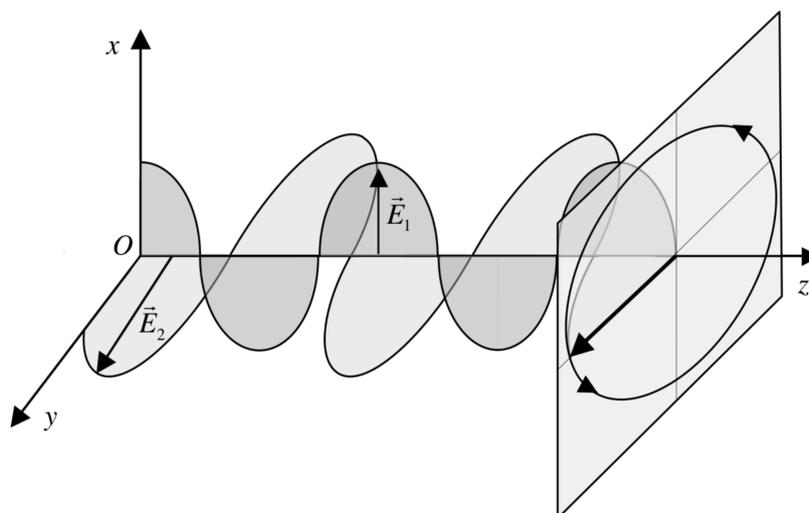


figure 2.4 : La direction de polarisation tourne, c'est une polarisation circulaire.

2.1.3. Polarisation elliptique – états E

Les polarisations linéaires et circulaires correspondent à des cas particuliers d'amplitude et de déphasage pour les ondes primaires. Dans le cas général :

$$\vec{E}(z,t) = E_1 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_x + E_2 \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \hat{e}_y$$

Dans le référentiel (x, y) , \vec{E} a pour composantes :

$$\begin{cases} E_x = E_1 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_x \\ E_y = E_2 \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \hat{e}_y \end{cases}$$

soit :

$$\frac{E_x}{E_1} = \cos(kz - \omega t)$$

et aussi :

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{E_2} &= \cos(kz - \omega t + \varepsilon) = \cos(kz - \omega t) \cos \varepsilon - \sin(kz - \omega t) \sin \varepsilon \\ &= \cos(kz - \omega t) \cos \varepsilon - \sqrt{1 - \cos^2(kz - \omega t)} \sin \varepsilon \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{E_y}{E_2} &= \frac{E_x}{E_1} \cos \varepsilon - \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \varepsilon \\
 \frac{E_y}{E_2} - \frac{E_x}{E_1} \cos \varepsilon &= -\sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \varepsilon \\
 \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 \cos^2 \varepsilon - 2 \frac{E_x}{E_1} \frac{E_y}{E_2} \cos \varepsilon &= \left(1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2\right) \sin^2 \varepsilon \\
 \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_1} \frac{E_y}{E_2} \cos \varepsilon &= \sin^2 \varepsilon \\
 \left(\frac{E_x}{E_1 \sin \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2 \sin \varepsilon}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_1 \sin \varepsilon} \frac{E_y}{E_2 \sin \varepsilon} \cos \varepsilon &= 1
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Cette équation est l'équation générique d'une ellipse (fig. 2.5) de la forme :

$$\frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{d^2} + XY \tan 2\alpha \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}\right) = 1 \tag{2.2}$$

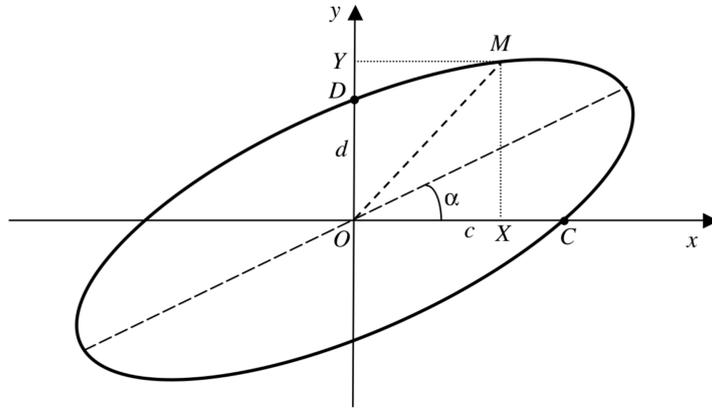


figure 2.5 : Ellipse inclinée d'un angle α par rapport à l'axe Ox . Les coordonnées du point M sont (X, Y) , les distances des points de contact de l'ellipse avec O sont $\overline{OC} = c$ et $\overline{OD} = d$.

Pour un rappel plus complet sur l'équation de l'ellipse, voir l'annexe A.3.

En posant $E_x = X$, $E_y = Y$, $E_1 \sin \varepsilon = c$ et $E_2 \sin \varepsilon = d$, l'équation (2.1) devient :

$$\left(\frac{X}{c}\right)^2 + \left(\frac{Y}{d}\right)^2 - 2 \frac{XY}{cd} \cos \varepsilon = 1$$

En comparant avec l'équation (2.2), on voit que l'on obtient bien l'équation d'une ellipse inclinée par rapport à l'axe des x d'un angle α tel que :

$$\begin{aligned}
 -2 \frac{1}{cd} \cos \varepsilon &= \tan 2\alpha \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}\right) \\
 \tan 2\alpha \left(\frac{1}{E_1^2 \sin^2 \varepsilon} - \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \varepsilon}\right) &= -\frac{2 \cos \varepsilon}{E_1 \sin \varepsilon E_2 \sin \varepsilon}
 \end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} \right) = -\frac{2 \cos \epsilon}{E_1 E_2}$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{2 \cos \epsilon}{E_1 E_2} \frac{1}{\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2}}$$

Finalement on obtient l'inclinaison de l'ellipse en fonction du déphasage :

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2 E_1 E_2 \cos \epsilon}{E_1^2 - E_2^2}} \quad (2.3)$$

L'extrémité du vecteur champ électrique balaye une hélice elliptique. L'onde a une **polarisation elliptique** — elle est dans l'état **E**.

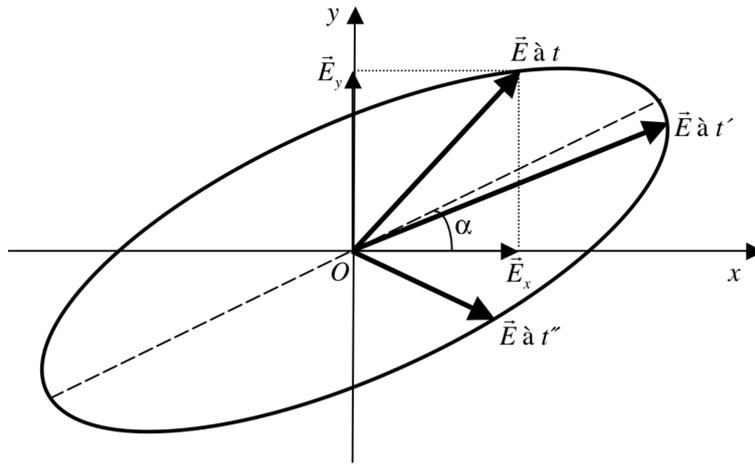


figure 2.6 : Évolution du vecteur champ électrique \vec{E} au cours du temps pour une polarisation elliptique.

Exercice :

Déterminer l'état de polarisation d'un champ électrique \vec{E} en ne connaissant seulement que les champs électriques primaires \vec{E}_1 et \vec{E}_2 :

$$\vec{E} \begin{cases} \vec{E}_1 = \cos(kz - \omega t) \hat{e}_y \\ \vec{E}_2 = 2 \cos(kz - \omega t + \pi/2) \hat{e}_x \end{cases}$$

On remarque tout de suite que la polarisation n'est pas linéaire ($\epsilon \neq 0$), ni circulaire ($E_1 \neq E_2$). Elle sera donc elliptique.

Pour déterminer plus précisément l'état, on se place à $z = 0$ et on regarde l'évolution dans le temps. Il ne restera plus qu'à regarder la figure dessinée par l'extrémité du champ total $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ pour divers temps caractéristiques.

À $z = 0$ et $\omega = 2\pi/T$, on a :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z=0, t) = \cos(-2\pi t/T) \hat{e}_y \\ \vec{E}_2(z=0, t) = 2 \cos(-2\pi t/T + \pi/2) \hat{e}_x \end{cases}$$

À $t = 0$:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z=0, t=0) = \hat{e}_y \\ \vec{E}_2(z=0, t=0) = \vec{0} \end{cases}$$

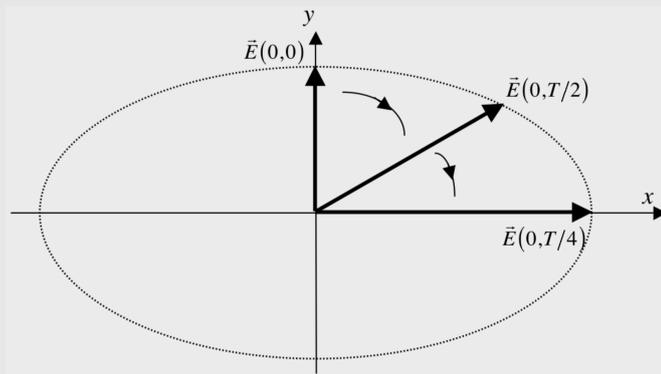
À $t = T/8$:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z=0, t=T/8) = \cos(-2\pi/8)\hat{e}_y = \cos(-\pi/4)\hat{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_y \approx 0,7\hat{e}_y \\ \vec{E}_2(z=0, t=T/8) = 2\cos(-2\pi/8 + \pi/2)\hat{e}_x = 2\cos(\pi/4)\hat{e}_x = \sqrt{2}\hat{e}_x \approx 1,4\hat{e}_x \end{cases}$$

À $t = T/4$:

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z=0, t=T/4) = \cos(-\pi/2)\hat{e}_y = \vec{0} \\ \vec{E}_2(z=0, t=T/4) = 2\cos(-\pi/2 + \pi/2)\hat{e}_x = 2\hat{e}_x \end{cases}$$

Traçons l'évolution de l'extrémité du vecteur $\vec{E}(0, t)$:



On obtient bien une **polarisation elliptique**, et il semble sur le graphique que l'inclinaison de l'axe de symétrie de l'ellipse par rapport à l'axe des abscisses est nulle, soit $\alpha = 0$.

En effet, le champ peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E} = 2\cos(kz - \omega t + \pi/2)\hat{e}_x + \cos(kz - \omega t)\hat{e}_y$$

ou :

$$\vec{E} = 2\cos(kz - \omega t)\hat{e}_x + \cos(kz - \omega t + (-\pi/2))\hat{e}_y$$

donc le déphasage est de $\epsilon = -\pi/2$; alors :

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_1E_2 \cos \epsilon}{E_1^2 - E_2^2} = 0$$

Et l'inclinaison de l'axe de symétrie de l'ellipse avec l'axe des x est nulle.

2.2. Production d'ondes transversales polarisées

La lumière naturelle (issue du Soleil, d'une lampe à gaz raréfié, ...) est non polarisée. Les sources sont la réunion d'un nombre quasi-infini d'émetteurs atomiques orientés au hasard. Chaque atome émet une onde polarisée (dont la polarisation dépend de "l'orientation atomique"). Cependant, la superposition de ces ondes non corrélées engendre un état de polarisation variant dans le temps de manière imprévisible : l'onde résultante est non polarisée.

Néanmoins, à tout instant t , l'état de polarisation peut toujours être décomposé selon deux états P orthogonaux dont les phases relatives varient aléatoirement :

$$E_1 \cos(kz - \omega t) \quad \text{et} \quad E_2 \cos(kz - \omega t + \varepsilon(t))$$

La combinaison de ces deux états donne alors une polarisation elliptique dont l'orientation et l'amplitude varient aléatoirement dans le temps (fig. 2.7) : on peut alors sélectionner un état de polarisation donné (une des deux composantes) par diverses méthodes dont certaines vont ici être exposées.

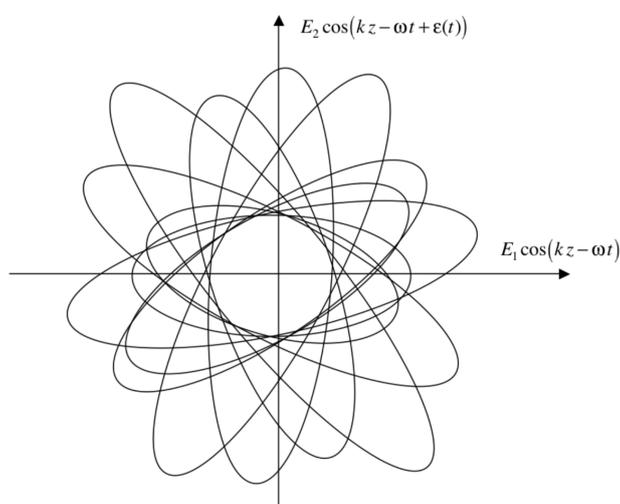


figure 2.7 : La lumière naturelle peut être considérée comme la superposition de plusieurs ondes de polarisation elliptique, d'orientation et d'amplitude variables.

2.2.1. Dichroïsme et polaroïds

Le dichroïsme correspond à l'absorption sélective de l'un des 2 états P orthogonaux constituant un faisceau incident.

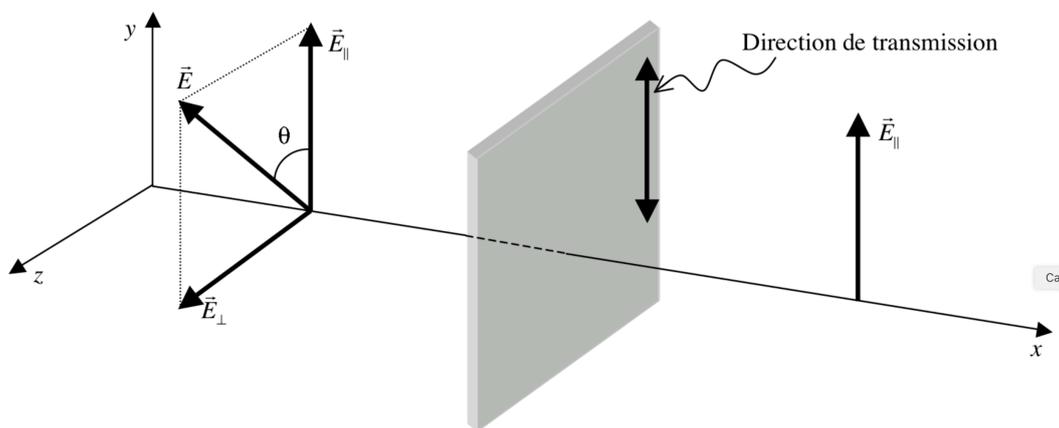
Pour les ondes lumineuses, le dispositif le plus simple pour polariser linéairement une onde non polarisée consiste à utiliser un polaroïd. Le polaroïd a été inventé par E.H. Land^(2.2). Lors de la traversée d'un polaroïd, seule la composante du champ incident parallèle à la direction dite de transmission du polaroïd, indiquée sur ce dernier, est transmise. L'onde transmise est donc bien polarisée linéairement, quelque soit l'onde incidente.

On désigne par **polariseur** le montage constitué par un polaroïd. On désigne souvent par **analyseur** un polariseur dont la direction de transmission peut être orientée différemment par rotation dans son plan.

2.2.2. Loi de Malus

On considère un champ électrique \vec{E} polarisé linéairement arrivant sur un polariseur dont la direction de transmission fait un angle θ avec \vec{E} .

^(2.2) Edwin Herbert Land (1909 — 1991) dépose le brevet du polaroïd (système à polariser la lumière) et crée la Polaroid Corporation en 1937.



Seule la composante parallèle E_{\parallel} d'amplitude :

$$E_{\parallel} = E \cos \theta$$

est transmise par le polariseur. Il s'ensuit que l'intensité transmise s'écrit :

$$I(\theta) \propto |E_{\parallel}|^2 = E^2 \cos^2 \theta$$

Mais si $\theta = 0$ alors :

$$I(0) = E^2$$

aussi l'intensité transmise pour un angle θ donné s'écrit :

$$\boxed{I(\theta) = I(0) \cos^2 \theta}$$

(2.4)

ce qui constitue la loi de Malus.

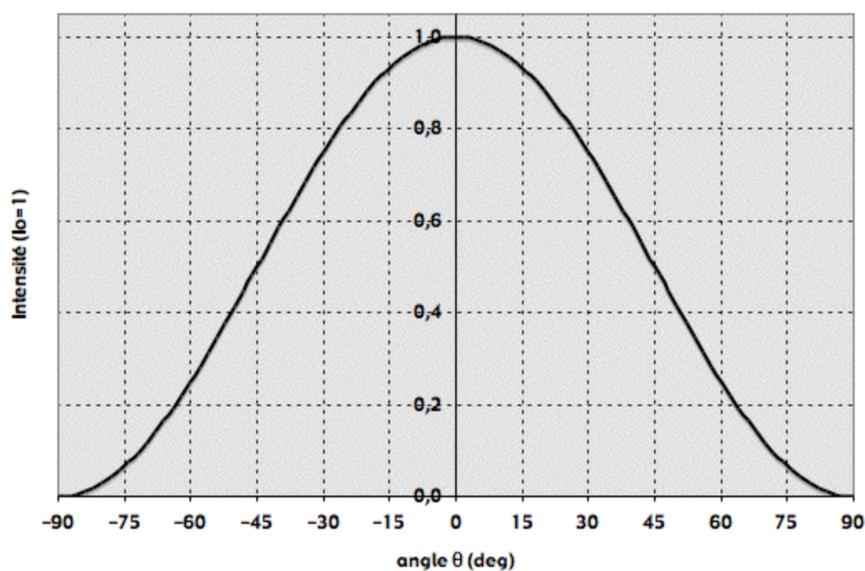


figure 2.10 : Loi de Malus : représentation de la variation d'intensité

$$I(\theta) = I(0) \cos^2 \theta \text{ pour } I(0) = 1.$$

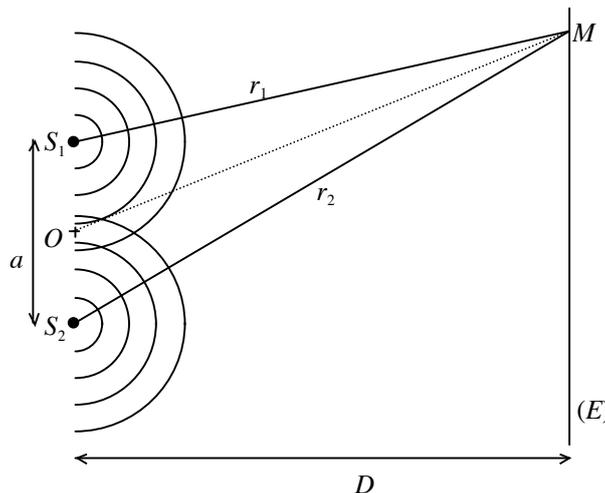
Chapitre 3

Interférences et diffraction

Nous venons d'étudier la superposition de deux états P (2 ondes polarisées). Cette superposition engendre une onde dont l'état de polarisation est dans le cas quelconque elliptique. Nous allons consacrer ce chapitre à la superposition de deux états P coplanaires (non perpendiculaires). Suivant la phase relative des deux états se rencontrant en un point donné de l'espace, cette superposition peut être soit constructive (on obtient une intensité résultante supérieure à la somme des intensités primaires) soit destructive (l'intensité résultante est inférieure à la somme des intensités primaires, voire nulle).

3.1. Interférences de 2 sources ponctuelles : cohérence

Soient deux sources ponctuelles S_1 et S_2 distantes de $a > \lambda$ (si $a < \lambda$ les deux sources sont indiscernables). Les sources émettent des ondes sphériques et on observe la superposition des deux ondes en un point M de l'espace à la distance D de (S_1, S_2) .



Si on dessine la propagation des fronts d'onde dans l'espace, on observe aisément que les fronts d'onde de S_1 et S_2 se recouvrent. Ce recouvrement (ou mélange) conduira au phénomène d'interférence.

On observe le résultat du phénomène d'interférence à la distance $D \gg a$. Les ondes sphériques émises par S_1 et S_2 peuvent alors être assimilées à des ondes planes. Si on désigne par r_1 et r_2 les distances S_1M et S_2M , on écrit les ondes en M :

$$E_1 = E_1^0 \cos(kr_1 - \omega t)$$

$$E_2 = E_2^0 \cos(kr_2 - \omega t - \varepsilon(t))$$

Les ondes ont même fréquence et leur déphasage relatif $\varepsilon(t)$ dépend du temps. De plus, nous considérerons dans un premier temps que les directions de polarisation des 2 ondes sont identiques.

Ainsi, l'onde résultante en M est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Soit, puisque \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont colinéaires :

$$E = E_1 + E_2 = E_1^0 \cos(kr_1 - \omega t) + E_2^0 \cos(kr_2 - \omega t - \varepsilon(t))$$

L'intensité résultante s'écrit (on omettra dans le calcul de l'intensité le terme de proportionnalité $1/\mu v$, mais il ne faudra pas oublier qu'il existe toujours) :

$$I = \langle |E|^2 \rangle = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2\langle E_1 E_2 \rangle$$

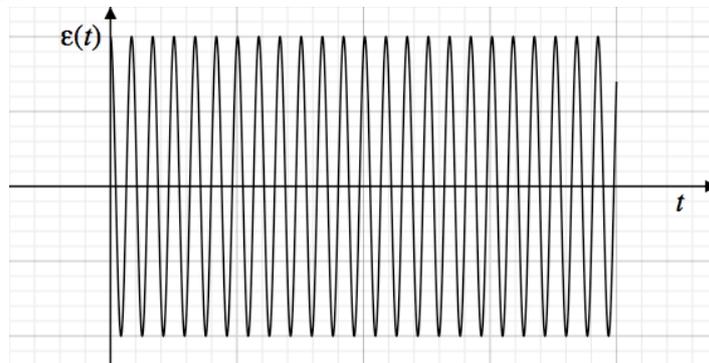
Soient $I_1 = \langle E_1^2 \rangle$ et $I_2 = \langle E_2^2 \rangle$ les intensités des ondes primaires en M .

On notera que : $I_1 = (E_1^0)^2 \langle \cos^2(kr_1 - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}(E_1^0)^2$; de même $I_2 = \frac{1}{2}(E_2^0)^2$.

Soit enfin~:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2E_1^0 E_2^0 \langle \cos(kr_1 - \omega t) \cos(kr_2 - \omega t - \varepsilon(t)) \rangle \\ &= I_1 + I_2 + E_1^0 E_2^0 \left\{ \langle \cos[k(r_1 + r_2) - 2\omega t - \varepsilon(t)] \rangle + \langle \cos[k(r_2 - r_1) - \varepsilon(t)] \rangle \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Si $\varepsilon(t)$ varie rapidement et aléatoirement, alors les quantités dans les valeurs moyennes sont rapidement oscillantes :



ainsi $\langle \cos[k(r_1 + r_2) - 2\omega t - \varepsilon(t)] \rangle = 0$ de même $\langle \cos[k(r_2 - r_1) - \varepsilon(t)] \rangle = 0$. Donc finalement :

$$\boxed{I = I_1 + I_2}$$

Lorsque le déphasage relatif des ondes en M varie dans le temps de manière aléatoire, l'intensité résultante de la superposition est égale à la somme des intensités des ondes primaires (comme attendu). Il n'existe alors aucun phénomène d'interférence particulier. Lorsque le déphasage relatif des ondes varie dans le temps, on dit que les sources sont **incohérentes**.

2 sources incohérentes n'interfèrent pas : l'intensité résultante de la superposition des 2 ondes incohérentes est égale à la somme des intensités des ondes primaires.

Deux sources sont dites **cohérentes** lorsque le déphasage relatif des ondes qu'elles émettent ne dépend pas du temps. Nous allons maintenant étudier le résultat de la superposition de 2 ondes cohérentes et prendrons par souci de simplicité $\varepsilon = 0$ (c'est-à-dire lors de l'émission, les deux ondes sont en phase).

Si $\varepsilon = 0$, l'équation (3.1) devient :

$$I = I_1 + I_2 + 2E_1^0 E_2^0 \langle \cos(kr_1 - \omega t) \cos(kr_2 - \omega t) \rangle$$

On utilise alors la relation^(3.1) $\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{b-a}{2} \right) + \cos \left(\frac{b+a}{2} \right) \right\}$ pour écrire :

$$I = I_1 + I_2 + E_1^0 E_2^0 \langle \cos [k(r_2 - r_1)] \rangle + E_1^0 E_2^0 \langle \cos [k(r_2 + r_1) - 2\omega t] \rangle$$

On sait que $\langle \cos(\alpha t + \beta) \rangle = 0$ car $\cos(\alpha t + \beta)$ oscille de part et d'autre de l'axe des abscisses, donc $\langle \cos [k(r_2 + r_1) - 2\omega t] \rangle = 0$. Mais, $\cos [k(r_2 - r_1)]$ ne dépend pas du temps, donc $\langle \cos [k(r_2 - r_1)] \rangle = \cos [k(r_2 - r_1)]$. On a alors :

$$I = I_1 + I_2 + E_1^0 E_2^0 \cos [k(r_2 - r_1)]$$

On a vu que $I_1 = (E_1^0)^2 / 2$ et $I_2 = (E_2^0)^2 / 2$; aussi $E_1^0 E_2^0 = 2\sqrt{I_1 I_2}$; et alors :

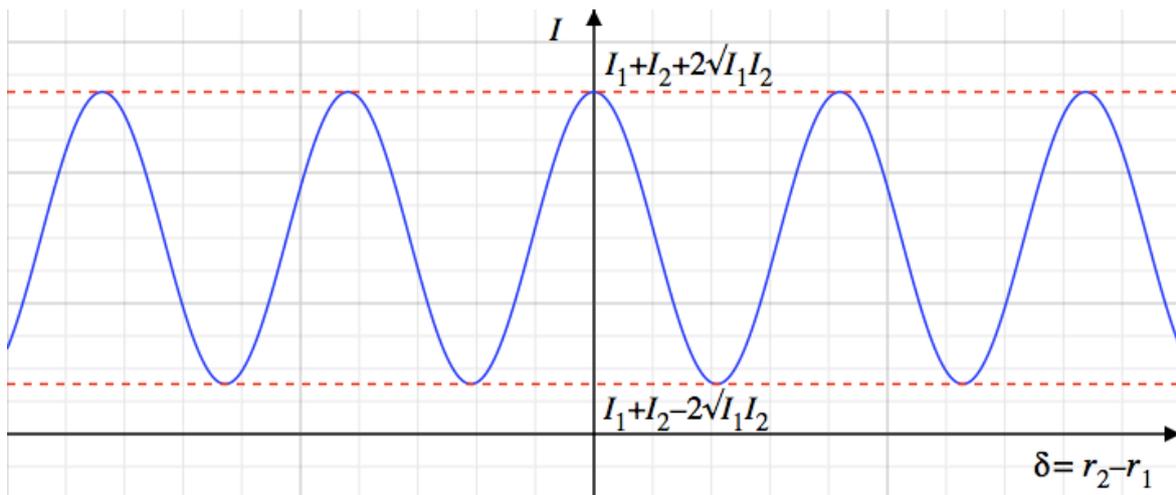
$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos [k(r_2 - r_1)]} \quad (3.2)$$

L'intensité résultante de la superposition de 2 ondes cohérentes est une quantité qui oscille selon l'équation (3.2) et sa valeur en un point M de l'espace dépend de $(r_2 - r_1)$ où r_1 et r_2 sont les distances séparant les sources S_1 et S_2 de M respectivement.

La quantité $\delta = r_2 - r_1$ est appelée **différence de marche**, et on a :

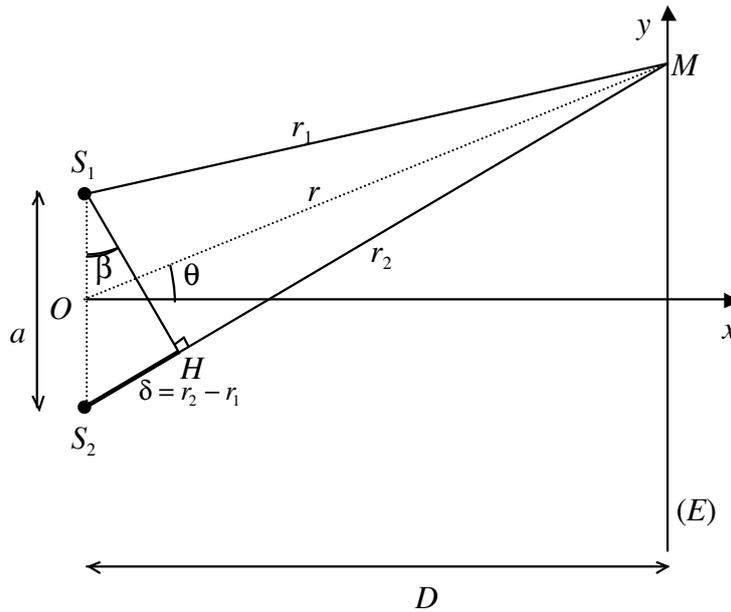
$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\delta)} \quad (3.3)$$

Si l'on place un écran (E) parallèle au plan des sources S_1 et S_2 et situé au point M , on obtient sur l'écran une alternance de points brillants et sombres : l'éclairement n'est pas uniforme !



(3.1) On a $\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) + \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{b-a}{2} \right) + \cos \left(\frac{b+a}{2} \right) \right\}$, car $\cos(-x) = \cos(x)$. Ici

on utilise la formulation en $\cos \frac{b-a}{2}$ pour avoir $r_2 - r_1 > 0$ dans le cas du dessin.



Si le point M est repéré par l'angle θ que fait la droite OM avec l'axe Ox (voir figure), on obtient $r_2 - r_1$ en projetant S_1M sur S_2M ; alors $r_2 - r_1 = a \sin \beta$. Mais si on se restreint à la mesure de l'intensité I pour des points M proches de l'axe Ox ($y \ll D$), comme $a \ll D$, on a r_1, r et r_2 quasiment confondus. Ainsi, S_1H , qui par définition est perpendiculaire à S_2M est aussi perpendiculaire à OM . Alors, $\beta \approx \theta$ et $\delta = r_2 - r_1 = a \sin \theta$, et :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(ka \sin \theta)$$

Si le point M est repéré par l'ordonnée y , on peut facilement exprimer $\sin \theta$ en fonction de y : $\sin \theta = y/r$. En remarquant encore que $a \ll D$ et $y \ll D$ (r_1, r et r_2 quasiment confondus avec l'axe Ox), on note $r \approx D$. Aussi $\sin \theta = y/D$, et :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(ka \frac{y}{D}\right)$$

On peut alors chercher les positions angulaires (angles θ) ou les positions algébriques (ordonnées y) pour lesquelles l'intensité résultante sera maximale ou minimale.

• **Intensité maximale**

L'intensité sera maximale lorsque, dans l'équation (3.3), $\cos k\delta = 1$, soit $k\delta = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{N}$, soit $2\pi\delta/\lambda = 2p\pi$, et :

$$\delta = p\lambda$$

Lorsque la différence de marche est égale à un nombre entier de fois la longueur d'onde, alors les 2 ondes en M sont en phase ; en effet, leur déphasage $\Delta\phi$ s'écrit : $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (kr_2 - \omega t) - (kr_1 - \omega t) = k(r_2 - r_1) = k\delta = 2p\pi$. Dans ce cas-là, l'intensité résultante est maximale :

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Comme $I > I_1 + I_2$, on dit que les interférences sont **constructives**.

$$\delta = p\lambda \Leftrightarrow a \sin \theta_{\max} = p\lambda \Leftrightarrow \sin \theta_{\max} = \frac{p\lambda}{a} = \frac{y_{\max}}{D} \Leftrightarrow y_{\max} = \frac{p\lambda D}{a}$$

• **Intensité minimale**

L'intensité sera minimale lorsque, dans l'équation (3.3), $\cos k\delta = -1$, soit $k\delta = (2p + 1)\pi$ avec $p \in \mathbb{N}$, soit $2\pi\delta/\lambda = (2p + 1)\pi$, et :

$$\delta = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Lorsque la différence de marche est égale à un nombre entier +1/2 de fois la longueur d'onde, alors les 2 ondes en M sont en opposition de phase ; en effet, leur déphasage $\Delta\phi$ s'écrit :

$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (kr_2 - \omega t) - (kr_1 - \omega t) = k(r_2 - r_1) = k\delta = (2p + 1)\pi$. Dans ce cas-là, l'intensité résultante est minimale :

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Comme $I < I_1 + I_2$, on dit que les interférences sont **destructives**.

$$\delta = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda \Leftrightarrow a \sin \theta_{\min} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

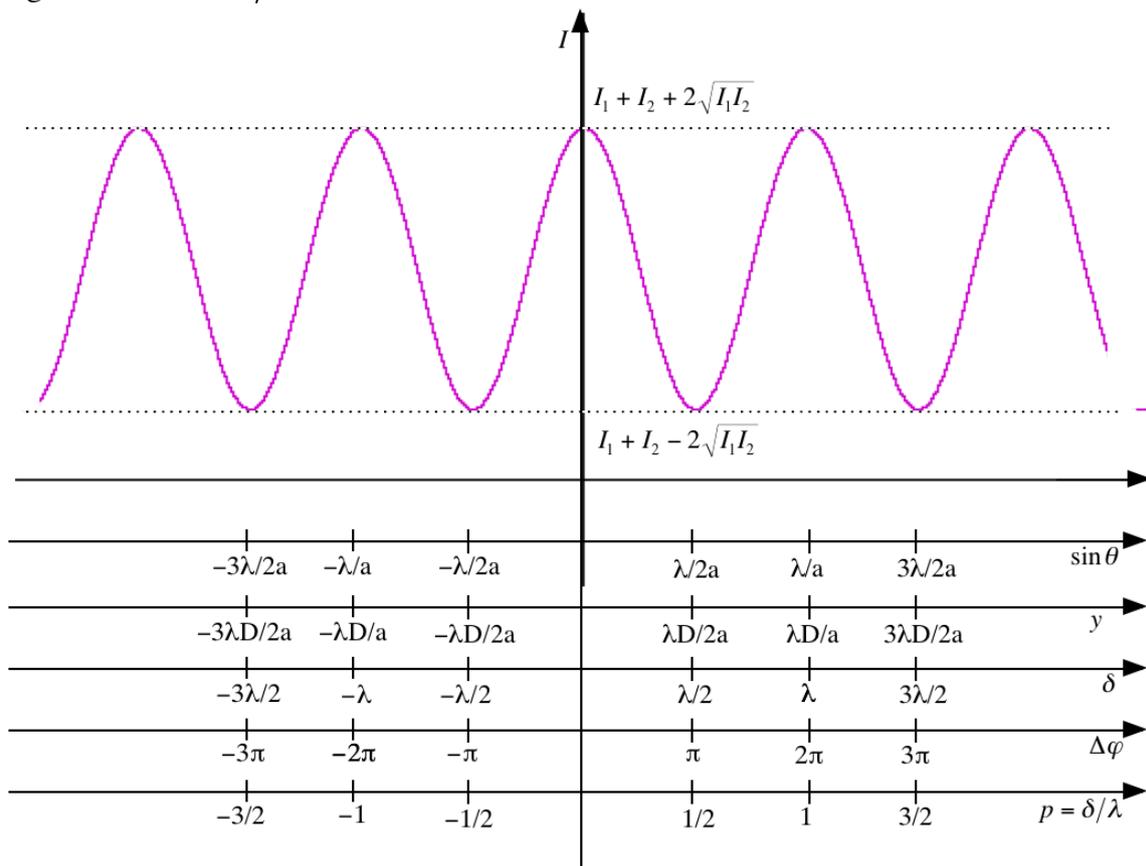
$$\Leftrightarrow \sin \theta_{\min} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a} = \frac{y_{\min}}{D} \Leftrightarrow y_{\min} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a}$$

3.1.1. Ordre d'interférence

L' **ordre d'interférence** est le nombre :

$$p = \delta/\lambda$$

Lorsque l'intensité est maximale, l'ordre d'interférence est entier, lorsque l'intensité est minimale, il est égal à un entier +1/2.



3.1.2. Interfrange

La distance séparant deux maxima ou deux minima d'interférence est toujours la même : elle est appelé **interfrange**. L'interfrange correspond à :

$$i = y_{\max}(p+1) - y_{\max}(p) = (p+1) \frac{\lambda D}{a} - p \frac{\lambda D}{a}$$

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

L'interfrange correspond à une variation pour δ de λ , pour $\Delta\phi$ de 2π ou pour p de 1 :

$$\Delta p = 1 \quad \text{ou} \quad \Delta\delta = \lambda \quad \text{ou} \quad \Delta(\Delta\phi) = 2\pi$$

Lorsque le phénomène d'interférence est constructif, il apparaît une génération d'intensité en certains points du plan d'observation : $I > I_1 + I_2$. Il faut toutefois remarquer que l'intensité moyenne distribuée sur le plan est bien égale à la somme des intensités des ondes primaires. Cette intensité moyenne peut être définie comme :

$$\langle I \rangle = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} = I_1 + I_2$$

L'augmentation d'intensité en certains points est compensée par la réduction en d'autres (lorsque les interférences sont destructives).

3.1.3. Contraste

On définit le **contraste** comme la quantité :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Le contraste permet de quantifier la netteté de la figure d'interférence obtenue (rapport des intensités maximales et minimales). On a dans le cas où $I_1 \neq I_2$:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad \text{et} \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Le contraste C est toujours inférieur à 1 par définition. Il est maximal lorsque $I_1 = I_2 = I_0$:

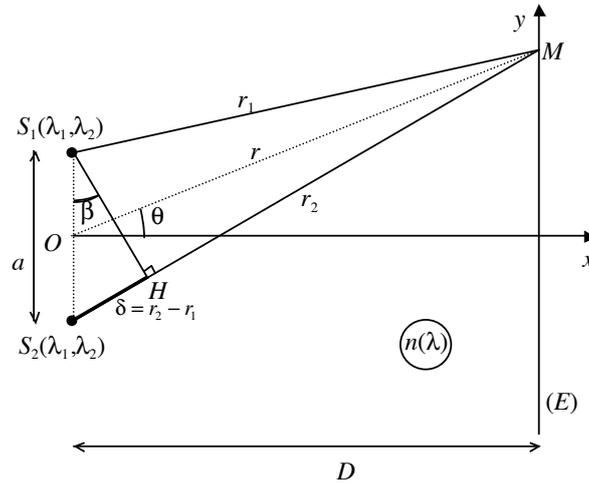
$$C = \frac{2I_0}{2I_0} = 1$$

Dans ce cas-là, on notera que les minima d'interférence sont nuls ($I_{\min} = I_0 + I_0 - 2I_0 = 0$) et que les maxima valent $4I_0$ ($I_{\max} = I_0 + I_0 + 2I_0 = 4I_0$). Le profil d'intensité est donné par :

$$I = I_0 + I_0 + 2I_0 \cos(k\delta)$$

3.2. Interférences de 2 sources ponctuelles polychromatiques

Soient 2 sources ponctuelles émettant des ondes sphériques polychromatiques identiques. Par souci de simplicité, nous supposons que chaque onde polychromatique est constituée de 2 ondes monochromatiques de fréquence ν_1 et ν_2 et de longueur d'onde λ_1 et λ_2 dans le vide. On suppose de plus que ces ondes se propagent dans un milieu dispersif d'indice $n(\lambda)$.



Les ondes monochromatiques λ_1 et λ_2 issues de S_1 vont interférer au point M avec les ondes monochromatiques λ_1 et λ_2 issues de S_2 . On peut étudier le résultat du phénomène d'interférence conformément au paragraphe précédent ; il faut toutefois prendre en compte maintenant la nature dispersive du milieu.

Interférence des ondes issues de S_1 et S_2 de longueur d'onde λ_1

Les ondes issues de S_1 et S_2 de longueur d'onde λ_1 et d'amplitude égales E_0 s'écrivent, en supposant les sources S_1 et S_2 cohérentes et en phase :

$$E_1 = E_0 \cos(k_1 n_1 r_1 - \omega_1 t)$$

$$E_2 = E_0 \cos(k_1 n_1 r_2 - \omega_1 t)$$

avec :

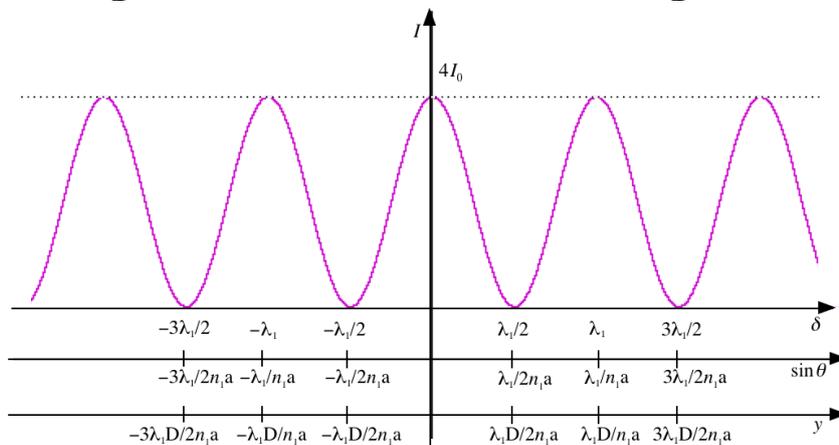
$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_{1,\text{vide}}} \quad \text{et} \quad n_1 = n(\lambda_1)$$

Conformément au paragraphe 1.1, on obtient :

$$I_{\lambda_1} = 2I_0 (1 + \cos k_1 \delta_1) \quad \text{avec} \quad \delta_1 = n_1 (r_2 - r_1)$$

On a toujours :

$$r_2 - r_1 = a \sin \theta = \frac{ay}{D} \quad \text{soit} \quad \delta_1 = n_1 a \sin \theta = \frac{n_1 ay}{D}$$



De la même façon, les 2 ondes monochromatiques de fréquence ν_2 vont interférer en M pour donner :

$$I_{\lambda_2} = 2I_0 (1 + \cos k_2 \delta_2)$$

avec :

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_{2,\text{vide}}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = n_2(r_2 - r_1) = n_2 a \sin \theta = \frac{n_2 a y}{D}$$

en supposant que les intensités des ondes λ_2 sont les mêmes que celles des ondes λ_1 .

Interférence de l'onde λ_1 issue de S_1 avec l'onde λ_2 issue de S_2 et inversement

Regardons maintenant le résultat de l'interférence de l'onde λ_1 issue de S_1 avec l'onde λ_2 issue de S_2 et inversement. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos(k_1 n_1 r_1 - \omega_1 t) && \text{issue de } S_1 \\ E_2 &= E_0 \cos(k_2 n_2 r_2 - \omega_2 t) && \text{issue de } S_2 \end{aligned}$$

Le champ résultant de cette superposition s'écrit $E = E_1 + E_2$ (pour des directions de polarisation identiques). L'intensité résultante est :

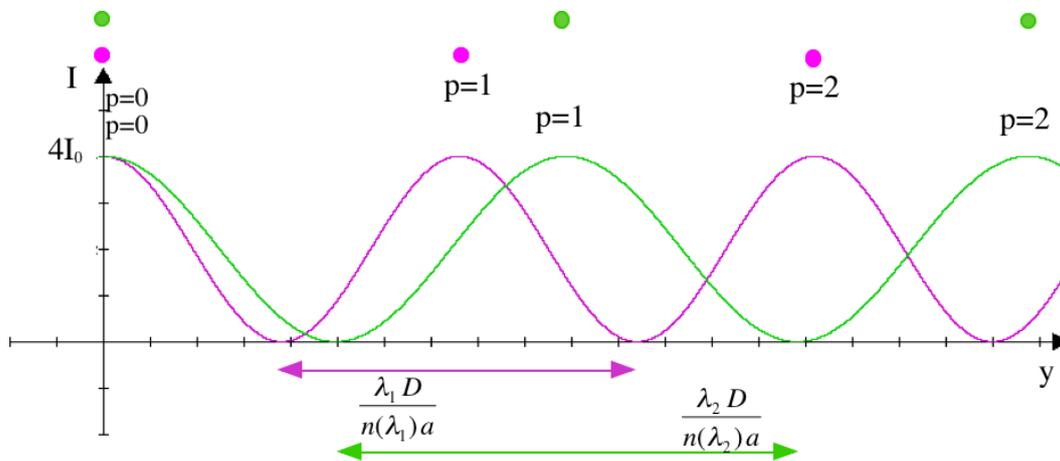
$$I = \langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \langle E_1 E_2 \rangle = I_1 + I_2 + 2 \langle E_1 E_2 \rangle$$

Mais $I_1 = I_2 = I_0$, soit :

$$\begin{aligned} I &= 2I_0 + 2E_0^2 \langle \cos(k_1 n_1 r_1 - \omega_1 t) \cos(k_2 n_2 r_2 - \omega_2 t) \rangle \\ &= 2I_0 + 4I_0 \langle \cos(k_1 n_1 r_1 - \omega_1 t) \cos(k_2 n_2 r_2 - \omega_2 t) \rangle \quad \text{car } I_0 = \langle E_1^2 \rangle = \langle E_2^2 \rangle = E_0^2 / 2 \\ &= 2I_0 \left(1 + \langle \cos[k_2 n_2 r + k_1 n_1 r_1 - (\omega_2 + \omega_1)t] \rangle + \langle \cos[k_2 n_2 r - k_1 n_1 r_1 - (\omega_2 - \omega_1)t] \rangle \right) \end{aligned}$$

Les valeurs moyennes des cosinus sont nulles (car $\langle \cos(\alpha t + \beta) \rangle = 0$) ; aussi $I = 2I_0$.

On voit donc que deux ondes de longueurs d'onde différentes n'interfèrent pas ; l'intensité résultante de la superposition en un point M de l'espace est la somme des intensités des ondes primaires. On obtient suivant l'axe y une alternance de points brillants de couleurs différentes correspondants aux interférences des ondes λ_1 et aux interférences des ondes λ_2 . En $\theta = 0$ ou $y = 0$, on obtient la superposition de deux ondes monochromatiques ; en ce point les deux couples monochromatiques sont confondus ($\delta = 0, \Delta\phi = 0, \forall \lambda$).

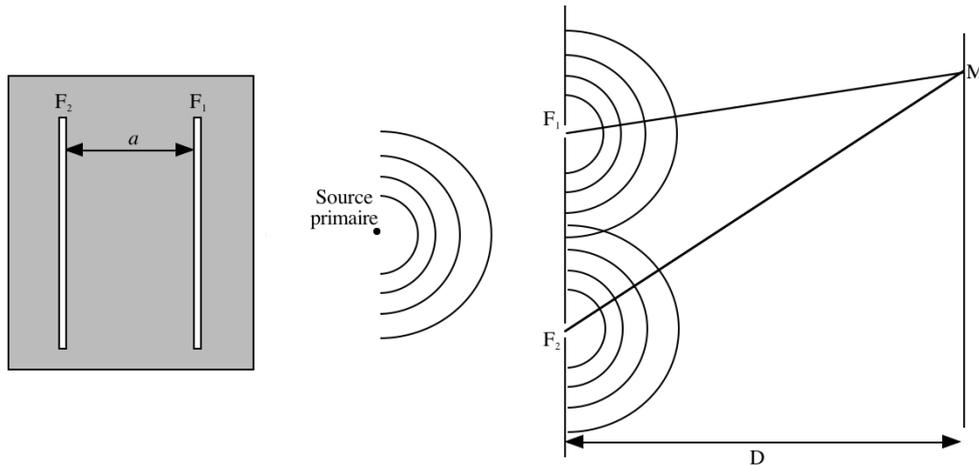


Dans notre cas, l'intensité résultante de la superposition des 2 ondes polychromatiques sera la somme des intensités résultantes du phénomène d'interférences entre les ondes monochromatiques de longueur d'onde identique issues de S_1 et S_2 .

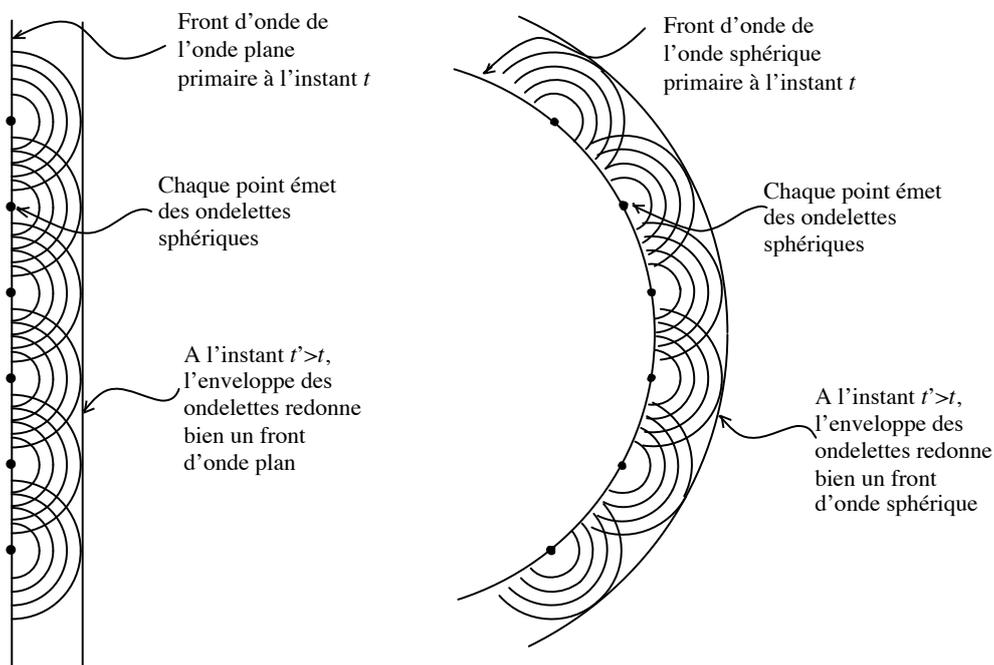
3.3. Principe de Huygens – fentes de Young

Nous n'avons jusqu'ici considéré que le phénomène d'interférence d'ondes émises par des sources ponctuelles. Or les sources ponctuelles n'existent pas. De plus, il est expérimentalement fort difficile de faire interférer deux ou plusieurs sources macroscopiques distantes. En effet, les interférences ne sont observables que si les sources sont cohérentes et jusqu'à présent le développement des sources cohérentes (incluant les lasers) est assez limité. Aussi l'idée est de scinder une onde primaire en 2 ondes distinctes (qui sont alors cohérentes puisque issues de la même source) et de leur faire parcourir des longueurs de chemin optique (*LCO*) différentes avant d'observer le processus d'interférence en un point donné.

Le montage le plus connu est celui des fentes de Young : dans une plaque sont percées deux fentes rectilignes et parallèles. Cette plaque est éclairée par une onde incidente (que l'on peut considérer sphérique) et les 2 fentes jouent alors le rôle de sources secondaires.



La forme des ondes secondaires "émises" par les fentes est déduite du principe d'Huygens : chaque point d'un front d'onde primaire se comporte comme une source d'ondelettes sphériques secondaires (dans un milieu isotrope) telles que l'onde primaire à un instant plus tard est l'enveloppe de ces ondelettes. Les ondelettes avancent avec la vitesse et la fréquence de l'onde primaire.



 Note : De par son énoncé, il est clair que le principe de Huygens a été établi pour formaliser la propagation de l'onde primaire dans l'espace. On vérifie d'ailleurs que cet énoncé permet de retrouver la propagation des fronts d'onde des ondes planes et sphériques.

Si dans le montage des fentes de Young l'onde primaire émise par la source est sphérique, alors les points F_1 et F_2 sont éléments du même front d'onde à l'instant t . Selon le principe d'Huygens, ces points peuvent alors être considérés comme des sources d'ondelettes sphériques de même fréquence que l'onde primaire. On retrouve alors le processus classique d'interférence de deux sources ponctuelles. De plus, puisque F_1 et F_2 sont éléments du même front d'onde primaire, les ondes sphériques émises sont en phase. En M distant de $D \gg a$ ces ondes sphériques sont assimilables à des ondes planes :

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \cos(kr_1 - \omega t) \\ E_2 = E_0 \cos(kr_2 - \omega t) \end{cases}$$

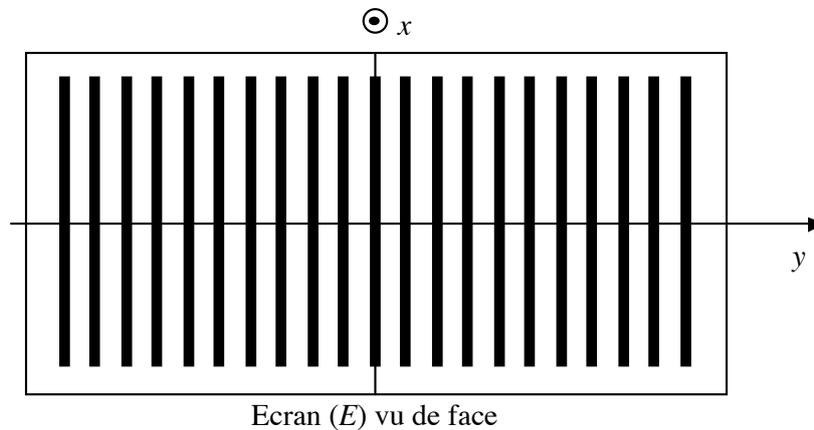
Les amplitudes des ondes E_1 et E_2 sont les mêmes si les fentes F_1 et F_2 ont même largeur. Si la fente F_2 est élargie d'un facteur x , l'intensité I de l'onde primaire passant par F_2 est x fois plus grande, l'amplitude E est \sqrt{x} fois plus grande puisque $I \propto E^2$; dans ce cas-là, on aurait $E_2 = \sqrt{x}E_0 \cos(kr_2 - \omega t)$.

On obtient l'intensité résultante du phénomène d'interférence en M en suivant le cheminement du paragraphe (3.1). On notera que sur l'écran (E) se forment alors des franges d'interférences, alternance de franges sombres et brillantes parallèles aux fentes. On trouve la position des franges sombres et brillantes comme au paragraphe (3.1) où l'on ne s'intéressait en fait qu'à la distribution d'intensité sur l'axe y :

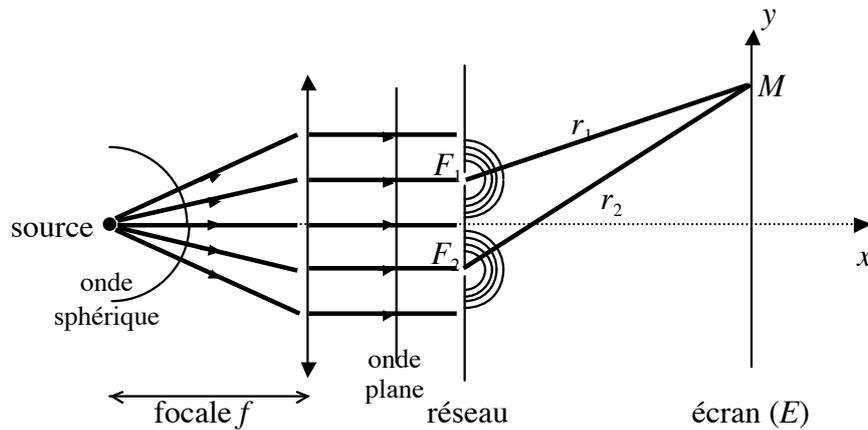
$$I(y) = 2I_0(1 + \cos k\delta)$$

avec :

$$\delta = a \sin \theta = \frac{ay}{D}$$

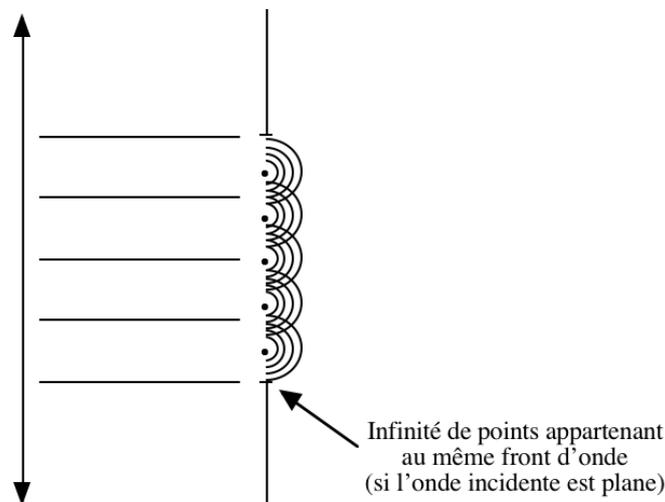


 Note : Dans le montage des fentes de Young, on peut aussi placer la source au foyer objet d'une lentille convergente (figure en-dessous). Cette dernière a pour effet de transformer l'onde sphérique incidente en onde plane. La plaque contenant les fentes F_1 et F_2 est alors un front d'onde de l'onde plane ; on applique le principe de Huygens pour établir la forme des ondelettes sortantes de F_1 et F_2 (on suit ensuite le cheminement du paragraphe 3.1).



3.4. Diffraction de la lumière

Lors du montage des fentes de Young, nous n'avons rien précisé au sujet de la largeur des fentes. Or une fente peut être considérée selon le principe de Huygens comme une somme infinie de points éléments du même front d'onde et donc émettant des ondelettes sphériques.



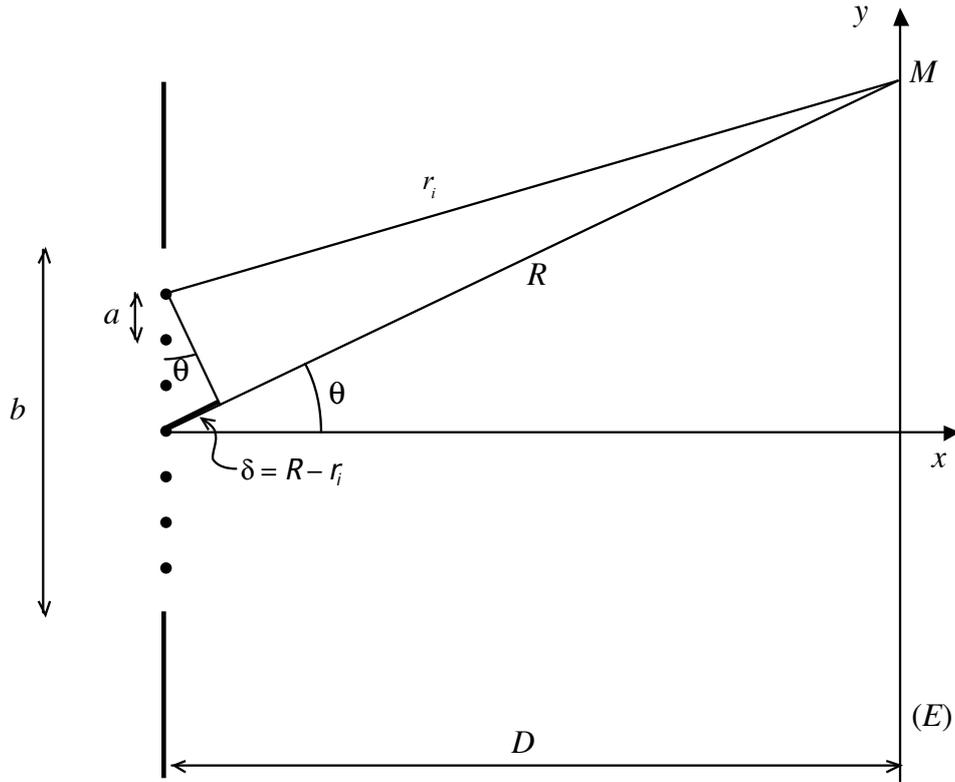
Cela signifierait qu'en un point M très éloigné de la fente, on devrait observer une figure d'interférence résultante de la superposition d'une infinité d'ondes. Cette figure d'interférence serait comme auparavant constituée d'une alternance de franges sombres et brillantes. On peut facilement voir que tel est le cas en observant une lumière à travers une fente : en tenant une fourchette près de l'œil et en faisant varier la largeur de la fente (l'espace entre deux doigts), si on fait tourner la fourchette on observe de fines raies blanches et noires entre les dents lorsque la fente est fine.

Le phénomène peut être donc compris en invoquant le phénomène d'interférence et le principe de Huygens : il porte néanmoins le nom de diffraction.

Considérons la fente de largeur b comme une somme infinie de sources secondaires émettant des ondelettes sphériques (selon Huygens). En un point M distant de $D \gg a$ (a étant la distance entre points émetteurs) ces ondelettes sont assimilées à des ondes planes et on peut écrire le champ dû à la $i^{\text{ème}}$ source en M :

$$E_i(M) = E_0 \cos(kr - \omega t) da$$

où E_0 est l'amplitude du champ passant par la fente, par unité de largeur : $E_0 = E_0^{\text{total}}/b$.



En projetant le rayon r_i sur le rayon R , on a : $r_i = R - a \sin \theta$. Soit :

$$E_i(M) = E_0 \cos [k(R - a \sin \theta) - \omega t] da$$

Le champ total en M s'obtient en sommant toutes les contributions E_i . Comme cette somme est infinie, on obtient une intégrale (a varie de $-b/2$ à $+b/2$) :

$$\begin{aligned} E(M) &= E_0 \int_{-b/2}^{+b/2} \cos [k(R - a \sin \theta) - \omega t] da \\ &= E_0 \left[\frac{\sin [k(R - a \sin \theta) - \omega t]}{-k \sin \theta} \right]_{-b/2}^{+b/2} \\ &= \frac{E_0}{k \sin \theta} \left[\sin \left(k \left(R + \frac{b}{2} \sin \theta \right) - \omega t \right) - \sin \left(k \left(R - \frac{b}{2} \sin \theta \right) - \omega t \right) \right] \\ &= \frac{E_0}{k \sin \theta} \left[\cos \left(\frac{2kR - 2\omega t}{2} \right) \sin \left(\frac{kb \sin \theta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

car $\sin a - \sin b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$.

L'intensité résultante est alors :

$$I(M) = \frac{1}{\mu v} \langle E^2(M) \rangle = \frac{1}{\mu v} \frac{4E_0^2}{k^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \left(\frac{kb \sin \theta}{2} \right) \left\langle \cos^2 \left(\frac{2kR - 2\omega t}{2} \right) \right\rangle$$

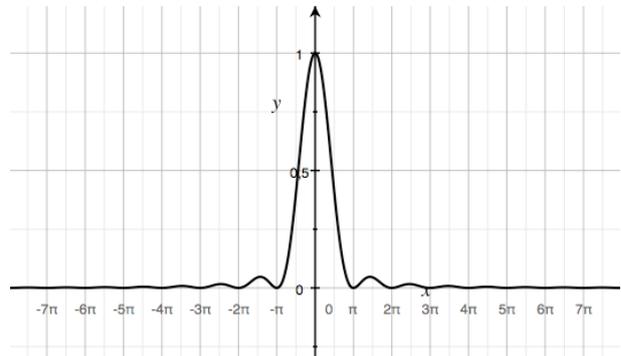
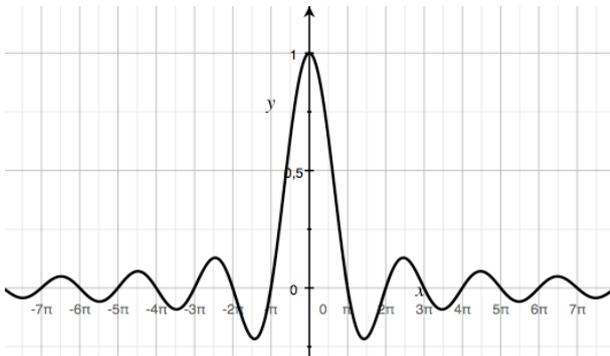
et comme $\left\langle \cos^2 \left(\frac{2kR - 2\omega t}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{2}$, on a :

$$I(M) = \frac{1}{\mu v} \langle E^2(M) \rangle = \frac{1}{\mu v} \frac{2E_0^2}{k^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \left(\frac{k b \sin \theta}{2} \right)$$

Comme $E_0 = E_0^{\text{total}}/b$:

$$I(M) = \frac{1}{\mu v} \frac{2(E_0^{\text{total}})^2}{k^2 b^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \left(\frac{k b \sin \theta}{2} \right) = \frac{1}{\mu v} \frac{(E_0^{\text{total}})^2}{2} \frac{\sin^2(k b \sin \theta / 2)}{(k b \sin \theta / 2)^2}$$

On appelle **sinus cardinal** la fonction $\text{sin}_c x = (\sin x)/x$; elle se comporte comme la courbe de la figure à gauche. La fonction sinus cardinal “au carré” $\text{sin}_c^2 x = (\sin^2 x)/x^2$ se comporte comme la courbe de la figure de droite :



L'équation de l'intensité devient :

$$I(M) = \frac{1}{\mu v} \frac{(E_0^{\text{total}})^2}{2} \left\{ \text{sin}_c \left(\frac{k b \sin \theta}{2} \right) \right\}^2$$

Et comme $I_0^{\text{total}} = \frac{(E_0^{\text{total}})^2}{2\mu v}$, on obtient finalement :

$$I(M) = I_0^{\text{total}} \left\{ \text{sin}_c \left(\frac{k b \sin \theta}{2} \right) \right\}^2$$

Regardons la distribution d'intensité en fonction de la largeur b de la fente. Le premier angle minimum θ_{min} est obtenu pour $I = 0$, soit pour :

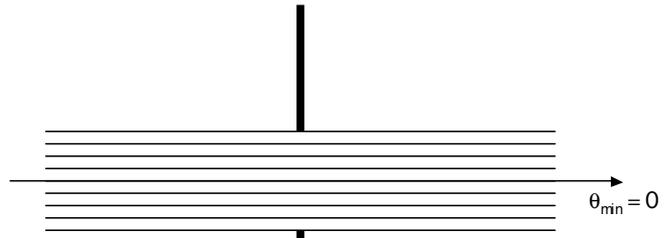
$$\sin \left(\frac{k b \sin \theta_{\text{min}}}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k b \sin \theta_{\text{min}}}{2} = \pi$$

$$\sin \theta_{\text{min}} = \frac{2\pi}{k b} = \frac{\lambda}{b}$$

On a alors 3 cas à étudier :

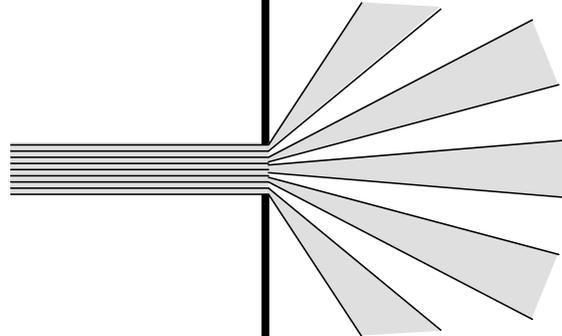
- $b \gg \lambda$

Dans ce cas $\sin\theta_{\min} \rightarrow 0$ et $\theta_{\min} \approx 0$. La fente n'est plus source d'ondelettes sphériques. Donc pour observer le phénomène d'interférence, il ne faut pas que $b \gg \lambda$.



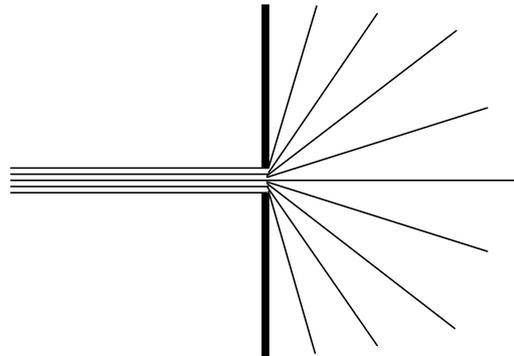
- $b \geq \lambda$

Dans ce cas $\sin\theta_{\min} \leq 1$, mais $\sin\theta_{\min} \neq 0$. Il y a alors recouvrement, et il peut y avoir interférences.



- $b \ll \lambda$

On est dans le cas de la fente infiniment fine, et $\sin\theta_{\min} \rightarrow 1$ et $\theta_{\min} = 90^\circ$. Dans ce cas, la fente est vraiment source d'ondelettes sphériques.



3.5. Interférences et diffraction

Pour que les fentes se comportent comme des sources d'ondelettes sphériques, il faut que leur largeur b soit très inférieure à la longueur d'onde λ . Lorsque la largeur b est comparable à λ ($b \geq \lambda$), au phénomène d'interférence vient s'ajouter le phénomène de diffraction. Le phénomène d'interférence nous donnait une distribution d'intensité :

$$I = 2I_0(1 + \cos k\delta) = 2I_0 \left[1 + \cos(ka \sin\theta) \right]$$

Mais dans le cas de la diffraction, on obtient une intensité :

$$I = I_0 \sin_c^2 \left(\frac{kbs \sin\theta}{2} \right)$$

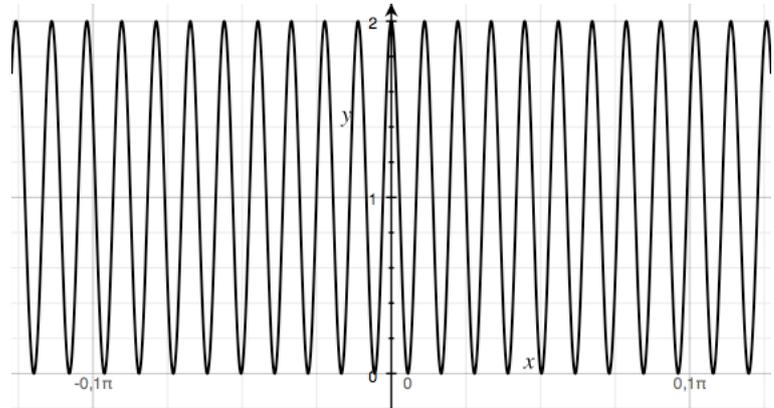
La superposition des phénomènes d'interférence et de diffraction va nous donner une distribution d'intensité de la forme :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos(ka \sin\theta) \right] \sin_c^2 \left(\frac{kbs \sin\theta}{2} \right)$$

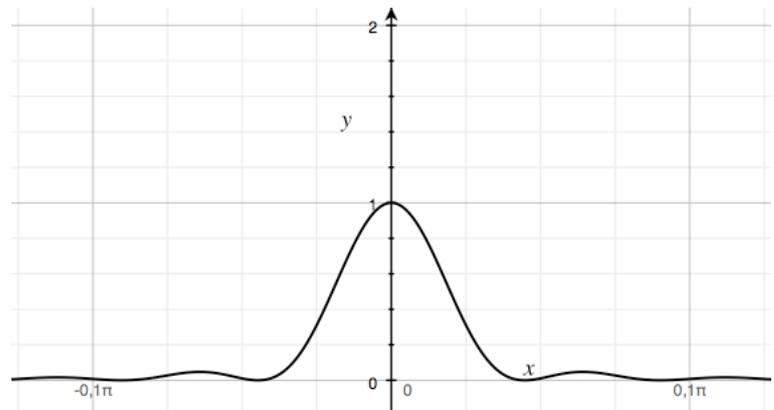
Comme la distance a entre deux fentes de largeur b est $a > b$, le terme $\cos(ka \sin \theta)$ oscille plus vite que le sinus cardinal $\text{sinc}^2\left(\frac{kbs \sin \theta}{2}\right)$, et le terme $\cos(ka \sin \theta)$ servira d'enveloppe à la distribution d'intensité sur l'écran. La figure de distribution d'intensité totale, qui correspond à l'interférence de deux ondes qui sont diffractées par les fentes, est obtenue en faisant le produit de la distribution d'intensité du terme de diffraction $1 + \cos(ka \sin \theta)$ par la distribution d'intensité du terme d'interférence $\text{sinc}^2\left(\frac{kbs \sin \theta}{2}\right)$ (en négligeant le terme multiplicatif $2I_0$).

Exemple pour $2I_0 = 1$, $\lambda = 700 \text{ nm}$, $a = 0,02 \text{ mm}$ et $b = 5 \mu\text{m}$:

distribution d'intensité du terme
d'interférence $(1 + \cos(ka \sin \theta))$

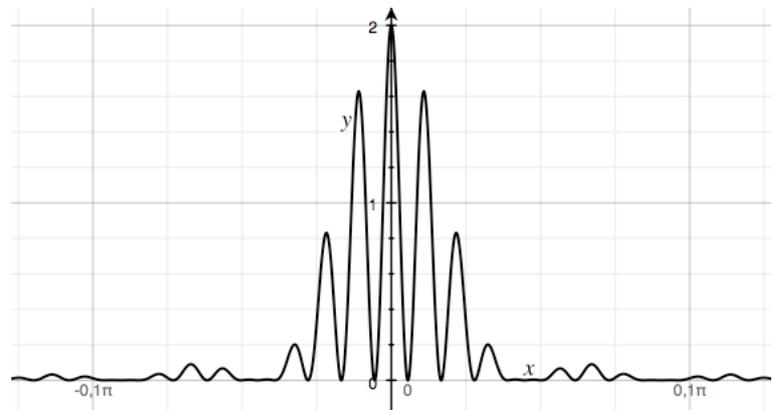


distribution d'intensité du terme de
diffraction $\text{sinc}^2\left(\frac{kbs \sin \theta}{2}\right)$



distribution d'intensité qui correspond
à l'interférence de deux ondes qui
sont diffractées par les fentes

$$\left[1 + \cos(ka \sin \theta)\right] \text{sinc}^2\left(\frac{kbs \sin \theta}{2}\right)$$



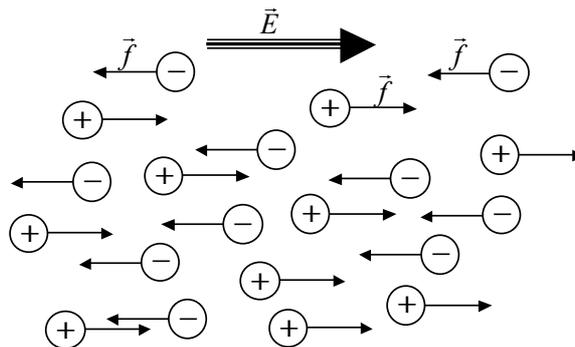
Partie II

OPTIQUE CRISTALLINE

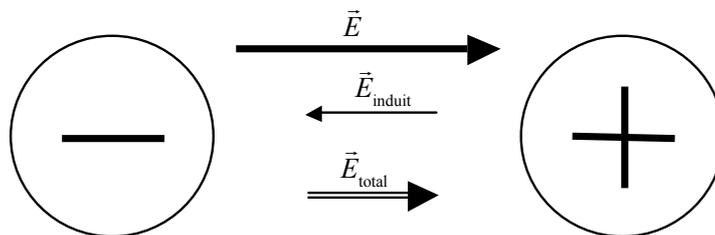
Polarisation et propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux anisotropes – biréfringence

Nous n'avons jusqu'ici considéré que la propagation d'ondes électromagnétiques dans des milieux isotropes dont les propriétés optiques ne dépendent pas de la direction de propagation. Nous avons introduit l'indice de réfraction n du milieu et noté que ce dernier est d'autant plus grand que le milieu est dense.

Lorsqu'une onde électromagnétique pénètre dans un milieu, elle induit une polarisation de ce dernier ; en effet, les charges électriques se déplacent sous l'effet de la force de Coulomb $\vec{F} = q\vec{E}$ et les charges ne sont alors plus réparties uniformément dans le milieu :



La séparation spatiale des charges positives et négatives induit alors à son tour un champ électrique \vec{E}_{induit} (du + vers le -) qui s'oppose au champ inducteur \vec{E} ; ce dernier est alors amoindri et sa propagation dans le milieu s'amenuise.



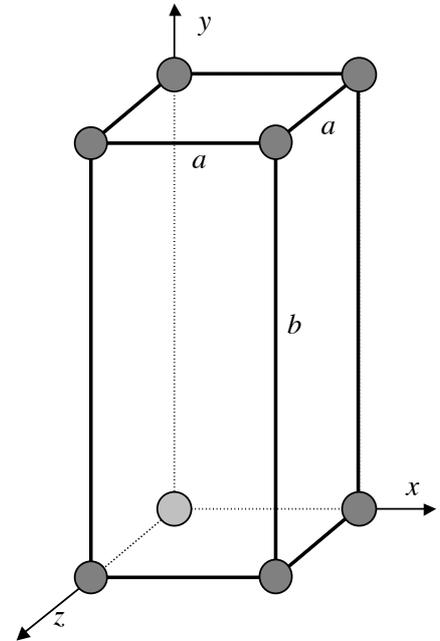
On comprend alors aisément la relation entre la vitesse de propagation, la densité du milieu et l'indice de réfraction : plus la densité du milieu est grande, plus la densité de charges est grande, plus la polarisation du milieu induite par le champ incident est grande, plus le champ inducteur est amoindri et plus la vitesse de propagation est réduite.

Sur la base de ces observations, nous allons maintenant étudier la propagation d'onde électromagnétique dans les milieux anisotropes — dont les propriétés optiques dépendent de la direction de propagation de l'onde — et plus particulièrement dans les milieux cristallins.

1. État cristallin et biréfringence

L'état cristallin se caractérise par un arrangement ordonné d'atomes qui se répète périodiquement dans l'espace. Cet arrangement est alors représenté par un motif élémentaire, appelé maille, aux sommets de laquelle se trouvent les atomes. Dans la plupart des cas, les paramètres de la maille — distances de séparation entre atomes voisins — ne sont pas les mêmes dans les 3 directions de l'espace.

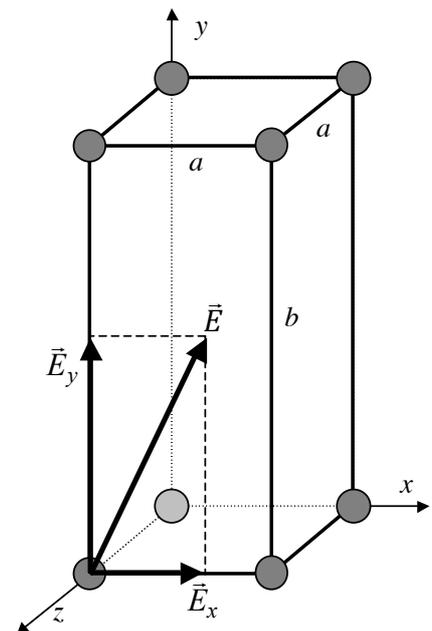
Prenons le cas du système quadratique dont la maille élémentaire est un parallélépipède à base carrée. Le système est caractérisé par les 2 paramètres de maille a et b . Dans le référentiel (x,y,z) , comme le montre le schéma, si on suppose $b > a$, la densité d'atomes, et donc la densité de charges, dans les plans parallèles à (x,z) est supérieure à celle dans les plans orthogonaux (les plans parallèles à (x,y) ou (y,z)). Dans un cristal, les charges mobiles sont généralement les électrons des atomes dont les noyaux sont fixes aux sommets des mailles. Si un champ extérieur \vec{E} dont la polarisation est dans le plan (x,z) pénètre dans le cristal, il induira une plus forte polarisation du milieu que si sa direction de polarisation est suivant l'axe y ; en effet, le nombre d'électrons dans les plans parallèles à (x,z) est plus grand que dans les plans parallèles à (x,y) ou (y,z) . Le champ polarisé selon y sera alors moins amoindri que le champ polarisé dans le plan (x,z) et la vitesse de propagation sera comparativement plus grande.



Il apparaît donc d'ores et déjà que la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le cristal n'est pas la même selon la direction de polarisation du champ électrique. Sachant que la vitesse de propagation est directement reliée à l'indice de réfraction par $v = c/n$, on en déduit que l'indice de réfraction n'est pas le même dans toutes les directions de l'espace. Le cristal est optiquement anisotrope.

Considérons maintenant le cas plus général où la direction de polarisation du champ incident ne coïncide pas avec un des axes de la maille cristalline. Soit par exemple un champ incident selon la direction y et dont la polarisation est dans le plan (x,y) .

Dans le cristal, le champ \vec{E} peut être décomposé selon ses deux composantes \vec{E}_x et \vec{E}_y (2 états P orthogonaux). Chacun de ces champs, induisant une polarisation du milieu différente selon les deux directions, se propagera avec une vitesse différente. L'onde incidente est alors décomposée en deux états P orthogonaux dont les vitesses de propagation — et donc les indices de réfraction associés — sont différentes : c'est le phénomène de **biréfringence**.



On notera que si le champ \vec{E} est incident selon la direction y , avec une direction de polarisation dans le plan (x,z) , il ne se décomposera pas en deux ondes distinctes : en effet, les composantes \vec{E}_x et \vec{E}_z engendreront une polarisation du milieu identique et les deux ondes se propageront avec la même vitesse. Elles seront indiscernables et recomposeront à tout moment l'onde incidente \vec{E} .

De la même façon, tout minéral cristallisant dans le système cubique n'est pas biréfringent : en effet, la maille est identique dans toutes les directions de l'espace (elle n'est d'ailleurs caractérisée que par un seul paramètre) et la polarisation induite du milieu par un champ incident \vec{E} est la même quelque soit sa direction de polarisation.

Dans le cas où la maille cristalline est caractérisée par 3 paramètres différents, le même raisonnement que celui appliqué au système quadratique nous amènerait à définir trois indices de réfraction associés au cristal. Toutefois, l'onde incidente sur un tel cristal ne peut se scinder en 3 états P orthogonaux ; en effet, l'onde électromagnétique étant transverse par nature, il faut que les directions de polarisation soient perpendiculaires à la direction de propagation. L'onde ne peut alors se scinder qu'en 2 états P orthogonaux ; nous reviendrons sur cette décomposition à la partie 3 après avoir bien décrit la relation entre les divers types de cristaux existants et leurs propriétés optiques.

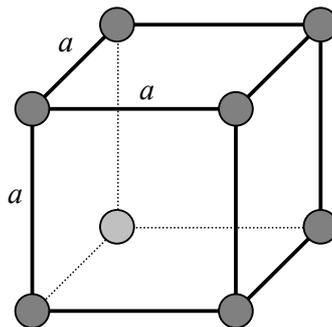
2. Classification des cristaux ; ellipsoïde des indices

Il existe 7 systèmes cristallins principaux. Il est très facile, comme on va le voir, de relier leurs propriétés géométriques (définition paramétrique des mailles) et leurs propriétés optiques.

2.1. Système isotrope

• Système cubique (isométrique)

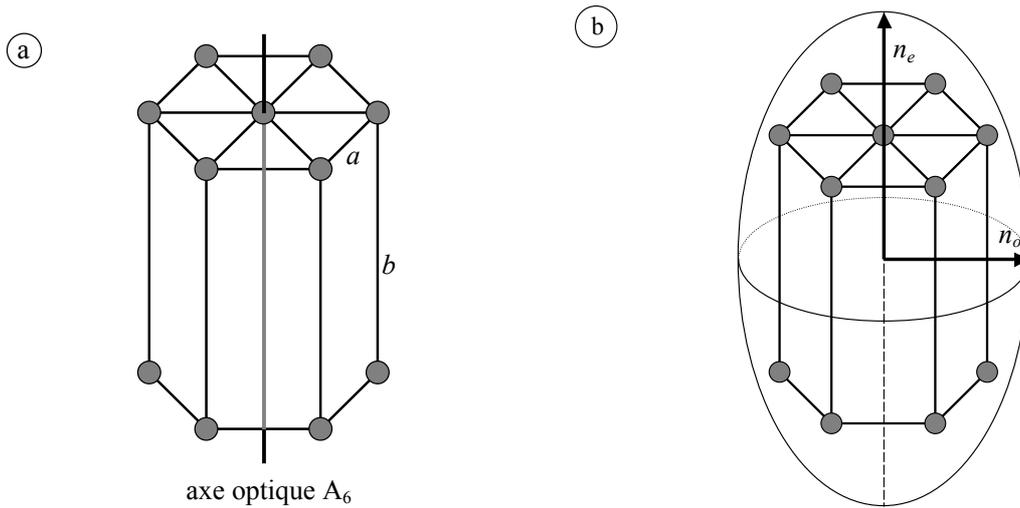
Comme déjà mentionné, la maille cubique est identique dans toutes les directions de l'espace. Cette symétrie particulière fait que ce système est optiquement isotrope, non biréfringent. Ce système est caractérisé par un seul indice de réfraction n .



2.2. Systèmes contenant un axe de symétrie d'ordre supérieur à 2 : uniaxes

• Système hexagonal

Il existe un axe de symétrie d'ordre 6 : A_6 . Autour de cet axe, les atomes sont répartis uniformément aux sommets de l'hexagone (fig. cas a). Cette répartition uniforme engendre une condition d'isotropie autour de l'axe A_6 . L'axe est alors dit **axe optique du système**. On ne peut pas trouver un autre axe tel qu'autour de lui on obtienne une condition d'isotropie. On dit alors que le milieu est **uniaxe**.



Aux plans des hexagones, on associe un indice de réfraction, constant autour de l'axe optique, appelé **indice ordinaire** n_o . Dans la direction perpendiculaire, on associe un indice différent (car le paramètre de maille est différent) appelé indice **extraordinaire** n_e . On peut alors schématiser la variation spatiale de l'indice de réfraction (fig. cas b). On obtient un ellipsoïde à section circulaire, de révolution autour de l'axe optique, appelé **ellipsoïde des indices**.

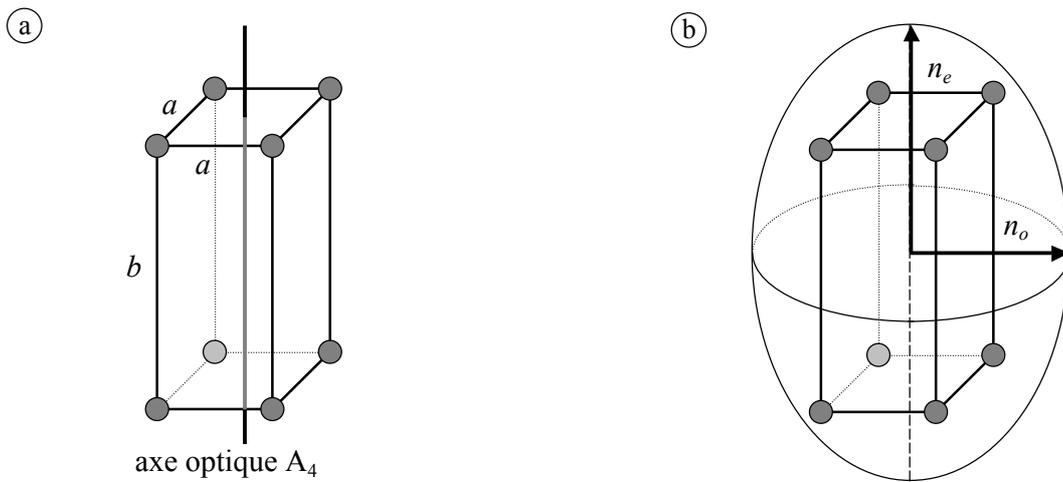
Si $b > a$ alors un champ \vec{E} selon b se propagera plus vite qu'un champ dans le plan des hexagones (il est moins freiné par les atomes) : $v_e = c/n_e > v_o = c/n_o$.

Donc si $b > a$, $v_e > v_o$ et $n_e < n_o$ et on dit que le milieu est **uniaxe négatif** car $n_e - n_o < 0$.

Contrairement, si $b < a$, alors $v_e < v_o$ et $n_e > n_o$: le cristal est **uniaxe positif**.

• **Système quadratique (tétragonal)**

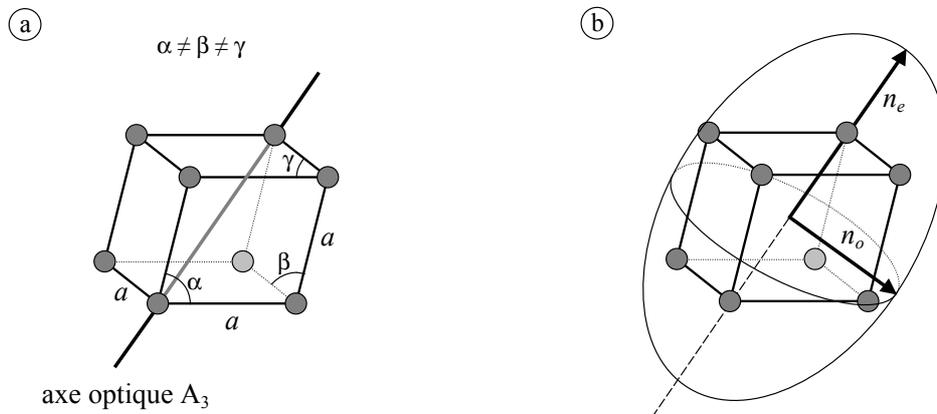
L'axe A_4 est le seul axe optique ; autour de lui, les atomes sont uniformément répartis (fig. cas a). Le système quadratique est uniaxe.



On définit encore les indices ordinaire n_o (perpendiculairement à l'axe optique dans le plan des bases carrées) et extraordinaire n_e (parallèlement à l'axe optique). On obtient un ellipsoïde des indices comparable à celui du système hexagonal.

• Système rhomboédrique

L'axe A_3 est le seul axe optique du système. Le système rhomboédrique est uniaxe (fig. cas a).

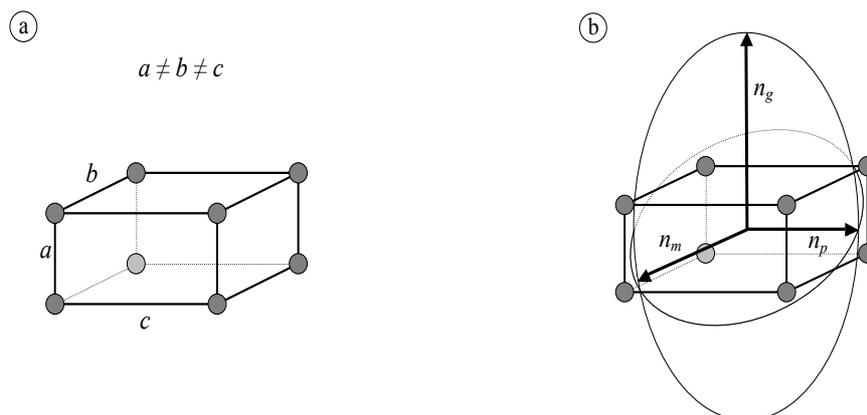


On définit encore les indices ordinaire n_o (perpendiculairement à l'axe optique) et extraordinaire n_e (parallèlement à l'axe optique). L'ellipsoïde des indices autour de l'axe optique s'inscrit sur n_o et n_e (fig. cas b).

2.3. Systèmes ne contenant pas d'axe de symétrie d'ordre supérieur à 2 : biaxes

• Système orthorhombique

Bien que ce système possède 3 axes A_2 , on ne peut pas trouver un axe tel qu'autour de lui on obtienne une condition d'isotropie (fig. cas a). Aux trois paramètres de maille a , b et c différents, on associe **3 indices de réfraction** : n_p , n_m et n_g (p , m et g pour petit, moyen et grand respectivement).



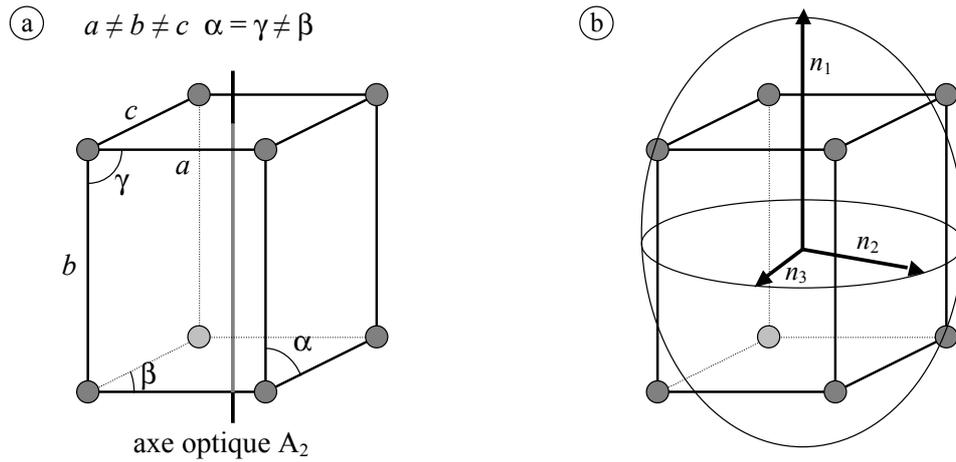
Si on a $a < b < c$, il est évident que la vitesse de propagation d'un champ \vec{E} polarisé selon a est inférieure à celle d'un champ polarisé selon b , qui elle-même est inférieure à la vitesse de propagation d'un champ polarisé selon c . Soit $v_a < v_b < v_c$ ou encore $n_a > n_b > n_c$. On a donc $n_p = n_c$, $n_m = n_b$ et $n_g = n_a$ (fig. cas b).

On peut, comme dans le cas des milieux uniaxes, représenter la variation spatiale de l'indice de réfraction : on obtient un ellipsoïde à section elliptique.

• **système monoclinique**

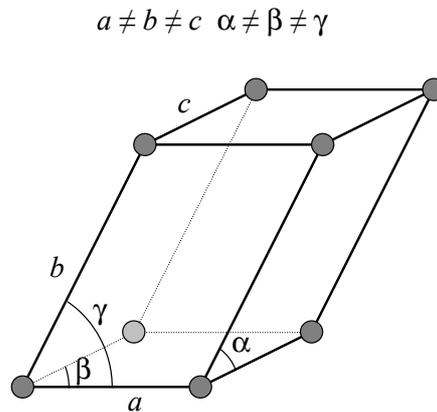
Le système monoclinique ne comporte qu'un seul axe A_2 (fig. cas a). Il est donc biaxe et caractérisé par 3 indices n_p , n_m et n_g . Un de ces indices est porté par l'axe A_2 et l'orientation spatiale des deux autres indices dépend des paramètres de maille (a , c et β) et donc du minéral considéré (fig. cas b).

L'ellipsoïde des indices est à section elliptique, mais on ne peut pas relier les paramètres de maille aux indices n_p , n_m et n_g de façon générale.



• **système triclinique (anortique)**

Il ne comporte aucun axe de symétrie. Ce système est donc biaxe et l'orientation spatiale des 3 indices principaux dépend du minéral considéré.



2.4. Exemples d'indices

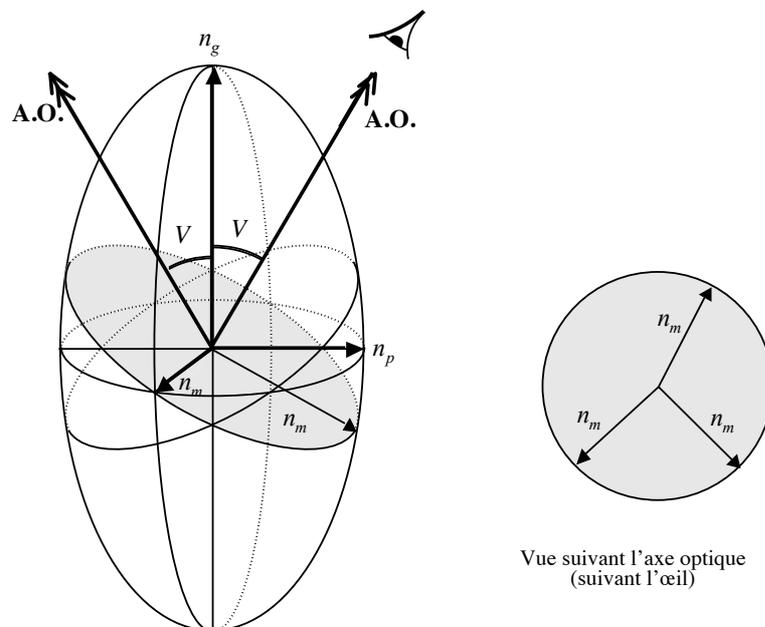
| Cristal isotrope | réseau | formule | indice de réfraction | |
|------------------|---------|--|----------------------|---------------|
| | | | | n |
| Diamant | cubique | C | | 2,407 - 2,451 |
| Fluorite | cubique | CaF_2 | | 1,387 |
| Grenat | cubique | $\text{X}_3\text{Y}_2(\text{SiO}_4)_3$ | | 1,72 - 1,94 |

| Cristal uniaxe | réseau | formule | indice de réfraction | |
|----------------|---------------|--|----------------------|-------|
| | | | n_e | n_o |
| Béryl | Hexagonal | $\text{Be}_3\text{Al}_2\text{Si}_6\text{O}_{18}$ | 1,557 | 1,602 |
| Calcite | rhomboédrique | CaCO_3 | 1,486 | 1,658 |
| Quartz | hexagonal | SiO_2 | 1,553 | 1,544 |
| Rubis | rhomboédrique | $\text{Al}_2\text{O}_3(\text{Cr})$ | 1,762 | 1,770 |
| Zircon | quadratique | ZrSiO_4 | 1,967 | 1,920 |

| Cristal biaxe | réseau | formule | indice de réfraction | | |
|---------------|----------------|--|----------------------|-------|-------|
| | | | n_g | n_m | n_p |
| Biotite | monoclinique | $\text{K}(\text{Mg},\text{Fe})_3(\text{Si}_3\text{Al})\text{O}_{10}(\text{OH},\text{F})_2$ | 1,640 | 1,640 | 1,595 |
| Muscovite | monoclinique | $\text{KAl}_2(\text{Si}_3\text{Al})\text{O}_{10}(\text{OH},\text{F})_2$ | 1,601 | 1,596 | 1,563 |
| Olivine | orthorhombique | $(\text{Mg},\text{Fe})_2\text{SiO}$ | 1,680 | 1,660 | 1,640 |
| Perovskite | orthorhombique | CaTiO_3 | 2,380 | 2,340 | 2,300 |
| Topaze | orthorhombique | $\text{Al}_2\text{SiO}_4(\text{F},\text{OH})_2$ | 1,627 | 1,620 | 1,618 |
| Turquoise | triclinique | $\text{CuAl}_6(\text{PO}_4)_4(\text{OH})_8 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ | 1,650 | 1,615 | 1,610 |

2.5. Définition des axes optiques

Si on définit un plan de section oblique de l'ellipsoïde des indices, on peut, pour une certaine inclinaison V du plan de section par rapport au plan (n_p, n_m) , obtenir une section circulaire de rayon n_m (disque grisé sur la figure) :



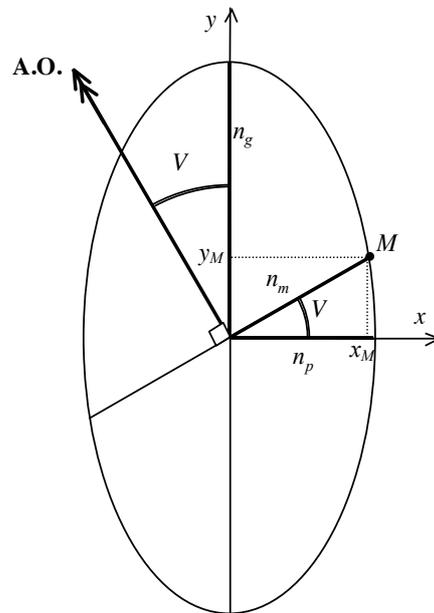
L'axe perpendiculaire à cette section circulaire est alors un axe optique (A.O.) ; en effet, autour de lui l'indice de réfraction est constant et vaut n_m . L'angle entre cet axe et l'axe n_g de l'ellipsoïde est V .

On peut définir une seconde section circulaire de l'ellipsoïde en considérant le symétrique de la première par rapport à l'axe n_g . Considérant la normale à cette seconde section circulaire, on obtient ainsi un second axe optique, incliné d'un angle V par rapport à l'axe n_g . L'angle entre les deux axes optiques vaut $2V$ (par symétrie).

Les systèmes cristallins ne contenant pas d'axe de symétrie supérieur à 2 sont caractérisés par trois indices de réfraction ; de plus ils sont appelés biaxes car ils présentent deux axes optiques inclinés par rapport à l'axe n_g d'un angle V .

2.6. Calcul de l'inclinaison V des axes optiques par rapport à l'axe n_g

Soit M le point d'intersection de la section circulaire de rayon n_m et de l'ellipse de demi grand-axes (n_p, n_g) (M est élément du plan de la feuille). Le point est repéré dans le plan de la feuille par ses coordonnées x_M et y_M (x suivant n_p et y suivant n_g).



Les coordonnées de M sont telles que :

$$x_M^2 + y_M^2 = n_m^2 \quad (2.1)$$

et M appartient à la section elliptique :

$$\frac{x_M^2}{n_p^2} + \frac{y_M^2}{n_g^2} = 1 \quad (2.2)$$

De plus, on note que :

$$\tan V = \frac{y_M}{x_M}$$

On va chercher à exprimer y_M/x_M en fonction de n_p , n_m et n_g à l'aide des équations (2.1) et (2.2) :

$$(2.1) \Rightarrow x_M^2 = n_m^2 - y_M^2 \quad (2.3)$$

$$(2.2) \Rightarrow \frac{n_m^2 - y_M^2}{n_p^2} + \frac{y_M^2}{n_g^2} = 1 \Rightarrow y_M^2 \left(\frac{1}{n_g^2} - \frac{1}{n_p^2} \right) = 1 - \frac{n_m^2}{n_p^2}$$

$$\Rightarrow y_M^2 \left(\frac{n_p^2 - n_g^2}{n_g^2} \right) = n_p^2 - n_m^2 \Rightarrow y_M^2 = \frac{n_g^2 (n_p^2 - n_m^2)}{n_p^2 - n_g^2}$$

$$(2.3) \Rightarrow x_M^2 = n_m^2 - y_M^2 = n_m^2 - \frac{n_g^2 (n_p^2 - n_m^2)}{n_p^2 - n_g^2}$$

$$x_M^2 = \frac{n_m^2 n_p^2 - n_g^2 n_p^2 + n_g^2 n_m^2}{n_p^2 - n_g^2} = \frac{n_p^2 (n_m^2 - n_g^2)}{n_p^2 - n_g^2}$$

$$(2.4) \Rightarrow \frac{y_M^2}{x_M^2} = \frac{n_g^2}{n_p^2} \frac{n_p^2 - n_m^2}{n_m^2 - n_g^2}$$

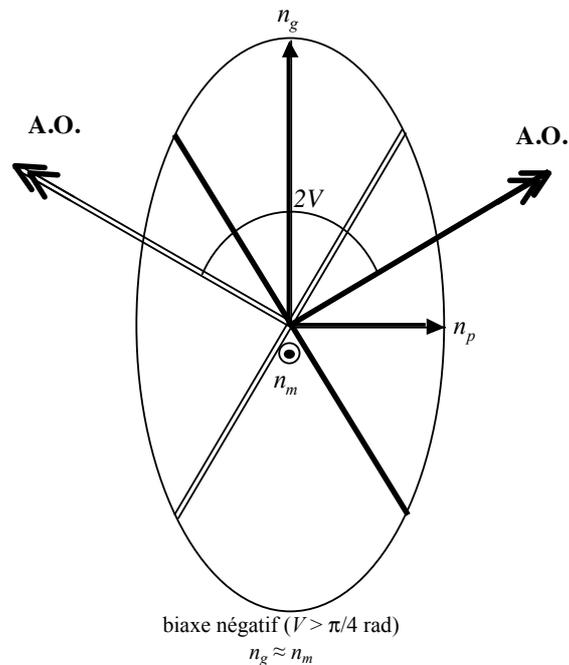
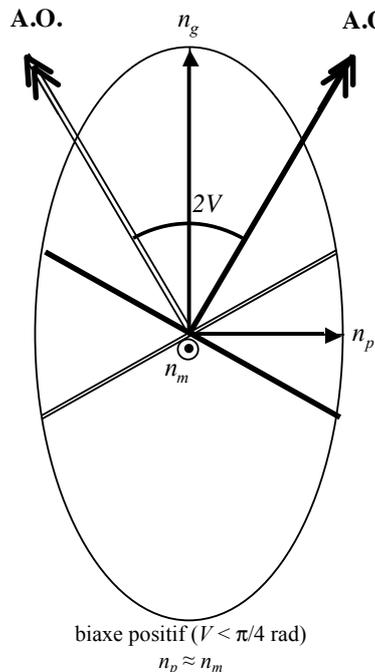
$$(2.5)$$

et comme $\tan V = y_M/x_M$, on a :

$$\tan V = \frac{n_g}{n_p} \sqrt{\frac{n_p^2 - n_m^2}{n_m^2 - n_g^2}}$$

Si la bissectrice de l'angle aigu des deux axes optiques est l'axe n_g , on dit que **le biaxe est positif** ; dans ce cas là $V < \pi/4$ rad . Pour cela, il faut $n_m \approx n_p$.

Si la bissectrice de l'angle aigu des deux axes optiques est l'axe n_p , on dit que **le biaxe est négatif** ; dans ce cas là $V > \pi/4$ rad . Pour cela, il faut $n_m \approx n_g$.



Maintenant que la structure cristalline et les propriétés optiques du cristal ont été clairement reliées, nous allons voir comment l'état cristallin décompose une vibration incidente en 2 états P orthogonaux. On s'intéressera ensuite à la marche des rayons lumineux associés à ces 2 états P.

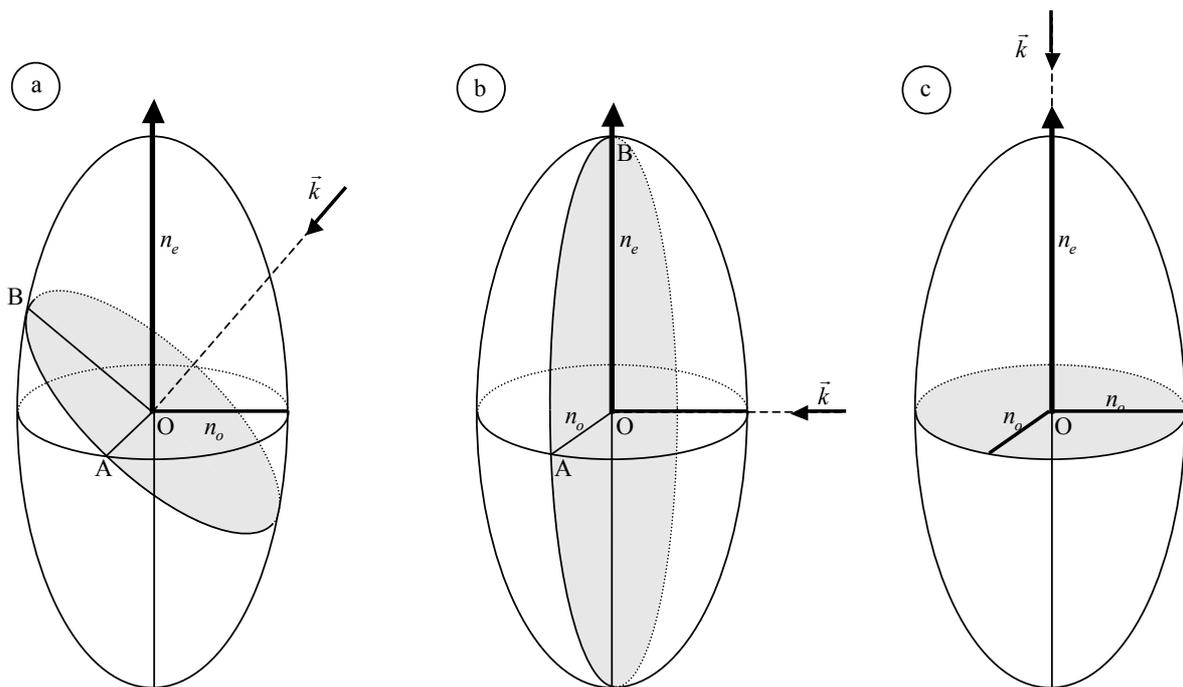
3. Décomposition de la polarisation dans un milieu cristallin

Nous allons dans un premier temps chercher les directions de polarisation des états P orthogonaux résultant de la décomposition d'une onde électromagnétique incidente dans un milieu cristallin. De ces directions de polarisation, nous déduirons les indices de réfraction associés à chacune de ces composantes.

2.3.1. Milieux uniaxe

Soit une onde incidente linéairement polarisée pénétrant sous une incidence quelconque dans un milieu uniaxe (voir figure cas a). L'onde va se décomposer en 2 états P orthogonaux qui doivent être perpendiculaires à la direction de propagation (représentée par le vecteur d'onde \vec{k}) de l'onde incidente (l'onde électromagnétique est transverse). Ils seront donc éléments d'un plan perpendiculaire à \vec{k} , élément du front d'onde. L'intersection du front d'onde initial et de l'ellipsoïde des indices est une ellipse (l'ellipse en grisé de la figure) qui coupe la section cyclique de l'ellipsoïde en A et la section elliptique (n_o, n_e) en B.

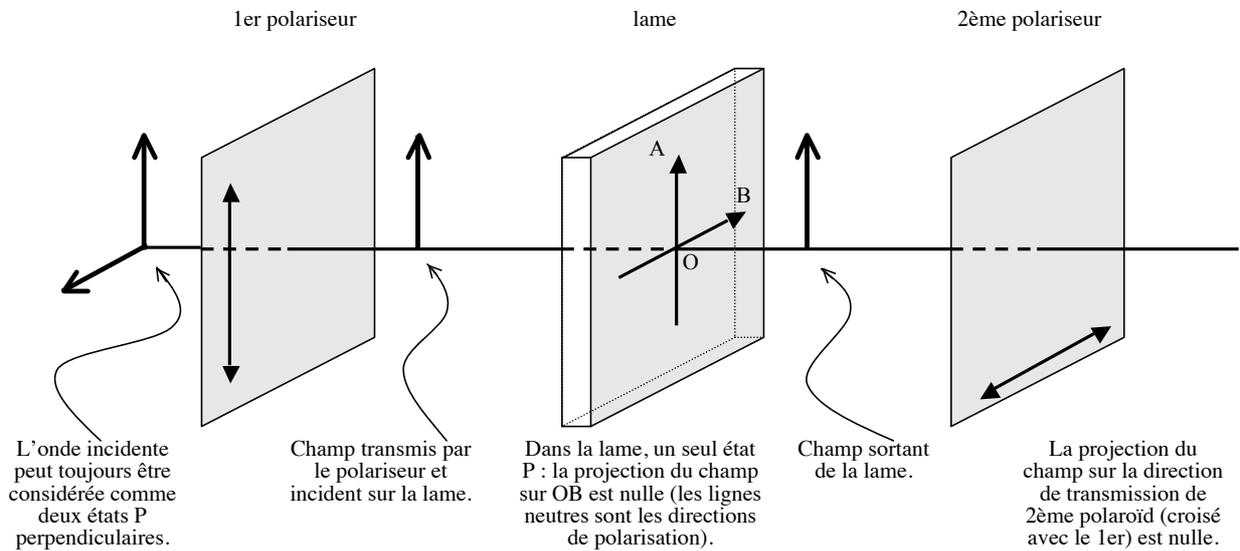
Les directions de polarisation des états P orthogonaux seront alors les droites OA et OB, O étant le centre de l'ellipsoïde. À la direction OA est associé l'indice ordinaire n_o tandis qu'à la direction OB est associé un indice n tel que $n_o \leq n \leq n_e$ si l'uniaxe est positif, ou $n_e \leq n \leq n_o$ s'il est négatif.



On remarque que si la direction de propagation de l'onde incidente est perpendiculaire à l'axe optique (voir figure cas b), l'intersection du front d'onde et de l'ellipsoïde coïncide avec l'ellipse (n_o, n_e). On obtient 2 états P orthogonaux auxquels on associe respectivement les indices ordinaire n_o et extraordinaire n_e .

Par contre, si la direction incidente est colinéaire à l'axe optique (voir figure cas c), l'intersection du front d'onde et de l'ellipsoïde est la section circulaire de rayon n_o . Le cristal uniaxe n'est pas dans ce cas-là biréfringent.

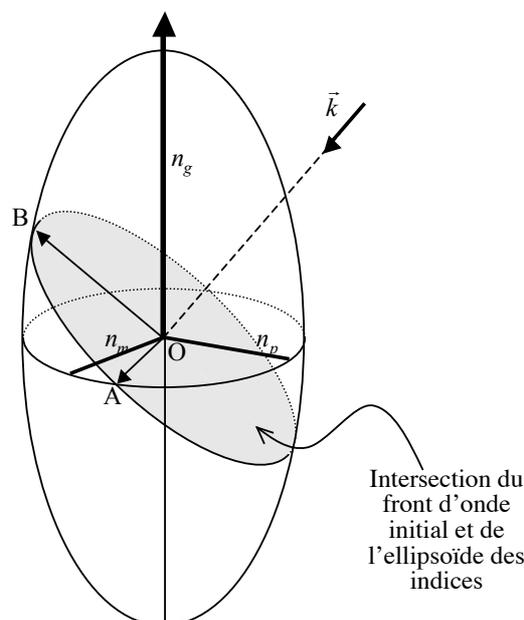
Si une lame à faces parallèles est taillée dans un cristal uniaxe, on désigne par les **lignes neutres** de la lame les directions de polarisation des 2 états P orthogonaux. Les directions sont appelées neutres car si le cristal est observé entre 2 polaroïds croisés et que les directions de transmission de ces polaroïds coïncident avec les directions de polarisation, alors le champ observé est noir, il y a extinction.



3.2. Milieux biaxe

De la même façon que tous les milieux uniaxes, les directions de polarisation des états P orthogonaux doivent par nature être éléments du front d'onde de l'onde initiale. Aussi, ces directions s'obtiennent de la même façon que pour les milieux uniaxes.

Les directions de polarisation recherchées sont les droites OA et OB. À la direction OA, on associe l'indice n_1 tel que : $n_p \leq n_1 \leq n_m$; et à la direction OB, l'indice n_2 tel que : $n_p, n_m \leq n_2 \leq n_g$ (n_p ou n_m suivant l'orientation de \vec{k} autour de l'axe n_g).



Plusieurs directions incidentes sont remarquables :

- si la direction incidente coïncide avec un axe optique, alors le cristal n'est plus biréfringent : autour de cette direction l'indice est constant et vaut n_m ;
- si la direction de propagation incidente coïncide avec un des axes principaux de l'ellipse, par ex. n_g , alors on obtient $n_1 = n_p$ et $n_2 = n_m$;
- si la direction incidente est dans un plan défini par 2 des axes principaux de l'ellipsoïde, par ex. (n_p, n_m) , alors on obtient $n_p \leq n_1 \leq n_m$ et $n_2 = n_g$.

Comme $n_2 > n_1$, on dit que la vibration selon OB est lente tandis que celle suivant OA est rapide. D'ailleurs, les axes principaux de l'ellipsoïde sont souvent libellés N_p , N_m et N_g , et on associe aux vibrations lente et rapide les indices $n_p = n_1$ et $n_g = n_2$.

Lorsque qu'une lame cristalline est éclairée sous incidence normale, les directions de polarisation des états P orthogonaux dans la lame sont appelées les lignes neutres de la lame.

4. Marche des rayons lumineux dans un milieu cristallin. Déphasage et différence de marche

Nous allons maintenant nous intéresser à la marche des rayons lumineux associés aux deux états P orthogonaux dans un milieu cristallin.

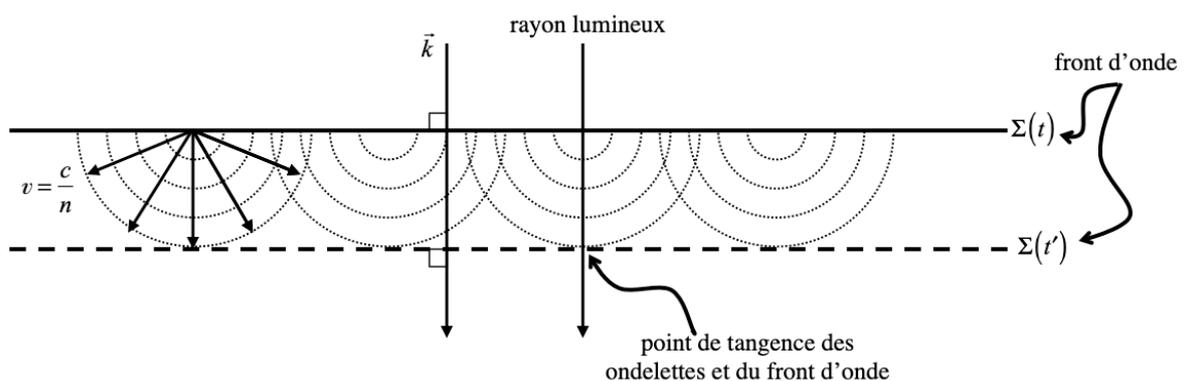
4.1. Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isotrope

On a vu que dans un milieu isotrope, la propagation d'une onde électromagnétique était décrite par le principe d'Huygens : à un instant t , chaque point du front d'onde $\Sigma(t)$ peut être considéré comme une source d'ondelettes sphériques. À un instant t' ultérieur, l'onde $\Sigma(t')$ est l'enveloppe des ondelettes sphériques.

La direction du vecteur d'onde \vec{k} donne par définition la direction de propagation des fronts d'onde. À tout instant, ces derniers sont perpendiculaires à \vec{k} .

La marche des rayons lumineux suit les points de tangence des ondelettes et du front d'onde total à tout instant t .

Il est alors évident sur la figure ci-après que marches des fronts d'onde et rayons sont confondus dans un milieu isotrope. Les 2 marches obéissent clairement à la loi de Descartes ($\sin i = n \sin r$).



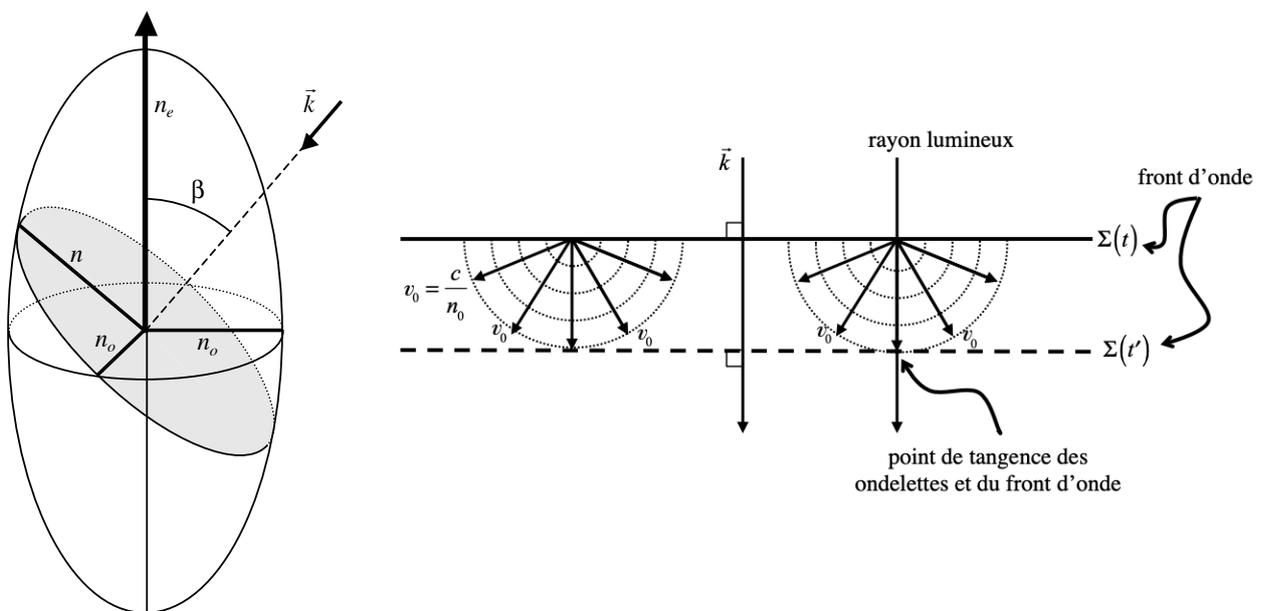
4.2. Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu biréfringent

Considérons maintenant la propagation dans un milieu biréfringent uniaxe. Dans un tel milieu, on sait que l'onde se scinde en 2 états P orthogonaux associés aux indices n_o et n_e tels que $n_o \leq n \leq n_e$ (si l'uniaxe est positif).

Considérons tout d'abord la propagation du rayon ordinaire.

Chaque point du front d'onde émet encore (comme dans le cas d'un milieu isotrope) des ondelettes sphériques ; en effet, la vitesse de propagation du rayon ordinaire est toujours égale à $v_o = c/n_o$ quelque soit l'angle β que fait la direction de propagation avec l'axe optique.

Il s'ensuit qu'au temps ultérieur t' , le front d'onde est toujours plan (l'onde plane reste plane) et que le rayon lumineux et la normale aux fronts d'onde sont encore confondus.



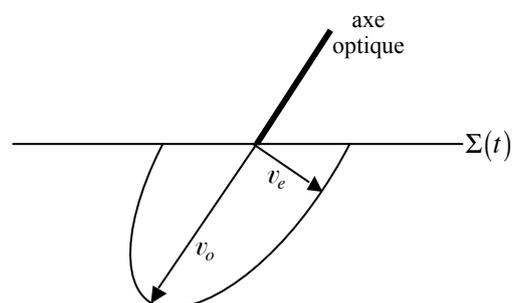
On se trouve alors dans un cas similaire au cas isotrope où marches des fronts d'onde et des rayons sont confondus et obéissent aux lois de Descartes. C'est pourquoi on parle de rayon ordinaire.

Considérons maintenant la propagation du rayon extraordinaire.

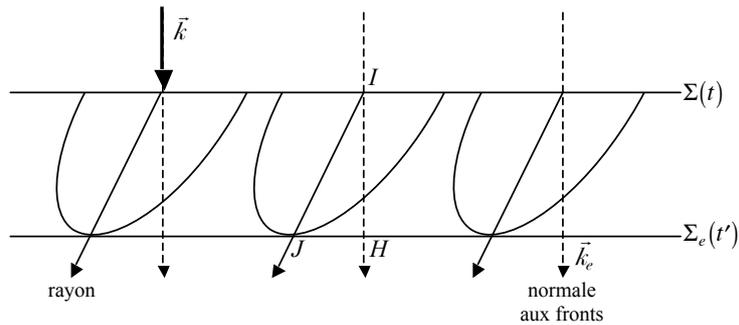
Les ondelettes émises par chaque point du front d'onde ne peuvent plus être sphériques : en effet, la vitesse de propagation dépend maintenant de l'angle β entre la direction de propagation et l'axe optique (puisque l'indice de réfraction dépend de cet angle β , $n_o \leq n \leq n_e$). Dans une direction donnée, les ondelettes se propageront avec une vitesse v tel que $v_e = c/n_e \leq v \leq v_o = c/n_o$ (si $\beta = 0$ alors $n = n_o$ et $v = v_o$; si $\beta = \pi/2$ alors $n = n_e$ et $v = v_e$).

Les ondelettes émises sont donc (à l'image de l'ellipsoïde des indices) ellipsoïdales ; dans le plan de la feuille, on obtient des ellipses. Le front d'onde à un instant ultérieur t' est tangent aux ellipsoïdes. On obtient encore un front d'onde plan : l'onde plane reste encore plane.

Le rayon lumineux passe par le centre de l'ellipsoïde et le point de tangence de l'ellipsoïde et du front d'onde : on constate que **rayon et normale aux fronts d'onde**



plans ne sont plus confondus (le vecteur d'onde \vec{k}_e associé au rayon extraordinaire définit la normale aux fronts d'onde, par définition de l'onde plane).



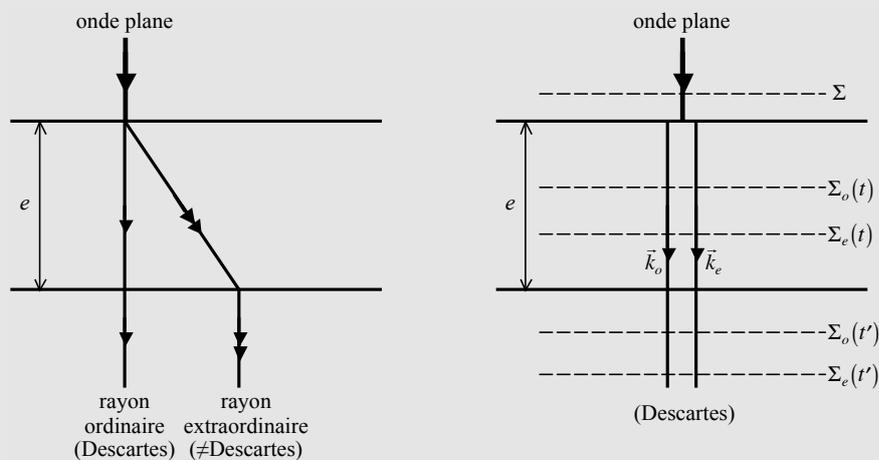
Il est alors clair sur la figure que bien que la marche des fronts d'onde obéisse aux lois de Descartes, ce n'est pas le cas de la marche des rayons. C'est pourquoi on parle alors de rayon extraordinaire.

Dans un milieu biréfringent biaxe, les 2 rayons issus de la décomposition de l'onde incidente n'obéissent pas aux lois de Descartes. Ils pourraient être tous deux dénommés extraordinaires. En effet, les vitesses de propagation des 2 rayons dépendent de la direction de propagation puisqu'aux deux rayons sont respectivement associés des indices $N_p \leq n_1 \leq N_m$ et $N_p, N_m \leq n_2 \leq N_g$. Les ondelettes émises par tout point du front d'onde initial sont donc dans les deux cas ellipsoïdales et rayon et normale aux fronts d'onde (soit \vec{k}) ne sont pas confondus.

Si un rayon lumineux n'obéit pas à la loi de la réfraction, il est très difficile d'étudier sa propagation. Heureusement, nous nous intéressons en optique cristalline à la marche des fronts d'onde (vérifiant la loi de Descartes)

Exemples :

- Soit une lame cristalline uniaxe éclairée sous incidence normale ; on a pour la propagation des rayons lumineux et des fronts d'ondes :



Or en optique cristalline, on s'intéresse principalement au déphasage entre l'onde ordinaire et l'onde extraordinaire introduit par la traversée d'une lame cristalline d'épaisseur e . Ce déphasage est donné par $\Delta\phi = \phi_e(e) - \phi_o(e)$ où ϕ_e et ϕ_o sont les phases associées aux fronts d'onde Σ_e et Σ_o à la sortie de la lame. Aussi, on considère seulement la propagation des fronts d'onde obéissant aux lois de Descartes. À ce déphasage $\Delta\phi$, on peut associer une

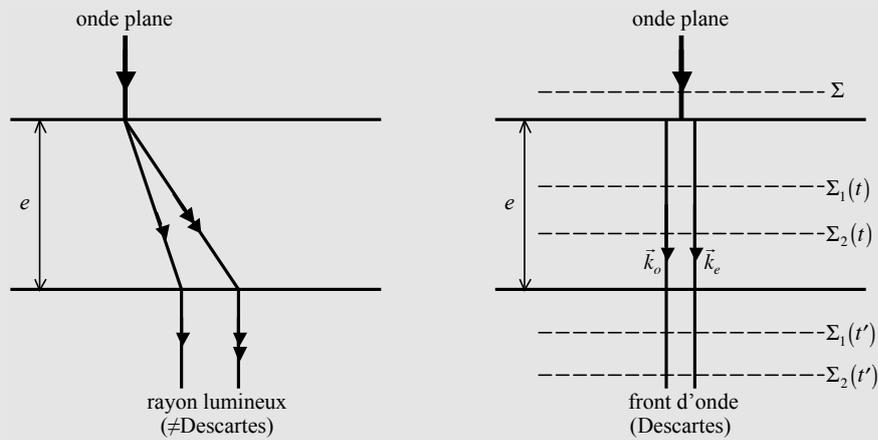
différence de marche δ telle que :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

La différence de marche est la différence des LCO parcourues par les fronts d'onde Σ_o et Σ_e lors de la traversée de la lame. On a très simplement $LCO_e = ne$ avec $n_o \leq n \leq n_e$ (suivant l'orientation de l'axe optique) et $LCO_o = n_o e$. On obtient alors :

$$\boxed{\delta = LCO_e - LCO_o = (n - n_o)e} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (n - n_o)e}$$

- Dans le cas d'une lame biaxe éclairée sous incidence normale, on a :



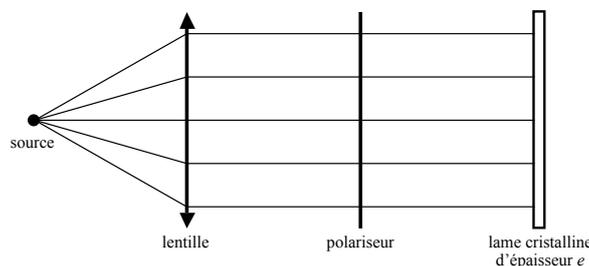
Si à l'onde 1 on associe l'indice n_1 tel que $n_p \leq n_1 \leq n_m$ et à l'onde 2 l'indice n_2 tel que $n_p, n_m \leq n_2 \leq n_g$:

$$\boxed{\delta = (n_2 - n_1)e} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 - n_1)e}$$

À la sortie d'une lame cristalline, on a donc deux états P orthogonaux qui sont déphasés d'une constante dans le temps. On a déjà vu que la superposition de 2 tels états P donne un état de polarisation généralement elliptique. Néanmoins, pour des valeurs bien précises du déphasage et des amplitudes associées aux 2 états P, cette polarisation elliptique peut devenir circulaire ou linéaire, on obtient alors des lames bien spécifiques appelées onde, 1/2 onde et 1/4 onde.

5. lame onde, 1/2 onde et 1/4 onde – Spectre cannelé

Soit un faisceau de lumière blanche ou spectre continu (issu d'une source placée au foyer objet d'une lentille) incident sur un polariseur parfait. À la sortie du polariseur, l'onde est polarisée linéairement. Cette onde traverse alors une lame cristalline sous incidence normale :



Supposons que les lignes neutres de la lame fassent un angle α avec la direction du polariseur. La décomposition du champ \vec{E} incident dans le milieu biréfringent s'écrit alors à la sortie de la lame :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_0 \cos \alpha \cos(kn_1 e - \omega t) \hat{e}_x = E_x \hat{e}_x \\ \vec{E}_2 = E_0 \sin \alpha \cos(kn_2 e - \omega t) \hat{e}_y = E_y \hat{e}_y \end{cases}$$

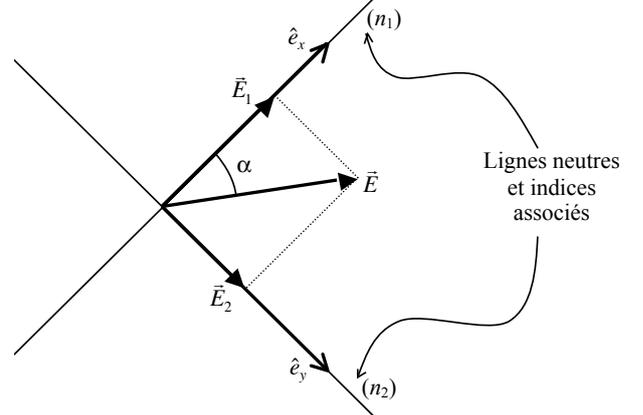
Posons :

$$E_x^0 = E_0 \cos \alpha$$

$$E_y^0 = E_0 \sin \alpha$$

On peut écrire :

$$kn_2 e = kn_1 e + k(n_2 - n_1)e = kn_1 e + k\delta$$



En appelant $\phi = k\delta$ le déphasage, on a :

$$E_x = E_x^0 \cos(kn_1 e - \omega t) \quad (5a)$$

$$E_y = E_y^0 \cos(kn_1 e - \omega t + k\delta) = E_y^0 \cos(kn_1 e - \omega t + \phi) \quad (5b)$$

$$(5a) \quad \Rightarrow \quad \cos(kn_1 e - \omega t) = \frac{E_x}{E_x^0}$$

$$\begin{aligned} (5b) \quad &\Rightarrow E_y = E_y^0 \left[\cos(kn_1 e - \omega t) \cos \phi - \sin(kn_1 e - \omega t) \sin \phi \right] \\ &\Rightarrow E_y = E_y^0 \left[\cos(kn_1 e - \omega t) \cos \phi - \sqrt{1 - \cos^2(kn_1 e - \omega t)} \sin \phi \right] \\ &\Rightarrow E_y = E_y^0 \left[\frac{E_x}{E_x^0} \cos \phi - \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_x^0} \right)^2} \sin \phi \right] \\ &\Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_y^0} - \frac{E_x}{E_x^0} \cos \phi \right)^2 = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_x^0} \right)^2} \sin \phi \right)^2 \\ &\Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_y^0} \right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_x^0} \right)^2 \cos^2 \phi - 2 \frac{E_x}{E_x^0} \frac{E_y}{E_y^0} \cos \phi = \sin^2 \phi - \left(\frac{E_x}{E_x^0} \right)^2 \sin^2 \phi \\ &\Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_y^0} \right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_x^0} \right)^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - 2 \frac{E_x}{E_x^0} \frac{E_y}{E_y^0} \cos \phi = \sin^2 \phi \\ &\Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_y^0 \sin \phi} \right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_x^0 \sin \phi} \right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_x^0 \sin \phi} \frac{E_y}{E_y^0 \sin \phi} \cos \phi = 1 \end{aligned}$$

L'état de polarisation obtenue est elliptique. En effet, la dernière équation est l'équation caractéristique d'une ellipse (cf. annexe C) inclinée par rapport à l'axe des x d'un angle β :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + xy \tan 2\beta \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1$$

Avec $x = E_x$, $y = E_y$, $a = E_x^0 \sin \phi$ et $b = E_y^0 \sin \phi$, par comparaison, on obtient :

$$-2 \frac{E_x}{E_x^0 \sin \phi} \frac{E_y}{E_y^0 \sin \phi} \cos \phi = E_x E_y \tan 2\beta \left(\frac{1}{(E_x^0 \sin \phi)^2} - \frac{1}{(E_y^0 \sin \phi)^2} \right)$$

soit :

$$-2 \frac{1}{E_x^0 E_y^0} \cos \phi = \tan 2\beta \left(\frac{1}{(E_x^0)^2} - \frac{1}{(E_y^0)^2} \right)$$

$$-2 \frac{1}{E_x^0 E_y^0} \cos \phi = \tan 2\beta \frac{(E_y^0)^2 - (E_x^0)^2}{(E_x^0)^2 (E_y^0)^2}$$

$$\tan 2\beta = -2 \frac{E_x^0 E_y^0}{(E_y^0)^2 - (E_x^0)^2} \cos \phi$$

Comme $E_x^0 = E_0 \cos \alpha$ et $E_y^0 = E_0 \sin \alpha$, on a :

$$\tan 2\beta = -2 \frac{E_0 \cos \alpha E_0 \sin \alpha}{(E_0 \sin \alpha)^2 - (E_0 \cos \alpha)^2} \cos \phi$$

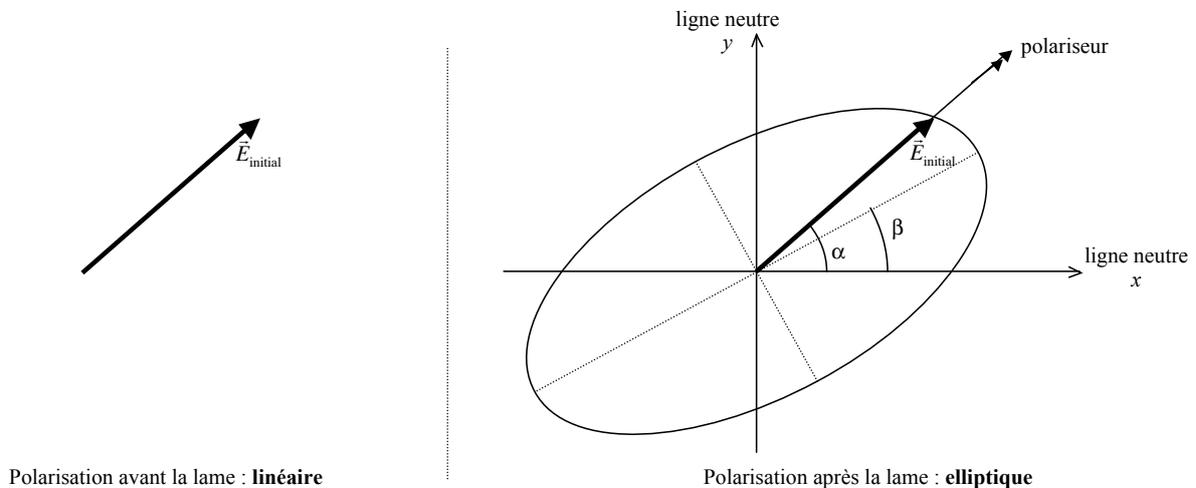
$$\tan 2\beta = -2 \frac{E_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{E_0^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)} \cos \phi$$

Soit^(2.1) :

$$\tan 2\beta = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cos \phi = \tan 2\alpha \cos \phi$$

L'angle β correspond à l'inclinaison de l'ellipse par rapport aux lignes neutres :

$$\boxed{\tan 2\beta = \tan 2\alpha \cos \phi}$$



Cas particulier 1 : lame onde

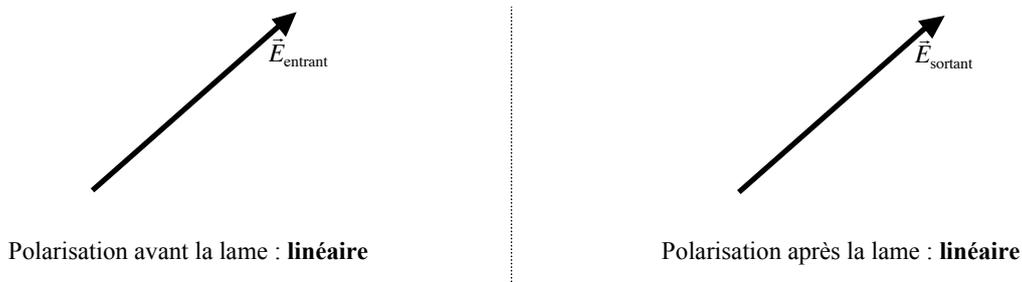
^(2.1) On utilise les relations : $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

Si $\phi = 2m\pi$ ($m \in \mathbb{N}$) alors $\delta = \frac{\lambda\phi}{2\pi} = m\lambda$ soit $\Delta n e = m\lambda$.

Les ondes sont en phase et $\tan 2\beta = \tan 2\alpha$ soit $\beta = \alpha$, alors :

$$\begin{cases} E_x = E_x^0 \cos(kn_1 e - \omega t) \\ E_y = E_y^0 \cos(kn_1 e - \omega t + \phi) = E_y^0 \cos(kn_1 e - \omega t) \end{cases} \quad \text{car } \phi = 2m\pi$$

La polarisation sortante est linéaire selon la direction du polariseur ($\beta = \alpha$) : **la lame est dite "onde"**.

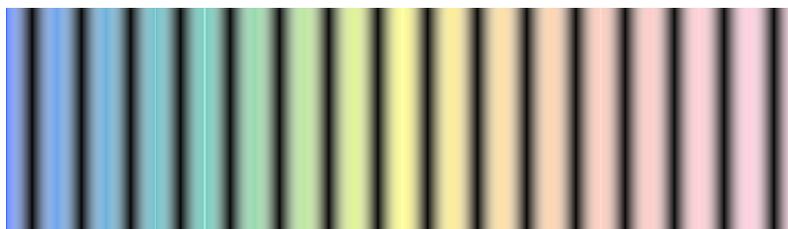


Comme la lumière est polychromatique (spectre continu), seules certaines longueurs d'onde seront telles que la lame est onde, soient pour les longueurs d'onde :

$$\delta = \Delta n e = m\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\Delta n e}{m}$$

où Δn et e sont des constantes caractéristiques du matériau et de la lame ($\Delta n = n_2 - n_1$ ou $\Delta n = n_e - n_o$).

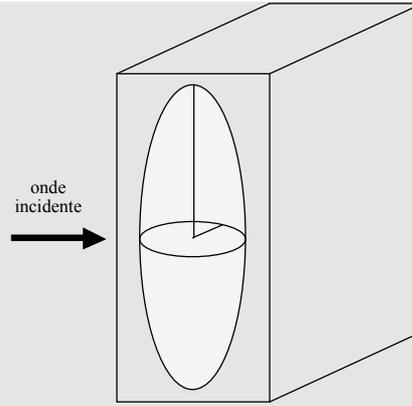
Si la lumière sortant de la lame est envoyée sur un analyseur croisé avec le polariseur, alors les radiations pour lesquelles la lame est onde (radiations pour lesquelles $\vec{E}_{\text{sortant}} \parallel \vec{E}_{\text{entrant}}$ donné par le polariseur) ne seront pas transmises. Si finalement ce faisceau est envoyé dans un spectroscopie à prisme dispersant la lumière, on obtient un spectre cannelé (spectre continu à raies noires).



raies noires = radiations pour lesquelles la lame est onde, soit $\lambda = \frac{\Delta n e}{m}$ avec m entier

Application :

- Combien de raies noires pourra-t-on compter dans le spectre visible ($0,4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8 \mu\text{m}$) si la lame est une lame de quartz ($\Delta n = n_e - n_o = 9 \times 10^{-3}$) taillée de façon à ce que l'axe optique soit parallèle à la face d'entrée et que son épaisseur est $e = 3 \text{ mm}$?



On a décomposition de la polarisation dans le quartz. Le quartz possède 2 indices : n_o et n_e . L'intersection du front d'onde et de l'ellipsoïde est l'ellipse de 1/2 grands-axes n_o et n_e .

Les radiations extrêmes éteintes par un montage "lentille + polariseur + lame + analyseur" sont données par $m = \Delta n e / \lambda$, soit :

$$m_{\max} = \frac{\Delta n e}{\lambda_{\min}} = \frac{9 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3}}{0,4 \times 10^{-6}} = 67,5 \quad \text{soit} \quad 67$$

$$m_{\min} = \frac{\Delta n e}{\lambda_{\max}} = \frac{9 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3}}{0,8 \times 10^{-6}} = 33,7 \quad \text{soit} \quad 34$$

On a donc $67 - 34 = 33$ intervalles entre raies noires, soit 34 raies noires.

- À quelle longueur d'onde correspond la 20^{ème} raie noire à partir de la droite ?

La 20^{ème} raie noire à partir de la droite correspond à $m = 34 + (20 - 1) = 53$ (la 34^{ème} est la première noire à droite), soit :

$$\lambda_+ = \frac{\Delta n e}{m} = \frac{9 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3}}{53} = 0,5094 \times 10^{-6} \text{ m} = 5094 \text{ \AA}$$

- À quelle longueur d'onde correspond la 20^{ème} raie noire à partir de la gauche ?

La 20^{ème} raie noire à partir de la gauche correspond à $m = 67 - (20 - 1) = 48$ (la 67^{ème} est la première noire à gauche), soit :

$$\lambda_- = \frac{\Delta n e}{m} = \frac{9 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3}}{48} = 0,5625 \times 10^{-6} \text{ m} = 5625 \text{ \AA}$$

Cas particulier 2 : lame demi-onde

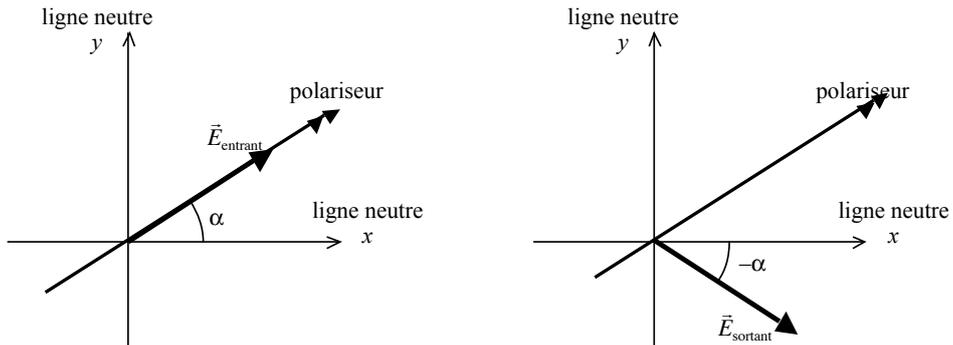
Si $\phi = (2m + 1)\pi$ ($m \in \mathbb{N}$) alors $\delta = \frac{\lambda\phi}{2\pi} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ soit $\Delta n e = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

Les ondes sont en opposition de phase et $\tan 2\beta = -\tan 2\alpha$ soit $\beta = -\alpha$, alors :

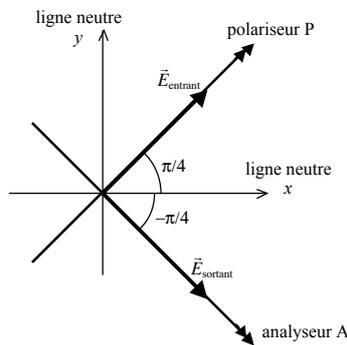
$$\begin{cases} E_x = E_x^0 \cos(kn_1 e - \omega t) \\ E_y = E_y^0 \cos(kn_1 e - \omega t + \phi) = -E_y^0 \cos(kn_1 e - \omega t) \end{cases} \quad \text{car } \phi = (2m + 1)\pi$$

II. OPTIQUE CRISTALLINE

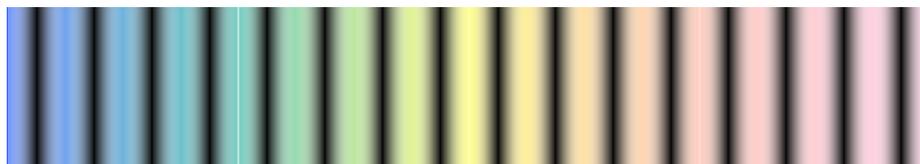
La polarisation sortante est linéaire selon la direction symétrique du polariseur par rapport aux lignes neutres de la lame ($\beta = -\alpha$) : la lame est dite **“demi-onde”**.



On notera que si $\alpha = \pi/4$, la vibration sortante est perpendiculaire à la vibration entrante. Aussi, si la lame est placée entre polariseur et analyseur croisés, les maxima d'intensité du spectre cannelé correspondent aux radiations pour lesquelles la lame est demi-onde ; la projection de \vec{E}_{sortant} sur l'analyseur est alors maximale ($= 1$).



Entre polariseur–analyseur croisés :



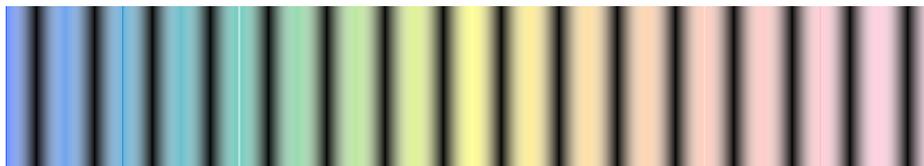
lame demi-onde ($\vec{E}_{\text{sortant}} \perp P$)

$$\lambda = \frac{\Delta n e}{m + 1/2}$$

lame onde ($\vec{E}_{\text{sortant}} \parallel P$)

$$\lambda = \frac{\Delta n e}{m}$$

Entre polariseur–analyseur parallèles, on a une inversion des minima et des maxima d'intensité ; en effet :



lame demi-onde ($\vec{E}_{\text{sortant}} \perp P$)

$$\lambda = \frac{\Delta n e}{m + 1/2}$$

lame onde ($\vec{E}_{\text{sortant}} \parallel P$)

$$\lambda = \frac{\Delta n e}{m}$$

Application :

Détermination de l'épaisseur d'une lame épaisse par la méthode du spectre cannelé entre polariseur (P) et analyseur (A) croisés, le spectroscopie à prisme ayant été préalablement étalonné. On donne $\Delta n = 9 \times 10^{-3}$.

On prend une raie noire. Cette raie noire correspond à une radiation pour laquelle la lame est onde (la vibration sortante est parallèle à la vibration entrante, soit P par définition ; or $A \perp P$ donc cette vibration n'est pas transmise). Cette radiation correspond à $\lambda_1 = \delta/m_1 = \Delta n e/m_1$ où l'ordre d'interférence m_1 est inconnu.

On prend alors la 10^{ème} raie noire consécutive à la précédente. L'ordre d'interférence associé à celle-ci est $m_1 - 10$ (il faut bien faire attention que plus λ est grand, plus m est petit). On notera qu'entre les 2 raies noires, on peut compter $N = 10$ cannelures brillantes ; on a donc $m_2 = m_1 - N$. La radiation correspondante à cette 10^{ème} raie noire vérifie :

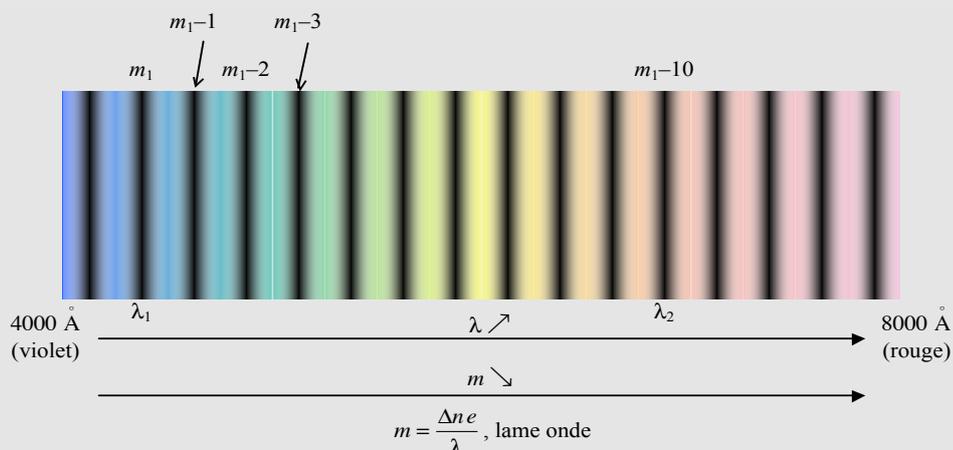
$$\lambda_2 = \frac{\Delta n e}{m_2}$$

On a donc :

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{\Delta n e}{\lambda_1} \\ m_2 &= \frac{\Delta n e}{\lambda_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_1 - m_2 = N = \Delta n e \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \Delta n e \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}$$

λ_1 et λ_2 sont connus puisque le spectroscopie à prisme est étalonné ; d'où :

$$e = \frac{N \lambda_1 \lambda_2}{\Delta n (\lambda_2 - \lambda_1)}$$



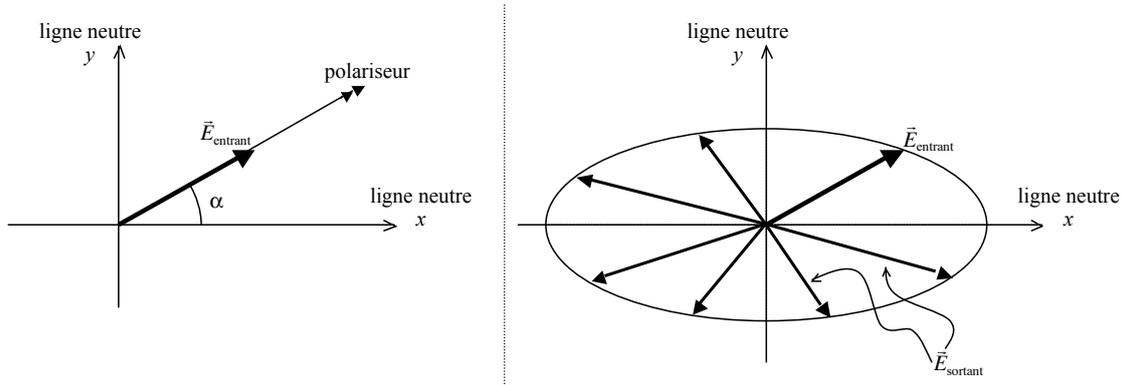
Cas particulier 3 : Lame quart d'onde

Si $\phi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ alors $\delta = \frac{\lambda \phi}{2\pi} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ soit $\Delta n e = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$.

Les ondes sont en quadrature de phase et $\tan 2\beta = 0$ soit $\beta = 0$, alors :

$$\begin{cases} E_x = E_x^0 \cos(kn_1 e - \omega t) \\ E_y = E_y^0 \cos(kn_1 e - \omega t + \phi) = \pm E_y^0 \sin(kn_1 e - \omega t) \end{cases} \quad \text{car } \phi = (m + 1/2)\pi$$

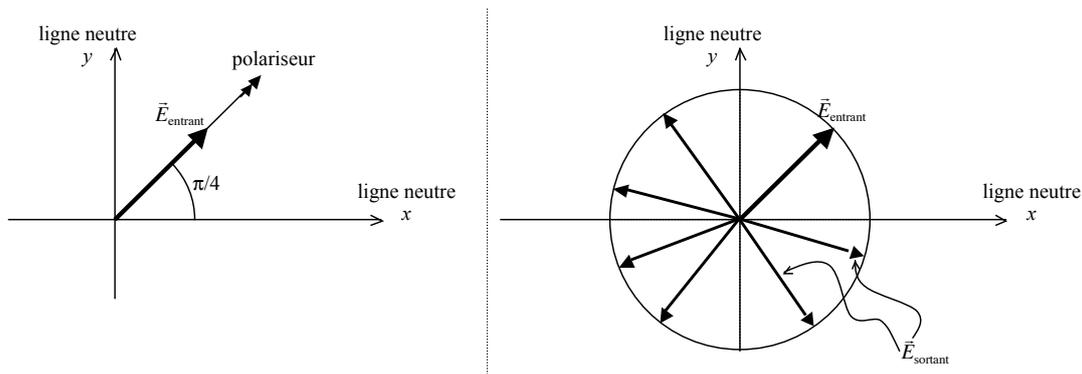
La polarisation sortante est elliptique, mais les demi-grands axes de l'ellipse sont les lignes neutres de la lame ($\beta = 0$) : **la lame est dite "quart d'onde"**.



Si $\alpha = \pi/4$, alors la décomposition de $\vec{E}_{entrant}$ sur les lignes neutres de la lame donne des amplitudes égales pour les deux états P orthogonaux, soit $E_x^0 = E_y^0 = E_0$. On a donc finalement à la sortie de la lame :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos(kn_1 e - \omega t) \\ E_y = E_0 \sin(kn_1 e - \omega t) \end{cases}$$

La vibration sortante est circulaire ($\|\vec{E}_{sortant}\| = E_0 = Cte$).



Les radiations pour lesquelles une lame est quart d'onde s'écrit :

$$\lambda = \frac{2\Delta n e}{m + 1/2}$$

On notera enfin que l'étude d'un spectre cannelé peut aussi servir à déterminer la biréfringence Δn d'un matériau si l'épaisseur de la lame e est connue. On a alors :

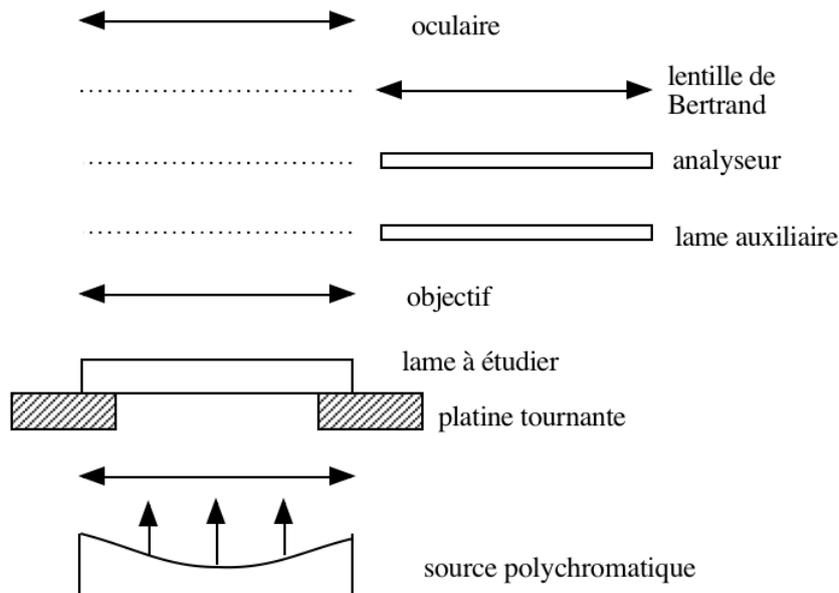
$$\Delta n = \frac{N\lambda_1\lambda_2}{e(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

λ_1 et λ_2 , radiations éteintes entre $P \perp A$, sont connues si le spectroscope a été préalablement étalonné et N se détermine simplement par l'observation.

Néanmoins, les caractéristiques optiques d'un minéral se déterminent plus souvent à l'aide d'un microscope polarisant. Nous allons donc maintenant en étudier le fonctionnement.

6. Le microscope polarisant – Orthoscopie

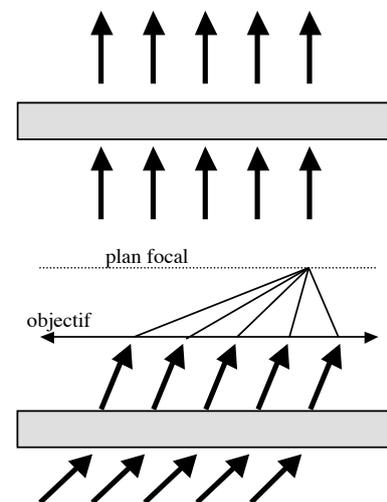
Un microscope polarisant peut être schématisé selon :



Il existe deux modes principaux d'utilisation du microscope polarisant :

- L'**orthoscopie** : la lame est éclairée sous incidence normale ; le condenseur est alors abaissé et la lentille de Bertrand retirée.

- La **conoscopie** : la lame est éclairée sous incidence oblique (i variable) ; le condenseur est remonté et la lentille de Bertrand introduite pour que la mise au point se fasse dans le plan focal de l'objectif (car les rayons parallèles à la sortie de la lame convergent dans ce plan focal).



Nous nous intéresserons ici qu'au mode d'orthoscopie qui permet généralement soit de **mesurer la biréfringence Δn d'un minéral si l'épaisseur e de la lame est mesurable, soit de déterminer l'épaisseur de lames minces (quelques micromètres) lorsque Δn est connu.**

De plus nous nous concentrerons sur l'utilisation du microscope en lumière polarisée–analysée : on place l'analyseur sur la marche des rayons lumineux. On a alors un montage semblable à celui du spectre cannelé : une lame cristalline, placée entre polariseur et analyseur, éclairée sous incidence normale.

Nous allons maintenant essayer de comprendre l'origine physique de l'apparition de teintes colorées, caractéristiques de la lame cristalline étudiée.

- **Considérons tout d'abord une onde monochromatique**, composante de la lumière blanche, dont la direction de polarisation du champ électrique avant la lame est donnée par le polariseur. Le milieu dans lequel se propage cette onde est de l'air d'indice $n = 1$. Son expression est :

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{p}$$

où \hat{p} est le vecteur directeur dans la direction du polariseur. De la même façon, on définit \hat{a} le vecteur directeur dans la direction de l'analyseur.

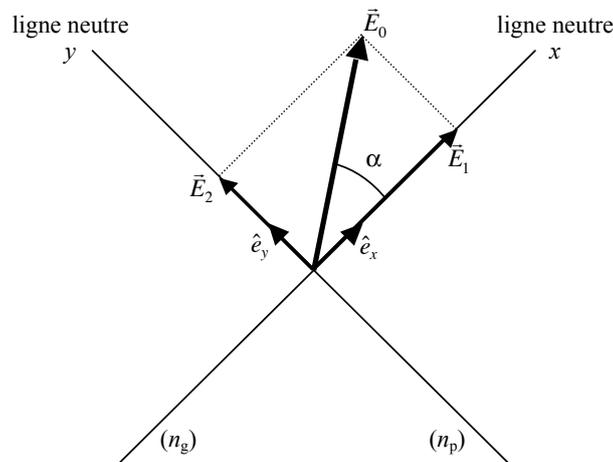
- **À l'entrée de la lame, le champ se scinde en deux états P orthogonaux, selon les lignes neutres de la lame (faisant un angle α avec la direction du polariseur).**

À chaque ligne neutre est associé un indice différent ; Plutôt que d'utiliser les indices n_1 et n_2 comme auparavant, nous introduirons **les indices n_p et n_g** (p pour petit et g pour grand) correspondant aux longueurs des demi-grand axes de l'ellipse d'intersection du front d'onde incident et de l'ellipsoïde des indices.

Sachant que $v = c/n$, on parlera de **vibration rapide pour n_p** et de **vibration lente pour n_g** . Les vibrations lente et rapide s'écrivent:

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(kn_g e - \omega t) \cos \alpha \hat{e}_x$$

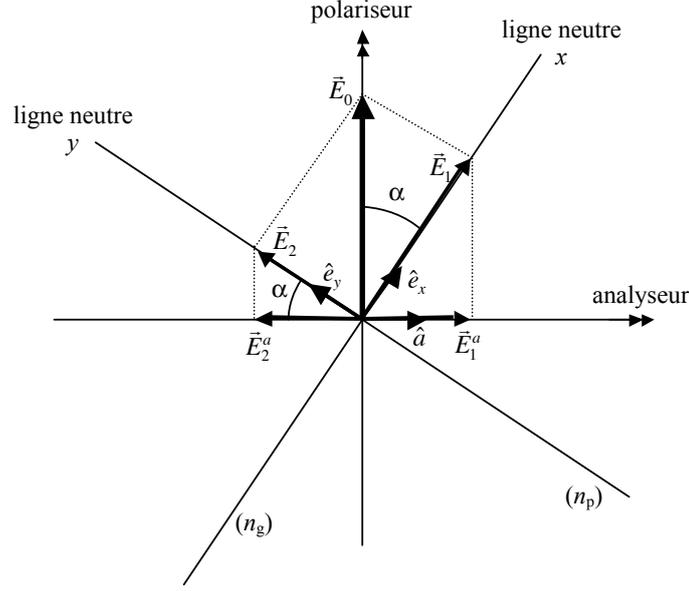
$$\vec{E}_2 = E_0 \cos(kn_p e - \omega t) \sin \alpha \hat{e}_y$$



Dans l'expression de \vec{E}_1 et \vec{E}_2 , on ne considère que les *LCO* parcourues dans la lame (par les fronts d'onde) car les *LCO* avant et après la lame sont identiques pour les deux vibrations : on peut donc les omettre (phase commune).

À la sortie de lame, les deux vibrations n'interfèrent pas car les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont perpendiculaires.

- Néanmoins, lors de la traversée de l'analyseur, ces champs se projettent sur la même direction :



Supposons $P \perp A$. On obtient les champs \vec{E}_1^a et \vec{E}_2^a après projection :

$$\vec{E}_1^a = \overbrace{E_0 \cos(kn_g e - \omega t) \cos \alpha \sin \alpha}^{E_1} \hat{a}$$

$$\vec{E}_2^a = -\overbrace{E_0 \cos(kn_p e - \omega t) \sin \alpha \cos \alpha}^{E_2} \hat{a}$$

Ces champs \vec{E}_1^a et \vec{E}_2^a , colinéaires, interfèrent pour donner une intensité résultante :

$$I = \frac{1}{\mu v} \langle (\vec{E}_1^a + \vec{E}_2^a)^2 \rangle = \frac{1}{\mu v} \langle (E_0 \cos(kn_g e - \omega t) \cos \alpha \sin \alpha - E_0 \cos(kn_p e - \omega t) \sin \alpha \cos \alpha)^2 \rangle$$

$$I = \frac{E_0^2 (\sin \alpha \cos \alpha)^2}{\mu v} \langle (\cos(kn_g e - \omega t) - \cos(kn_p e - \omega t))^2 \rangle$$

$$I = \frac{E_0^2 \sin^2 2\alpha}{4\mu v} \left\{ \langle \cos^2(kn_g e - \omega t) \rangle + \langle \cos^2(kn_p e - \omega t) \rangle - \langle 2 \cos(kn_g e - \omega t) \cos(kn_p e - \omega t) \rangle \right\}$$

$$I = \frac{E_0^2 \sin^2 2\alpha}{4\mu v} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{2} \langle \cos(k(n_g + n_p)e - 2\omega t) + \cos(k(n_g - n_p)e) \rangle \right]$$

$$I = \frac{E_0^2 \sin^2 2\alpha}{4\mu v} \left[1 - \langle \cos(k(n_g + n_p)e - 2\omega t) \rangle - \langle \cos(k(n_g - n_p)e) \rangle \right]$$

$$I = \frac{E_0^2 \sin^2 2\alpha}{4\mu v} \left[1 - \cos(k(n_g - n_p)e) \right]$$

Si on définit l'intensité I_0 comme celle du champ avant la lame :

$$I_0 = \frac{1}{\mu v} \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu v}$$

alors :

$$I = \frac{I_0}{2} \sin^2 2\alpha \left[1 - \cos(k(n_g - n_p)e) \right] = \frac{I_0}{2} \sin^2 2\alpha (1 - \cos k\delta)$$

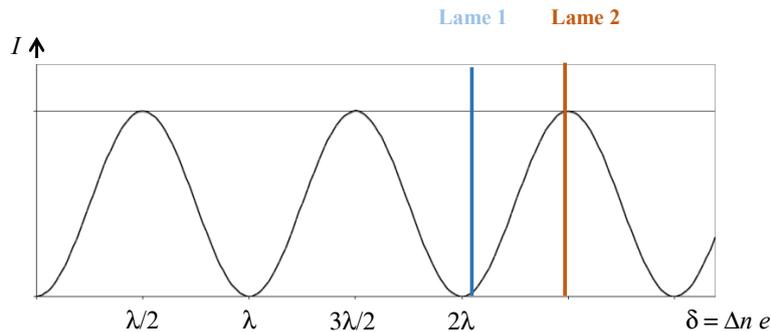
avec $\delta = (n_g - n_p)e = \Delta n e$.

On remarque que pour tout k et δ , l'intensité sera maximale si $\alpha = \pi/4$ (c'est-à-dire lorsque le polariseur et l'analyseur sont à 45° des lignes neutres de la lame). On a alors :

$$I = \frac{I_0}{2}(1 - \cos k\delta)$$

On obtient un profil d'intensité en fonction de δ comparable à celui des fentes d'Young hormis le fait que l'opposition des champs \vec{E}_1^a et \vec{E}_2^a entraîne une inversion des maxima et minima :

- lorsque les ondes sont en phase, $k\delta = \phi = 2m\pi$ et $I = 0$,
- lorsqu'elles sont en opposition, $k\delta = \phi = (2m + 1)\pi$ et $I = I_0$.



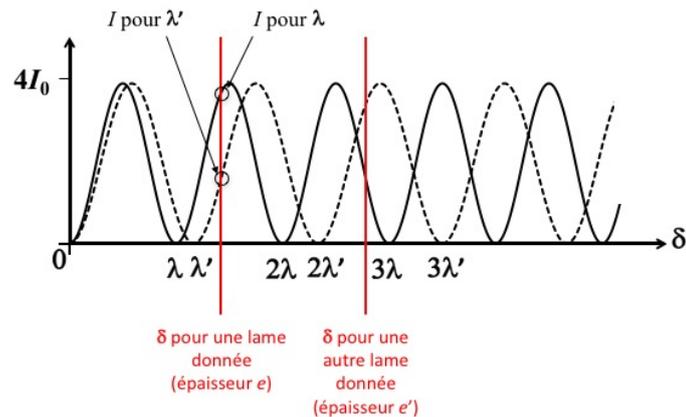
Considérons une première lame dont on connaît la biréfringence Δn et l'épaisseur e_1 . A cette lame est associée la différence de LCO $\delta_1 = \Delta n e_1$; on remarque que pour cette lame, les interférences entre les états-P au niveau de l'analyseur sont plutôt destructives : la radiation λ ne sera alors pas transmise.

Considérant une seconde lame taillée dans le même cristal (avec donc la même biréfringence Δn), mais d'épaisseur e_2 , on constate que $\delta_2 = \Delta n e_2$ est tel que les interférences au niveau de l'analyseur sont maintenant plutôt constructives si bien que la radiation λ est bien transmise.

- Mais il nous faut tenir compte de la **nature polychromatique (blanche) de la source de lumière** du microscope. On peut considérer que l'intensité de chaque composante monochromatique est la même et égale à I_0 . Nous avons déjà vu que **deux radiations de longueurs d'onde différentes n'interfèrent pas**. Aussi, la teinte observée au microscope correspond à la somme des intensités résultantes du processus d'interférences entre chaque composante monochromatique, soit :

$$I_{\text{tot}} = \sum_{\lambda} \frac{I_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right] \quad \Rightarrow \quad \delta = \Delta n e \quad \text{fixe pour une lame donnée}$$

Si sur un même graphe nous dessinons chaque composante en fonction de δ (pour quelques longueurs d'onde choisies), on obtient une succession de sinusoides qui se recouvrent, mais dont les maxima et minima ne sont bien entendu pas identiques (max. pour $(2p + 1)\lambda/2$, min. pour $p\lambda$).



Or pour une lame donnée, la différence de LCO δ est fixée car l'épaisseur e est donnée et Δn est caractéristique du matériau. Dans le schéma précédent, la première lame aura une teinte proche de λ (car les interférences au niveau de l'analyseur sont plutôt destructives pour λ' tandis que la seconde aura une teinte plus proche de λ').

Aussi, la teinte observée au microscope provient de la superposition, à δ donné, des profils d'interférences relatifs à chaque λ .

Remarque : **en pétrographie, on choisit une épaisseur $e = 30 \mu\text{m}$ fixe** ; comme la biréfringence Δn varie d'un matériau à l'autre, δ varie en conséquence, ainsi que la teinte observée. **C'est ainsi qu'on caractérise les roches constituant une lame donnée.**

- On peut associer pour chaque δ une teinte observable. On obtient alors **l'échelle chromatique de Newton** (cf. table en fin de chapitre). Sur cette échelle, on remarque que des teintes similaires se répètent plusieurs fois (par exemple orangé-rougeâtre pour $\delta = 505 \text{ nm}$, $\delta = 998 \text{ nm}$, ...). Cette multiplicité des teintes est simplement due à la périodicité des distributions d'intensité sinusoïdale.

Afin de les différencier, **on introduit la notion d'ordre** : toutes les teintes ont tendance à se répéter tous les 560 nm . On dira **qu'une lame est d'ordre p si la différence de LCO qu'elle introduit est telle que :**

$$(p-1) \times 560 \text{ nm} < \delta \leq p \times 560 \text{ nm}$$

Ainsi, toutes les teintes (et les δ associées) telles que $\delta \leq 560 \text{ nm}$ seront dites du 1^{er} ordre car $p = 1$. Si $560 \text{ nm} < \delta \leq 2 \times 560 \text{ nm}$, on est alors dans le 2^{ième} ordre...

Dans chaque ordre (hormis le 1^{er}), les teintes vont du violet au rouge. L'observation montre cependant que les teintes du 2^{ième} ordre sont plus franches que celles du 3^{ième} ordre ; au-delà du 3^{ième} ordre, les teintes sont très délavées et l'on tend vers une teinte blanchâtre appelée blanc d'ordre supérieur.

À la limite entre deux ordres, on observe une teinte lie de vin, ou violet foncé... Cette teinte est appelée **teinte sensible** ; elle se répète tous les 560 nm et sert lors de l'observation à différencier les ordres.

Finalement, on remarquera la singularité du 1^{er} ordre : **les teintes du 1^{er} ordre sont différentes de celles des ordres suivants par le fait que si $\delta \rightarrow 0$, alors toutes les radiations**

monochromatiques sont en phase et non transmises : la teinte observée est alors noire et ne se répète jamais pour des δ supérieurs.

- Sur certains microscopes, on a la possibilité de placer l'analyseur parallèle au polariseur, soit $A \parallel P$. Dans ce cas, rien ne change dans notre démonstration précédente jusqu'à la traversée de l'analyseur. À ce stade, lors de la projection des champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sur la direction de A, \vec{E}_1^a et \vec{E}_2^a sont de même sens :

$$\vec{E}_1^a = E_0 \cos(kn_g e - \omega t) \cos \alpha \sin \alpha \hat{a}$$

$$\vec{E}_2^a = E_0 \cos(kn_p e - \omega t) \sin \alpha \cos \alpha \hat{a}$$

Ces champs interfèrent pour donner :

$$I = \frac{I_0}{2} \sin^2 2\alpha (1 + \cos k\delta)$$

alors qu'on avait $I = \frac{I_0}{2} \sin^2 2\alpha (1 - \cos k\delta)$ dans le cas $A \perp P$. On comprend alors que, passant de $A \perp P$ à $A \parallel P$, on inverse maxima et minima. En d'autres termes, une radiation transmise en configuration $A \perp P$ n'est plus transmise en $A \parallel P$, et vice versa. **On obtient alors en $A \parallel P$ la teinte complémentaire de celle observée en $A \perp P$.**

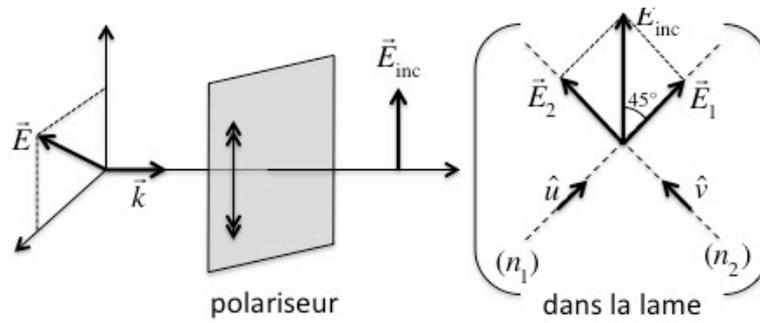
Ces teintes sont répertoriées dans l'échelle des teintes de Newton. Elles peuvent éventuellement aider à la détermination de δ .

Utilisation pratique du microscope polarisant en mode orthoscopique :

En physique comme en pétrographie, on cherche usuellement à mesurer la biréfringence ($n_g - n_p$) d'une roche, en utilisant une lame épaisse dont on pourra mesurer facilement l'épaisseur e . A contrario, on peut déterminer l'épaisseur e d'une lame mince (cette épaisseur ne pouvant être mesurée simplement), connaissant sa biréfringence ($n_g - n_p$). Dans les deux cas, le microscope donne accès à la différence de LCO δ introduite par la lame.

1. Détermination de biréfringence ($n_g - n_p$) connaissant e

- On introduit l'analyseur A sur la marche des rayons à travers le microscope. Le microscope est construit de façon à ce que A soit croisé avec le polariseur P, $P \perp A$ (polariseur-analyseur croisés) : le champ observé doit être noir.
- Recherche des lignes neutres de la lame de mica épaisse. On place la lame sur la platine du microscope et, par rotation de cette dernière, on cherche l'extinction (qui se reproduit tous les 90°) : les lignes neutres sont alors identifiées et superposées à P et A.
- On place les lignes neutres à 45° de P et A par rotation de la platine à partir d'une position d'extinction. On a alors biréfringence dans la lame:



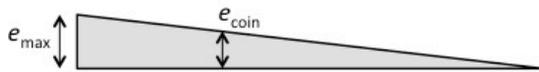
avec des champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 respectivement associés à n_1 et n_2 , ou n_g et n_p .

Après traversée de l'analyseur, ces champs interfèrent et donnent lieu à l'apparition d'une teinte que l'on identifie grâce à l'échelle de Newton.

Malheureusement, cette échelle est cyclique et toutes les teintes se répètent périodiquement tous les 560 nm, à cause de la périodicité des profils d'interférence. On hésite alors bien souvent entre deux ordres...

• **Identification de l'ordre de la lame : utilisation du coin de quartz et compensation**

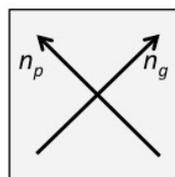
Pour déterminer l'ordre de la lame, et déterminer quelle ligne neutre est associée à la vibration lente (l'autre étant alors associée à la vibration rapide), on utilise le coin de quartz. C'est une lame de quartz taillée en biseau :



sur laquelle est reportée la vibration lente n_g , aussi indiquée par la notation γ (pour le quartz $n_g = n_e$). Les lignes neutres du coin sont à 45° de $P \perp A$.

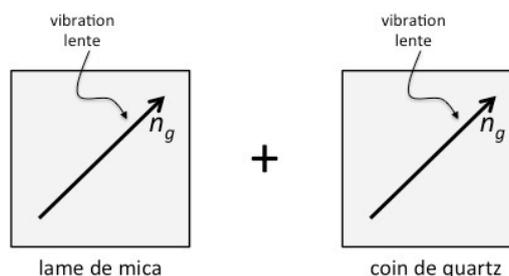
On peut introduire dans le microscope le coin de quartz et ainsi le superposer à la lame de mica.

Imaginons que la lame de mica est positionnée comme :



lame de mica

Superposons le coin de quartz en alignant les vibrations lentes :

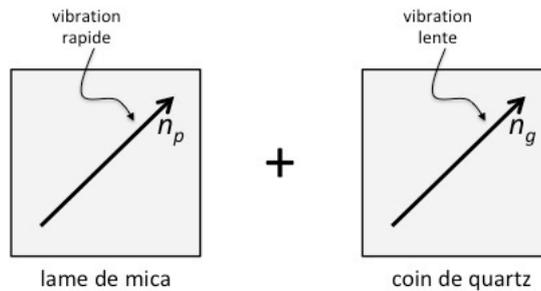


La vibration lente de la lame de mica est aussi lente dans le coin de quartz (et la vibration rapide de la lame de mica est aussi rapide dans le coin de quartz). Aussi, l'écart entre les vibrations ↗ et ↘ des champs électriques ne fait que s'accroître. On a donc :

$$\delta_{\text{total}} = \delta_{\text{lame}} + \delta_{\text{coin}} \quad \text{avec} \quad \delta_{\text{coin}} = e_{\text{coin}} (n_e - n_o)_{\text{quartz}}$$

Au fur et à mesure que l'on enfonce le coin, l'épaisseur e_{coin} augmente et la différence de marche δ_{total} augmente alors aussi : on décrit alors l'échelle des teintes de Newton vers le bas (on a un défilement des spectres).

Tournons alors la platine de 90° de façon à superposer les vibrations lentes et rapides :



La vibration lente de la lame de mica devient rapide dans le coin de quartz (et la vibration rapide de la lame de mica devient lente dans le coin de quartz). L'écart entre les vibrations ↗ et ↘ des champs électriques diminue alors. On a donc :

$$\delta_{\text{total}} = \delta_{\text{lame}} - \delta_{\text{coin}} \quad \text{avec} \quad \delta_{\text{coin}} = e_{\text{coin}} (n_e - n_o)_{\text{quartz}}$$

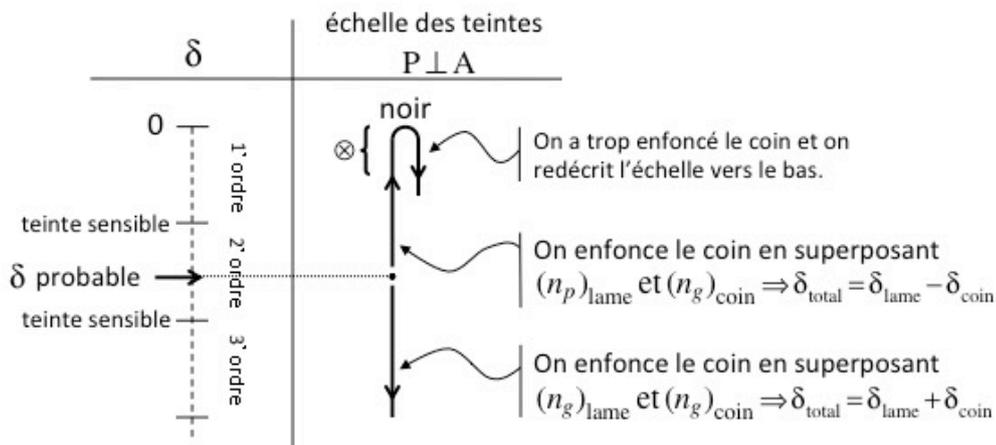
Au fur et à mesure que l'on enfonce le coin, l'épaisseur e_{coin} augmente et la différence de marche δ_{total} diminue alors : on décrit alors l'échelle des teintes de Newton vers le haut. On atteint même une valeur de e_{coin} telle que :

$$\delta_{\text{lame}} = e_{\text{coin}} (n_e - n_o)_{\text{quartz}}$$

et on a :

$$\delta_{\text{total}} = 0$$

L'échelle des teintes de Newton en $P \perp A$ nous dit que la teinte observée est **noire** (seule teinte qui ne répète jamais). **On est dans la position de compensation totale de δ_{lame} par le coin.** Si on continue d'enfoncer le coin, on décrit l'échelle des teintes dans l'autre sens.



Comme le noir est une bande très fine (de 0 à 40 nm), on perçoit en fait lors de la compensation une bande sombre (grisâtre) entourée de plages jaunâtres correspondant à la zone marquée ⊗ sur le schéma ci-dessus (voir zone correspondante sur l'échelle des teintes).

Comment repérer l'ordre de la lame lorsqu'on a trouvé le noir ?

Les divers spectres sont séparés par des teintes appelées **teintes sensibles** qui ressemblent à la bande sombre grisâtre du noir, **mais** entourées d'une plage rougeâtre (fin d'un spectre) et d'une plage bleuâtre (début du suivant). Aussi, lorsqu'on est sur le noir, on peut retirer doucement le coin et compter le nombre de teintes sensibles que l'on aperçoit lorsqu'on décrit le chemin $\delta = 0$ vers $\delta = \delta_{\text{probable}}$.

Si N est le nombre de teintes sensibles comptées, on est alors dans l'ordre $N+1$ (on a en fait décrit le chemin inverse de celui parcourue pour aller de la teinte initiale au noir lors de l'enfoncement du coin).

Quel que soit le positionnement de la lame, la compensation est obtenue lorsque les vibrations lente et rapide de la lame et du coin de quartz sont opposées. **C'est d'ailleurs par opposition aux indices (n_p, n_g) du coin de quartz (indiqués sur le coin) que l'on identifie les indices (n_p, n_g) de la lame de mica par opposition lors de la compensation.**

Le coin de quartz permet donc d'identifier :

- l'ordre de la lame
- les indices (n_p, n_g) de la lame

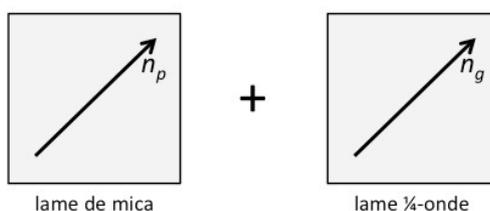
On en déduit donc la différence de marche δ_{probable} de la lame de mica.

Vérification de δ_{probable} : utilisation de la lame 1/4-onde

Pour vérifier la valeur de δ_{probable} , on utilise une lame de mica, appelée lame 1/4-onde, taillée de façon à ce que $\delta_{1/4} = 140 \text{ nm}$, et sur laquelle la vibration lente (n_g ou γ) est indiquée (si la lame porte l'indication β , il s'agit de la vibration rapide n_p).



La partie précédente a permis de déterminer les directions des indices (n_p, n_g) de la lame de mica. Imaginons que la lame de mica et la lame 1/4-onde sont positionnée comme :



On a alors : $\delta_{\text{total}} = \delta_{\text{lame}} - 140$

Sachant que l'on a $\delta_{\text{lame}} = \delta_{\text{probable}}$, on doit obtenir $(\delta_{\text{total}})_{\text{attendu}} = \delta_{\text{probable}} - 140 \text{ (nm)}$.

On remplit alors le tableau suivant :

| | | |
|---|--|-----------------|
| $(\delta_{\text{total}})_{\text{attendu}} = \delta_{\text{probable}} - 140$ | teinte attendue (par l'échelle des teintes) | teinte observée |
| nm | | |

} on vérifie la cohérence de ces 2 colonnes

On superpose alors les vibrations rapides de la lame de mica et le la lame ¼-onde en tournant la platine (et donc la lame) de 90° :



On a alors : $\delta_{\text{total}} = \delta_{\text{lame}} + 140$

On vérifie par un tableau similaire la cohérence entre les teintes :

| | | |
|---|--|-----------------|
| $(\delta_{\text{total}})_{\text{attendu}} = \delta_{\text{probable}} + 140$ | teinte attendue (par l'échelle des teintes) | teinte observée |
| nm | | |

} on vérifie la cohérence de ces 2 colonnes

Si la cohérence dans les deux cas est bonne, on connaît δ_{lame} .

Détermination de la biréfringence ($n_g - n_p$)

Connaissant l'épaisseur e de la lame, la biréfringence (et donc la roche) est déterminée par

$$(n_g - n_p) = \frac{\delta_{\text{lame}}}{e}$$

2. Mesure de l'épaisseur d'une lame mince

Les lames très minces sont disposées entre deux feuilles de protection en plastique. Il n'est plus possible alors de mesurer leurs épaisseurs. On détermine donc leurs épaisseurs à l'aide de :

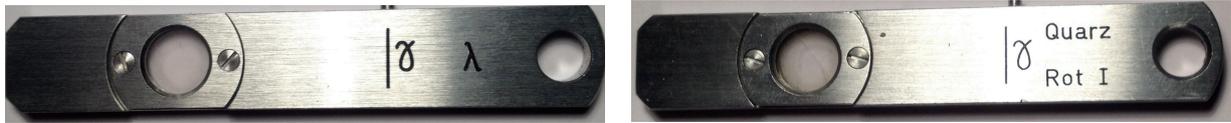
$$\delta_{\text{lame}} = e \Delta n \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\delta_{\text{lame}}}{\Delta n}$$

On a préalablement déterminé la biréfringence Δn de la roche grâce à une lame plus épaisse faite du même matériau. Il faut donc déterminer la différence de marche δ_{lame} . L'épaisseur e de la lame étant très faible, la valeur de $e \Delta n$ est très petite aussi, et donc δ_{lame} a une valeur petite : on est dans le début du 1^{er} ordre (entre 0 et 560 nm).

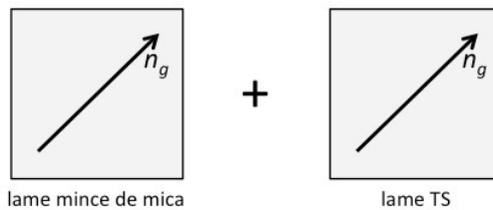
La détermination se fait en $P \perp A$. On recherche les lignes neutres de la lame mince, et on place les lignes neutres à 45° de la direction du polariseur. **On vérifie que la teinte observée est cohérente avec un δ_{lame} appartenant au 1er ordre.** La teinte observée est (normalement) non identifiable (divers niveaux de gris non différenciables à l'œil) : la procédure utilisée pour l'étude de la lame épaisse n'est plus applicable.

Utilisation de la lame teinte sensible (ou lame-onde).

La lame teinte sensible (TS) est une lame taillée de façon à ce que $\delta_{TS} = 560 \text{ nm}$.



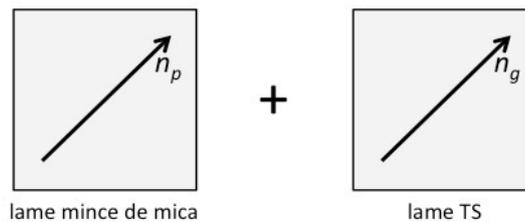
Imaginons que la lame mince de mica et la lame teinte sensible (TS) sont positionnées avec les vibrations rapides superposées comme :



on a alors : $\delta_1 = \delta_{\text{lame}} + 560$.

On doit être au début du 2^{ème} ordre et les teintes sont bien différenciables. On peut identifier δ_1 .

Positionnons maintenant la lame mince de mica et la lame teinte sensible (TS) par rotation de la platine comme :



on a alors : $\delta_2 = \delta_{\text{lame}} - 560 < 0!!$

Mais l'échelle des teintes est symétrique par rapport à $\delta = 0$. On a donc :

$$\delta_2 \equiv 560 - \delta_{\text{lame}}$$

On est alors à la fin du 1^{er} ordre et les teintes sont bien différenciables. On peut identifier δ_2 .

On identifie donc δ_{lame} à l'aide de δ_1 et δ_2 :

$$\delta_{\text{lame}} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}$$

et on obtient :

$$e = \frac{\delta_{\text{lame}}}{\Delta n_{\text{mica}}}$$

Note : on identifie les indices (n_p, n_g) de la lame, soit :

- par identification avec les indices (n_p, n_g) de la lame TS lors de l'observation de δ_1
- par opposition avec les indices (n_p, n_g) de la lame TS lors de l'observation de δ_2

Échelle des teintes de Newton

| Différence de marche $\delta = e(n_2 - n_1)$ en nm (1 nanomètre = 10^{-9} m) | Echelle I Polariseur \perp Analyseur | Echelle II Polariseur // Analyseur |
|--|---|---------------------------------------|
| Premier ordre | | |
| 0 | noir | blanc |
| 40 | gris de fer | blanc jaunâtre |
| 97 | gris lavande | blanc jaunâtre |
| 158 | bleu gris | blanc brunâtre |
| 218 | gris plus clair | brun jaune |
| 234 | blanc verdâtre | brun |
| 259 | blanc | rouge clair |
| 267 | blanc jaunâtre | rouge carmin |
| 275 | jaune paille pâle | brun rouge sombre |
| | | <i>teinte sensible</i> |
| 281 | jaune paille | violet sombre |
| 306 | jaune clair | indigo |
| 332 | jaune vif | bleu |
| 430 | jaune brun | bleu gris |
| 505 | orangé rougeâtre | vert bleuâtre |
| 536 | rouge chaud | vert pâle |
| 551 | rouge plus foncé | vert jaunâtre |
| 560 | <i>teinte sensible : lie de vin</i> | |
| Deuxième ordre | | |
| 565 | pourpre | vert plus clair |
| 575 | violet | jaune verdâtre |
| 589 | indigo | jaune d'or |
| 664 | bleu de ciel | orangé |
| 728 | bleu verdâtre | orangé brunâtre |
| 747 | vert | rouge carmin clair |
| 826 | vert plus clair | pourpre |
| | | <i>teinte sensible</i> |
| 843 | vert jaunâtre | pourpre violacé |
| 866 | jaune verdâtre | violet |
| 910 | jaune pur | indigo |
| 948 | orangé | bleu sombre |
| 998 | orangé rougeâtre vif | bleu verdâtre |
| 1101 | rouge violacé foncé | vert |
| 1120 | <i>teinte sensible : pourpre violacé</i> | |
| Troisième ordre | | |
| 1128 | violet bleuâtre clair | vert jaunâtre |
| 1151 | indigo | jaune sale |
| 1258 | bleu (teinte verdâtre) | couleur chair |
| 1334 | vert de mer | rouge brun |
| 1376 | vert brillant | violet |
| 1426 | jaune verdâtre | bleu violacé grisâtre |
| ... | ... | ... |

Partie III

ÉLASTICITÉ, CONTRAINTE ET DÉFORMATION DES ROCHES



Chapitre 1

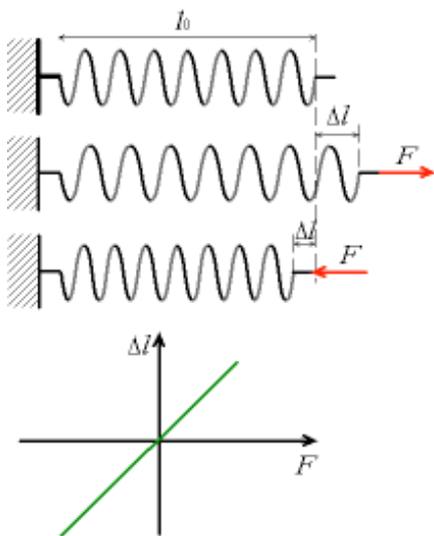
Introduction à l'élasticité

1.1. Déformation élastique des solides

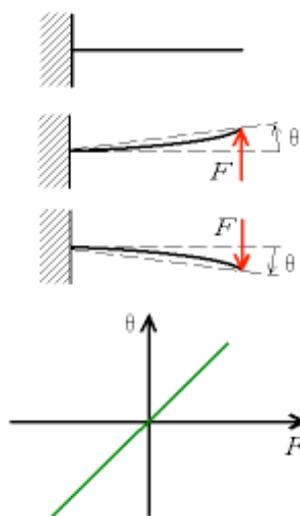
1.1.1. Exemple des ressorts

Le cas le plus simple de déformation élastique est celui des ressorts. Considérons trois types de ressorts soumis à une déformation :

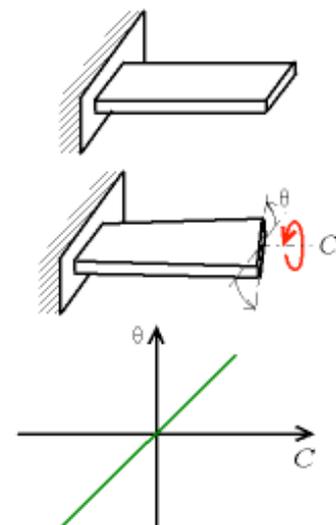
traction-compression
la force appliquée engendre un allongement Δl



flexion
la force appliquée engendre un angle de flexion θ



torsion
la force appliquée engendre un angle de torsion θ



La déformation résulte de l'application de deux forces opposées : la force appliquée (traction-compression \vec{F} , flexion \vec{F} ou torsion \vec{C}) et la réaction du support (sans la réaction du support, une seule force appliquée engendre la mise en mouvement du ressort).

Il y a proportionnalité entre la force appliquée et la déformation : on a une **déformation élastique**. Lorsque les lois de déformation sont linéaires, le coefficient de proportionnalité est appelé **raideur** du ressort et est noté k :

$$F = k_1 \Delta l \quad \text{pour la traction-compression}$$

$$F = k_2 \theta \quad \text{pour la flexion}$$

$$C = k_3 \theta \quad \text{pour la torsion}$$

Remarque : les coefficients k_1 , k_2 et k_3 n'ont pas la même dimension, et l'angle θ doit être exprimé en radians.

1.1.2. Contrainte

Le type d'effort qui engendre une déformation est appelé **contrainte** : elle est définie comme la force appliquée à une certaine unité de surface (ou de volume). La contrainte est notée σ et est homogène à une pression. Dans le cas de la déformation des roches, la contrainte (*stress* en anglais) est :

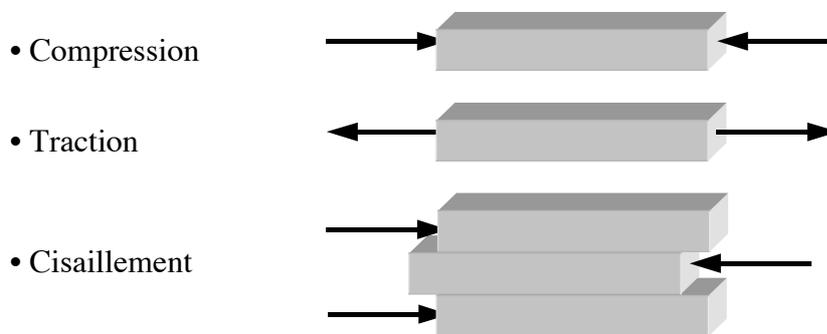
$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.1)$$

elle est exprimée en général en méga-pascal (Mpa).

1.2. Régimes de déformation

1.2.1. Types de déformations des corps rigides

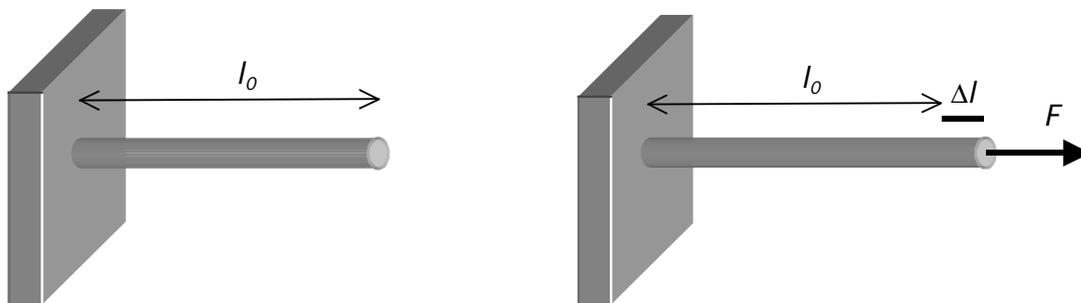
Les corps rigides peuvent être soumis à 3 types d'efforts qui engendrent des déformations :



On définit ainsi deux modèles de déformation élastique : la **traction-compression** et le **cisaillement**. La flexion peut se modéliser, selon les cas, comme une traction-compression ou comme un cisaillement, la torsion se modélise comme un cisaillement.

1.2.2. Régimes de déformation

On considère un solide de longueur l_0 et de section S fixé à un mur d'un côté. Il est soumis à une force de traction F sur l'autre côté. On observe alors un allongement Δl .



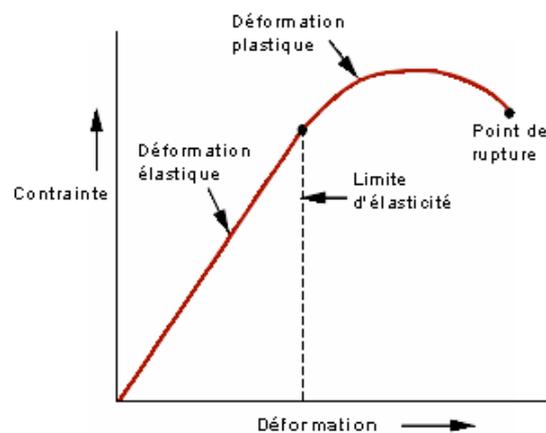
Si la force n'est pas trop forte, l'allongement Δl est proportionnel à la longueur initiale l_0 et à la force \vec{F} : c'est le **régime linéaire**.

Si on relâche la traction, le solide revient à sa forme initiale : on dit que l'on a une **déformation élastique**. La déformation élastique intervient pour les faibles sollicitations.

Si l'on augmente les sollicitations (si la force appliquée est suffisamment forte de sorte que la proportionnalité entre force et déformation n'est plus respectée), on n'a plus de régime linéaire. On a alors divers modes de déformation :

- **rupture** : le solide peut casser pour les corps *fragiles* ;
- **déformation plastique** : si on relâche la traction, le solide ne revient pas à sa forme initiale pour les corps *ductiles*. Le solide est déformé de façon permanente. Pour la traction, le solide peut aussi s'allonger très rapidement (l'allongement peut s'accompagner d'une rupture) ;
- **fluage** : c'est la déformation progressive du solide soumis à un effort constant, qui a pour effet de modifier la structure interne du solide.

La contrainte délimitant le domaine élastique des autres domaines est appelée limite d'élasticité (*yield strength*).



1.3. Contrainte et déformation

1.3.1. Traction-compression uniaxiale

1.3.1.a. Allongement dans l'axe

En prenant des solides de différentes dimensions, on remarque que pour une force donnée :

- l'allongement Δl est proportionnel à la longueur initiale l_0 du solide :
si on met deux ressorts identiques bout à bout, le premier ressort transmet intégralement la force au second ressort, les deux s'allongent donc de la même quantité ; donc si avec un ressort on a un allongement Δl , avec deux ressorts l'allongement total est $2\Delta l$.
- l'allongement Δl est inversement proportionnel à la section du cylindre :
on conçoit également que si on met deux ressorts identiques en parallèle, chaque ressort exercera la moitié de la force de traction, l'allongement final sera donc $\Delta l/2$; si on double la section de la pièce, c'est comme si on mettait deux pièces côte à côte.

Si on veut caractériser le matériau en faisant abstraction de la forme de la pièce et de ses dimensions, on définit donc la **déformation** ou allongement relatif :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (1.2)$$

ε est sans dimension, on l'exprime parfois en % ($100 \times \Delta l / l_0$).

1.3.1.b. Loi de Hooke

Robert Hooke (Freshwater, île de Wight 18 juillet 1635 – Londres 3 mars 1703) était l'un des plus grand expérimentateur scientifique du 17^{me} siècle, et ainsi l'une des figures clés de la révolution scientifique.



En 1665 : Robert Hooke découvre des cellules dans du liège, puis dans des plantes vivantes, en utilisant les premiers microscopes.

En 1678 : il publie l'article « De Potentiâ Restitua », ou « Of spring ». Il contient les résultats de ses expériences sur les corps élastiques. C'est le premier article publié, dans lequel les propriétés élastiques des matériaux sont discutées. D'après ses résultats, il énonce : *« Prenez un ressort de 20, 30 ou 40 pieds, et accrochez sa partie haute à un crochet, et à l'autre bout attachez une balance pour recevoir les poids. Puis, avec un compas, prenez la distance du bas de la balance au sol en dessous, et notez cette dernière, puis mettez des poids dans ladite balance et mesurez la distance descendue par le ressort et notez-la. Comparez alors les différentes distances et vous verrez qu'elles restent toujours dans les mêmes proportions les unes des autres que celles que les poids font entre eux ».*

Robert Hooke a établi la relation entre la valeur des forces et des déformations qu'elles produisent. Cette relation linéaire entre la force et la déformation est appelée la **loi de Hooke**, qui plus tard a été utilisée comme la base sur laquelle le développement de la mécanique des corps élastiques a été construite. Elle s'exprime actuellement comme une loi entre déformation et contrainte :

$$\sigma = E \epsilon \tag{1.3}$$

E est le **module de Young**, qui est une caractéristique du matériau. E est également homogène à une pression ; il est souvent exprimé en giga-pascal (GPa).

Exemple de module de Young :

| Matériaux | E (GPa) |
|-----------------------|-----------|
| Cuivre | 124 |
| Fer | 196 |
| Acier de construction | 210 |
| Béton | 27 |
| Brique | 14 |
| Diamant | 1000 |
| Granite | 60 |
| Marbre | 26 |
| Verre | 69 |
| Bambou | 20 |
| Chêne | 12 |
| Fibre de carbone | 190 |
| Kevlar | 34,5 |
| Cheveux | 10 |
| Soie d'araignée | 60 |

1.3.1.c. Élargissement

Lorsque l'on exerce une traction ou une compression, on constate que la largeur du solide varie également, à l'inverse de l'allongement. La variation relative de dimension est proportionnelle à l'allongement relatif ε , le coefficient de proportionnalité s'appelle le **module de Poisson** (ou coefficient de Poisson) et est noté ν :

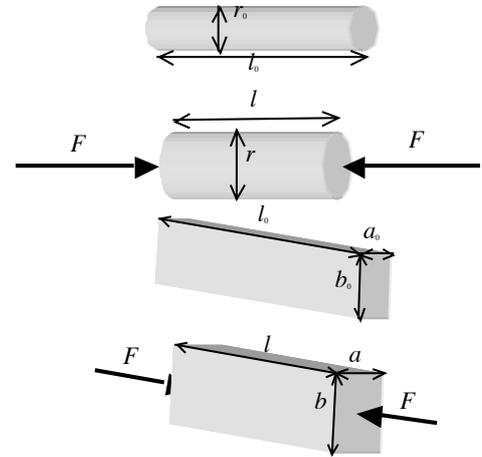
- Pour un cylindre :

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{r - r_0}{r_0} = -\nu \frac{\Delta l}{l_0} = -\nu \varepsilon$$

- Pour un parallélépipède rectangle :

$$\frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a - a_0}{a_0} = -\nu \frac{\Delta l}{l_0} = -\nu \varepsilon$$

$$\frac{\Delta b}{b_0} = \frac{b - b_0}{b_0} = -\nu \frac{\Delta l}{l_0} = -\nu \varepsilon$$



Considérons le volume d'un solide :

- Pour un solide cylindrique, on a :

$$V = l\pi r^2$$

Pour des petites variations, on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial l} dl + \frac{\partial V}{\partial r} dr$$

$$dV = \pi r^2 dl + 2l\pi r dr$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dl}{l} + \frac{2dr}{r}$$

soit, par rapport aux données initiales :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{2\Delta r}{r_0}$$

soit :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon - 2\nu\varepsilon = (1 - 2\nu)\varepsilon$$

- Pour un solide parallélépipédique, on a :

$$V = lab$$

Pour des petites variations, on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial l} dl + \frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial b} db$$

$$dV = abd l + lbd a + lab b$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dl}{l} + \frac{da}{a} + \frac{db}{b}$$

soit, par rapport aux données initiales :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0}$$

soit :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon - \nu \varepsilon - \nu \varepsilon = (1 - 2\nu)\varepsilon \quad (1.4)$$

On voit donc que :

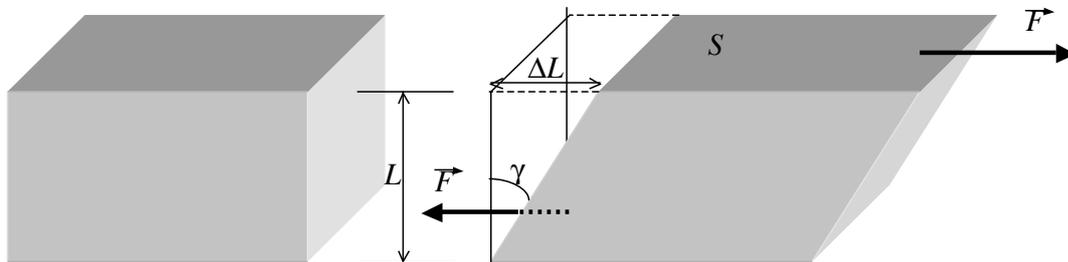
- si $\nu > 0,5 \Rightarrow V_0 > V$: le volume diminue en traction ($\Delta l = l - l_0 > 0$ donc $r - r_0 < 0$) et augmente en compression ($\Delta l = l - l_0 < 0$ donc $r - r_0 > 0$) (cas exceptionnel)
- si $\nu < 0,5 \Rightarrow V_0 < V$: le volume augmente en traction et diminue en compression (cas général)

Exemple de module de Poisson :

| Matériaux | ν |
|-----------|-----------|
| Acier | 0,3 |
| Basalte | 0,2-0,25 |
| Granite | 0,2-0,25 |
| Glace | 0,31-0,36 |
| Schiste | 0,1-0,2 |
| Grès | 0,1-0,3 |
| Calcaire | 0,15-0,3 |
| Marbre | 0,2-0,3 |

1.3.2. Cisaillement

Si on considère un parallélépipède rectangle de surface supérieure S et de hauteur L , le cisaillement est une variation de l'angle, qui n'est plus droit. Cela correspond à des forces s'exerçant parallèlement à la face (forces tangentielles égales et opposées).



On définit de même la contrainte comme étant la force divisée par la surface sur laquelle elle s'exerce ; cette contrainte est appelée **cission** et notée τ (exprimée en méga-pascal MPa). La cission est définie par le rapport de la force agissant tangentiellement sur la surface :

$$\tau = \frac{F}{S}$$

La déformation est l'écart à l'angle droit γ , appelé **cisaillement** (exprimé en radians). Cette déformation est donnée par la tangente de l'angle. Comme les déformations sont petites on utilise l'approximation des petits angles :

$$\tan \gamma = \gamma = \frac{\Delta L}{L}$$

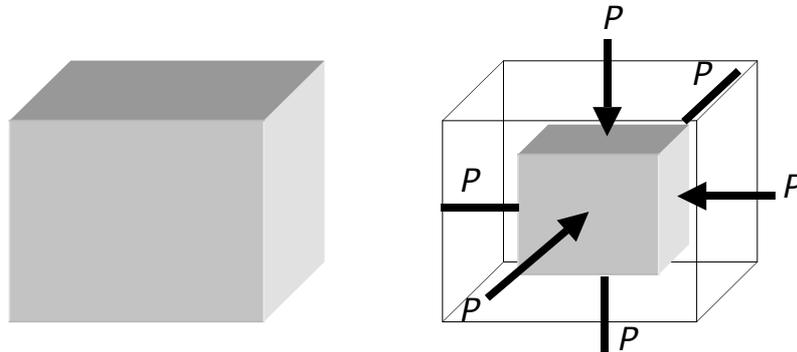
On a toujours une loi linéaire entre contrainte et déformation (loi de Hooke) et on définit le coefficient de proportionnalité comme le **module de cisaillement** G ; il est exprimé en giga-pascal (GPa). :

$$\tau = G \gamma \quad (1.5)$$

G est aussi appelé le *module d'élasticité en cisaillement* ou *module de rigidité*.

1.3.3. Compression isostatique

Une compression isostatique est l'exercice d'une pression isotrope, c'est-à-dire qui a la même valeur dans toutes les directions.



Considérons un solide de volume V_0 soumis à une pression p_0 ; exerçons une compression isostatique pour faire passer la pression de p_0 à p . Si on désigne par V le volume du solide, la variation de volume relative ($\Delta V = V - V_0$) est proportionnelle à la variation de pression :

$$p - p_0 = \Delta p = -K \frac{\Delta V}{V_0}$$

où K est le **module d'incompressibilité** (*bulk modulus* en anglais) ; il est exprimé en giga-pascal (GPa).

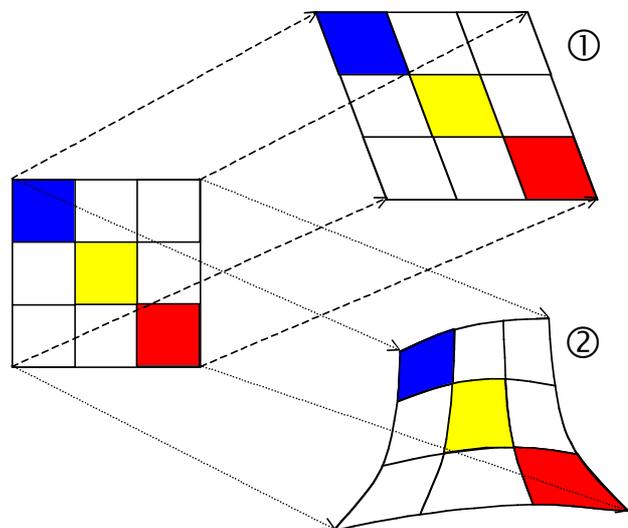
Exemple de module d'incompressibilité :

| Matériaux | K (GPa) |
|-----------|-----------|
| Acier | 160 |
| Eau | 2,2 |

1.3.4. Types de déformation

La déformation d'un corps est de divers types :

- Elle est *continue et homogène* quand les lignes droites inscrites dans un volume demeurent droites et les lignes parallèles demeurent parallèles après la déformation (cas ①).
- Elle est *continue et hétérogène* quand au moins une fraction des lignes droites inscrites dans un volume se met à former des lignes courbes, les lignes parallèles perdant leur parallélisme après la déformation (cas ②).
- Elle est *discontinue* lorsque le volume, en plus d'avoir subi une déformation homogène ou hétérogène, est sectionné.



1.3.5. Cas des grandes déformations

La définition de la déformation ε dépend du trajet suivi. Elle est définie comme :

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0} \quad \text{soit} \quad l = l_0 + \varepsilon l_0$$

Soit deux déformations ε_1 et ε_2 . Si l'on fait les déformations en une étape, la longueur finale est :

$$l = l_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (1.6)$$

Si on fait la première déformation ε_1 , la première longueur est :

$$l_1 = l_0(1 + \varepsilon_1)$$

qui devient la nouvelle longueur initiale pour la deuxième déformation ε_2 . La longueur finale est alors :

$$l = l_1(1 + \varepsilon_2) = l_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$l = l_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) \quad (1.7)$$

On voit alors que les équations (1.6) et (1.7) sont équivalentes si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ll 1$. C'est l'hypothèse des petites déformations.

Pour les grandes déformations, on peut utiliser une autre définition de la déformation :

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

dans le cas des petites déformations (l et l_0 proches), le développement limité de cette formule redonne la déformation ε des petites déformations :

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_0 - l_0 + l}{l_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{l-l_0}{l_0}\right)$$

or :

$$\ln(1+x) = x \quad \text{si} \quad -1 < x \leq 1$$

Donc, dans le cas des petites déformations, on retrouve :

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$$

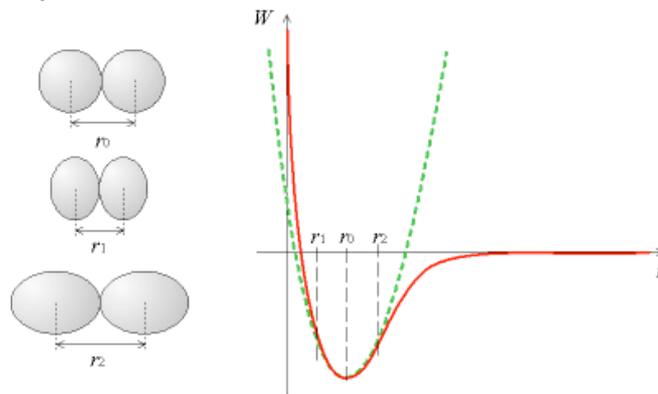
1.4. Pourquoi les lois sont-elles linéaires ?

Comme il a été dit au § 1.2.2., le régime linéaire apparaît lorsque les contraintes ne sont pas très fortes. Dans ce cas, pour de petites variations, la loi peut localement se remplacer par un développement limité du premier ordre ou « approximation linéaire » (si la tangente de la loi n'est pas horizontale au point considéré). La loi élastique linéaire n'est donc en fait qu'une approximation linéaire du comportement réel.

En fait, la validation de l'approximation linéaire se trouve dans la forme du potentiel interatomique $W(r)$, où r est la distance entre deux atomes. Au repos, la distance entre deux atomes est r_0 . Si l'on s'éloigne un peu de cette valeur, l'énergie W augmente. On peut localement approcher la loi de W par une parabole (courbe en pointillés) ; il s'agit en fait d'un développement limité au second ordre.

On peut alors écrire :

$$W(r) = W_0 + k(r - r_0)^2$$



La force étant la dérivée de l'énergie potentielle, les atomes sont soumis à une force de rappel (qui tend à faire revenir à r_0) qui vaut :

$$F = 2k(r - r_0)$$

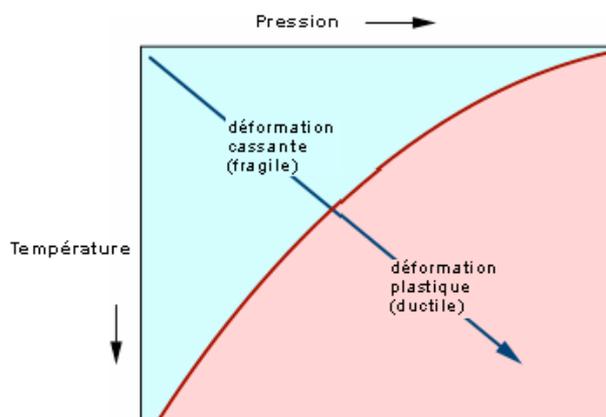
qui est bien une loi linéaire.

1.5. Compléments : Déformation des roches

Lorsqu'elle est soumise à des contraintes, la croûte terrestre se déforme. On définit alors la contrainte comme la force appliquée à une certaine unité de volume. Tout solide possède une force qui lui est propre pour résister à la contrainte. Lorsque la contrainte dépasse la résistance du matériel, l'objet est déformé et il s'ensuit un changement dans la forme et/ou le volume. Il existe des cas où la déformation n'est cependant pas perceptible à l'œil nu mais détectée seulement par des appareils sensibles, et c'est le cas de la déformation du matériel solide lors d'un tremblement de terre avant qu'il y ait bris.

Les contraintes peuvent déformer tout aussi bien un volume de pâte à modeler que tout un segment de la croûte terrestre. La déformation peut être permanente ou non. On reconnaît trois principaux types de déformations qui affectent la croûte terrestre : élastique, plastique et cassante (il existe un quatrième type la déformation visqueuse qui s'applique aux liquides).

Trois paramètres importants doivent être considérés lorsqu'on applique les concepts de contrainte-déformation aux matériaux de la croûte terrestre : la température, la pression et le temps. **Température** et **pression** augmentent avec la profondeur dans la croûte terrestre et modifient le comportement des matériaux. D'une manière très générale, on aura la relation suivante :



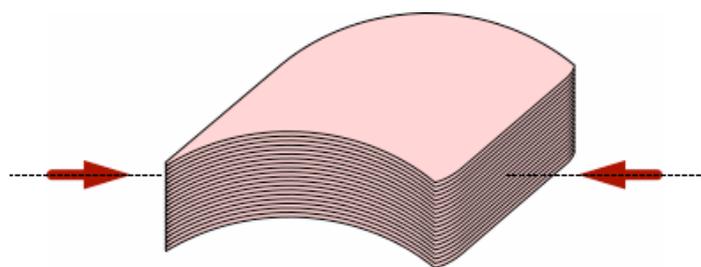
La ligne fléchée symbolise une augmentation progressive des conditions de température et de pression à mesure que l'on s'enfonce dans la croûte terrestre. Cette relation nous indique que, de manière générale, les roches de surface seront déformées de façon cassante, alors que les roches en profondeur le seront de façon plastique. C'est-à-dire que pour un type de roche donné, celui-ci peut se retrouver sous un état fragile ou ductile, selon la profondeur à laquelle il se trouve dans la croûte terrestre.

Le **temps** est aussi un facteur très important lorsqu'on discute de déformation. Si on étire brusquement (temps court) un cylindre de pâte à modeler, il casse ; si on y va plutôt lentement (temps long), il se déforme de façon plastique. En ce qui concerne la déformation des roches, le facteur temps, qui se mesure ici en millions d'années, se doit d'être considéré. Il est difficile d'imaginer qu'on puisse plier des couches de grès par exemple, ... à moins qu'on y mette le temps géologique.

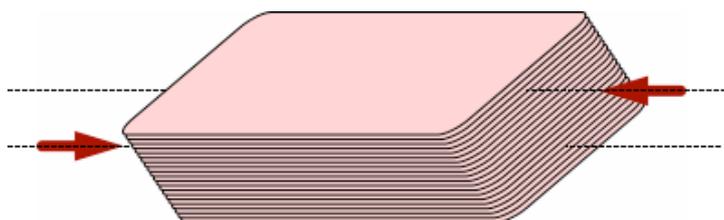
Un autre paramètre à ne pas négliger est la **composition de la roche**. Certaines roches sont cassantes de nature (comme les calcaires, les grès, les granites), d'autres plutôt plastiques (comme les roches argileuses).

Les roches sédimentaires sont à l'origine disposées en couches à peu près horizontales puisqu'elles proviennent de la transformation de sédiments qui se sont déposés à l'horizontale. Mais on les retrouve souvent inclinées, déformées, affectées par des plis et des failles, particulièrement dans les chaînes de montagnes. Les contraintes responsables de la déformation des roches de la croûte terrestre ont des sources multiples. Les déformations résultent le plus souvent des mouvements des plaques lithosphériques qui se traduisent par des contraintes qui modifient la forme des roches, leur volume et, dans certains cas, leur composition chimique et minéralogique.

Il y a fondamentalement deux types de contraintes qui déforment les roches : les contraintes de compression et celles de traction. Dans la **compression**, les forces convergent ; elles peuvent être coaxiales ou non. La déformation d'un jeu de carte sous contraintes de compression illustre la différence. Dans le cas d'une contrainte de compression coaxiale, les cartes vont s'arquer, comme illustré ici :



Si les contraintes ne sont pas coaxiales, il va se développer du cisaillement ; le jeu de carte se déforme par le glissement des cartes les unes sur les autres :

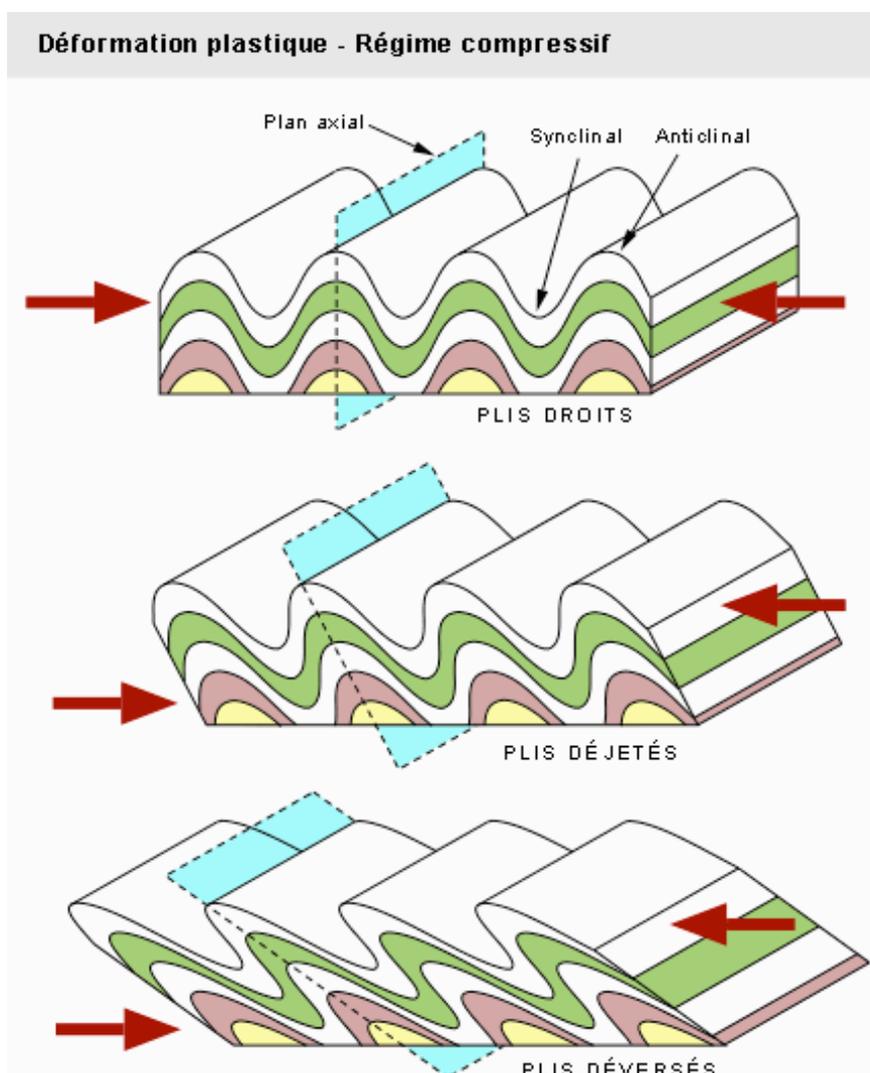


Dans la **traction**, les contraintes divergent et ont pour effet d'étirer le matériel.

Les schémas qui suivent illustrent la déformation des couches de roches sous des régimes de contraintes en compression et en traction. Prenons comme volume de départ, un empilement de couches de roches non déformées à l'horizontal.

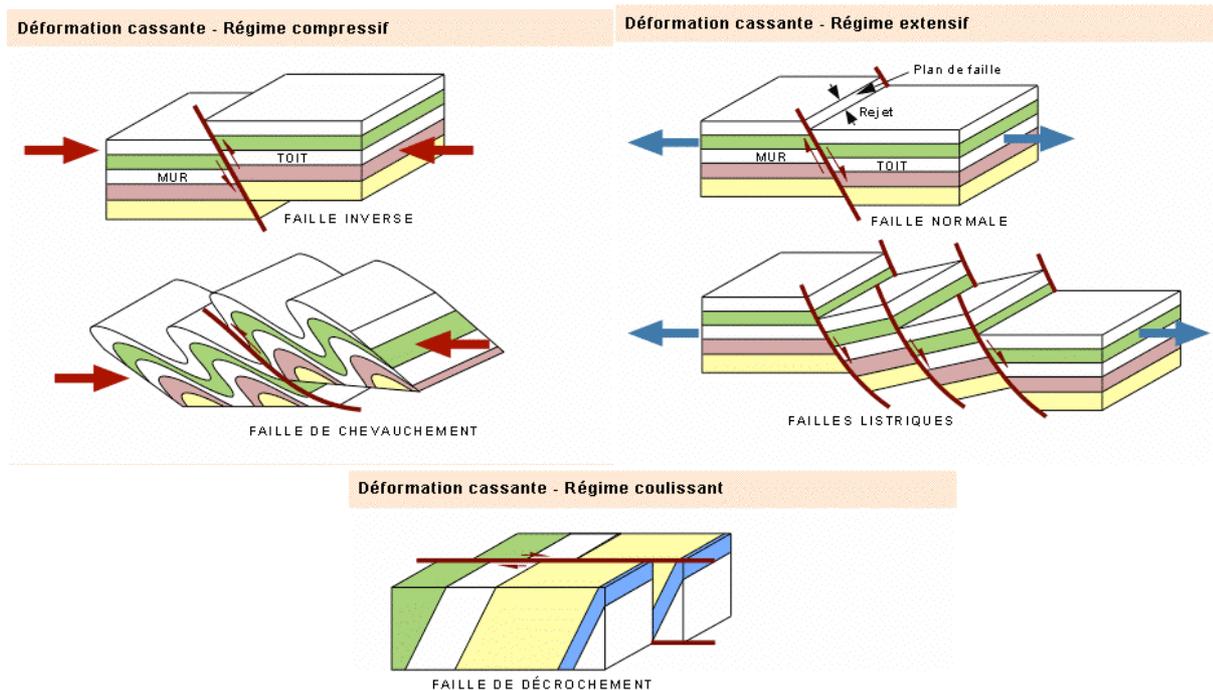


Les plis constituent la manifestation d'un comportement **plastique** (ductile) des roches sous l'effet de contraintes de compression.



Pour décrire les plis, on utilise les termes d'anticlinal quand le pli se ferme vers le haut et de synclinal lorsqu'il se ferme vers le bas. Les plis sont dits droits lorsque le plan axial est vertical. À l'autre extrême (non illustré ici), il y a les plis couchés, lorsque le plan axial est horizontal. Entre les deux, il y a les plis déjetés et les plis déversés. Les plis droits résultent de contraintes de compression coaxiales, les plis déjetés et déversés de contraintes qui ne sont pas coaxiales.

La déformation **cassante** se traduit par des plans de cassures, les failles.



Par convention, on nomme toit le compartiment qui se situe au-dessus du plan de faille, et mur celui qui est au-dessous. Le rejet est le déplacement net des deux compartiments. Les contraintes de compression produisent des failles inverses (plan de faille abrupte) ou de chevauchement (plan de faille près de l'horizontale). Dans ces deux cas, le toit monte par rapport au mur. Les contraintes de tension produisent des failles normales et listriques : le toit descend par rapport au mur. Les failles de décrochement (ou de coulissage) constituent un cas particulier ; elles se produisent par le déplacement de deux compartiments l'un par rapport à l'autre dans un plan horizontal. On les retrouve en régimes compressifs ou extensifs.

Une application très importante de tout cela, c'est qu'en étudiant la géométrie des terrains déformés, le géologue est en mesure de définir la nature des contraintes qui ont produit une géométrie donnée et d'en déduire l'histoire de la dynamique d'une région.

Chapitre 2

Contrainte et déformation dans les solides terrestres

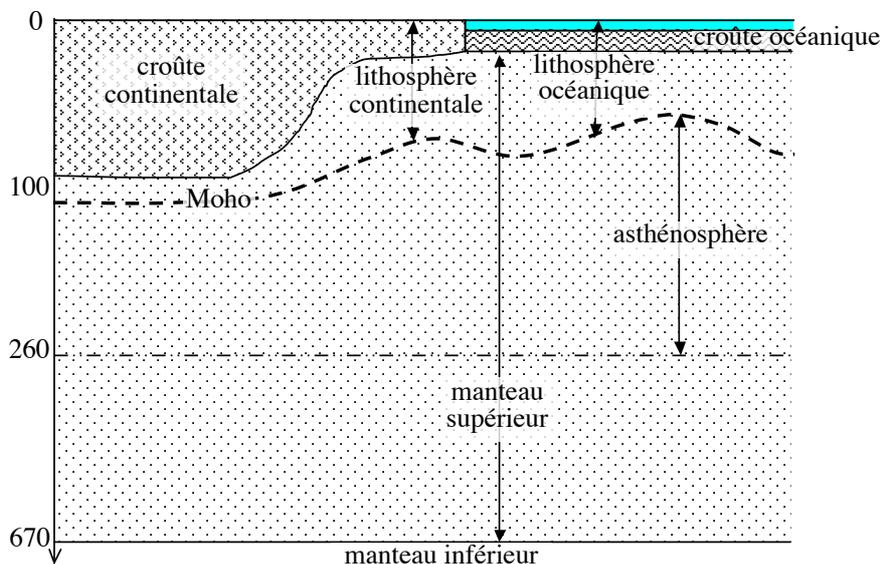
2.1. Structure de la Terre

Le modèle PREM (*Preliminary Reference Earth Model*) décrit la structure idéale de la Terre découpée en enveloppes sphériques emboîtées, séparées les unes des autres par des discontinuités soulignées par des variations significatives de vitesses des ondes sismiques. C'est un modèle sismologique. Il a conduit ensuite à un modèle minéralogique, car la vitesse des ondes sismiques est quasi-proportionnelle à la densité des roches traversées et donc à la densité de leurs minéraux.

Le PREM est formé de :

1. La croûte continentale qui va jusqu'à une profondeur de 25 à 90 km, mais qui possède une épaisseur moyenne de 35 km, et une masse volumique de 2650 à 2800 kg/m³, ou la croûte océanique de 5 à 8 km d'épaisseur et de masse volumique 2900 kg/m³.
2. La discontinuité de Mohorovicic, dite Moho, qui marque un premier saut de vitesse sismique ($\Delta v = 1,2$ à 2 km/s).
3. La partie supérieure du manteau supérieur qui va jusqu'à 100 km de profondeur avec une masse volumique de 3300 kg/m³.
4. La partie intermédiaire du manteau supérieur, ou asthénosphère, qui va de 100 à 260 km de profondeur.
5. La partie inférieure du manteau supérieur qui va de 260 à 670 km de profondeur.
6. Le manteau inférieur qui va de 670 à 2890 km de profondeur.
7. La discontinuité de Gutenberg (ou zone D'').
8. Le noyau liquide qui va de 2900 à 5150 km de profondeur.
9. La graine solide du noyau qui va de 5150 à 6370 km de profondeur.

Les parties 1 à 3 constituent la lithosphère rigide.



2.2. Contrainte dans la Terre solide

La tectonique des plaques résulte des forces volumiques de gravitation qui agissent sur le manteau et la croûte solides. Les forces gravitationnelles sont le résultat d'une augmentation de la pression avec la profondeur de la Terre ; les roches doivent supporter le poids du matériel qui se trouve au-dessus et qui augmente avec la profondeur.

À un rayon terrestre R donné, il existe des variations de densité associées à des variations de température (due au chauffage par la radioactivité naturelle dans le manteau et la croûte). Ces variations de densité sont à l'origine des variations de pression qui engendrent des variations de force gravitationnelle pour une profondeur donnée. On n'a donc pas d'équilibre statique avec la pression. Ces variations horizontales de pression (et donc de force gravitationnelle) produisent des variations dans les contraintes qui sont à l'origine d'un mouvement de dérive associé à la tectonique des plaques.

Les contraintes sont des forces agissant par unité de surface. On distingue, pour la Terre, les contraintes :

- normales : elles sont transmises perpendiculairement à une surface ;
- de cisaillement : elles sont transmises parallèlement à une surface.

La valeur moyenne de la contrainte normale est la pression.

Les contraintes dans un solide élastique engendrent des déformations. Les changements en déformation peuvent être directement mesurés par des techniques géodétiques.

2.3. Force de volume et force de surface

Les forces qui agissent sur un élément de solide sont deux types : les forces de volume et les forces de surface.

Considérons une colonne verticale de matière rocheuse de surface dS . À la profondeur y , la force de gravitation est :

$$F_g = mg = \rho Vg = \rho y dS g \quad (2.1)$$

La force de gravitation dépend de la masse volumique (ou de la masse) de toute la solide : c'est une force de volume.

Comme la colonne de roche est à l'équilibre, c'est que la force de gravitation est contrebalancée par une force verticale ascendante qui agit sur la surface dS à la profondeur y ; cette force s'écrit :

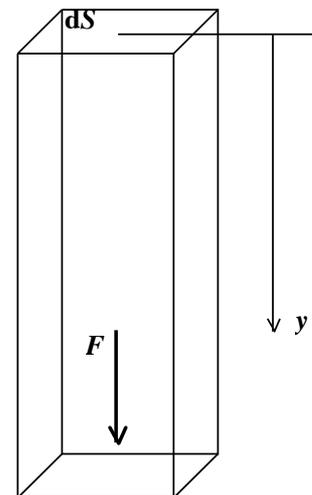
$$F_s = \sigma_{yy} dS \quad (2.2)$$

Si on considère que la masse volumique ρ est constante et qu'il n'y a pas de force qui agit sur les surfaces latérales, la force F_s est une force de surface. Dans ce cas σ_{yy} est la force par unité de surface que l'on appelle **contrainte**.

Comme il y a équilibre des forces :

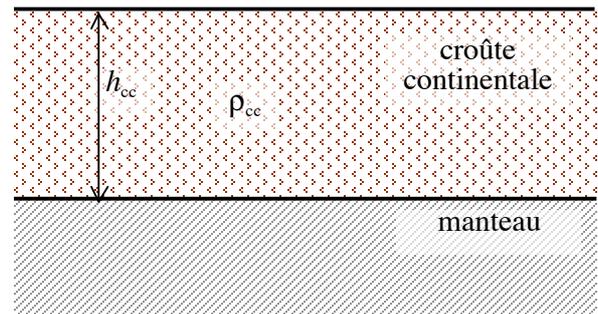
$$\sigma_{yy} = \rho g y \quad (2.3)$$

Cette force de surface est connue sous le nom de **contrainte lithostatique** ou pression.



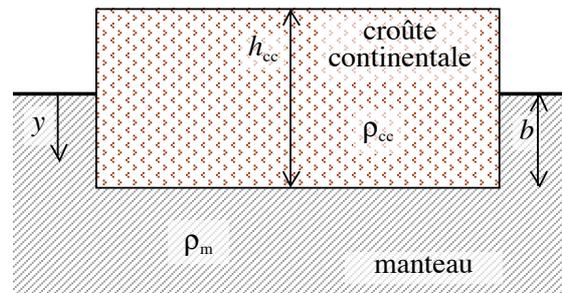
Calculons la valeur typique de la contrainte lithostatique dans la lithosphère. Considérons que la croûte continentale possède une épaisseur moyenne de 35 km et que sa masse volumique est de 2750 kg/m^3 , nous avons :

$$\sigma_{yy} = 2750 \times 9,81 \times 35 \times 10^3 = 944,2 \text{ MPa}$$



2.4. Équilibre hydrostatique – Isostasie

On peut considérer les continents comme des blocs qui flottent sur le manteau rocheux. La masse volumique moyenne des continents ($\rho_{cc} = 2700 \text{ kg/m}^3$) est inférieure à la masse volumique moyenne du manteau ($\rho_m = 3300 \text{ kg/m}^3$). Donc les continents “flottent”. Ainsi, le **principe d'Archimède** s'applique aux continents : ils sont supportés par une force verticale ascendante égale au poids des roches déplacées.



À la base du continent :

$$\sigma_{yy} = \rho_{cc} g h_{cc}$$

À la même profondeur dans le manteau :

$$\sigma_{yy} = \rho_m g b$$

Le principe d'Archimède dit que ces contraintes (pressions) sont égales. C'est l'équilibre hydrostatique ; donc :

$$\rho_{cc} h_{cc} = \rho_m b$$

soit :

$$b = \frac{\rho_{cc}}{\rho_m} h_{cc}$$

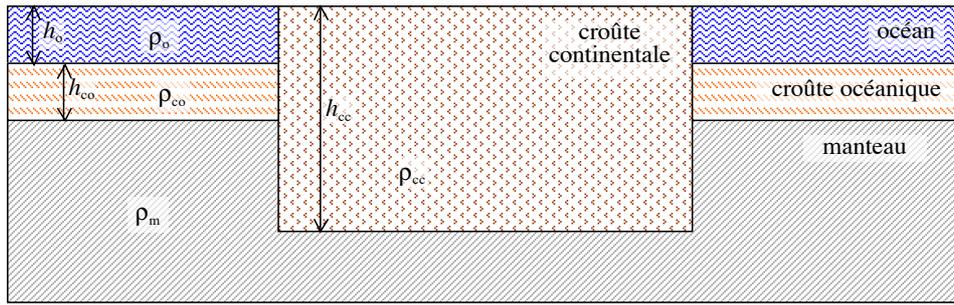
Ainsi le continent s'enfonce dans le manteau, mais flotte. La partie du continent qui surnage a une hauteur par rapport au manteau :

$$h_{cc} - b = h_{cc} - \frac{\rho_{cc}}{\rho_m} h_{cc} = h_{cc} \left(1 - \frac{\rho_{cc}}{\rho_m} \right)$$

si $h_{cc} = 35 \text{ km}$, on a $h_{cc} - b = 5,8 \text{ km}$.

C'est la profondeur moyenne des océans s'ils affleurent les continents, mais c'est une valeur approximative. L'application de l'équilibre hydrostatique à la croûte continentale est appelée **principe de l'isostasie**.

On peut utiliser un modèle plus réaliste en considérant la croûte océanique et les océans.



Si on applique le principe de l'isostasie, on a alors :

$$\rho_{cc} h_{cc} = \rho_o h_o + \rho_{co} h_{co} + \rho_m (h_{cc} - h_o - h_{co})$$

soit une profondeur d'océan :

$$h_o = \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m - \rho_o} h_{cc} - \frac{\rho_m - \rho_{co}}{\rho_m - \rho_o} h_{co}$$

Avec $h_{cc} = 35 \text{ km}$, $\rho_{cc} = 2700 \text{ kg/m}^3$, $h_{co} = 6 \text{ km}$, $\rho_{co} = 2900 \text{ kg/m}^3$, $\rho_m = 3300 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_o = 1000 \text{ kg/m}^3$, on a :

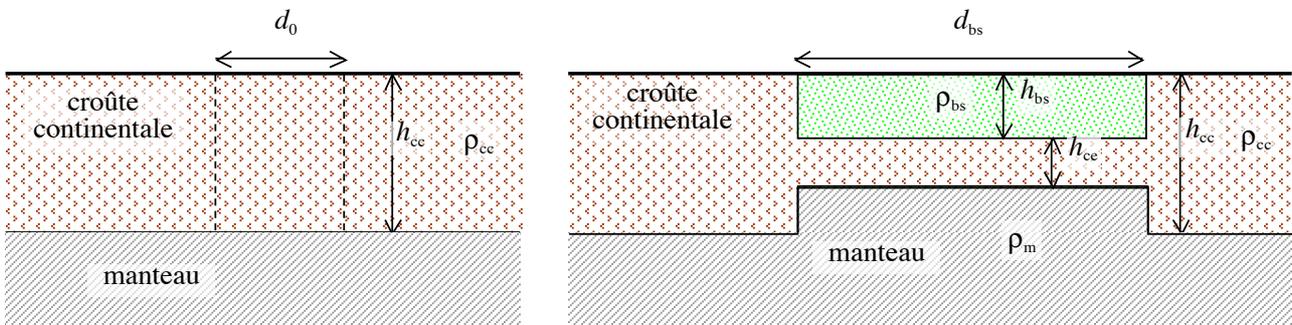
$$h_o = 8,08 \text{ km}$$

2.5. Facteur d'étirement et de compression

2.5.1. Facteur d'étirement

Le tassement (subsidence) de la surface de la croûte continentale engendre (la plupart du temps) la formation d'un bassin sédimentaire. Si on considère que la surface de la croûte continentale est initialement au niveau de la mer, et que cette surface se tasse, des sédiments vont se déposer de telle manière que la surface des sédiments soit au niveau de la mer. Une des causes de ce tassement de la croûte continentale est l'amincissement de la croûte : lorsque la croûte s'amincit, le principe d'isostasie implique que la surface se tasse. On peut utiliser un modèle simple de tassement : le modèle d'étirement de la croûte (Mc Kenzie 1978).

On considère la croûte continentale initialement d'épaisseur h_{cc} et de masse volumique ρ_{cc} . Soit une largeur initiale d_0 qui s'étire pour devenir une largeur de bassin sédimentaire d_{bs} .



Le facteur d'étirement est défini comme :

$$\alpha = \frac{d_{bs}}{d_0} \tag{2.4}$$

(Le facteur d'étirement est défini de façon que $\alpha \geq 1$).

Le bassin se remplit de sédiments de masse volumique ρ_{bs} (avec $\rho_{bs} < \rho_{cc}$) et a une profondeur h_{bs} . La croûte continentale étirée a une épaisseur de h_{ce} (de masse volumique ρ_{cc}), mais la croûte continentale a toujours une épaisseur moyenne de h_{cc} .

Par conservation du volume de croûte étirée, on a :

$$d_0 h_{cc} = d_{bs} h_{ce} \quad \Rightarrow \quad h_{ce} = \frac{d_0}{d_{bs}} h_{cc} = \frac{1}{\alpha} h_{cc}$$

(Remarque : on parle de volume, mais on calcule en fait une surface : on considère que la longueur ne varie pas, seulement la largeur s'étire.)

Le principe d'isostasie donne :

$$\rho_{cc} h_{cc} = \rho_{bs} h_{bs} + \rho_{cc} h_{ce} + \rho_m (h_{cc} - h_{bs} - h_{ce})$$

On obtient l'épaisseur du bassin :

$$h_{bs} (\rho_{bs} - \rho_m) = \rho_{cc} h_{cc} - \rho_{cc} h_{ce} - \rho_m h_{cc} + \rho_m h_{ce} = (h_{cc} - h_{ce}) (\rho_m - \rho_{cc})$$

Or $h_{ce} = \frac{1}{\alpha} h_{cc}$, et donc :

$$h_{bs} (\rho_{bs} - \rho_m) = h_{cc} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) (\rho_m - \rho_{cc})$$

$$h_{bs} = h_{cc} \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m - \rho_{bs}} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)$$

Avec $h_{cc} = 35$ km, $\rho_{cc} = 2700$ kg/m³, $\rho_m = 3300$ kg/m³, $\rho_{bs} = 2500$ kg/m³ et si on considère un facteur d'étirement de $\alpha = 4$, on a :

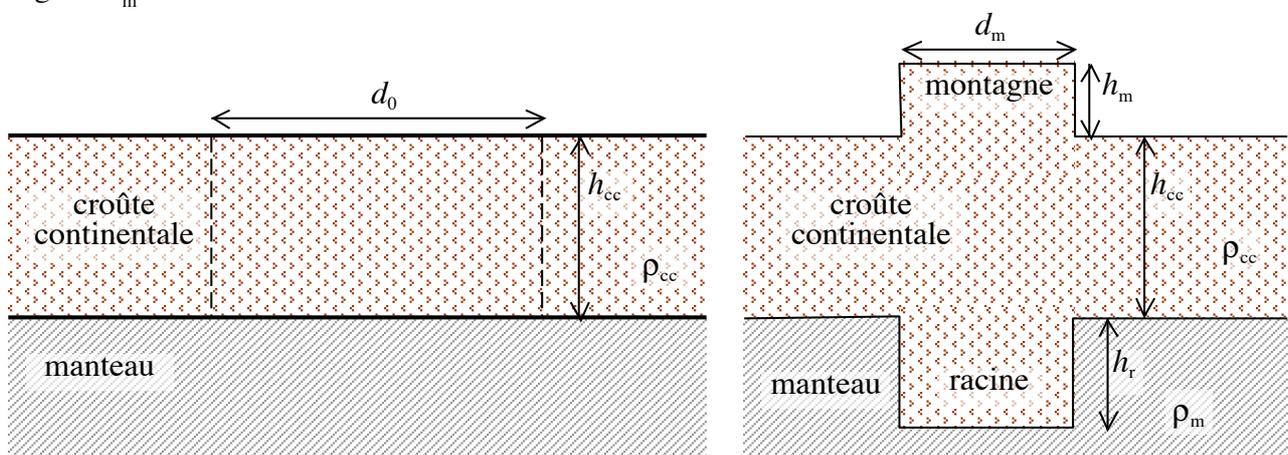
$$h_{bs} = 19,69 \text{ km}$$

Si la croûte s'étire indéfiniment, soit si $\alpha \rightarrow \infty$, alors :

$$h_{bs} \rightarrow h_{cc} \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m - \rho_{bs}} = 26,25 \text{ km}$$

2.5.2. Facteur de compression

Au contraire, si la croûte continentale ne s'étire pas, mais se contracte, on considère que l'on passe d'une portion de croûte de largeur d_0 que l'on comprime pour former une chaîne de montagne de largeur d_m .



On définit le facteur de compression :

$$\beta = \frac{d_0}{d_m} \quad (2.5)$$

(Le facteur de compression est défini de façon que $\beta \geq 1$).

(Remarque : attention à la forme de $\alpha = \frac{d_b}{d_0}$ et de $\beta = \frac{d_0}{d_m}$, d_0 n'est pas à la même place...)

Par conservation de "volume" de croûte compressée, on a :

$$d_0 h_{cc} = d_m (h_m + h_{cc} + h_r) \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{d_0}{d_m} = \frac{h_m + h_{cc} + h_r}{h_{cc}}$$

soit :

$$\beta h_{cc} = h_m + h_{cc} + h_r \quad \Rightarrow \quad h_r = h_{cc} (\beta - 1) - h_m$$

Appliquons le principe de l'isostasie :

$$\rho_{cc} (h_m + h_{cc} + h_r) = \rho_{cc} h_{cc} + \rho_m h_r$$

$$\rho_{cc} h_m + \rho_{cc} h_r = \rho_m h_r$$

soit :

$$\rho_{cc} h_m + \rho_{cc} [h_{cc} (\beta - 1) - h_m] = \rho_m [h_{cc} (\beta - 1) - h_m]$$

$$\rho_{cc} h_m + \rho_{cc} h_{cc} (\beta - 1) - \rho_{cc} h_m = \rho_m h_{cc} (\beta - 1) - \rho_m h_m$$

$$\rho_{cc} h_{cc} (\beta - 1) = \rho_m h_{cc} (\beta - 1) - \rho_m h_m$$

La hauteur de la chaîne de montagne est donc :

$$h_m = \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m} h_{cc} (\beta - 1)$$

Et la hauteur de la racine est :

$$h_r = h_{cc} (\beta - 1) - h_m = h_{cc} (\beta - 1) - \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m} h_{cc} (\beta - 1) = h_{cc} (\beta - 1) \left[1 - \frac{\rho_m - \rho_{cc}}{\rho_m} \right]$$

$$h_r = h_{cc} (\beta - 1) \frac{\rho_{cc}}{\rho_m}$$

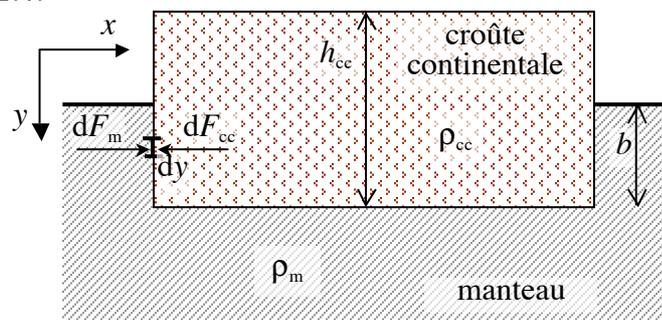
Avec $h_{cc} = 35$ km, $\rho_{cc} = 2700$ kg/m³, $\rho_m = 3300$ kg/m³ et un facteur de compression de $\beta = 2$, on a :

$$h = 6,36 \text{ km}$$

$$h_r = 28,63 \text{ km}$$

2.6. Contrainte déviatorique

Reprenons l'exemple du § 2.4.



Dans le manteau, à la profondeur y en dessous de la surface, s'exerce une différence de pression (contrainte lithostatique) par rapport à la surface :

$$\Delta p_m = \rho_m g y$$

Cette pression crée sur l'élément de longueur verticale dy une force :

$$\Delta F_m = \rho_m g y dy$$

Soit une force totale de pression (due au manteau) sur toute la paroi verticale (et par unité de longueur) :

$$F_m = \int_0^b \rho_m g y dy = \frac{1}{2} g \rho_m b^2$$

De même, la croûte continentale engendre une différence de pression à la profondeur y :

$$\Delta p_{cc} = \rho_{cc} g y$$

Soit sur l'élément de longueur verticale dy :

$$\Delta F_{cc} = \rho_{cc} g y dy$$

Et donc une force totale de pression (due à la croûte continentale) sur la paroi verticale :

$$F_{cc} = \int_0^{h_{cc}} \rho_{cc} g y dy = \frac{1}{2} g \rho_{cc} h_{cc}^2$$

Si le bloc de croûte continentale est en équilibre, on doit avoir $F_{cc} = F_m$, et donc :

$$\rho_{cc} h_{cc}^2 = \rho_m b^2 \quad (2.6)$$

Le principe de l'isostasie (§ 2.4.) nous donne la condition d'équilibre à la profondeur b :

$$\rho_{cc} h_{cc} = \rho_m b \quad (2.7)$$

Or comme $h_{cc} > b$, d'après le principe d'isostasie, on doit avoir $\rho_{cc} h_{cc}^2 > \rho_m b^2$ — ce qui est en contradiction avec la relation (2.6). D'ailleurs si on calcule les valeurs de ces forces avec les résultats du § 2.4. ($h_{cc} - b = 5,8$ km soit $b = 29,2$ km), on voit bien qu'il n'y a pas égalité entre les forces :

$$F_m = \frac{1}{2} g \rho_m b^2 = \frac{1}{2} \times 9,81 \times 3300 \times (29,2 \times 10^3)^2 = 1,38 \times 10^{13} \text{ N}$$

$$F_{cc} = \frac{1}{2} g \rho_{cc} h_{cc}^2 = \frac{1}{2} \times 9,81 \times 2750 \times (35 \times 10^3)^2 = 1,65 \times 10^{13} \text{ N}$$

Ainsi pour avoir équilibre, d'après le principe d'isostasie, il faut impliquer l'existence d'une contrainte supplémentaire.

On a défini au § 2.3. la contrainte σ_{yy} (défini comme une force de surface) comme la contrainte s'exerçant sur la surface perpendiculaire à l'axe y et dirigée suivant l'axe y . On peut définir de même les contraintes σ_{xx} et σ_{zz} qui s'exercent sur les parois verticales.

Pour avoir équilibre, on doit avoir une contrainte horizontale s'exerçant sur la surface perpendiculaire à l'axe x et dirigée suivant l'axe x : σ_{xx} . Cette contrainte est composée de la contribution lithostatique $\rho_{cc} g y$ et, pour avoir équilibre, d'une contribution tectonique constante $\Delta\sigma_{xx}$, soit :

$$\sigma_{xx} = \rho_{cc} g y + \Delta\sigma_{xx}$$

La force horizontale est alors :

$$F_{cc} = \int_0^{h_{cc}} \sigma_{xx} dy = \int_0^{h_{cc}} (\rho_{cc}gy + \Delta\sigma_{xx}) dy = \frac{1}{2}\rho_{cc}gh_{cc}^2 + \Delta\sigma_{xx}h_{cc}$$

Ainsi à l'équilibre, on a :

$$\frac{1}{2}\rho_{cc}gh_{cc}^2 + \Delta\sigma_{xx}h_{cc} = \frac{1}{2}\rho_m gb^2$$

soit :

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{1}{h_{cc}} \frac{1}{2} g (\rho_m b^2 - \rho_{cc} h_{cc}^2)$$

On obtient $b = \frac{\rho_{cc}}{\rho_m} h_{cc}$ de la relation (2.7), et ainsi :

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{1}{h_{cc}} \frac{1}{2} g \left(\rho_{cc}^2 \frac{1}{\rho_m} h_{cc}^2 - \rho_{cc} h_{cc}^2 \right) = \frac{1}{2} g \rho_{cc} h_{cc} \left(\frac{\rho_{cc}}{\rho_m} - 1 \right)$$

Comme $\rho_{cc} < \rho_m$, on a $\frac{\rho_{cc}}{\rho_m} - 1 < 0$, et on note :

$$\Delta\sigma_{xx} = -\frac{1}{2} g \rho_{cc} h_{cc} \left(1 - \frac{\rho_{cc}}{\rho_m} \right)$$

Ainsi, une contrainte de tension est nécessaire pour maintenir l'intégrité du bloc continental. De plus le fait que $\Delta\sigma_{xx} < 0$ montre que la contrainte de tension s'exerce dans le sens du manteau vers le bloc de croûte continentale (dans le calcul, on a rajouté la force due à la contrainte de tension à la force due à la croûte continentale), et elle vaut :

$$\Delta\sigma_{xx} = -\frac{1}{2} \times 9,81 \times 2750 \times 35 \times 10^3 \times \left(1 - \frac{2750}{3300} \right) = -78 \text{ MPa}$$

🔥 Dans la littérature géologique, la convention est :

Contrainte de compression $\Delta\sigma_{xx} > 0$

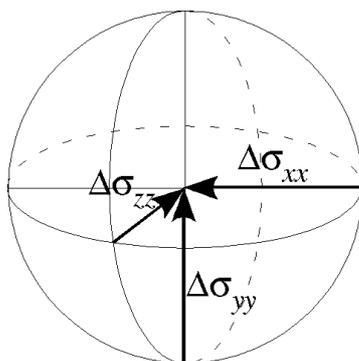
Contrainte de tension $\Delta\sigma_{xx} < 0$

contrairement à la convention pour l'élasticité.

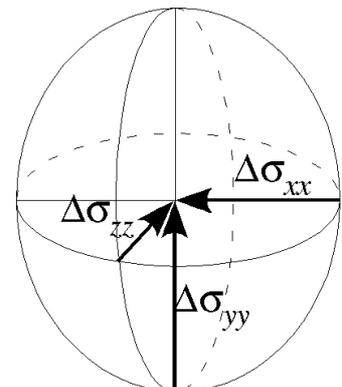
La contrainte de tension $\Delta\sigma_{xx}$ (ou $\Delta\sigma_{zz}$) est aussi appelée **contrainte déviatorique**. Les valeurs typiques des contraintes déviatorique dans les continents sont de l'ordre de 10 à 100 MPa.

On peut alors construire l'ellipsoïde des contraintes pour caractériser un milieu :

L'ellipsoïde est une sphère. Les contraintes sont de type hydrostatique : le milieu est isotrope.

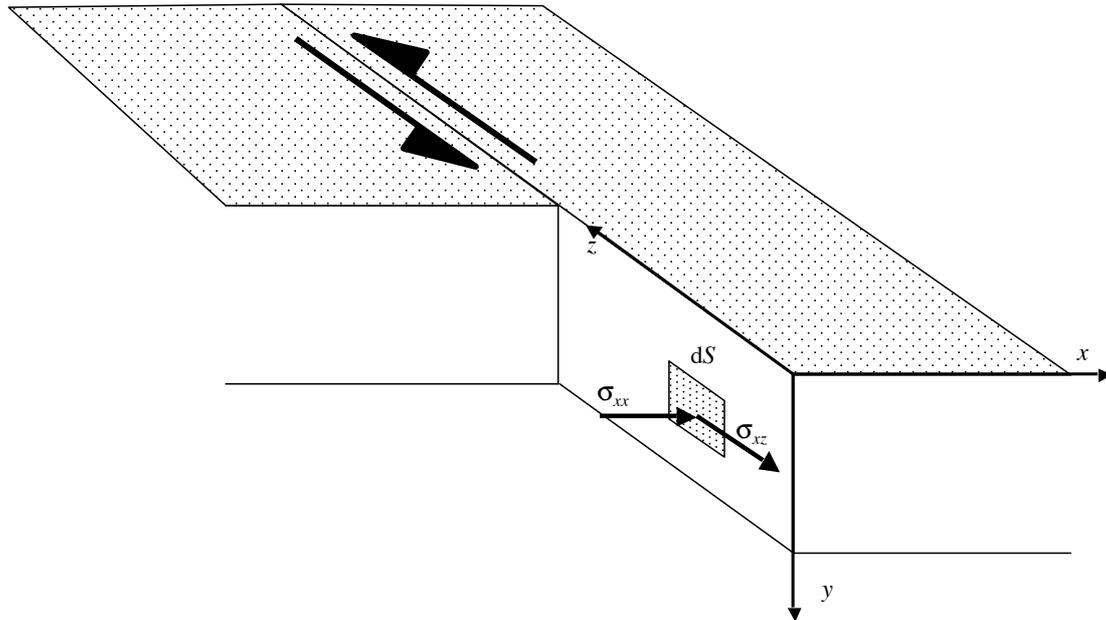


L'ellipsoïde des contraintes est triaxial : le milieu est anisotrope.



Cas du glissement

Les forces de surface peuvent agir parallèlement ou perpendiculairement à une surface. Regardons le cas d'un glissement, et en particulier les forces qui agissent sur la surface élémentaire dS .



La force normale de compression :

$$F_C = \sigma_{xx} dS$$

agit sur la face de la fracture et est une conséquence du poids de la matière située au-dessus et des forces tectoniques qui tendent à presser les deux faces l'une contre l'autre. σ_{xx} est la **contrainte normale**.

La force tangentielle ou force de cisaillement :

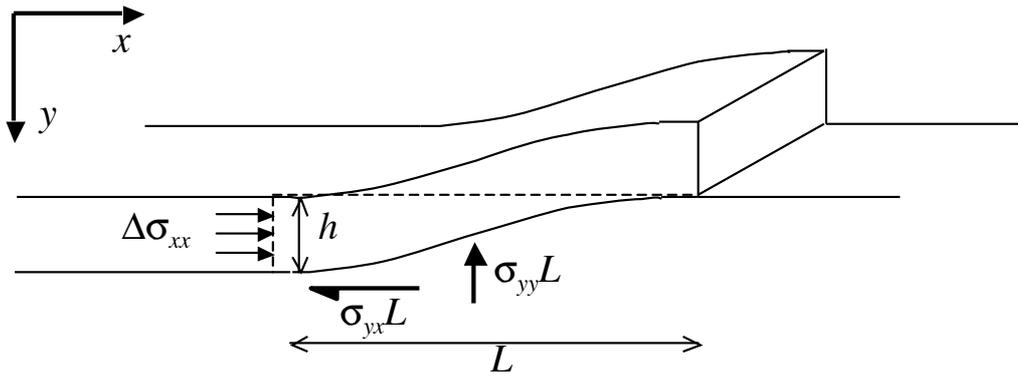
$$F_T = \sigma_{xz} dS$$

s'oppose au mouvement de glissement. Elle résulte des forces de frottement (résistantes au mouvement de glissement). σ_{xz} agit sur la surface perpendiculaire à l'axe Ox et est dirigée suivant Oz . σ_{xz} est la force tangentielle par unité de surface ($\sigma_{xz} = F_T/dS$) que l'on appelle la **contrainte de cisaillement**.

Cas de la subduction

Un autre exemple de force résistante due à une contrainte de cisaillement peut être trouvée dans le cas de la subduction. Dans les zones de collision continentale, une lame mince de roches cristallines peut passer par-dessus des roches continentales (par exemple la collision continentale qui se développe depuis environ 6-7 millions d'années entre la plaque Australie et la plaque Pacifique dans l'île du sud de la Nouvelle-Zélande ; le déplacement relatif entre ces deux plaques est environ 3 cm/an en cisaillement et 1,5 cm/an en compression, le long de la Faille Alpine, une énorme structure longue de plus de 450 km, similaire à la faille de San Andreas en Californie).

Pour des forces tectoniques horizontales, une lame de matière vient de la gauche et passe sur la roche continentale.



On considère ici un modèle de surface, c'est-à-dire que les forces sont exprimées par unité de longueur. Si l'on néglige l'influence de la gravité, la force tectonique horizontale due à la contrainte tectonique horizontale est :

$$F_T = \Delta\sigma_{xx} h$$

Cette force tectonique subit une résistance par la contrainte de cisaillement σ_{yx} qui agit à la base de la lame de matière sur toute la longueur L . La force de résistance par unité de longueur est donc :

$$F_R = \sigma_{yx} L$$

La contrainte de cisaillement marque la résistance au glissement d'une surface sur une autre. On peut la relier à la force normale qui presse les surfaces ensemble, donnée par la contrainte normale σ_{yy} qui agit à la base de la lame. L'observation montre que l'on a souvent :

$$\sigma_{yx} = f \sigma_{yy}$$

f est une constante de proportionnalité appelée **coefficient de friction**.

Si σ_{yy} a la valeur lithostatique $\sigma_{yy} = \rho_{cc} gh$, on a :

$$\sigma_{yx} = f \rho_{cc} gh$$

À l'équilibre, on a :

$$\Delta\sigma_{xx} h = \sigma_{yx} L = f \rho_{cc} ghL$$

$$\Delta\sigma_{xx} = f \rho_{cc} gL$$

Si $\Delta\sigma_{xx} = 100$ MPa, $L = 100$ km et $\rho_{cc} = 2700$ kg/m³ :

$$f = 0,037$$

et on voit que plus L est grand, plus f est petit.

Chapitre 3

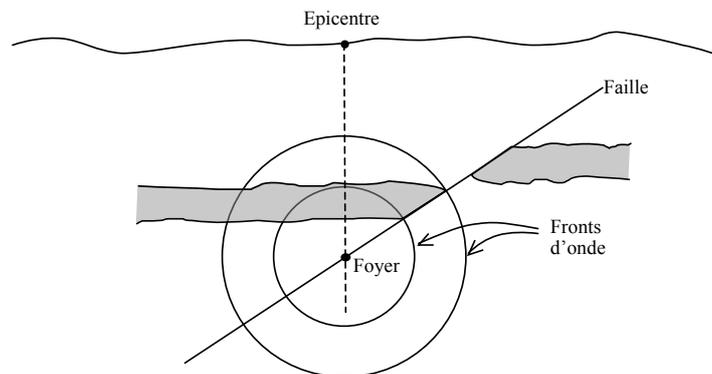
Introduction à la sismologie

3.1. Introduction

Un tremblement de terre (séisme) est dû au mouvement relatif de deux blocs dont la surface de contact est appelée **plan de faille**. Il en résulte une libération instantanée d'énergie élastique lentement accumulée ; dès la fin du séisme, l'énergie recommence à s'accumuler jusqu'à une prochaine libération brutale.

On appelle **foyer** ou **hypocentre** le lieu précis où se produit le mouvement initial, c'est-à-dire où se libère l'énergie.

On appelle **épicentre** le point situé en surface immédiatement au-dessus du foyer.



Si on reporte sur une carte mondiale les épicentres des séismes, on s'aperçoit que ceux-ci se produisent le long de lignes continues plus ou moins étroites. Ces lignes délimitent des zones (parfois très grandes) caractérisées par une absence presque totale de tremblements de terre : on les appelle des **plaques**. Les lignes continues d'activité sismique sont appelées **frontière de plaques**.

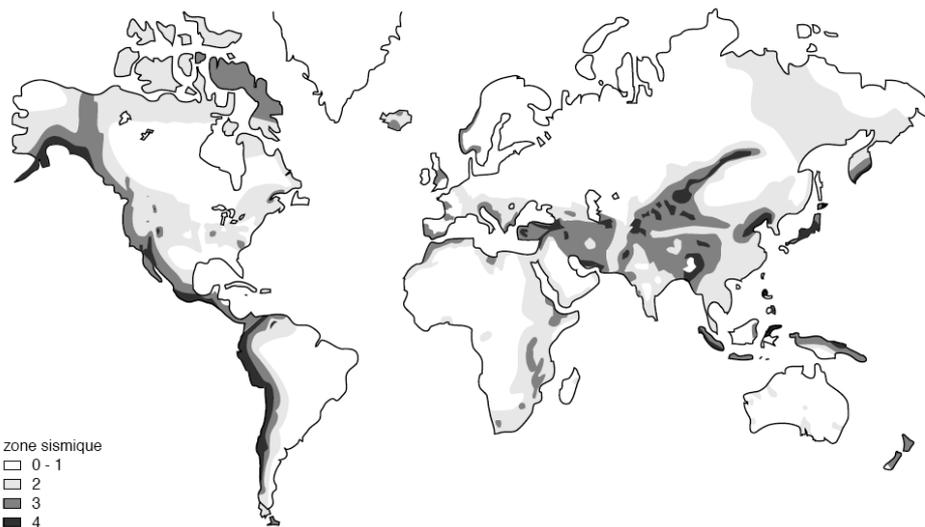
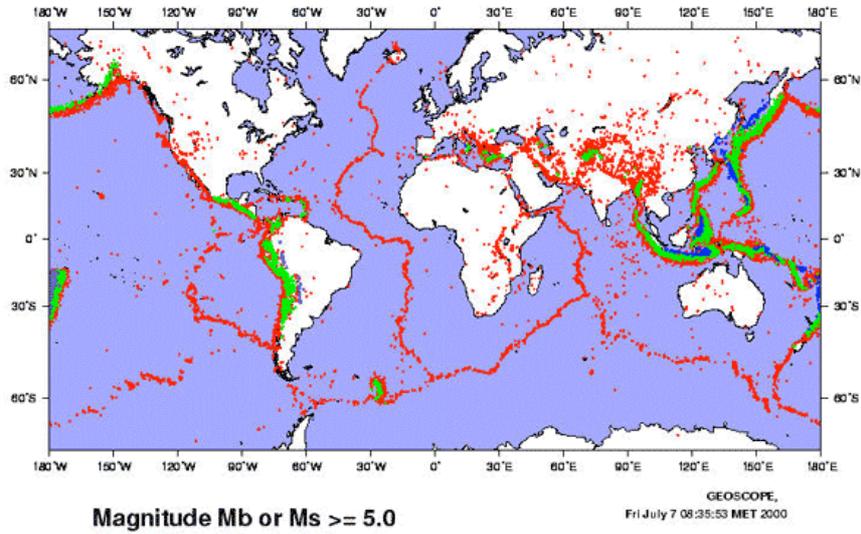


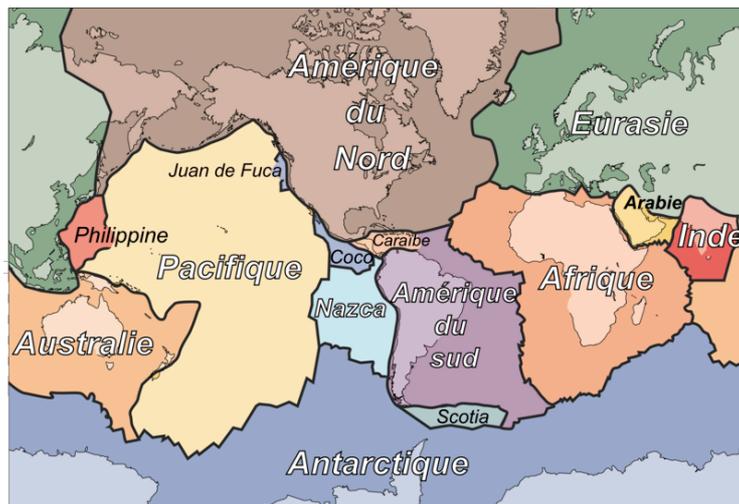
fig. 4 : zones d'activités sismiques dans le monde.

INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE PARIS
 Departement de Sismologie

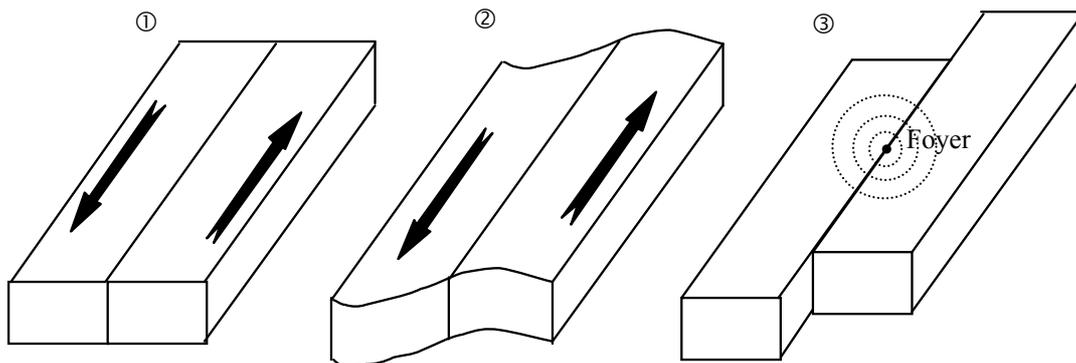
Global seismicity 1928-1999



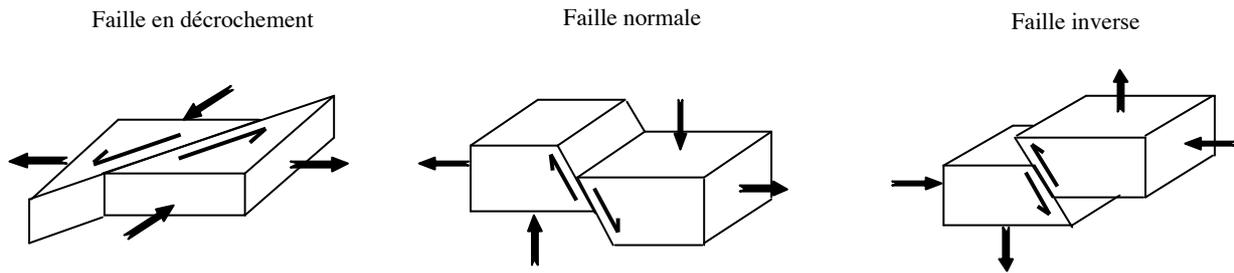
Au cœur des océans, les frontières de plaques sont extrêmement étroites alors que sur les bordures des océans, elles sont plus larges.



Un séisme se produit lorsqu'un côté de la faille se déplace par rapport à l'autre (①).
 La déformation n'est pas uniforme dans la région de faille et le déplacement est nul sur la faille (②).
 Quand les contraintes accumulées deviennent supérieures aux forces de friction sur la faille, un tremblement de terre se produit à l'endroit le plus fragile (③).

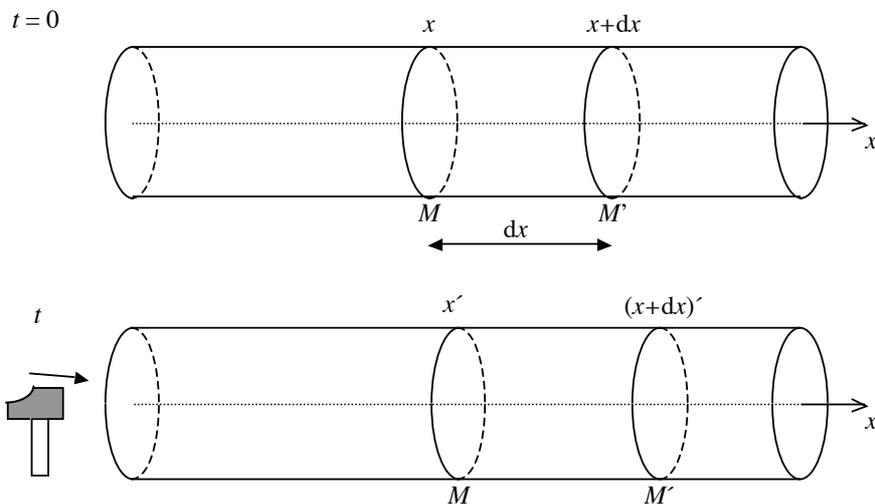


Au moment du séisme, les roches se détendent et vibrent. Les roches ont donc subi une déformation élastique jusqu'à la rupture. Les failles sont de trois types fondamentaux :



3.2. Vibrations des solides – équation de propagation

Lors d'un séisme, à la rupture, les roches se détendent et vibrent. Considérons une barre cylindrique :



À l'instant $t = 0$, on repère les sections droites :

M d'abscisse x
 M' d'abscisse $x + dx$

À l'instant t , on communique un mouvement à la barre.

$M(x)$ devient $M(x')$ avec un déplacement u :

$$x \rightarrow x + u \Rightarrow u = x' - x$$

$M(x + dx)$ devient $M((x + dx)')$:

$$x + dx \rightarrow (x + dx)' = x' + dx' = x + u + dx + du$$

$$u + du = (x + dx)' - (x + dx)$$

M se déplace de u , M' de $u + du$. L'allongement de MM' est du . Le mouvement du segment MM' est ainsi équivalent au mouvement qu'il aurait sous l'action des forces suivantes :



Appliquons le principe fondamental de la dynamique au déplacement u de l'élément :

$$F(x+dx) - F(x) = m\gamma = m \frac{d^2 u}{dt^2}$$

où la masse de l'élément de longueur dx est :

$$m = \rho S dx$$

soit :

$$F(x+dx) - F(x) = \rho S dx \frac{d^2 u}{dt^2}$$

or :

$$dF = F(x+dx) - F(x)$$

donc :

$$dF = \rho S dx \frac{d^2 u}{dt^2} \Rightarrow \frac{dF}{dx} = \rho S \frac{d^2 u}{dt^2}$$

On a un allongement du pour l'élément de longueur dx ; par analogie avec la loi de Hooke :

$$du = \frac{F dx}{SE} \Rightarrow F = SE \frac{du}{dx}$$

et en prenant la dérivée par rapport à x :

$$\frac{dF}{dx} = SE \frac{d^2 u}{dx^2} = \rho S \frac{d^2 u}{dt^2}$$

soit l'équation de propagation de l'onde :

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{E/\rho} \frac{d^2 u}{dt^2}} \quad (3.1)$$

Par extension, à 3 dimensions, cette équation prend la forme :

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{E/\rho} \frac{d^2 u}{dt^2}} \quad (3.2)$$

L'équation (3.1) est équivalente à celle de propagation des ondes électromagnétiques :

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} \text{ avec :}$$

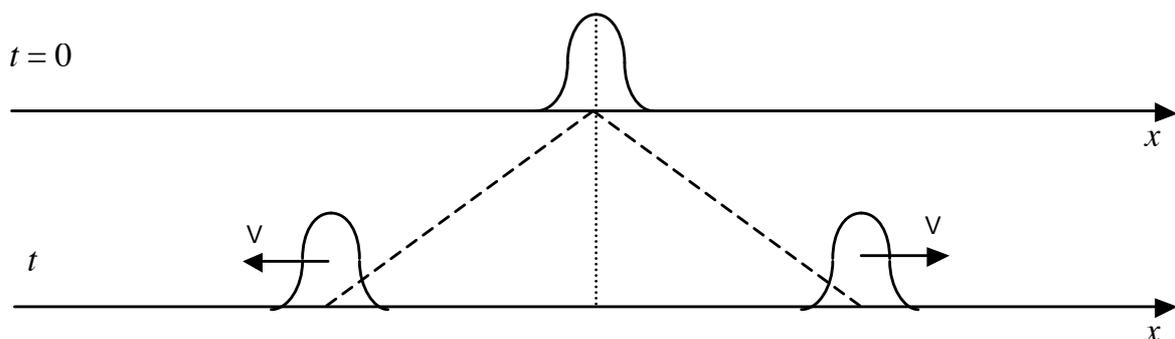
$$\boxed{v = \sqrt{E/\rho}} \quad (3.3)$$

Ainsi, la solution générale de l'équation de propagation est :

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

$f(x-vt)$ pour une propagation vers les $x > 0$

$g(x+vt)$ pour une propagation vers les $x < 0$



Exemples : propagation d'une onde

- dans du marbre ($E = 26 \text{ GPa}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$) : $v = \sqrt{\frac{26 \times 10^9}{2700}} = 3103 \text{ m/s}$.
- dans du granite ($E = 60 \text{ GPa}$, $\rho = 2640 \text{ kg/m}^3$) : $v = \sqrt{\frac{60 \times 10^9}{2640}} = 4767 \text{ m/s}$.

Les vitesses de propagation des ondes sismiques sont entre 3000 et 8000 m/s .

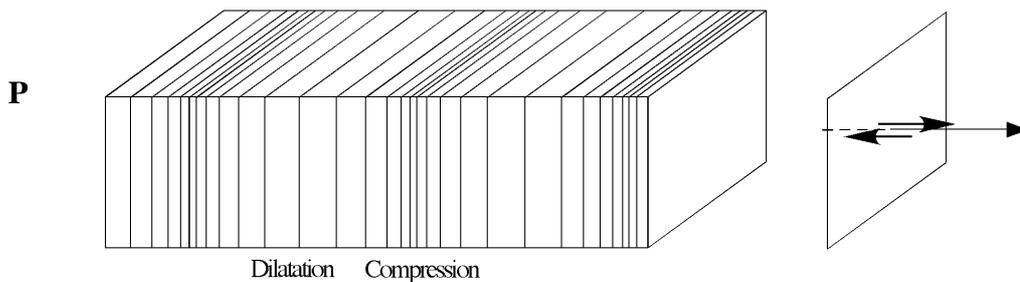
3.3. Propagation des ondes

3.3.1. Types d'ondes

Les ondes sismiques provoquent des déformations élastiques qui, dans un milieu isotrope, peuvent être caractérisées par le type de mouvement qui affecte les particules le constituant. Il existe plusieurs familles de déformations :

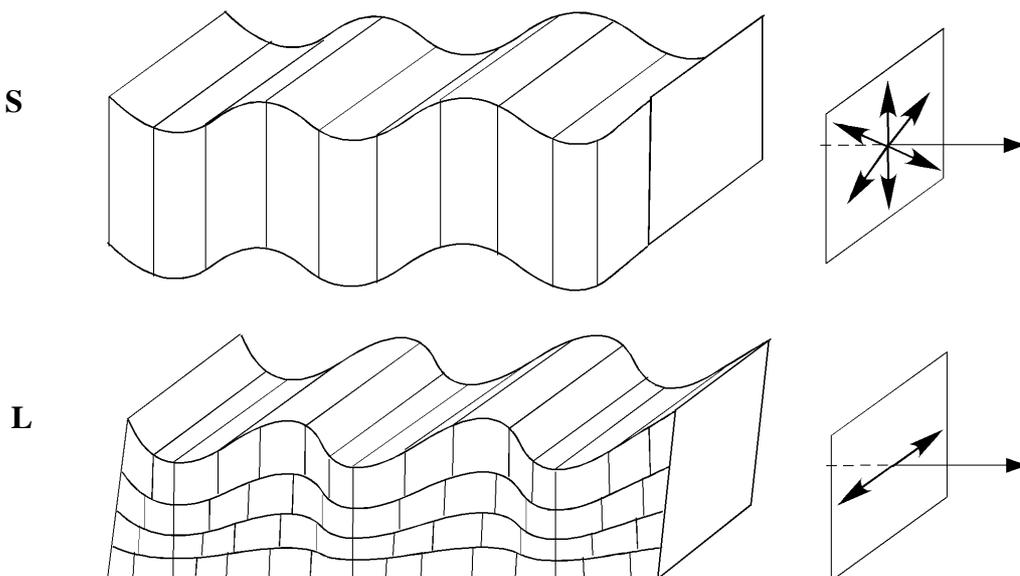
- **Les ondes de compression (onde P : première) :**

La direction de déplacement des particules est celle du déplacement de l'onde. Il y a déformation élastique de raccourcissement et d'allongement.



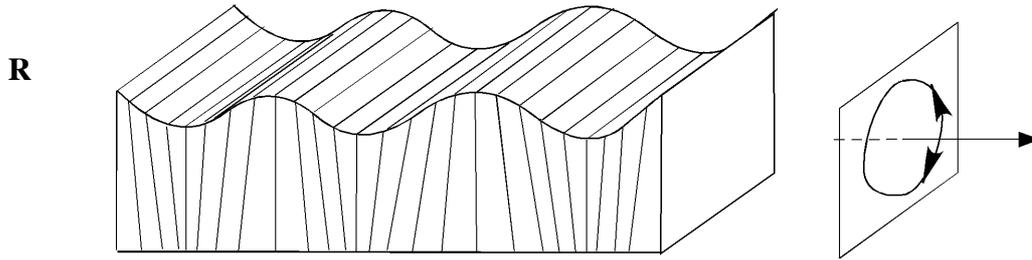
- **Les ondes de cisaillement (onde S et L : seconde et Love) :**

La direction de déplacement des particules est perpendiculaire à celle du déplacement de l'onde. Les particules sont affectées de mouvement en cisaillement.



- **Les ondes de Rayleigh (onde R) :**

Le mouvement des particules s'effectue dans une ellipse à grand axe vertical et à petit axe dans la direction du déplacement de l'onde. Le sens de déplacement des particules est rétrograde par rapport à celui de l'onde. Ce type d'ondes se trouve dans les niveaux de surface.



3.3.2. Vitesse des ondes

Les ondes P et S ont des vitesses qui augmentent avec la distance parcourue. Comme la vitesse de propagation est fonction de la densité du milieu traversé, on en déduit que ces ondes traversent des couches profondes du globe.

Les ondes L ont une vitesse constante : le milieu parcouru ne change pas de propriétés avec l'éloignement.

Les ondes P sont des ondes longitudinales. On peut montrer que leur vitesse est donnée par :

$$v_p = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (3.4)$$

où E est le module de Young, ν le module de Poisson et ρ la densité.

Les ondes S sont des ondes transversales. On peut montrer que leur vitesse est donnée par :

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1+\nu)}} \quad (3.5)$$

On définit aussi les paramètres de Lamé λ et μ :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

et on a dans ce cas :

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

ANNEXES

Annexe A.

Constantes physiques utilisées

| Nom | Symbole | Valeur | Unité |
|-------------------------|---------|------------------------|-----------|
| Constante de Planck | h | $6,62 \times 10^{-34}$ | J.s |
| Vitesse de la lumière | c | 3×10^8 | m/s |
| Perméabilité magnétique | μ_0 | $4\pi \times 10^{-7}$ | V.s/(A.m) |

Annexe B.

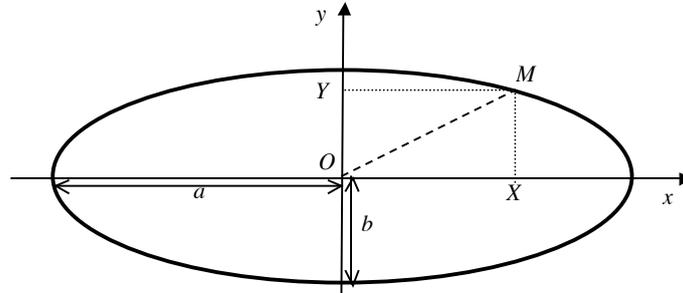
Relations de trigonométrie utiles

$$\begin{aligned}\sin^2 a + \cos^2 a &= 1 \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 \\ \sin^2 a &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a \\ \cos^2 a &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a \\ \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]\end{aligned}$$

Annexe C.

Rappel sur l'ellipse

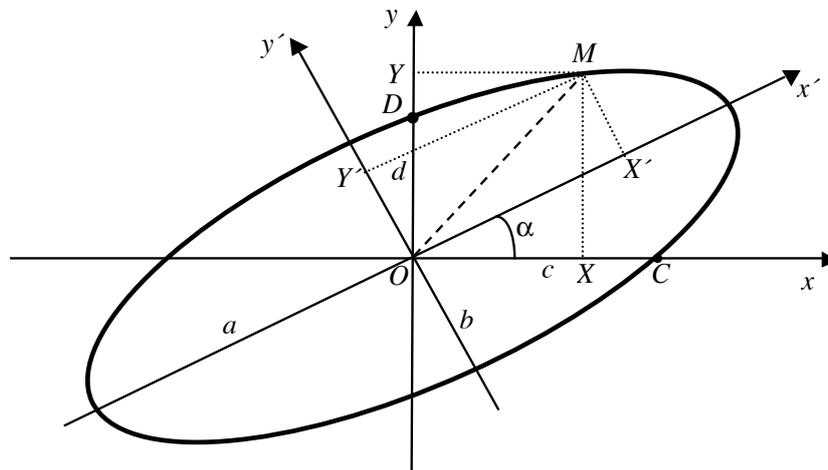
Considérons une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b . Dans le repère (xOy) on repère le point M situé sur l'ellipse par ses coordonnées X et Y .



L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie est de la forme :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Considérons maintenant une ellipse dont les axes de symétrie sont inclinés d'un angle α par rapport au référentiel (xOy) . Le référentiel $(x'Oy')$ coïncide maintenant avec les axes de symétrie de l'ellipse.



L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie [dans le référentiel $(x'Oy')$] est maintenant de la forme :

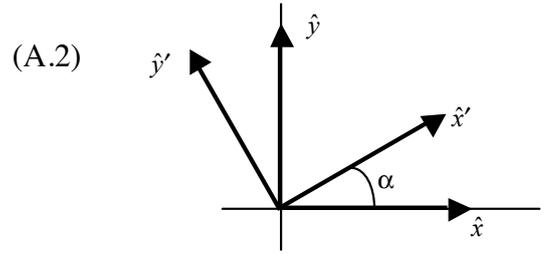
$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$$

On cherche à exprimer X' et Y' (coordonnées de M dans le référentiel $(x'Oy')$) en fonction de X et Y , (coordonnées de M dans le référentiel (xOy)) :

$$\overrightarrow{OM} = X' \hat{x}' + Y' \hat{y}' = X \hat{x} + Y \hat{y} \tag{A.1}$$

Or :

$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{x}' \cos \alpha - \hat{y}' \sin \alpha \\ \hat{y} = \hat{x}' \sin \alpha + \hat{y}' \cos \alpha \\ \hat{x}' = \hat{x} \cos \alpha + \hat{y} \sin \alpha \\ \hat{y}' = -\hat{x} \sin \alpha + \hat{y} \cos \alpha \end{cases}$$



De (A.1), avec (A.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= X' \hat{x}' + Y' \hat{y}' = X(\hat{x}' \cos \alpha - \hat{y}' \sin \alpha) + Y(\hat{x}' \sin \alpha + \hat{y}' \cos \alpha) \\ &= (X \cos \alpha + Y \sin \alpha) \hat{x}' + (-X \sin \alpha + Y \cos \alpha) \hat{y}' \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} X' = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ Y' = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases} \quad (A.3)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{a^2} (X \cos \alpha + Y \sin \alpha)^2 + \frac{1}{b^2} (-X \sin \alpha + Y \cos \alpha)^2 = 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{a^2} (X^2 \cos^2 \alpha + Y^2 \sin^2 \alpha + 2XY \cos \alpha \sin \alpha) + \\ &\quad + \frac{1}{b^2} (X^2 \sin^2 \alpha + Y^2 \cos^2 \alpha - 2XY \cos \alpha \sin \alpha) = 1 \\ \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow X^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right) + Y^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \right) + \\ &\quad + 2XY \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1 \end{aligned} \quad (A.4)$$

Le point C , élément de l'ellipse, a pour coordonnées dans (xOy) :

$$C \begin{cases} X_C = c \\ Y_C = 0 \end{cases} \quad \text{et selon (A.3)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'_C = c \cos \alpha \\ Y'_C = -c \sin \alpha \end{cases}$$

Or C appartient à l'ellipse, donc :

$$\begin{aligned} \frac{X'^2_C}{a^2} + \frac{Y'^2_C}{b^2} = 1 &\Rightarrow X'^2_C \left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right) + Y'^2_C \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \right) + \\ &\quad + 2X'_C Y'_C \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1 \\ &\Rightarrow c^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right) = 1 \\ \frac{X'^2_C}{a^2} + \frac{Y'^2_C}{b^2} = 1 &\Rightarrow c^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}} \end{aligned} \quad (A.5)$$

Le point D , élément de l'ellipse, a pour coordonnées dans (xOy) :

$$D \begin{cases} X_c = 0 \\ Y_c = d \end{cases} \quad \text{et selon (A.3)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'_D = d \sin \alpha \\ Y'_D = d \cos \alpha \end{cases}$$

Or D appartient à l'ellipse, donc :

$$\begin{aligned} \frac{X_D'^2}{a^2} + \frac{Y_D'^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow X_D^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right) + Y_D^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \right) + \\ &+ 2X_D Y_D \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1 \\ &\Rightarrow d^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \right) = 1 \\ \frac{X_D'^2}{a^2} + \frac{Y_D'^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow d^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

L'équation (A.4) de l'ellipse devient, grâce à (A.5) et (A.6) :

$$\frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{d^2} + XY \sin 2\alpha \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 1 \quad (\text{A.7})$$

Cherchons a et b en fonction de c et d :

$$\left. \begin{aligned} (\text{A.5}) \Rightarrow \frac{1}{c^2} &= \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \\ (\text{A.6}) \Rightarrow \frac{1}{d^2} &= \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \end{aligned} \right\} \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} = \cos 2\alpha \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

soit :

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

L'équation (A.7) de l'ellipse devient à l'aide de (A.8) :

$$\frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{d^2} + XY \tan 2\alpha \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} \right) = 1$$