Année universitaire 2020/2021
Master Mathématiques et Applications
M1 Semestre 2
Analyse fonctionnelle

Université de Bordeaux
Collège Sciences et Technologies
UF Math. et Interactions
Ph. Jaming

Examen, première session. Durée 3h.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Ascoli
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0,+\infty)$ par $f_n(t)=\cos\sqrt{t+(2n\pi)^2}$.

(1) Rappelez l'énoncé du théorème d'Ascoli.
(2) Montrez que pour tous $a,b>0$, $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}\leq\frac{b}{2\sqrt{a}}$.
Indication : On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.
(3) En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est équicontinue et tend simplement vers 1.
(4) Montrez qu'elle ne converge pas uniformément vers 1.
Indication : On trouvera t_n tel que $f_n(t_n)=-1$.
(5) $K=\{f_n\,:n\geq 1\}$ est-il compact dans $\mathcal{C}([0,+\infty)$?

Exercice 2. Banach-Steinhaus.

(1) Rappelez l'énoncé du théorème de Banach-Steinhaus.
(2) Quel est l'espace dual de $\ell^4(\mathbb{N})$? Quel est l'espace dual de $\ell^{4/3}(\mathbb{N})$?
(3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^{4/3}(\mathbb{N})$. Montrez que pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^4(\mathbb{N})$, $\sum x_ny_n$ est absolument convergente.
(4) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que, pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^4(\mathbb{N})$, $\sum x_ny_n$ est absolument convergente. Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^{4/3}(\mathbb{N})$.
Indication : considérez
$$T_N\ :(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^4(\mathbb{N})\to\sum_{k=1}^N x_ny_n.$$

Exercice 3. Série de Fourier.
Dans cet exercice, a est un réel, $a>1$. On considère la fonction f 1-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\frac{1}{a-\cos 2\pi t}$.

(1) Que pouvez vous dire de la série de Fourier de f.
(2) Déterminez les racines de $z^2-2az+1=0$. On notera b celle de plus petit module. Montrez que $0<b<1$ et que $z^2-2az+1=(z-b)(z-1/b)$.
(3) Quelle est la décomposition en éléments simples de
$$\frac{1}{z^2-2az+1}.$$
(4) En déduire que
$$\frac{1}{a-\cos 2\pi t}=\frac{2b}{b^2-1}\left(\frac{be^{-2i\pi t}}{1-be^{-2i\pi t}}+\frac{1}{1-be^{2i\pi t}}\right).$$
(5) Rappelez le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-z}$ et son rayon de convergence. En déduire que
$$\frac{1}{1-be^{2i\pi t}}=\sum_{k=0}^{+\infty}b^ke^{2ik\pi t},$$
$$\frac{be^{-2i\pi t}}{1-be^{-2i\pi t}}=\sum_{k=1}^{+\infty}b^ke^{-2ik\pi t}$$
et que ces séries convergent uniformément.

(6) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{a-\cos 2\pi t} = \frac{2b}{b^2-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} b^{|k|} e^{2ik\pi t} \tag{0.1}$$

et que cette série converge uniformément.

(7) En déduire que

$$c_k(f) = \frac{2b^{|k|+1}}{b^2-1}$$

et que (0.1) est la série de Fourier de f.

Exercice 4. Série de Fourier et inégalité de Hilbert.
Dans cet exercice, on note

$$\sum_{j\neq k\in\{-N,\dots,N\}} \alpha_{j,k} = \sum_{j=-N}^{N} \sum_{k\in\{-N,\dots,N\}\setminus\{j\}} \alpha_{j,k}.$$

Soit f la fonction 1-périodique définie par $f(0)=0$ et $f(t)=\pi-2\pi t$ pour $t\in]0,1[$, .

(1) Représenter graphiquement f. Sans la calculer, que pouvez-vous dire de la convergence de la série de Fourier de f ? (précisez le(s) théorème(s) du cours qui vous permet(tent) de justifier cette convergence).

(2) Calculez les coefficients de Fourier de f.

(3) Soit maintenant $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite à support fini, et N tel que $a_k=0$ si $|k|>N$. Soit $P(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{2i\pi kt}$ le polynôme trigonolétrique associé. Montrer que

$$\left| \sum_{j\neq k\in\{-N,\dots,N\}} \frac{a_j\overline{a_k}}{j-k} \right| = \int_0^1 |P(t)|^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication : Écrire $|P(t)|^2 = P(t)\overline{P(t)}$ comme une somme double.

(4) En déduire que

$$\left| \sum_{j\neq k\in\{-N,\dots,N\}} \frac{a_j\overline{a_k}}{j-k} \right| \leq \pi \sum_{\ell=-N}^{N} |a_\ell|^2.$$

(5) Soit maintenant $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, montrez que la limite

$$\sum_{j\neq k} \frac{a_j\overline{a_k}}{j-k} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j\neq k\in\{-N,\dots,N\}} \frac{a_j\overline{a_k}}{j-k}$$

existe et que

$$\left| \sum_{j\neq k} \frac{a_j\overline{a_k}}{j-k} \right| \leq \pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |a_\ell|^2.$$

Exercice 5. Série de Fourier et inégalité du grand crible

(1) Soit f une fonction 1-périodique continue. Montrez que

$$\int_a^{a+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ne dépend pas de a.

(2) Soit $a\in\mathbb{R}$ et $h>0$. Montrer que pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a-h,a+h]$

$$|g(a)| \leq \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} |g(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{a-h}^{a+h} |g'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Indication : introduire la fonction ρ définie par

$$\rho(t) = \begin{cases} t - a + h & \text{pour } a - h \le t \le a \\ t - a - h & \text{pour } a < t \le a + h \end{cases}$$

puis intégrer par parties $\displaystyle\int_{a-h}^{a+h} \rho(t) g'(t)\,\mathrm{d}t$. Il est prudent de représenter graphiquement ρ.

(3) Soient P un polynôme trigonométrique de degré N, $P(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{2i\pi kt}$. Soit $\delta > 0$ et prenons K points de $t_1 < \cdots < t_K$ de $[0,1]$ tels que $t_{k+1} - t_k > \delta$ et $t_K < t_1 + 1 - \delta$. Ainsi $\mathrm{dist}(t_j - t_k, \mathbb{Z}) > \delta$ si $j \ne k$.

Nous allons maintenant utiliser $g(t) = |P(t)|^2 = P(t)\overline{P(t)}$ et $h = \delta/2$.

(a) montrer que les intervales $[t_k - \delta/2, t_k + \delta/2]$ sont 2 à 2 disjoints et inclus dans un intervalle de longueur 1.

(b) Déduire des 2 questions précédentes que

$$\sum_{k=1}^{K} |P(t_k)|^2 \le \frac{1}{\delta} \int_0^1 |P(t)|^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 |P(t)|\,|P'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(4) Exprimer

$$\int_0^1 |P(t)|^2 \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 |P'(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

en fonction des a_k. En déduire que

$$\int_0^1 |P'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \le (2\pi N)^2 \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2.$$

(5) En déduire que

$$\int_0^1 |P(t)|\,|P'(t)|\,\mathrm{d}t \le 2\pi N \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2.$$

(6) En déduire l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{K} |P(t_k)|^2 \le \left(\frac{1}{\delta} + 2\pi N\right) \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2. \tag{0.2}$$

(7) On considère maintenant un polynôme trigonométrique à P termes $P(t) = \sum_{k=M+1}^{M+\tilde{N}} a_k e^{2i\pi kt}$. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{K} |P(t_k)|^2 \le \left(\frac{1}{\delta} + \pi \tilde{N}\right) \sum_{k=M+1}^{M+\tilde{N}} |a_k|^2.$$

Solution de l'exercice 1

(1) Soit f défini sur $]0,+\infty)$ par $f(t)=\sqrt{t}$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(t)=1/2\sqrt{t}$, l'inégalité des accroissements finis se lit
$$0\le f(a+b)-f(a)\le \big(a+b-a\big)\sup_{t\in[a,a+b]}\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

(2) Mais alors, en utilisant à nouveau l'inégalité des accroissements finis et le fait que la dérivée de cos est sin et est donc bornée par 1
$$|f_n(s)-f_n(t)|\le\big|\sqrt{s+(2n\pi)^2}-\sqrt{t+(2n\pi)^2}\big|\le\frac{|s-t|}{4n\pi}\le\frac{1}{4\pi}|s-t|. \tag{0.3}$$
Soit alors $\varepsilon>0$ et $\eta=4\pi\varepsilon$. Si $|s-t|<\eta$, alors pour tout $n\ge1$ (0.3) implique $|f_n(s)-f_n(t)|<\varepsilon$.

Par ailleurs, en utilisant (0.3) avec $t=0$ et en remarquant que $f_n(0)\cos 2n\pi=1$, on a pour s fixé,
$$|f_n(s)-1|\le\frac{s}{4n\pi}\to0$$
donc $f_n(s)\to1$ quand $n\to+\infty$. Ainsi $f_n\to1$ simplement.

(3) Il suffit de prendre t_n tel que $\sqrt{t_n+(2n\pi)^2}=\pi+2n\pi$ soit $t_n=(\pi+2n\pi)^2-(2n\pi)^2=(4n+1)\pi^2$ et alors $f_n(t_n)=\cos(\pi+2n\pi)=-1$ donc $\|f_n-1\|_\infty=2$ et f_n ne converge pas uniformément vers 1.

(4) La question précédente montre qu'en fait aucune sous-suite de (f_n) ne peut converger uniformément vers 1, or 1 est la limite simple d'une telle sous-suite, donc (f_n) n'a pas de sous-suite convergente. Ainsi K n'est pas compact.

Solution de l'exercice 2

Comme $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=1$, le dual de $\ell^4(\mathbb{N})$ et $\ell^{4/3}(\mathbb{N})$ et vice-versa. De plus l'inégalité de Hölder montre que
$$\sum_{n\ge0}|x_ny_n|\le\|(x_n)\|_{\ell^{4/3}}\|(y_n)\|_{\ell^4(\mathbb{N})}<+\infty$$
donc la série $\sum x_ny_n$ est bien absolument convergente.

On considère ensuite $T_N(y_n)=\displaystyle\sum_{n=0}^N x_ny_n$, qui est clairement linéaire et borné puisqu'avec Hölder,
$$\|T_N\|=\sup_{(y_n)\in\ell^4\,:\|(y_n)\|_{\ell^4}\le1}\le\left(\sum_{n=0}^N|x_n|^{4/3}\right)^{3/4}.$$
De plus, en utilisant le cas d'égalité de Hölder (puisque $(\tilde{x}_n)\in\ell^{4/3}$ lorsque $\tilde{x}_n=x_n$ si $n\le N$ et $\tilde{x}_n=0$ sinon), on voit qu'il existe une suite (y_n) pour laquelle
$$\|T_N\|=\left(\sum_{n=0}^N|x_n|^{4/3}\right)^{3/4}.$$
Mais, pour tout $(y_n)\in\ell^4$, $T_N(y_n)=\displaystyle\sum_{n=0}^N x_ny_n$ est borné puisque $\sum x_ny_n$ converge donc $\sup_N|T_N(y_n)|<+\infty$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus $\left(\sum_{n=0}^N|x_n|^{4/3}\right)^{3/4}=\sup_N\|T_N\|<+\infty$ ce qui implique
$$\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|^{4/3}<+\infty$$
donc $(x_n)\in\ell^{4/3}$.

Solution de l'exercice 3

(1) Comme $a > 1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc, d'après Dirichlet, sa série de Fourier converge uniformément vers f.

(2) Le discriminant est $4a^2 - 4$ donc les racines sont $a - \sqrt{a^2-1}$ et $a + \sqrt{a^2-1}$. Clairement $a + \sqrt{a^2-1} > a - \sqrt{a^2-1} > 0$ donc $b = a - \sqrt{a^2-1}$ et $(a + \sqrt{a^2-1})(a - \sqrt{a^2-1}) = 1$ donc $a + \sqrt{a^2-1} = 1/b$. Comme $1/b > b$ on a $b < 1$. Enfin, les racines de $z^2 - 2az + 1$ sont b et $1/b$ donc $z^2 - 2az + 1 = (z-b)(z-1/b)$.

(3) On écrit

$$\frac{z}{z^2 - 2az + 1} = \frac{z}{(z-b)(z-1/b)} = \frac{\alpha}{z-b} + \frac{\beta}{z-1/b}$$

donc en multipliant par $z - b$ et en faisant $z = b$ on trouve

$$\alpha = \frac{b}{b - 1/b} = \frac{b^2}{b^2-1} = -\frac{b^2}{1-b^2}$$

et en multipliant par $z - 1/b$ et en faisant $z = 1/b$ on trouve

$$\alpha = \frac{1/b}{1/b - b} = \frac{1}{1-b^2}$$

donc

$$\frac{z}{z^2 - 2az + 1} = \frac{z}{(z-b)(z-1/b)} = \frac{1}{1-b^2}\left(\frac{1}{z-1/b} - \frac{b^2}{z-b}\right)$$

(4) On écrit

$$\frac{1}{a - \cos 2\pi t} = \frac{1}{a - e^{2i\pi t}/2 - e^{-2i\pi t}/2} = \frac{2e^{2i\pi t}}{2ae^{2i\pi t} - e^{4i\pi t} - 1}.$$

En posant $z = e^{2i\pi t}$ on reconnait l'expression précédente (à un facteur -2 près)

$$\frac{1}{a - \cos 2\pi t} = \frac{-2}{1-b^2}\left(\frac{1}{e^{2i\pi t} - 1/b} - \frac{b^2}{e^{2i\pi t} - b}\right) = \frac{2}{1-b^2}\left(\frac{b^2 e^{-2i\pi t}}{1 - be^{-2i\pi t}} + \frac{b}{1 - be^{2i\pi t}}\right)$$

et en factorisant b, on trouve le résultat.

(5) On a $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ et cette série entière a pour rayon de convergence 1. En particulier, elle converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 de rayon $r < 1$. En particulier, elle converge normalement sur le cercle de centre 0 de rayon 1. Cela montre que

$$\frac{1}{1 - be^{2i\pi t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} b^k e^{2ik\pi t},$$

et

$$\frac{1}{1 - be^{-2i\pi t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} b^k e^{-2ik\pi t}$$

donc

$$\frac{be^{-2i\pi t}}{1 - be^{-2i\pi t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} b^{k+1} e^{-2i(k+1)\pi t} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} b^\ell e^{-2i\ell\pi t}$$

en posant $\ell = k+1$. Ces deux séries convergent normalement donc uniformément.

(6) En sommant ces deux séries, on trouve (0.1).

(7) Comme la série converge uniformément, on peut intervertir intégration et sommation donc

$$c_\ell(f) = \frac{2b}{b^2-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b^{|k|} \int_0^1 e^{2ik\pi t} e^{-2i\pi \ell t}\, \mathrm{d}t = \frac{2b}{b^2-1} b^{|\ell|}$$

ce qui montre que (0.1) est bien la série de Fourier de f.

Solution de l'exercice 4

(1) Clairement f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec une discontinuité aux entiers où elle est dérivable à droite et à gauche. De plus $f(0^+)+f(0^-)=0=2f(0)$. D'après le théorème de Dirichlet, $S_N(f)\to f$ simplement (et dans L^2).

(2) Pour $k=0$,

$$c_0(f)=\int_0^1 \pi-2\pi t\,\mathrm{d}t=\big[\pi(t-t^2)\big]_0^1=0$$

et, pour $k\neq 0$ avec une intégration par parties,

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \int_0^1 (\pi-2\pi t)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2ik\pi}(\pi-2\pi t)e^{-2i\pi kt}\right]_0^1+\frac{1}{ik}\int_0^1 e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2ik}(e^{-2i\pi k}+1)=\frac{1}{ik} \end{aligned}$$

puisque $e^{-2i\pi k}=(e^{-2i\pi})^k=1$. Notez que $\displaystyle\int_0^1 e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t=\left\langle 1,e^{2i\pi kt}\right\rangle=0$.

(3) On écrit

$$|P(t)|^2=P(t)\overline{P(t)}=\sum_{j,k\in\{-N,\ldots,N\}} a_j\overline{a_k}e^{2i\pi(j-k)t}$$

donc (on peut intervertir sommation et intégration car ce sont des sommes finies)

$$\begin{aligned} \int_0^1 |P(t)|^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{j,k\in\{-N,\ldots,N\}} a_j\overline{a_k}\int_0^1 e^{2i\pi(j-k)t}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{j,k\in\{-N,\ldots,N\}} a_j\overline{a_k}c_{k-j}(f)=\sum_{j\neq k\in\{-N,\ldots,N\}}\frac{a_j\overline{a_k}}{i(k-j)}\\ &= i\sum_{j\neq k\in\{-N,\ldots,N\}}\frac{a_j\overline{a_k}}{j-k} \end{aligned}$$

Le résultat en découle en prenant le module.

(4) Comme $|f(t)|\leq\pi$, on en déduit

$$\left|\sum_{j\neq k\in\{-N,\ldots,N\}}\frac{a_j\overline{a_k}}{j-k}\right|\leq\pi\sum_{\ell=-N}^{N}|a_\ell|^2.$$

(5) Soit $(H_N)_{N\geq 0}$ la suite de terme général

$$H_N=\sum_{j\neq k\in\{-N,\ldots,N\}}\frac{a_j\overline{a_k}}{j-k}.$$

Pour montrer que (H_N) est convergente, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy. Mais, pour $N>M$

$$\begin{aligned} |H_N-H_M| &= \left|\sum_{j\neq k\in\{-N,\ldots,N\}}\frac{a_j\overline{a_k}}{j-k}-\sum_{j\neq k\in\{-M,\ldots,M\}}\frac{a_j\overline{a_k}}{j-k}\right|\\ &= \left|\sum_{j\neq k\in\{-N,\ldots,N\}\setminus\{-M,\ldots,M\}}\frac{a_j\overline{a_k}}{j-k}\right|\leq\pi\sum_{M<|\ell|\leq N}|a_\ell|^2\leq\pi\sum_{|\ell|>M}|a_\ell|^2 \end{aligned}$$

en appliquant la question précédente à la suite $\tilde{a}$ définie par $\tilde{a}_k=0$ si $|k|\leq M$ et $\tilde{a}_k=a_k$ sinon.

Soit alors $\varepsilon>0$, comme $(a_k)\in\ell^2$, il existe M_ε tel que si $M\geq M_\varepsilon$, alors $\displaystyle\sum_{|\ell|>M}|a_\ell|^2\leq\varepsilon$ donc si $N,M\geq M_\varepsilon$, $|H_N-H_M|\leq\pi\varepsilon$, ce qui montre que (H_N) est bien de Cauchy.

Enfin, comme pour tout N,

$$|H_N| \leq \pi \sum_{|\ell|\leq N} |a_\ell|^2 \leq \pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |a_\ell|^2,$$

en passant à la limite, on a bien

$$\left|\sum_{j\neq k} \frac{a_j\overline{a_k}}{j-k}\right| \leq \pi \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |a_\ell|^2.$$

Solution de l'exercice 5

(1) Comme f est continue, sa primitive F donnée par $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\int_a^{a+1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(a+1) - F(a)$. En dérivant par rapport à a on obtient $f(a+1) - f(a) = 0$ par 1-périodicité de f. Ainsi $F(a+1) - F(a)$ est bien constante.

(2) La seule difficulté est de remarquer que ρ a une discontinuité en a. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\int_{a-h}^{a+h} \rho(t)g'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{a-h}^{a} \rho(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{a+h} \rho(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[\rho(t)g(t)\Big]_{a-h}^{a} - \int_{a-h}^{a} \rho'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \Big[\rho(t)g(t)\Big]_{a}^{a+h} - \int_{a}^{a+h} \rho'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2hg(a) - \int_{a-h}^{a+h} g(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$g(a) = \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} \rho(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $|\rho(t)| \leq h$, l'inégalité triangulaire donne

$$|g(a)| \leq \frac{1}{2}\int_{a-h}^{a+h} |g'(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h} |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(3) En appliquant ceci avec $h = \delta/2$ et $g(t) = |P(t)|^2 = P(t)\overline{P(t)}$ donc

$$g'(t) = P(t)\overline{P'(t)} + P'(t)\overline{P(t)} = 2\,\mathrm{Re}\left(P(t)\overline{P'(t)}\right)$$

d'où $|g'(t)| \leq 2|P(t)|\,|P'(t)|$ on en déduit que

$$|P(t_k)|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{t_k-\delta/2}^{t_k+\delta/2} |P(t)|^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\delta}\int_{t_k-\delta/2}^{t_k+\delta/2} |P(t)|\,|P'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On remarque ensuite que si $j > k$, $t_j - t_k > \delta$ donc $t_k + \delta/2 < t_j - \delta/2$ et alors $[t_k-\delta/2, t_k+\delta/2] \cap [t_j-\delta/2, t_h+\delta/2] = \emptyset$. De plus $[t_k-\delta/2, t_k+\delta/2] \subset [t_1-\delta/2, t_K+\delta/2] \subset [t_1-\delta/2, t_1+1-\delta/2]$, un intervalle de longueur 1. En sommant on a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} |P(t_k)|^2 &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\int_{t_k-\delta/2}^{t_k+\delta/2} |P(t)|^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{K}\int_{t_k-\delta/2}^{t_k+\delta/2} |P(t)|\,|P'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\bigcup_{k=1}^{K}[t_k-\delta/2,t_k+\delta/2]} |P(t)|^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\delta}\int_{\bigcup_{k=1}^{K}[t_k-\delta/2,t_k+\delta/2]} |P(t)|\,|P'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{[t_1-\delta/2,t_1+1-\delta/2]} |P(t)|^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\delta}\int_{[t_1-\delta/2,t_1+1-\delta/2]} |P(t)|\,|P'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 |P(t)|^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\delta}\int_0^1 |P(t)|\,|P'(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

avec la première question.

(4) Avec Parseval, $\int_0^1 |P(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2$. Par ailleurs, $P'(t) = \sum_{k=-N}^{N} 2i\pi k a_k e^{2i\pi kt}$ donc avec Parseval

$$\int_0^1 |P'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{k=-N}^{N} 4\pi^2 k^2 |a_k|^2 \leq 4\pi^2 N^2 \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2.$$

(5) De Cauchy-Schwarz, on déduit que

$$\int_0^1 |P(t)|\,|P'(t)| \,\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 |P(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |P'(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leq 2\pi N \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2$$

avec la question précédente.

(6) Il suffit de combiner les trois questions précédentes pour obtenir (0.2)

(7) Si $\tilde{N}$ est paire, on écrit $\tilde{N} = 2N$ et, en posant $k = M + N + j$ et $a_M = 0$

$$P(t) = \sum_{k=M}^{M+2N} a_k e^{2i\pi kt} = e^{2i\pi(M+N)t} \sum_{j=-N}^{N} a_{k+M+N} e^{2i\pi jt} := e^{2i\pi(M+N)t} \tilde{P}.$$

Le facteur $e^{2i\pi(M+N)t}$ disparait lorsqu'on ne considère que le module de P : $|P| = |\tilde{P}|$ et on applique (0.2) à $\tilde{P}$ ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{K} |P(t_k)|^2 \leq \left(\frac{1}{\delta} + 2\pi N\right) \sum_{k=-N}^{N} |a_{k+M+N}|^2 = \left(\frac{1}{\delta} + \pi\tilde{N}\right) \sum_{k=M+1}^{M+\tilde{N}} |a_k|^2.$$

Si $\tilde{N}$ est impaire, on écrit $\tilde{N} = 2N + 1$ et, en posant $k = M + 1 + N + j$

$$P(t) = \sum_{k=M+1}^{M+2N+1} a_k e^{2i\pi kt} = e^{2i\pi(M+N)t} \sum_{j=-N}^{N} a_{k+M+1+N} e^{2i\pi jt} := e^{2i\pi(M+N+1)t} \tilde{P}.$$

On applique à nouveau (0.2) à $\tilde{P}$ ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{K} |P(t_k)|^2 \leq \left(\frac{1}{\delta} + 2\pi N\right) \sum_{k=-N}^{N} |a_{k+M+1+N}|^2 \leq \left(\frac{1}{\delta} + \pi\tilde{N}\right) \sum_{k=M+1}^{M+\tilde{N}} |a_k|^2.$$