Année universitaire 2020/2021
Master Mathématiques et Applications
M1 Semestre 2
Analyse Spectrale

Université de Bordeaux
Collège Sciences et Technologies
UF Math. et Interactions
Ph. Jaming

Examen, première session. Durée 1h30.

Dans cet exercice, on notera

$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}^*) = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C} \,:\, \|(x_n)\|_2^2 := \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

On pourra utiliser sans le démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \leq 2.$$

Soit M l'opérateur qui à une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ associe la suite $(Mx(n))_{n\geq 1}$ où $Mx(n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{m=1}^{n} x_m$.

(1) Question préliminaire : montrer que pour $m \geq 1$,

$$\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{m}.$$

(2) Écrire M comme un opérateur à noyau $Mx(n) = \sum_{m=1}^{+\infty} K(m,n)x_m$ avec K à déterminer.

(3) Montrer que M est borné.
Indication : On rappelle le test de Schur dans ℓ^2 : *si*

$$A = \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \sum_{n=1}^{+\infty} |K(m,n)|^2 < +\infty \quad \textit{et} \quad B = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{m=1}^{+\infty} |K(m,n)|^2 < +\infty$$

alors M est borné avec $\|M\| \leq \sqrt{AB}$.

(4) M définit-il un opérateur de Hilbert-Schmidt sur ℓ^2.

(5) Nous allons montrer que M est compact :

(a) Soit $N \geq 2$ un entier et K_N le noyau défini par $K_N(m,n) = \begin{cases} K(m,n) & \text{si } m < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et soit M_N l'opérateur associé. Montrer que M_N est de rang fini

(b) À l'aide du test de Schur, montrer que $\|M - M_N\| \to 0$ et conclure.

(6) Nous allons montrer que M n'a pas de vecteur propre dans ℓ^2. Pour cela, on suppose que $x = (x_n) \in \ell^2$ est telle que $Mx = \lambda x$. On note n_0 le premier indice pour lequel x_n n'est pas nul : $x_n = 0$ si $n < n_0$ et $x_{n_0} \neq 0$.

(a) Pourquoi peut-on supposer que $x_{n_0} = 1$?

(b) Quelle est la valeur propre associée à x ? En déduire que M est injectif.

(c) Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \geq 1$ et conclure.

(7) Montrer que M n'est pas inversible sur ℓ^2.
Indication : On montrera que si $y = Mx$ alors $x_n = ny_n - (n-1)y_{n-1}$ puis on trouvera une suite $(y_n) \in \ell^2$ telle que la suite $x = (x_n)$ donnée par$x_n = ny_n - (n-1)y_{n-1}$ vérifie $x \notin \ell^2$.

(8) Montrer que l'adjoint de M est donné par

$$M^*y(m) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{y_n}{n}.$$

Indication : Utiliser Fubini, pour justifier l'intervertion des sommes on pourra utiliser la première question et Cauchy-Schwarz.

(9) Soit $x = (1, 0, 0 \ldots)$ calculez M^*Mx et MM^*x et en déduire que $M^*M \neq MM^*$.

Solution.

Remark : De nombreuses copies ont été rédigées avec particulièrement peu de soin (écriture quasi-illisible...) confusion dans le sens des indices... qui ont entraîné nombre d'erreurs et de non sens (égalité entre des vecteurs et des nombres...).

Il est primordial lorsqu'on manipule des objets mathématiques d'en connaître la nature et de vérifier qu'on n'écrit pas de non-sens !

(1) Cette question de niveau B-A-BA de L2 a été extrêmement mal traitée (2 réponses à peu près correctes mais dont la rédaction laisse à désirer). Il s'agissait ici d'estimer le reste d'une série convergente et les techniques de bases pour faire cela semble ignorées par la majorité d'entre vous (il est indispensable de les maîtriser pour faire de l'analyse, en particulier pour réussir les concours de l'enseignement).

Encore plus gênant, de nombreuses copies affirmaient des inégalités algébriques élémentaires FAUSSES. Il se trouve que l'estimation est trop grossière pour pouvoir être démontrée par récurrence puisque l'inégalité

$$\frac{2}{m} - \frac{1}{m^2} \leq \frac{2}{m+1} \Leftrightarrow (m+1)(2m-1) \leq 2m^2$$

n'est vraie que pour $m = 1$.

Il n'y a que très peu de techniques pour estimer un reste de série (bien moins que pour vérifier qu'une série converge) et il est indispensable de les maîtriser. Il y a essentiellement trois possibilités :

(a) **Série géométrique ou dominée par une série géométrique**. On veut ici estimer $\left|\sum_{n=N}^{+\infty} a_n r^n\right|$ où $|a_n| \leq C$ et $r < 1$:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} a_n r^n\right| &\leq \sum_{n=N}^{+\infty} |a_n r^n| \leq C \sum_{n=N}^{+\infty} r^n \\ &= \frac{C}{1-r} r^N. \end{aligned}$$

On a ici une convergence exponentielle en N vers 0. Lorsque a_N est décroissante et tend vers 0, on obtient une (petite) accélération de la convergence puisque $|a_n| \leq |a_N|$ quand $n \geq N$ et on peut prendre $C = a_N$ dans le raisonnement précédent :

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} a_n r^n\right| \frac{a_N r^N}{1-r}.$$

(b) **Série alternée**. On veut ici estimer $\left|\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n a_n\right|$ avec $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ et $a_n \to 0$. On écrit

$$\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n a_n = (-1)^N \left(a_N - \underbrace{(a_{N+1} - a_{N+2})}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(a_{N+2p+1} - a_{N+2p+2})}_{\geq 0} + \cdots \right)$$

qui montre que

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n a_n\right| \leq a_N.$$

(c) **Comparaison série-intégrale**. Le terme général est de la forme $a_n = f(n)$ avec f une fonction *positive, décroissante* telle que $\int^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Typiquement $f(x) = x^{-\alpha}$

avec $\alpha > 1$. Un simple dessin montre que $-f(n) \times 1$ et la surface du rectangle de base 1 et de hauteur $f(n)$–

$$\int_N^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(n) \times 1 \leq \int_{N-1}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et en sommant

$$\int_N^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leq \int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

C'est d'ailleurs comme cela qu'on montre que les séries de Riemann (et de Bertrand) convergent ou divergent...

Toutes les techniques plus fines reviennent en général à se ramener à ces cas (découpage du terme général en sommes du type ci-dessus, sommation d'Abel...).

Ici, c'est une application trivial du dernier cas puisque $a_n = f(n)$ avec $f(x) = x^{-2}$. La seule difficulté est que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ diverge en 0 et qu'il faut donc séparer le cas $m = 1$ (le facteur 2 aurait pu être remplacé par $\pi^2/6$) :

Pour $m \geq 2$,

$$\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_{m-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{m-1} = \frac{m}{m-1}\frac{1}{m} \leq \frac{2}{m}$$

et pour $m = 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \leq 2 \leq \frac{2}{m}$.

(2) On écrit $Mx(n) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\{1,\dots,n\}}(m)}{n} x_m$

Remark : Le sujet avait une **coquille** puisqu'on demandait de trouver $K(m,n)$ pour que $Mx(n) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} K(m,n)x_n$. Vous auriez dû être en mesure de la repérer et corriger puisque cela revenait à trouver $k_n = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} K(m,n)$ tel que $Mx(n) = k_n x_n$ et cela n'est évidemment pas possible vu l'expression de M et aurait de toute façon été absurde (pourquoi voudrait-on écrire k_n comme une somme ?).

(3) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |K(m,n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\mathbf{1}_{\{1,\dots,n\}}(m) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\sum_{m=1}^{+\infty} |K(m,n)|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\mathbf{1}_{\{1,\dots,n\}}(m) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \leq B = 1.$$

Ainsi, avec le test de Schur M est borné avec $\|M\| \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$.

(4) On a (en utilisant le dernier calcul)

$$\|M\|_{HS}^2 \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |K(m,n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

donc M n'est pas de Hilbert-Schmidt.

(5) (a) On a

$$M_N x(n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} K_N(m,n)x_m = \frac{1}{n}\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{m\leq n}\mathbf{1}_{m\leq N}x_m.$$

On voit que cette expression ne dépend que de $x_0, \dots, x_N$. Ainsi, en notant $e_1, \dots, e_N, e_{N+1}, \dots$ la base canonique de ℓ^2 on a $M_N e_j = 0$ si $j > N$. En écrivant $x = \sum_{j \geq 1} x_j e_j$ on a donc

$$M_N x = \sum_{j=1}^{N} x_j M_N e_j$$

ce qui montre que $\operatorname{Im} M_N \subset \{Me_1, \dots, Me_N\}$ qui est de dimension fini et M_N est de rang fini.

Attention, on ne peut pas utiliser le théorème du rang.

(b) On introduit maintenant $K_N(m,n) = \mathbf{1}_{\{N,N+1,\dots\}}(m) K(m,n)$ On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |K_N(m,n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \mathbf{1}_{\{1,\dots,n\}}(m) \mathbf{1}_{\{N,N+1,\dots\}}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < N \\ \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases} \leq A_N = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et

$$\sum_{m=1}^{+\infty} |K_N(m,n)|^2 \leq \sum_{m=1}^{+\infty} |K_N(m,n)|^2 \leq 1$$

Ainsi, avec le test de Schur $M - M_N$ est borné avec $\|M - M_N\| \leq \sqrt{A_N}$. Comme $A_N \to 0$, M est limite d'opérateurs de rang fini donc M est compact.

(6) Soient $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^2$ alors

$$\begin{aligned} \langle Mx, y \rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} Mx(n) \overline{y_n} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\{1,\dots,n\}}(m)}{n} x_m \overline{y_n} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} x_m \overline{\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{y_n}{n}} \qquad \text{eq:adj} \quad (0.1) \end{aligned}$$

avec Fubini, du moins si on justifie l'utilisation de ce théorème. Pour cela, il suffit de vérifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\{1,\dots,n\}}(m)}{n} |x_m||y_n| = \sum_{m=1}^{+\infty} |x_m| \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n} |y_n|$$

converge. Notez qu'on a utilisé Fubini (Tonnelli) pour intervertir les sommes de termes positifs. Mais avec Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n} |y_n| \leq \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \|y\|_2 \leq \frac{2}{m} \|y\|_2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} |x_m| \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n} |y_n| &\leq 2\|y\|_2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} |x_m| \\ &\leq 2\|y\|_2 \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \right)^{1/2} \|x\|_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \|x\|_2 \|y\|_2. \end{aligned}$$

Maintenant que l'intervertion des 2 sommes de (eq:adj 0.1) est justifiée, on voit que (eq:adj 0.1) s'écrit $\langle Mx, y \rangle = \langle x, M^* y \rangle$ (donc M^* est l'adjoint de M) où M^* est donné par

$$M^* y(m) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{y_n}{n}.$$

(7) On a

$$M^* \delta_k(m) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{\delta_{k,n}}{n} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } m \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i.e. $M^*\delta_k = \frac{1}{k}\mathbf{1}_{|j|\leq k}$ (où $\mathbf{1}_{|j|\leq k} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (la suite ayant k 1 puis 0 après). Mais alors

$$MM^*\delta_k(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{si } n \leq k \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \geq k \end{cases}.$$

D'un autre côté,

$$M\delta_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

donc

$$M^*M\delta_k(m) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} & \text{si } m \geq k \\ \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^2} & \text{si } m \leq k \end{cases}.$$

Clairement $M^*M\delta_k \neq MM^*\delta_k$.

(8) On suppose que $x = (x_n) \in \ell^2$ est telle que $Mx = \lambda x$. On note n_0 le premier indice pour lequel x_n n'est pas nul : $x_n = 0$ si $n < n_0$ et $x_{n_0} \neq 0$. Quitte à diviser x par x_{n_0}, on peut supposer que $x_{n_0} = 1$.

Alors en regardant la coordonée n_0 dans $Mx = \lambda x$ on obtient $\frac{1}{n_0} = Mx(n_0) = \lambda$ donc $\lambda = 1/n_0$.

Ensuite, on regarde la coordonnée $n_0 + 1$:

$$\frac{1}{n_0+1}(1 + x_{n_0+1}) = \frac{1}{n_0}x_{n_0+1} \quad\Leftrightarrow\quad 1 = \left(\frac{n_0+1}{n_0} - 1\right)x_{n_0+1} \quad\Leftrightarrow\quad x_{n_0+1} = n_0$$

Ensuite, on regarde la coordonnée $n_0 + 2$:

$$\frac{1}{n_0+2}(1 + n_0 + x_{n_0+2}) = \frac{1}{n_0}x_{n_0+1} \quad\Leftrightarrow\quad 2 \leq 1 + n_0 = \left(\frac{n_0+2}{n_0} - 1\right)x_{n_0+2} = \frac{2}{n_0}x_{n_0+2}$$

et on obtient bien $x_{n_0+2} \geq 1$.

On suppose maintenant que $x_{n_0}, \ldots, x_{n_0+k-1} \geq 1$ alors en regardant la coordonnée $n_0 + k$:

$$\frac{1}{n_0+k}(k+x_{n_0+k}) \leq \frac{1}{n_0+k}(x_{n_0}+\cdots+x_{n_0+k-1}+x_{n_0+k}) = \frac{1}{n_0}x_{n_0+k} \quad\Leftrightarrow\quad k = \left(\frac{n_0+k}{n_0} - 1\right)x_{n_0+k} = \frac{k}{n_0}x_{n_0+k}$$

et on en déduit que $x_{n_0+k} \geq 1$.

Mais si x était un vecteur propre dans ℓ^2, alors $x_n \to 0$, une contradiction.

(9) Si $y = Mx$ alors $x_1 = y_1$ et, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} x_m = ny_n$ et $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} x_m = (n-1)y_{n-1}$ donc

$$x_n = \sum_{m=1}^{n} x_m - \sum_{m=1}^{n-1} x_m = ny_n - (n-1)y_{n-1}.$$

Pour trouver $y \in \ell^2$ tel que $x \notin \ell^2$, il suffit de prenre $y_n = \dfrac{1}{n}$ si n est paire et $y_n = 0$ si n est impaire et alors $x_n = 1$ si n est paire et $x_n = -1$ si n est impaire. Très clairement $(x_n) \notin \ell^2$ donc M n'est pas inversible.